

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

С. А. Алдашев

Актюбинский государственный университет, Актюбе
E-mail: aldash51@mail.ru

В работе показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа.

Ключевые слова: корректность, задача, функция, уравнение.

S. A. Aldashev

The Correctness of the Dirichlet Problem in the Cylindric Domain for Equation Laplace

This paper shows is uniquely solvable solutions the Dirichlet problem in the cylindric domain for equation Laplace.

Key words: correctness, problem, function, equation.

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного изучены в работах [1, 2].

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений [3].

В работах [4, 5] для эллиптических уравнений довольно подробно изучены классические и обобщенные решения задачи Дирихле в ограниченной области.

В данной статье по методу, предложенному в работах [6, 7], получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа.

Пусть Ω — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

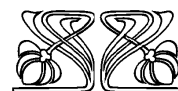
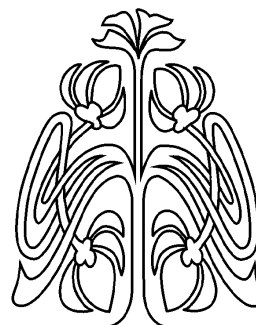
Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega$ области Ω , обозначим через Γ_α , S_α , S_0 соответственно.

В области Ω рассмотрим многомерное уравнение Лапласа:

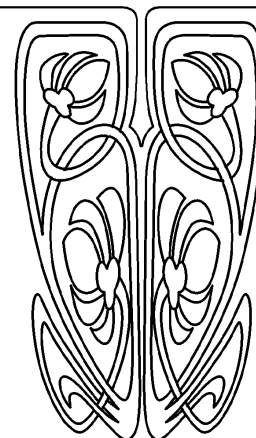
$$Lu \equiv \Delta_x u + u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m - 1$.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Рассмотрим следующую локальную краевую задачу.

Задача D. Найти решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{S_\alpha} = \varphi(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), \quad u|_{S_0} = \tau(r, \theta). \quad (2)$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$, – пространства Соболева.

Имеет место [8]

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Через $\overline{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\overline{\tau}_n^k(r)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения в ряд (3) функций $\varphi(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\tau(r, \theta)$, $\rho(\theta)$ соответственно.

Теорема. Если $\varphi(r, \theta) \in W_2^l(S_\alpha)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\tau(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, $l > 3m/2$, то задача D имеет единственное решение.

Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$u_{rrr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} = 0, \quad (4)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [8], что спектр оператора σ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи D принадлежит классу $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (5)$$

где $\overline{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [7], будем иметь

$$\overline{u}_{nr}^k + \frac{m-1}{r} \overline{u}_{nr}^k + \overline{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \overline{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

при этом краевое условие (2) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\overline{u}_n^k r, \alpha = \overline{\varphi}_n^k(r), \quad \overline{u}_n^k 1, t = \psi_n^k(t), \quad \overline{u}_n^k r, 0 = \overline{\tau}_n^k r, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

В (6), (7), произведя замену переменных $\overline{v}_n^k(r, t) = \overline{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$, получим

$$v_{nr}^k + \frac{m-1}{r} \overline{v}_{nr}^k - \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} \overline{v}_n^k + \overline{v}_{ntt}^k = \overline{f}_n^k(r, t), \quad (8)$$

$$\overline{v}_n^k r, \alpha = \overline{\varphi}_n^k(r), \quad \overline{v}_n^k 1, t = 0, \quad \overline{v}_n^k r, 0 = \overline{\tau}_n^k r, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$



$$\bar{f}_n^k(r, t) = -\psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_n^k, \quad \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_n^k(\alpha), \quad \tau_n^k(r) = \bar{\tau}_n^k(r) - \psi_n^k(0).$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t)$, задачу (8), (9) приведем к следующей задаче:

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = f_n^k(r, t), \quad (10)$$

$$v_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad v_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad (11)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad f_n^k(r, t) = r^{(m-1)/2} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \bar{\varphi}_n^k(r) = r^{(m-1)/2} \varphi_n^k(r),$$

$$\bar{\tau}_n^k(r) = r^{(m-1)/2} \tau_n^k(r).$$

Решение задачи (10), (11) ищем в виде

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t), \quad (12)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = f_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad v_{1n}^k(r, 0) = 0, \quad (14)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (15)$$

$$v_{2n}^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad v_{2n}^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r). \quad (16)$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (17)$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r), \quad \bar{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r), \quad \bar{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \quad (18)$$

Подставляя (17) в (13), (14) с учетом (18), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (19)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (20)$$

$$T_{s tt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (21)$$

$$T_s(\alpha) = 0, \quad T_s(0) = 0. \quad (22)$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является [9]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (23)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_{\nu}(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (21) представимо в виде [9]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi - \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi,$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (22), будем иметь

$$\mu_{s,n} T_{s,n}(t) = \left[\int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi - (\operatorname{cth} \mu_{s,n} \alpha) \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi \right] \operatorname{sh} \mu_{s,n} t +$$



$$+(\operatorname{ch} \mu_{s,n} t) \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi - (\operatorname{sh} \mu_{s,n} t) \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (18), получим

$$\begin{aligned} r^{-1/2} f_n^k(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), & r^{-1/2} \tilde{\varphi}_n^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \\ r^{-1/2} \tilde{\tau}_n^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), & 0 < r < 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Ряды (25) — разложение в ряды Фурье–Бесселя [10], если

$$\begin{aligned} a_{ns}^k(t) &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \\ b_{ns}^k &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \\ e_{ns}^k &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\tau}_n^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (26)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$, — положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23), (24) получим решение задачи (13), (14) в виде

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (27)$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (26).

Таким образом, из (8) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left[\psi_n^k(t) + r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t) \right] Y_{n,m}^k(\theta),$$

где $v_n^k(r, t)$ находятся из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16) с учетом (18), будем иметь

$$T_{stt} - \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad (28)$$

$$T_s(\alpha) = b_{ns}^k, \quad T_s(0) = e_{ns}^k. \quad (29)$$

Общее решение уравнения (28) имеет вид

$$T_{s,n}(t) = c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t. \quad (30)$$

Применив к (30) условие (29), получим

$$c'_{1s} = e_{ns}^k, \quad c'_{2s} = -e_{ns}^k \operatorname{cth} \mu_{s,n} \alpha + \frac{e_{ns}^k}{\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha}. \quad (31)$$

Из (23), (30), (31) найдем решение задачи (15), (16)

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (32)$$

где b_{ns}^k , e_{ns}^k находятся из (26).



Таким образом, единственным решением задачи D является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{(1-m)/2} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] Y_{n,m}^k(\theta) \right\}, \quad (33)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (27) и (32).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя [10]:

1. Если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, \dots$ — положительные нули функций $J_{\nu}(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < \dots, \quad \nu > -1.$$

2. Пусть $\mu_{\nu}, \mu'_{\nu}, \mu''_{\nu}$ являются наименьшими положительными нулями функций $J_{\nu}(z), J'_{\nu}(z), J''_{\nu}(z)$ соответственно.

Тогда

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_{\nu} < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \quad \sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_{\nu} < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_{\nu} < \sqrt{(\nu^2-1)}, \quad \nu > 1.$$

Учитывая формулы [10, 11]

$$J_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \quad 2J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z),$$

применяя признак Даламбера, доказывается, что ряды (27), (32) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее, используя оценки [8]

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\varphi(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\tau(r, \theta)$, показывается, что полученное решение (33) принадлежит искомому классу $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Теорема доказана.

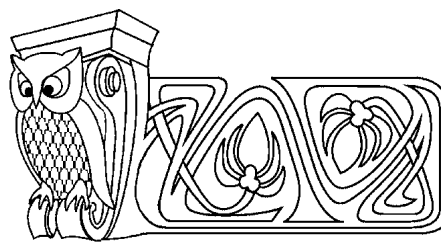
Библиографический список

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М. : Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. : Наука, 1966. 203 с.
3. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с.
4. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 576 с.
5. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 407 с.
6. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы : Гылым, 1994. 170 с.
7. Алдашев С. А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64–68.
8. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 295 с.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 724 с.



УДК 517.956

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА



А. Д. Баев, С. С. Бунеев*

Воронежский государственный университет

E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

*Елецкий государственный университет

E-mail: limes88@mail.ru

Доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на одной из границ полосы в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства С. Л. Соболева.

The Theorem on Existence and Uniqueness of the Solution of One Boundary Value Problem in Strip for Degenerate Elliptic Equations of Higher Order

A. D. Baev, S. S. Buneev

Theorem on the existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem in the strip for one degenerate elliptic equations of higher order, which degenerate on one of boundary of the strip in the third-order equation by one variable, is proved.

Key words: a priori estimate, degenerate elliptic equation, weight of the space S. L. Sobolev.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интерес к вырождающимся уравнениям возрос в связи с использованием таких уравнений для моделирования различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. В работе В. П. Глушко [3] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной выпуклой области была исследована в работе В. А. Рукавишникова и А. Г. Ереклинцева [4]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [5, 6]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [7, 8], С. З. Левендорским [9], С. А. Искоковым [10].

В работах А. Д. Баева [11–13] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В настоящей работе доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе $t = 0$ в уравнение третьего порядка по одной из переменных.



ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t), \quad (1)$$

где

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) + b\partial_t^3, \quad L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j.$$

Здесь $b, a_{\tau j}$ — комплексные коэффициенты, причем $\text{Im } \bar{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} \dots \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы задается условие вида

$$\sum_{|\tau| \leq m^*} b_\tau D_x^\tau v(x, t)|_{t=0} = G(x), \quad (2)$$

где b_τ — комплексные коэффициенты.

На границе $t = d$ задаются условия вида

$$v(x, t)|_{t=d} = \partial_t v(x, t)|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v(x, t)|_{t=d} = 0. \quad (3)$$

Предположим выполнение следующих условий.

Условие 1. При всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$ справедлива оценка $\text{Re } \bar{b}L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ, η .

Условие 2. Для некоторого $s \geq \max\{2m, m^* + \frac{m}{3}\}$ функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. При всех $\xi \in R^{n-1}$ справедливо условие $\sum_{|\tau| \leq m^*} b_\tau \xi^\tau \neq 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$. В [3] показано, что для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1} , которое можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)] \Big|_{\tau=\varphi(t)},$$

где $F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. В этой работе для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s, \alpha, \frac{2m}{3}}(R_d^n)$ ($s \geq 0$ — действительное число, m — натуральное число) состоит из тех функций $v(x, t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s, \alpha, \frac{2m}{3}} = \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{3s}{2m} \rfloor} \left\| F_\alpha^{-1} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{1/2(s - \frac{2m}{3}j)} F_{x \rightarrow \xi} F_\alpha[\partial_t^j v]] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \right\}^{1/2},$$

где $\lfloor \frac{3s}{2m} \rfloor$ — целая часть числа $\frac{3s}{2m}$. Здесь $F_{x \rightarrow \xi}$ ($F_{\xi \rightarrow x}^{-1}$) — прямое (обратное) преобразование Фурье.

Если s — целое неотрицательное число, то эта норма эквивалентна норме

$$\|v\|_{s, \alpha, \frac{2m}{3}} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}p \leq s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^p v(x, t) \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева–Слободецкого.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $s \geq \max\{2m, m^* + \frac{m}{3}\}$ — целое число, $m \geq 3$ и выполнены условия 1–3. Пусть $F(x, t) \in H_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{3}}(R_d^n)$, $G(x) \in H_{s-m^*-\frac{m}{3}}(R^{n-1})$. Тогда существует единственное решение $v(x, t)$ задачи (1)–(3), принадлежащее пространству $H_{s, \alpha, \frac{2m}{3}}(R_d^n)$.



СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u(\xi, t) = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u(\xi, t) + \partial_t^3 u(\xi, t) = f(\xi, t), \tag{4}$$

$$\sum_{|\tau| \leq m^*} b_\tau \xi^\tau u(\xi, t)|_{t=0} = g(\xi), \tag{5}$$

$$u(\xi, t)|_{t=d} = \partial_t u(\xi, t)|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} u(\xi, t)|_{t=d} = 0. \tag{6}$$

Эта задача получается из задачи (1)–(3), если применить преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi}$. Аналогично определенным выше пространствам введем пространства $\tilde{H}_{s,\alpha, \frac{2m}{3}}(0, d)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит по t пространству $\tilde{H}_{s,\alpha, \frac{2m}{3}}(0, d)$ ($s \geq 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha, \frac{2m}{3}, |\xi|} = \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{3}j \leq s} \left\| F_\alpha^{-1} \left[\left(1 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^{1/2k} F_\alpha \left[\partial_t^j u \right] \right] \right\|_{L_2(0;d)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $s \geq \max\{2m, m^* + \frac{m}{3}\}$ — целое число, $m \geq 3$ — целое число. Пусть $f(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha, \frac{2m}{3}}(0; d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ и выполнены условия 1–3. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$ существует единственное решение задачи (4)–(6), принадлежащее пространству $\tilde{H}_{s,\alpha, \frac{2m}{3}}(0; d)$.

При доказательстве теоремы 2 существенно используется априорная оценка решений задачи (4)–(6). Сформулируем эту оценку в виде теоремы, которую приведем здесь без доказательства.

Теорема 3 Пусть $s \geq \max\{2m, m^* + \frac{m}{3}\}$ — целое число, $m \geq 3$ — целое число. Пусть $f(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha, \frac{2m}{3}}(0, d)$ и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $u(\xi, t)$ задачи (4)–(6), принадлежащего при всех $\xi \in R^{n-1}$ пространству $\tilde{H}_{s,\alpha, \frac{2m}{3}}(0; d)$, справедлива априорная оценка:

$$\|u\|_{s,\alpha, \frac{2m}{3}, |\xi|}^2 \leq c \left(\|f\|_{s-2m,\alpha, \frac{2m}{3}, |\xi|}^2 + \left(1 + |\xi|^2\right)^{s-m^*-\frac{m}{3}} |g(\xi)|^2 \right).$$

Для доказательства теоремы 2 вначале сведём задачу (4)–(6) к нелокальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

Рассмотрим функцию $\gamma(t) = (\alpha(t))^{\frac{2m}{2m-3}}$, тогда

$$D_{\alpha,t}^k u = \left(\frac{1}{i}\right)^k \sum_{j=0}^k \psi_{kj}(t) \gamma^{\frac{3(2m-j)}{2m}}(t) \gamma^{j-3}(t) \partial_t^j u, \tag{7}$$

где функции $\psi_{kj}(t)$ ($0 \leq j \leq k$) находятся по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} \psi_{k+1,k+1}(t) = \psi_{k,k}(t), & \psi_{0,0}(t) = 1, \\ \psi_{j+1,0}(t) = \alpha(t) \partial_t \psi_{j,0}(t) + \frac{1}{2} \alpha'(t) \psi_{j,0}(t), \\ \psi_{j+1,\chi}(t) = \alpha(t) \partial_t \psi_{j,\chi}(t) + \psi_{j,\chi-1}(t) + \left(\chi + \frac{1}{2}\right) \alpha'(t) \psi_{j,\chi}(t) & (1 \leq \chi \leq j-1), \\ \psi_{j+1,j}(t) = \psi_{j,j-1}(t) + \left(j + \frac{1}{2}\right) \alpha'(t). \end{cases} \tag{8}$$

Используя формулу (7), запишем уравнение (4) в виде

$$\sum_{k=4}^{2m} b_{2m-k}(\xi, t) \gamma^{k-3} \partial_t^k u + \sum_{k=0}^3 b_{2m-k}(\xi, t) \partial_t^k u = f(\xi, t), \tag{9}$$

где $b_0(\xi, t) \equiv 1$, а функции $b_{2m-k}(\xi, t)$, $k = 0, 1, \dots, 2m-1$ определяются по формулам

$$b_{2m-k}(\xi, t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^\tau \psi_{j,k}(t) \gamma^{\frac{(2m-k)3}{2m}}(t), \tag{10}$$

где $4 \leq k \leq 2m-1$,



$$b_{2m-3}(\xi, t) = \sum_{j=3}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^{\tau} \psi_{j,3}(t) \gamma^{\frac{3(2m-3)}{2m}}(t) + \frac{(-1)^m b}{a_{02m}}, \quad (11)$$

$$b_{2m-k}(\xi, t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^{\tau} \psi_{j,k}(t) \gamma^{\frac{j(2m-3)}{2m}}(t), \quad (12)$$

где $k = 1, 2$;

$$b_{2m}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^{\tau} \psi_{j,0}(t). \quad (13)$$

Обозначим

$$\begin{cases} w_{2m-k}(\xi, t) = \partial_t^k u(\xi, t), & k = 0, 1, 2, 3, \\ w_{2m-k}(\xi, t) = \gamma^{k-3}(t) \partial_t^k u(\xi, t), & k = 4, \dots, 2m. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\gamma(t) \partial_t w_{2m-k}(\xi, t) - w_{2m-(k+1)}(\xi, t) - (k-3) \gamma'(t) w_{2m-k}(\xi, t) = 0, \quad (15)$$

где $k = 4, \dots, 2m-2$;

$$\begin{cases} \gamma(t) \partial_t w_1(\xi, t) = (2m-4) \gamma'(t) w_1(\xi, t) + \partial_t^{2m} u(\xi, t), \\ \gamma(t) \partial_t w_{2m-3}(\xi, t) - w_{2m-4}(\xi, t) = 0, \\ \partial_t w_{2m-k}(\xi, t) - w_{2m-k-1}(\xi, t) = 0, & k = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (16)$$

Используя эти формулы, можно записать уравнение (9) в виде

$$\begin{cases} \gamma(t) \frac{d\bar{u}_1}{dt} + B_{11}(\xi, t) \bar{u}_1 + B_{12}(\xi, t) \bar{u}_2 = \bar{f}(\xi, t), \\ \frac{d\bar{u}_2}{dt} + B_{22} \bar{u}_2 + B_{12} \bar{u}_1 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $\bar{u}_1 = (w_1(\xi, t), w_2(\xi, t), \dots, w_{2m-3}(\xi, t))^T$, $\bar{u}_2 = (w_{2m-2}, \dots, w_{2m})^T$, знак T означает транспонирование; $\bar{f}(\xi, t) = f(\xi, t) \bar{e}_1$, $\bar{e}_1 = \{\delta_{1j}\}_{j=1}^{2m-3}$, δ_{ij} — символ Кронекера; $B_{11}(\xi, t) = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{2m-3}$ — матрица размерности $(2m-3) \times (2m-3)$, где

$$\begin{cases} c_{1,1}(\xi, t) = b_1(\xi, t) - (2m-4) \gamma'(t); & c_{1,j}(\xi, t) = b_j(\xi, t), \quad j = 2, 3, \dots, 2m-3; \\ c_{j-1,j} = -1, \quad j = 2, 3, \dots, 2m-3; & c_{j,j} = -(2m-3-j) \gamma'(t), \quad j = 2, 3, \dots, 2m-3. \end{cases}$$

Остальные элементы матрицы $B_{11}(\xi, t)$ равны нулю. $B_{12}(\xi, t)$ — матрица размера $(2m-3) \times 3$, у которой все элементы, кроме первой строки, равны нулю, а элементы первой строки имеют вид $c_{1,j} = b_{2m-3+j}(\xi, t)$, $j = 1, 2, 3$. $B_{22}(\xi, t)$ — матрица размера 3×3 , в которой $c_{j-1,j} = -1$, $j = 2, 3$, а остальные элементы равны нулю, $B_{21}(\xi, t)$ — матрица размера $3 \times (2m-3)$, в которой $c_{1,2m-3} = 1$, а все остальные элементы равны нулю.

Рассмотрим наряду с системой (17) систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \gamma(t) \frac{d\bar{u}_1}{dt} + (B_{11}(\xi, 0) + \gamma'(t)I) \bar{u}_1 + B_{12}^0(\xi, 0) \bar{u}_2 = \bar{f}(\xi, t), \\ \frac{d\bar{u}_2}{dt} + B_{22} \bar{u}_2 + B_{21} \bar{u}_1 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь матрица $B_{12}^0(\xi, 0)$ отличается от матрицы $B_{12}(\xi, 0)$ лишь тем, что элемент $b_{2m}(\xi, 0)$ заменен на элемент $b_{2m}^0(\xi, 0)$, где $b_{2m}^0(\xi, 0)$ — главная часть многочлена $b_{2m}(\xi, 0)$.

Как известно [14], нахождение «гладких» вплоть до $t = 0$ решений системы (18) связано с расположением спектра матрицы $B_{11}(\xi, 0)$. Из условий на функцию $\alpha(t)$ и определения функции $\gamma(t)$ получим, что $\gamma(0) = \gamma'(0) = 0$. Отсюда и из (10)–(13) получим

$$b_{2m-k}(\xi, 0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2m-1, \quad k \neq 3; \quad b_{2m-3}(\xi, 0) = \frac{(-1)^m b}{a_{02m}}.$$



Найдём собственные числа матрицы $B_{11}(\xi, 0)$. Из вида матрицы $B_{11}(\xi, 0)$ получим, что $\det(B_{11}(\xi, 0) - \lambda I) = (-\lambda)^{2m-3} + b_{2m-3}(\xi, 0) = 0$. Отсюда $\lambda^{2m-3} = (-1)^m b/a_{02m}$. Значит, все собственные числа матрицы $B_{11}(\xi, 0)$ различны, причём нет собственных чисел, лежащих на мнимой оси. При этом $(m - 2)$ собственных чисел лежат в левой полуплоскости и $(m - 1)$ собственных чисел лежат в правой полуплоскости. То есть размерность инвариантного пространства $E_-(E_+)$ оператора $B_{11}(\xi, 0)$, соответствующего собственным числам λ_k , лежащим в левой (правой) полуплоскости, равна $m - 2$ ($m - 1$). Обозначим через $P_-(P_+)$ проекторы на $E_-(E_+)$. Будем обозначать через P_k ($k = 1, 2, \dots, 2m$) операторы, действующие по формулам

$$P_k \bar{u}_1 = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2m - 3; \quad P_k \bar{u}_2 = w_k, \quad k = 2m - 2, 2m - 1, 2m.$$

Проектируя первое уравнение системы (18) на E_- и E_+ , получим

$$\gamma(t) \frac{d\bar{u}_1^-}{dt} + (B_{11}(\xi, 0) + \gamma'(t)I)\bar{u}_1^- = (f(\xi, t) - b_{2m}^0(\xi, 0)u)P_- \bar{e}_1, \quad (19)$$

$$\gamma(t) \frac{d\bar{u}_1^+}{dt} + (B_{11}(\xi, 0) + \gamma'(t)I)\bar{u}_1^+ = (f(\xi, t) - b_{2m}^0(\xi, 0)u)P_+ \bar{e}_1, \quad (20)$$

где $u(\xi, t) = w_{2m}(\xi, t)$, $\bar{u}_1^- = P_- \bar{u}_1$, $\bar{u}_1^+ = P_+ \bar{u}_1$.

Рассмотрим однородное уравнение:

$$\gamma(t) \frac{d\bar{u}_1^-}{dt} + (B_{11}(\xi, 0) + \gamma'(t)I)\bar{u}_1^- = 0. \quad (21)$$

Можно показать [14], что размерность пространства решений уравнения (21), рассматриваемого как уравнение в $E_- \subset C^{2m-3}$, равна $(m - 2)$.

Рассмотрим граничные условия (6). Их можно записать в виде

$$P_{2m} \bar{u}_2|_{t=d} = P_{2m-1} \bar{u}_2|_{t=d} = P_{2m-2} \bar{u}_2|_{t=d} = 0, \quad (22)$$

$$P_{2m-3} \bar{u}_1|_{t=d} = P_{2m-4} \bar{u}_1|_{t=d} = \dots = P_{m+1} \bar{u}_1|_{t=d} = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь граничное условие (5). Используя обозначения (14) и равенства (22), запишем условие (5) в виде

$$\sum_{|\tau| \leq m^*} b_\tau \xi^\tau (-1) \int_0^t \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 \Big|_{t=d} = g(\xi). \quad (24)$$

Таким образом, условия (5)–(6) можно записать в виде условий при $t = d$. А именно в виде условий (23), (24).

То есть задача (4)–(6) сведена к задаче Коши (23), (24) для системы уравнений (17).

Прежде чем доказывать существование и единственность решения этой задачи, покажем существование и единственность решения задачи (18), (23), (24). Если обратить операторы, стоящие в левых частях уравнений (19) и (20), то получим

$$\begin{cases} \bar{u}_1^-(\xi, t) = U_1^-(t, d)q^- - \int_t^d U_1^-(t, s)P_- \bar{e}_1(f(s) - b_{2m}^0(\xi, 0)u(s)) \frac{ds}{\gamma(s)}, \\ \bar{u}_1^+(\xi, t) = \int_0^t U_1^+(t, s)P_+ \bar{e}_1(f(s) - b_{2m}^0(\xi, 0)u(s)) \frac{ds}{\gamma(s)}, \end{cases} \quad (25)$$

где $U_1^\pm(t, s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(t)} \exp\left(P_\pm B_{11}(\xi, 0) \int_t^s \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)$, q^- — произвольный вектор из E_- .

Так как $\bar{u}_1(\xi, t) = \bar{u}_1^-(\xi, t) + \bar{u}_1^+(\xi, t)$, то из (25) получим равенство

$$\bar{u}_1(\xi, t) = U_1^-(t, d)q^- - \int_0^d \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau + b_{2m}^0(\xi, 0) \int_0^d \Phi(t, \tau)u(\tau)d\tau, \quad (26)$$



где

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} -U_1^+(t, \tau)P_+\bar{e}_1\frac{1}{\gamma(\tau)} & \text{при } 0 < \tau < t, \\ U_1^-(t, \tau)P_-\bar{e}_1\frac{1}{\gamma(\tau)} & \text{при } t < \tau < d. \end{cases} \quad (27)$$

Учитывая, что $u(\xi, t)|_{t=d} = \partial_t u(\xi, t)|_{t=d} = \partial_t^2 u(\xi, t)|_{t=d} = 0$, получим

$$u(\xi, t) = (-1) \int_t^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d \partial_t^3(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 = - \int_t^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2. \quad (28)$$

Применяя (28) в (26), получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\xi, t) &= U_1^-(t, d)q^- - \int_0^d \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau - \\ &- b_{2m}^0(\xi, 0) \int_0^d \Phi(t, \tau) \int_{\tau}^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

При этом функция $\bar{u}_1(\xi, t)$ должна удовлетворять условиям (23), (24). Из (29) получим равенства

$$\begin{aligned} P_\nu \bar{u}_1 &= w_\nu = P_\nu U_1^-(t, d)q^- - \int_0^d P_\nu \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau - \\ &- b_{2m}^0(\xi, 0) \int_0^d P_\nu \Phi(t, \tau) \int_{\tau}^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя в (30) $t = d$, получим

$$\begin{aligned} w_\nu|_{t=d} &= P_\nu U_1^-(d, d)q^- - \int_0^d P_\nu \Phi(d, \tau)f(\tau)d\tau - \\ &- b_{2m}^0(\xi, 0) \int_0^d P_\nu \Phi(d, \tau) \int_{\tau}^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что $U_1(d, d) = 1$ и $w_\nu|_{t=d} = 0$ при $m+1 \leq \nu \leq 2m-3$. Отсюда при $m+1 \leq \nu \leq 2m-3$ получим равенства

$$P_\nu q^- = d_\nu + b_{2m}^0(\xi, 0)M_\nu w_{2m-3}, \quad \nu = m+1, m+2, \dots, 2m-3, \quad (31)$$

где $d_\nu = \int_0^d P_\nu \Phi(d, \tau)f(\tau)d\tau$, $M_\nu w_{2m-3} = \int_0^d \int_{\tau}^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d P_\nu \Phi(d, \tau)w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau$.

Рассмотрим теперь условия (24). Эти условия можно записать в виде

$$\theta(\xi) \int_0^t \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2|_{t=d} = g(\xi), \quad \text{где } \theta(\xi) = - \sum_{|\tau| \leq m^*} b_\tau \xi^\tau. \quad (32)$$

Подставим функцию w_{2m-3} , определённую равенством (30) при $\nu = 2m-3$, в равенство (32), получим

$$\theta(\xi) \int_0^d \int_{\tau_4}^d \int_{\tau_3}^d P_{2m-3} U_1^-(\tau_0, d)q^- d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 = d_m + b_{2m}^0(\xi, 0)M_m w_{2m-3}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} d_m &= g(\xi) + \theta(\xi) \int_0^d \int_{\tau_4}^d \int_{\tau_3}^d \int_0^d P_{2m-3} \Phi(\tau_0, \tau) f(\tau) d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 d\tau. \\ M_m w_{2m-3} &= \theta(\xi) \int_0^d \int_{\tau_4}^d \int_{\tau_3}^d \left[\int_0^d P_{2m-3} \Phi(\tau_0, \tau) \int_{\tau}^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, s_0) ds_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau \right] d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения вектора q^- — получим $(m-2)$ уравнений (уравнения (31) при $\nu = m+1, m+2, \dots, 2m-3$ и уравнение (33)). Покажем, что эта система имеет единственное решение при достаточно малых $d > 0$.



Пусть $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_{m-2}$ – собственные векторы матрицы $B_{11}(\xi, 0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой полуплоскости. Так как $q^- \in E_-$, и векторы $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{m-2}$ образуют базис в E_- , то существуют числа $\mu_p, p = 1, 2, \dots, m-2$, что

$$q^- = \mu_1 \bar{r}_1 + \mu_2 \bar{r}_2 + \dots + \mu_{m-2} \bar{r}_{m-2}. \quad (34)$$

Из условия $B_{11}(\xi, 0)\bar{r}_p = \lambda_p \bar{r}_p$ и вида матрицы $B_{11}(\xi, 0)$ получаем

$$r_{p,k} = (-\lambda_p)^{2m-3-k} r_{p,2m-3}, \quad p = 1, 2, \dots, 2m-3. \quad (35)$$

Здесь $r_{p,k}$ – k -я координата вектора \bar{r}_p .

Из (35) следует, что так как $\bar{r}_p \neq \bar{0}$, то $r_{p,2m-3} \neq 0$. Из (34) и (35) получим

$$P_\nu q^- = \sum_{p=1}^{m-2} \mu_p P_\nu \bar{r}_p = \sum_{p=1}^{m-2} \mu_p r_{p\nu} = d_\nu + b_{2m}^0(\xi, 0) M_\nu w_{2m-3}, \quad \nu = m+1, m+2, \dots, 2m-3.$$

Используя здесь равенство (35), получим

$$\sum_{p=1}^{m-2} \mu_p r_{p,2m-3} (\lambda_p)^{2m-3-\nu} = (-1)^{2m-3-\nu} (d_\nu + b_{2m}^0(\xi, 0) M_\nu w_{2m-3}), \quad \nu = m+1, m+2, \dots, 2m-3. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь условие (33). Так как \bar{r}_p – собственный вектор матрицы $B_{11}(\xi, 0)$, отвечающий собственному значению λ_p , то

$$U_1^-(\tau, d)\bar{r}_p = \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau)} \exp\left(\lambda_p \int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \bar{r}_p.$$

Отсюда и из (33) получим равенство

$$\sum_{p=1}^{m-2} \mu_p \theta(\xi) \int_0^d \int_{\tau_4}^d \int_{\tau_3}^d \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau_0)} \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_0}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) r_{p,2m-3} d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 = d_m + b_{2m}^0(\xi, 0) M_m w_{2m-3}. \quad (37)$$

Заметим, что

$$\int_{\tau_1}^d \frac{1}{\gamma(\tau_0)} \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_0}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) d\tau_0 = -\frac{1}{\lambda_p} \left(1 - \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_1}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right). \quad (38)$$

Используя (38), получим из (37) равенство

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{m-2} \theta(\xi) \gamma(d) \mu_p \frac{d^2}{2} \frac{1}{\lambda_p} r_{p,2m-3} - \sum_{p=1}^{m-2} \theta(\xi) \gamma(d) \mu_p \frac{1}{\lambda_p} \int_0^d \int_{\tau_4}^d \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_3}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) r_{p,2m-3} d\tau_3 d\tau_4 = \\ = d_m + b_{2m}^0(\xi, 0) M_m w_{2m-3}. \end{aligned}$$

Запишем это равенство в виде

$$\theta(\xi) \gamma(d) \frac{d^2}{2} \sum_{p=1}^{m-2} \frac{1}{\lambda_p} \mu_p r_{p,2m-3} - \theta(\xi) \gamma(d) \sum_{p=1}^{m-2} J_p \frac{1}{\lambda_p} \mu_p r_{p,2m-3} = d_m + b_{2m}^0(\xi, 0) M_m w_{2m-3}, \quad (39)$$

где $J_p = \int_0^d \int_\tau^d \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_3}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) d\tau_3 d\tau$.

Заметим, что так как $\text{Re } \lambda_p < 0, p = 1, 2, \dots, m-2$, то $J_p = o(d^N)$ при $d \rightarrow +0$ для любого $N > 0$.

Таким образом, из (36) и (39) получим систему уравнений для нахождения чисел $(\mu_p r_{p,2m-3})$. Определитель этой системы имеет вид

$$D = \theta(\xi) \frac{\gamma(d) d^2}{2} [D_1 + o(d^N)], \quad N > 0,$$



где D_1 — определитель матрицы размера $(m-2) \times (m-2)$, элементы которой имеют вид $\beta_{jp} = \lambda_p^{j-2}$, $j = 1, 2, \dots, m-2$, $p = 1, 2, \dots, m-2$.

Так как собственные числа λ_p , $p = 1, \dots, m-2$, различны, то D_1 — определитель Вронского и, очевидно, отличен от нуля.

Таким образом, при достаточно малом $d > 0$ получим, что $D \neq 0$ при выполнении условия 3. Следовательно, система (36), (39) при достаточно малом $d > 0$ имеет единственное решение при любых правых частях. Решение этой системы можно записать в виде

$$\mu_p = \sum_{\nu=m}^{2m-3} \beta_{p,\nu} (d_\nu + b_{2m}^0(\xi, 0) M_\nu w_{2m-3}) \frac{1}{r_{p,2m-3}}, \quad p = 1, 2, \dots, m-2, \quad (40)$$

где $\beta_{p,\nu}$ — некоторые коэффициенты.

Используя (40) и (34) в (30) при $\nu = 2m-3$, получим

$$w_{2m-3}(\xi, t) = \tilde{F}(\xi, t) + b_{2m}^0(\xi, 0) \tilde{M} w_{2m-3}(\xi, t), \quad (41)$$

где

$$\tilde{F}(\xi, t) = \sum_{\nu=m}^{2m-3} \sum_{p=1}^{m-2} \beta_{p,\nu} \frac{\gamma(d)}{\gamma(t)} \exp\left(\lambda_p \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) - \int_0^d P_{2m-3} \Phi(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M} w_{2m-3} &= \sum_{\nu=m}^{2m-3} \sum_{p=1}^{m-2} \beta_{p,\nu} M_\nu w_{2m-3} \frac{\gamma(d)}{\gamma(t)} \exp\left(\lambda_p \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) - \\ &- \int_0^d P_{2m-3} \Phi(t, \tau) \int_\tau^d \int_{\tau_2}^d \int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 d\tau. \end{aligned} \quad (43)$$

Докажем вначале разрешимость уравнения (41) при дополнительных условиях:

$$\begin{cases} \max_{1 \leq j \leq m-2} \operatorname{Re} \lambda_j + \max_{0 \leq t \leq d} |\gamma'(t)| \leq \delta_- < 0 \\ \min_{m-1 \leq j \leq 2m-3} \operatorname{Re} \lambda_j - \max_{0 \leq t \leq d} |\gamma'(t)| \geq \delta_+ > 0. \end{cases} \quad (44)$$

В этом случае доказательство существования решения уравнения (41) основано на следующих оценках:

$$\left\| \int_0^d P_{2m-3} \Phi(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\|_{L_2(0,d)} \leq (m-1) \left(\frac{1}{\delta_-} + \frac{1}{\delta_+} \right) \|f\|_{L_2(0,d)}, \quad (45)$$

$$\sum_{p=1}^{m-2} \left\| \frac{1}{\gamma(t)} \exp\left(\lambda_p \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \right\|_{L_2(0,d)} \leq (m-1) \left(\frac{1}{\delta_-} \right)^{1/2}, \quad (46)$$

$$\sum_{j=m-1}^{2m-3} \left\| \frac{1}{\gamma(t)} \exp\left(-\lambda_p \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \right\|_{L_2(0,d)} \leq (m-1) \left(\frac{1}{\delta_+} \right)^{1/2}, \quad (47)$$

$$\sup_{0 < t_1 < d} \left\| \int_0^{t_1} P_\nu \Phi(t_1, t) d\tau \right\|_{L_2(0,d)} \leq 3(m-1) \left(\frac{1}{\delta_+} + \frac{1}{\delta_-} \right) \sqrt{d}. \quad (48)$$

Эти оценки выводятся непосредственно из (27) и (44). Из (45)–(48) получим, что функция $\tilde{F}(x, t)$, определённая в (42), принадлежит пространству $L_2(0, d)$, а оператор \tilde{M} , определённый в (43), является ограниченным оператором в $L_2(0, d)$. Выберем теперь $\delta > 0$ настолько малым, чтобы при всех $|\xi| \leq \delta$ выполнялось условие $|b_{2m}^0(\xi, 0)| \|\tilde{M}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 1/2$. Тогда уравнение (41) имеет единственное решение в $L_2(0, d)$:

$$w_{2m-3} = (I - b_{2m}^0(\xi, 0) \tilde{M})^{-1} \tilde{F}. \quad (49)$$

Причём справедлива оценка

$$\|w_{2m-3}\|_{L_2(0;d)} \leq 2 \|\tilde{F}\|_{L_2(0;d)}. \quad (50)$$



Подставляя решение (49) в (30), получим решение системы (18). Это решение удовлетворяет условиям (22), (23), (24), а значит, выполнены условия (5), (6).

Из равенства (30) и неравенства (50) получим, что все координаты векторных функций \bar{u}_1 и \bar{u}_2 принадлежат по переменной t пространству $L_2(0; d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \leq \delta$.

Таким образом, эти векторные функции являются решением системы (18) и удовлетворяют условиям (22), (23), (24).

Из (15), (16) получим, что функция $u(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению

$$i^{-2m} \alpha^{2m} (t) \partial_t^{2m} u + \frac{b}{a_{0\ 2m}} \partial_t^3 u + \sum_{|\tau|=2m} \frac{a_{\tau,0}}{a_{0\ 2m}} \xi^\tau u = f. \quad (51)$$

Заметим, что

$$i^{-2m} \alpha^{2m} (t) \partial_t^{2m} u = D_{\alpha,t}^{2m} u + R_{2m} u, \quad (52)$$

где $R_{2m} u = \sum_{j=0}^{2m-1} z_{2m,j}(t) D_{\alpha,t}^j u$, а функции $z_{2m,j}(t)$ являются непрерывными и ограниченными функциями на отрезке $[0; d]$.

Таким образом, из (51) и (52) получим, что функция $u(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{0\ 2m} D_{\alpha,t}^{2m} u + b \partial_t^3 u + \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau,0} \xi^\tau u + R_{2m} u = f(\xi, t). \quad (53)$$

Можно показать, что решение $u(\xi, t)$ этого уравнения принадлежит по переменной t пространству $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0; d)$

Обозначим через \tilde{A} оператор $\tilde{A} = a_{0\ 2m} D_{\alpha,t}^{2m} + \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau,0} \xi^\tau + b \partial_t^3 + a_{0\ 2m} R_{2m}$. Рассмотрим оператор

$A^\mu = \mu A + (1 - \mu) \tilde{A}$, где $A = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) + b \partial_t^3$. Можно показать, что для оператора A^μ справедлива априорная оценка, аналогичная оценке теоремы 3, при $|\xi| \leq \delta$ с постоянной, не зависящей от $\mu \in [0, 1]$. По доказанному выше уравнение (53) имеет единственное решение, которое удовлетворяет условиям (5), (6). Таким образом, с помощью метода продолжения по параметру μ и априорной оценки получим, что уравнение $Au = f$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (5), (6) при $|\xi| \leq \delta$.

Рассмотрим теперь оператор $A(\lambda \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)$, где $|\xi| = \delta$. Воспользовавшись априорной оценкой, приведенной в теореме 3, применим метод продолжения по параметру $\lambda > 0$. В результате из установленной уже разрешимости задачи (5)–(6) для уравнения $A(\lambda \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u = f$ при $\lambda = 1$ получим, что эта задача имеет единственное решение при всех $\lambda > 0$. Если взять теперь $\lambda = \frac{|\xi|}{\delta}$, то получим, что задача (5)–(6) для уравнения $A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u = f$ имеет единственное решение при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Таким образом, существование и единственность решения задачи (4)–(6) установлена нами при дополнительных условиях (44). Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то рассмотрим оператор $\hat{A} = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) + \hat{b} \partial_t^3$, где $\text{Re } \hat{b} a_{0\ 2m} > 0$, $\text{Im } \hat{b} a_{0\ 2m} = 0$. Тогда оператор \hat{A} удовлетворяет тем же условиям, что и оператор A . Выберем $\text{Re } \hat{b} > 0$ столь большим, чтобы выполнялись условия (44). Как показано выше, задача (5)–(6) для уравнения $\hat{A}u = f$ имеет единственное решение в $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0; d)$. Можно показать, что априорная оценка, аналогичная оценке теоремы 3, справедлива и для оператора $\hat{A}^\mu = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) + (b\mu + (1 - \mu)\hat{b}) \partial_t^3$, причём константа в этой априорной оценке не зависит от $\mu \in [0, 1]$. Это позволяет вновь применить метод продолжения по параметру $\mu \in [0, 1]$ и из существования и единственности решения задачи (5)–(6) для уравнения $\hat{A}^\mu u = f$ при $\mu = 0$ получить существование и единственность решения этой задачи при $\mu = 1$. Но так как $\hat{A}^1 = A$, то тем самым доказано существование и единственность решения задачи (5)–(6) в $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0; d)$. Отсюда следует существование и единственность решения задачи (1)–(3) в $H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$. Для того чтобы доказать существование и единственность решения задачи (1)–(3) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ при $s > 2m$, следует воспользоваться известным методом повышения гладкости (см [3]).

Разрешимость доказана при достаточно малых $d > 0$. Так как при $t \geq d$ уравнение не является вырождающимся, а значит, решение задачи (1)–(3) существует при $t \in [d; d_1]$, то с помощью «склеивания» [15] получаем существование и единственность решения задачи (1)–(3) при $t \in [0; d_1]$ для любых $d_1 > 0$.

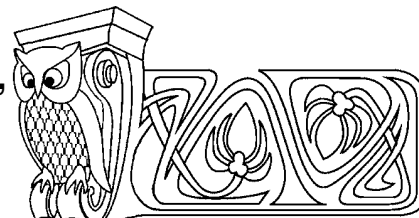


Библиографический список

1. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87, № 6. С. 885–887.
3. Глушко В. П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. 1970. Т. 23. С. 113–178.
4. Рукавишников В. А., Ереклинцев А. Г. О коэрцитивности R_ν -обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1680–1689.
5. Вишик М. И., Грушин В. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. 1969. Т. 80 (112), вып. 4. С. 455–491.
6. Вишик М. И., Грушин В. В. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы // УМН. 1970. Т. 25, вып. 4. С. 29–56.
7. Глушко В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. № 2. Новосибирск, 1978. С. 49–68.
8. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / Воронеж. гос. ун-т. Воронеж, 1979. 47 с. Деп. в ВИНТИ 27.03.79, № 1048-79.
9. Левендорский С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе // Мат. сб. 1980. Т. 111 (153), вып. 4. С. 483–501.
10. Исхоков С. А. О гладкости решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 3. С. 306–309.
11. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Воронеж, 2008. 240 с.
12. Баев А. Д. Об одной краевой задаче в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Сер. Естеств. науки. 2008. № 3 (62). С. 27–39.
13. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 6. С. 727–728.
14. Глушко В. П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж, 1972. 193 с.
15. Лионс Ж., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 371 с.

УДК 514.764

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ С ДОПУСТИМОЙ ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ



А. В. Букушева, С. В. Галаев

Саратовский государственный университет
E-mail: bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru

Вводятся понятия внутренней и продолженной связности над гладким распределением D с допустимой финслеровой метрикой. С помощью продолженной связности на распределении D как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется и исследуется методами внутренней геометрии неголономного многообразия почти контактная метрическая структура.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, многообразия Сасаки, внутренняя геометрия почти контактных метрических многообразий, допустимая финслерова метрика.

Almost Contact Metric Structures Defined by Connection over Distribution with Admissible Finslerian Metric

A. V. Bukusheva, S. V. Galaev

The notion of the intrinsic connection and the extended connection of an almost contact metric manifold D with admissible Finslerian metric is introduced and studied. Using this and the extended connection on D as on the total space of a vector bundle, an almost contact metric structure is defined and investigated.

Key words: almost contact manifold, Sasakian manifold, intrinsic geometry of almost contact metric manifolds, admissible Finslerian metric.

ВВЕДЕНИЕ

Гладкое коразмерности 1 распределение D , заданное на гладком многообразии X , в настоящей работе рассматривается как тотальное пространство векторного расслоения (D, π, X) . Имеется вполне очевидная аналогия между геометрией многообразия D как подмногообразия пространства касатель-



ного расслоения и геометрией самого касательного расслоения. Однако возможность продолжения известных результатов из геометрии касательных расслоений на случай векторного расслоения (D, π, X) существенно ограничивается нечетностью размерности многообразия D . Таким образом, мы не можем, например, говорить о симплектической структуре на многообразии D , в то же время в работе [1] было показано, что в случае задания на распределении D допустимой финслеровой структуры [2], на D возникает почти контактная метрическая структура, свойства которой излагаются в настоящей статье.

В работе R. Miron [3] было положено начало исследованию геометрии финслеровых векторных расслоений, являющихся естественным обобщением касательных расслоений многообразий с финслеровой метрикой. Финслерово векторное расслоение характеризуется заданием на тотальном пространстве векторного расслоения класса линейных связностей, специальным образом ассоциируемых с некоторой инфинитезимальной связностью (см., например, [4]). В работах [2, 5] введено понятие гладкого распределения D с допустимой финслеровой метрикой, позволяющее с новой точки зрения взглянуть на проблематику финслеровых векторных расслоений. В настоящей работе на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, X) , где D — гладкое распределение с допустимой финслеровой метрикой, естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, изучаются свойства введенной структуры методами внутренней геометрии неголономного многообразия. Исследование геометрии многообразий почти контактной метрической структуры начинается с выходом основополагающих работ S. S. Chern [6], J. W. Gray [7], S. Sasaki [8]. Почти контактные метрические структуры являются нечетномерным аналогом почти эрмитовых структур и между этими классами структур существует ряд важных взаимосвязей. Достаточно полно результаты, полученные в этой области до 1976 года, отражены в книге [9]. Большой вклад в развитие геометрии почти контактных метрических пространств внесли В. Ф. Кириченко и его ученики (см., например, [10, 11]).

Особенностью предлагаемого подхода к исследованию почти контактных метрических структур является активное использование методов внутренней геометрии гладких распределений, развитых в работе [12] применительно к геометрии почти контактных метрических структур и основанных на трудах [13, 14] В. В. Вагнера. В терминологии В. В. Вагнера многообразие почти контактной метрической структуры является неголономным многообразием коразмерности 1 с дополнительными, называемыми им внутренними, структурами. Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было определено Схоутеном как совокупность тех свойств, которые зависят только от параллельного перенесения внутри самого неголономного многообразия и от его оснащения в объемлющем пространстве.

В настоящей работе предлагается использовать методы неголономной геометрии, разработанные В. В. Вагнером для исследования геометрии многообразий с почти контактной метрической структурой. Следуя идеологии, заложенной в работах Схоутена и Вагнера, мы определяем внутреннюю геометрию почти контактного метрического пространства X как совокупность тех свойств, которыми обладают гладкое распределение D , задаваемое контактной формой η , допустимое поле аффинора φ (называемое нами допустимой почти комплексной структурой) такое, что $\varphi^2(\vec{X}) = -\vec{X}$; поле допустимых тензоров римановой метрики g , связанное с допустимой почти комплексной структурой равенством $g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$, где \vec{X}, \vec{Y} — допустимые векторные поля. К объектам внутренней геометрии почти контактного метрического пространства следует отнести и те объекты, которые являются производными от уже указанных внутренних структур: кососимметрическая 2-форма $\omega = d\eta$; векторное поле $\vec{\xi}$, называемое полем Рыба, определяющее оснащение распределения D — $\vec{\xi} \in D^\perp$ и однозначно определяемое равенствами $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \text{Span}(\vec{\xi})$ в случае, когда форма ω имеет максимальный ранг; внутренняя связность ∇ , осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых и однозначно определяемая полем g ; связность ∇^1 , являющаяся естественным продолжением связности ∇ и осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X .

Заметим, похожие идеи использовались в некоторых работах, посвященных исследованию почти контактных метрических структур. Так, например, в работе [15] пара (D, φ) трактуется как аналог почти комплексного многообразия, а определяемая в этой же работе линейная связность [15, p. 1960] является, по существу, аналогом внутренней связности Вагнера.



Работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе в терминах внутренней геометрии сообщаются основные сведения о почти контактных метрических структурах. Во втором параграфе дается подробное описание внутренней связности (связности над распределением) и продолженной связности (инфинитезимальной связности в векторном расслоении). Понятие связности над распределением, рассматривалось в работах [16, 17] и активно использовалось затем применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой в работах [1, 2, 5, 12]. Задание связности над распределением эквивалентно заданию внутренней связности Вагнера, а продолженная связность соответствует связности, сконструированной Вагнером в работе [14] с целью построения тензора кривизны неголономного многообразия. В третьем параграфе показывается, что связность над распределением с финслеровой метрикой определяет на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, X) , почти контактную метрическую структуру. Исследуются некоторые свойства построенной структуры.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности n , $\Xi(X)$ — $C^\infty(X)$ -модуль гладких векторных полей на X , d — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими, класса C^∞ . Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется тензором. *Почти контактной метрической структурой на X* называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X , где φ — тензор типа $(1, 1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\begin{aligned} (a) \quad \eta(\vec{\xi}) = 1, \quad (b) \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad (c) \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad (d) \quad \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi}, \\ (e) \quad d\eta(\vec{X}, \vec{\xi}) = 0, \quad (f) \quad g(\varphi \vec{X}, \varphi \vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}), \end{aligned} \quad (1)$$

$\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$. Легко проверить, что тензор $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi \vec{Y})$ кососимметричен. Он называется *фундаментальной формой структуры*. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием*. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой*. Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ — кручение Нейенхейса, образованное тензором φ . Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой*. Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется *сасакиевым многообразием*. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η , $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ — его оснащение. В дальнейшем будем полагать, что ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D является невырожденной формой. В этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$ и называется вектором Роба.

Для исследования внутренней геометрии неголономного многообразия и, вообще, для изучения почти контактных метрических структур удобно использовать адаптированные карты [12, 15]. Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$) ($a, b, c, e = 1, \dots, n-1$) на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D , если $D^\perp = \text{Span}\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$. Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида: $x^a = x^a(x^{\tilde{a}})$, $x^n = x^n(x^{\tilde{a}}, x^{\tilde{n}})$. Такие системы координат названы Вагнером в работе [14] *градиентными*.

Пусть $P : TX \rightarrow D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему $D : D = \text{Span}(\vec{e}_a)$.

Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов (\vec{e}_a, ∂_n) и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$, где компоненты M_{ab}^n образуют так называемый тензор неголономности [14]. Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$, где $\omega = d\eta$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием $\vec{\xi} = \partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. При преобразовании адаптированной системы ко-



ординат, векторы адаптированного базиса преобразуются следующим образом: $\vec{e}_a = \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial x^a} \vec{e}_{\bar{a}}$.

Прямым вычислением получаем

$$[\vec{e}_a, \partial_n] = \partial_n \Gamma_a^n \partial_n. \quad (2)$$

Используя (1e), (2), а также известную формулу $d\eta(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2}(\vec{X}\eta(\vec{Y}) - \vec{Y}\eta(\vec{X}) - \eta([\vec{X}, \vec{Y}]))$, получаем $[\vec{e}_a, \partial_n] = \vec{0}$ и $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению D^\perp , а ковекторный аргумент коллинеарен форме η . Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p, q) в адаптированной карте имеет вид: $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$.

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении D , а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении D^\perp . Всякая тензорная структура, заданная на многообразии X , с помощью проектора $P: TX \rightarrow D$ определяет на X единственную допустимую тензорную структуру того же типа. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1, 1)$. Поле аффинора φ , учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форма $\omega = d\eta$ также является допустимым тензорным полем.

Учитывая справедливость равенства $L_{\vec{\xi}} t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} = \partial_n t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$, где $L_{\vec{\xi}}$ — оператор дифференцирования Ли вдоль поля $\vec{\xi}$, заключаем, что производные $\partial_n t$ от компонент допустимого тензорного поля t в адаптированной системе координат являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если найдется такой атлас адаптированных карт, что в каждой из карт этого атласа компоненты поля постоянны. Необходимым условием интегрируемости допустимого поля t является обращение в нуль производных $\partial_n t$. Назовем допустимую тензорную структуру t квазиинтегрируемой, если в адаптированных координатах выполняется равенство $\partial_n t = 0$. Форма $\omega = d\eta$ является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры. Имеют место следующие теоремы [12].

Теорема 1. *Аффинорная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство $P(N_\varphi(\vec{X}, \vec{Y})) = 0$, $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$.*

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: $P(N_\varphi(\vec{X}, \vec{Y})) = 0$, $\omega(\varphi \vec{u}, \varphi \vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$, $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$, ΓD — модуль гладких сечений распределения D .*

Теорема 3. *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда аффинорная структура φ интегрируема.*

Теоремы 1–3 нам понадобятся для анализа почти контактных метрических структур, возникающих на распределении с финслеровой метрикой.

2. ВНУТРЕННЯЯ И ПРОДОЛЖЕННАЯ СВЯЗНОСТИ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Для аналитического описания связности над распределением D введем на D структуру гладкого многообразия следующим образом. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии D ставится в соответствие карта $\tilde{K}(\tilde{x}^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D , где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha \circ \pi$. В дальнейшем координаты \tilde{x}^α на многообразии D будем обозначать x^α (так же как и соответствующие координаты на многообразии X).

Говорят, что задана связность над распределением D , если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \rightarrow X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D . Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_a^b(x^\alpha, x^{n+a})$ такого, что $HD = \text{Span}(\vec{e}_a)$, где $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$.

В работе [5] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность получается из внутренней связности с помощью равенства $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении.



Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D [14] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\nabla_{f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2} = f_1 \nabla_{\vec{u}_1} + f_2 \nabla_{\vec{u}_2}$, 2) $\nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} f) \vec{v}$, где ΓD — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} - P[\vec{X}, \vec{Y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$.

Всякая внутренняя линейная связность определяет связность над распределением и, наоборот, связность над распределением D определяет линейную связность в неголономном многообразии D , если имеют место равенство $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a) x^{n+c}$.

Договоримся в дальнейшем, что всякая продолженная связность будет отождествлена с парой (∇, \vec{u}) , где ∇ — внутренняя связность, а \vec{u} — векторное поле на D , такое, что $\pi_* \vec{u} = \vec{\xi}$. Очевидно, что $\vec{u} = \partial_n - G_n^a \partial_{n+a}$. Легко установить, что объект G_n^a преобразуется по тензорному закону и, в частности, мы можем положить его равным нулю.

Пусть, далее, ∇^1 — продолженная связность, конструируемая из внутренней связности следующим образом: $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\partial_n)$. Имеют место следующие теоремы [12].

Теорема 4. *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда структура φ квази-интегрируема и выполняется равенство $\nabla \varphi = 0$, где ∇ — внутренняя метрическая связность.*

Теорема 5. *Почти комплексная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\nabla^1 \varphi = 0$.*

3. ПОЧТИ КОНТАКТНАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА ТОТАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ (D, π, X)

Предположим, что на многообразии D задана функция $L(x^\alpha, x^{n+\alpha})$ такая, что выполняются следующие условия:

- 1) L — гладкая положительная функция на $D^0 = D \setminus \{0\}$;
- 2) L — положительна однородна степени 1 относительно слоевых координат;
- 3) квадратичная форма $L_{a..b}^2 \xi^a \xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} \xi^a \xi^b$ положительно определена.

Назовем функцию $L(x^\alpha, x^{n+\alpha})$ допустимой финслеровой метрикой, а пару (D, L) — гладким распределением с допустимой финслеровой метрикой.

Над распределением D с допустимой финслеровой структурой [5] определяется внутренняя связность, порождаяемая распределением $HD = \text{Span}(\vec{e}_a)$, где $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}$, $G_{bc}^a = G_{b..c}^a = \partial_{n+b} \partial_{n+c} G^a$, $G^a = g^{ab} (\partial_c L_b^2 x^{n+c} - \vec{e}_b L^2)$, $g_{ab} = \frac{1}{2} L_{a..b}^2$, а также продолженная связность (∇, \vec{u}) , где $\vec{u} = \partial_n - G_n^a \partial_{n+a}$, $G_n^a = \omega^{bc} R_{bc}^a$. Объект R_{bc}^a будет определен ниже. Будем считать, что распределение \tilde{D} оснащено дополнительным распределением $\text{Span}(\partial_n)$. Определим на многообразии D допустимое к распределению \tilde{D} поле аффинора J , полагая $J(\vec{e}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{e}_a$, $J(\partial_n) = 0$. С помощью равенств $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^h) = \tilde{g}(\vec{u}^v, \vec{v}^v) = g(\vec{u}, \vec{v})$, $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^v) = \tilde{g}(\vec{u}^h, \partial_n) = \tilde{g}(\vec{v}^v, \partial_n) = 0$, где $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$, g — допустимая финслерова структура, на многообразии D определяется допустимая риманова метрика. Учтывая равенство $\tilde{g}(J(\vec{u}), J(\vec{v})) = \tilde{g}(\vec{u}, \vec{v})$, получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Четверка $(J, \partial_n, \tilde{\eta}, \tilde{g})$, где $\tilde{\eta} = \eta \circ \pi_*$, определяет на многообразии D почти контактную метрическую структуру.*

Исследуем свойства полученной структуры. Найдем условия, при которых допустимая почти комплексная структура J интегрируема. Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ab} \partial_n + R_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\vec{e}_a, \partial_n] = \partial_n G_a^b \partial_{n+b}, \quad [\vec{e}_a, \partial_{n+b}] = G_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad (3)$$

где $R_{ba}^c = 2(\vec{e}_b G_a^c - G_{[a}^d G_{b]..d}^c)$. Если изначально заданная финслерова структура вырождается в риманову, то легко убедиться в том, что объекты R_{ba}^c и $\partial_n G_a^b$ совпадают с тензорами, названными Вагнером в [14] тензорами кривизны Схоутена. Будем называть в дальнейшем эти объекты и в общем случае тензорами кривизны Схоутена. Используя равенства (3) и теорему 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.



Теорема 7. Почти комплексная структура J является интегрируемой тогда и только тогда, когда тензоры кривизны Схоутена обращаются в нуль: $R_{ab}^c = 0$, $\partial_n G_a^b = 0$.

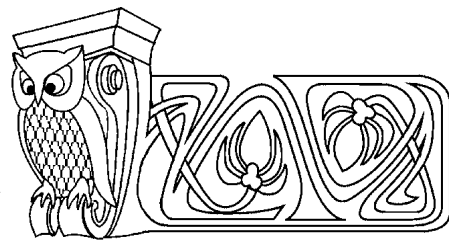
Заметим, что как следует из теоремы 2, определенная выше структура ни при каких условиях не может быть нормальной почти контактной метрической структурой.

Библиографический список

1. Букушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 10–14.
2. Галаев С. В. О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 25–28.
3. Miron R. Techniques of Finsler geometry in the theory of vector bundles // Acta Sci. Math. 1985. № 49. P. 119–129.
4. Prasad K. Quarter symmetric metric Finsler connections on Kenmotsu and P-Kenmotsu vector bundles // Intern. Math. Forum. 2008. Vol. 3, № 18. P. 847–855.
5. Galaev S. V. Contact structures with admissible Finsler metrics // Physical Interpretation of Relativity Theory : Proceedings of Intern. Meeting. Moscow, 4–7 July 2011. Moscow: BMSTU, 2012. P. 80–87.
6. Chern S. S Pseudogroupes continus infinis // Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. 1953. Vol. 52. P. 119–136.
7. Gray J. W. Some global properties of contact structures // Ann. of Math. 1959. Vol. 69, № 2. P. 421–450.
8. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tôhoku Math. J. Second Series. 1960. Vol. 12, № 3. P. 459–476.
9. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin; N. Y. : Springer-Verlag, 1976. 146 p.
10. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. ВИНТИ. 1986. Т. 18. С. 25–71.
11. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.
12. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 16–22.
13. Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий : VIII Междунар. конкурс им. Н. И. Лобачевского (1937) : отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.
14. Вагнер В. В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
15. Bejancu A. Kähler contact distributions // J. of Geometry and Physics. 2010. № 60. P. 1958–1967.
16. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления ВИНТИ. 1987. Т. 16. С. 5–85.
17. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 336 с.

УДК 517.984

УТОЧНЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ



М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов*, А. П. Хромов*

Воронежский государственный университет
E-mail: bms2001@mail.ru

*Саратовский государственный университет
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

В работе изучается система Дирака с недифференцируемым потенциалом. Устанавливаются асимптотические формулы для собственных значений (в том числе и уточненные) и собственных функций. В качестве приложения получается теорема П. Джакова и Б. С. Митягина о базисах Рисса со скобками.

Ключевые слова: асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака, базис Рисса.

**Refined Asymptotic Formulas for Eigenvalues
and Eigenfunctions of the Dirac System
with Nondifferentiable Potential**

M. Sh. Burlutskaya, V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov

This paper investigates the Dirac system with the continuous potential. Asymptotic formulas for the eigenvalues (including refined) and eigenfunctions are established. As an application we obtain a theorem P. Dzhakova and B. S. Mityagin on the Riesz bases with brackets.

Key words: asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system, Riesz bases.



ВВЕДЕНИЕ

В данной работе на отрезке $[0, 1]$ изучается система Дирака:

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \quad y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x), \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1(1) = y_2(1). \quad (2)$$

Предполагаем, что $q_j \in C[0, 1]$ ($q_j(x)$ — комплекснозначные). В отличие от случая $q_j \in C^1[0, 1]$ здесь приходится сталкиваться со значительными трудностями. Тем не менее, и в недифференцируемом случае также достигнуты значительные успехи. Так, в работах П. В. Джакова, Б. С. Митягина [1, 2] показано, что в случае $q_j \in L_2[0, 1]$ система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса в $L_2^2[0, 1]$. В работе [3], применяя метод подобных операторов, изучаются спектральные свойства задачи (1)–(2). В данной работе мы получаем уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций (причем фактически полные асимптотические разложения) в трудном недифференцируемом случае. При этом используется достаточно элементарный и простой метод, который базируется на формулах типа операторов преобразования (см. также [4, с. 30]). В качестве приложения дается новое простое доказательство теоремы П. В. Джакова, Б. С. Митягина [2].

1. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ. ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Асимптотика фундаментальной матрицы решений системы (1) получена в [5]. Приведем здесь другое более простое доказательство методом из [6].

Лемма 1. Система (1) в области $\operatorname{Re} \lambda \geq -h$, где $h > 0$, при больших $|\lambda|$ имеет фундаментальную матрицу решений $Y(x, \lambda) = (y_{ij}(x))_1^2$ с асимптотикой

$$Y(x, \lambda) = (E + o(1))e^{\lambda D x},$$

где $E = \operatorname{diag}(1, 1)$, $D = \operatorname{diag}(1, -1)$, $o(1) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и $\arg \lambda$, $y_{ij}(x)$ аналитичны по λ .

Здесь и далее для краткости у функций $y_{ij}(x)$ будем опускать аргумент λ . В дальнейшем также через E будем обозначать не только единичную матрицу, но и единичный оператор.

Доказательство. Система (1) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} q_2(t) y_2(t) dt, \quad y_2(x) = c_2 e^{-\lambda x} + \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} q_1(t) y_1(t) dt,$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные, из которой, положив $z_1(x) = y_1(x)e^{-\lambda x}$, $z_2(x) = y_2(x)e^{\lambda x}$, получим

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t) dt, \quad (3)$$

$$z_2(x) = c_2 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t) dt. \quad (4)$$

Возьмем сначала в (3)–(4) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Тогда, подставив (4) в (3) и изменив порядок интегрирования, имеем:

$$z_1(x) = 1 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t) dt \int_t^x e^{-2\lambda \tau} q_2(\tau) d\tau. \quad (5)$$

По лемме 4 из [7]

$$\int_t^x e^{-2\lambda \tau} q_2(\tau) d\tau = o(e^{-2\lambda x}) + o(e^{-2\lambda t}), \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (6)$$



Поэтому из (5) получаем $z_1(x) = 1 + \int_0^x o(1)z_1(t) dt$. Отсюда

$$z_1(x) = 1 + o(1). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4) при $c_2 = 0$, согласно (6) получим $z_2(x) = o(e^{2\lambda x})$. Эту пару решений системы (3)–(4) обозначим $z_{11}(x) = z_1(x)$, $z_{21}(x) = z_2(x)$.

Теперь найдем другое решение системы (3)–(4). Имеем из (3):

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t) dt - \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t) dt.$$

Тогда, положив $c_1 = -\int_0^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t) dt$, $c_2 = 1$, получим

$$z_1(x) = -\int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t) dt. \tag{8}$$

Подставив (8) в (4), имеем $z_2(x) = 1 + \int_0^1 o(1)z_2(t) dt$. Отсюда $z_2(x) = 1 + o(1)$ и при подстановке в (8) получаем $z_1(x) = o(e^{-2\lambda x})$. Эту пару решений системы (3)–(4) обозначим соответственно $z_{12}(x) = z_1(x)$, $z_{22}(x) = z_2(x)$. Таким образом, фундаментальная матрица для системы (3)–(4) имеет асимптотику

$$Z(x, \lambda) = (z_{ij}(x))_1^2 = \begin{pmatrix} 1 + o(1) & o(e^{-2\lambda x}) \\ o(e^{2\lambda x}) & 1 + o(1) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Отсюда

$$Y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda x} \end{pmatrix} Z(x, \lambda) = T(x, \lambda) \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda x} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $T(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda x}, e^{-\lambda x})Z(x, \lambda)\text{diag}(e^{-\lambda x}, e^{\lambda x})$. На основании (9) $T(x, \lambda) = E + o(1)$ и в силу (10) получаем утверждение леммы. \square

Замечание. Аналогичными рассуждениями убеждаемся в справедливости леммы и при $\text{Re } \lambda \leq h$.

Теорема 1. Собственные значения краевой задачи (1)–(2) достаточно большие по модулю простые и для них имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = n\pi i + \varepsilon_n, \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, n_0 — некоторое число.

Доказательство. Положим $\Delta(\lambda) = M_0 Y(0, \lambda) + M_1 Y(1, \lambda)$, где $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение для собственных значений есть $\det \Delta(\lambda) = 0$, из которого согласно лемме 1 имеем $e^{-2\lambda} = 1 + o(1)$. Отсюда по теореме Руше получаем утверждение теоремы. \square

Исследуем резольвенту $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ оператора

$$(Ly)(x) = (y_1'(x) - q_2(x)y_2(x), -y_2'(x) + q_1(x)y_1(x))^T, \quad U(y) = 0,$$

где $y = y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $U(y) = M_0 y(0) + M_1 y(1)$.

Всюду далее считаем, что $\text{Re } \lambda \geq -h$ (случай $\text{Re } \lambda \leq h$ рассматривается аналогично).

Лемма 2. Имеет место формула

$$R_\lambda f = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(G_\lambda \tilde{f}) + G_\lambda \tilde{f},$$

где $G_\lambda \tilde{f} = \int_0^1 Y(x, \lambda)E_0(x, t)Y^{-1}(t, \lambda)\tilde{f}(t) dt$, $E_0(x, t) = \text{diag}(-\varepsilon(t, x), \varepsilon(x, t))$, $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$, $\tilde{f}(x) = (f_1(x), -f_2(x))^T$, $Y(x, \lambda)$ та же, что и в лемме 1.



Доказательство. Для $y = R_\lambda f$ имеем $Ly = \lambda y + f$. Отсюда

$$y'(x) - Q(x)y(x) = \lambda Dy(x) + \tilde{f}(x), \quad (11)$$

$$U(y) = 0, \quad (12)$$

где $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$. По методу вариации произвольных постоянных общее решение системы (11) есть

$$y(x) = Y(x, \lambda)c(x), \quad (13)$$

где $c'(x) = Y^{-1}(x, \lambda)\tilde{f}(x)$. Интегрируя первую компоненту $c'(x)$ от x до 1, а вторую — от 0 до x (такой выбор позволяет установить ограниченность частного решения), получим

$$c(x) = c^0 + \int_0^1 E_0(x, t)Y^{-1}(t, \lambda)\tilde{f}(t) dt, \quad (14)$$

где c^0 — произвольный постоянный вектор. Подставляя (14) в (13), имеем

$$y(x) = Y(x, \lambda)c^0 + G_\lambda \tilde{f}.$$

Подчинив теперь $y(x)$ краевому условию (12), приходим к утверждению леммы. \square

Лемма 3. Обозначим через S_δ область, получающуюся из λ -плоскости удалением всех чисел $\lambda_n^0 = n\pi i$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ . Тогда в S_δ при больших $|\lambda|$

$$R_\lambda f = \int_0^1 O(1)f(t) dt,$$

где $O(1)$ означает матрицу с элементами, имеющими оценку $O(1)$ по λ , равномерную относительно остальных аргументов.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} \lambda \geq -h$. Тогда по лемме 1 $Y(x, \lambda) = [E]Y_0(x, \lambda)$, $Y^{-1}(x, \lambda) = Y_0^{-1}(x, \lambda)[E]$, где $Y_0(x, \lambda) = \operatorname{diag}(e^{\lambda x}, e^{-\lambda x})$, $[E] = E + o(1)$ и $o(1)$ есть матрица с компонентами $o(1) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Y(x, \lambda)E_0(x, t)Y^{-1}(t, \lambda) &= [E]Y_0(x, \lambda)E_0(x, t)Y_0^{-1}(t, \lambda)[E] = \\ &= [E]\operatorname{diag}(-\varepsilon(t, x)e^{\lambda(x-t)}, \varepsilon(x, t)e^{-\lambda(x-t)})[E] = O(1). \end{aligned}$$

Поэтому $G_\lambda \tilde{f} = \int_0^1 O(1)\operatorname{diag}(1, -1)f(t) dt = \int_0^1 O(1)f(t) dt$. Далее, в S_δ имеем $|\det \Delta(\lambda)| \geq c|e^\lambda|$ (через c в дальнейшем обозначаем различные положительные постоянные, встречающиеся в оценках). Отсюда, $\Delta^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} O(e^{-\lambda}) & O(e^{-\lambda}) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}$. Значит, $Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) = O(1)$, и тем самым утверждение леммы получено при $\operatorname{Re} \lambda \geq -h$. Случай $\operatorname{Re} \lambda \leq -h$ рассматривается аналогично. \square

Теорема 2. Системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) операторов L и L^* полны в пространстве $L_2^2[0, 1]$.

Доказательство. Пусть f ортогональна всем с.п.ф. оператора L^* . Тогда $R_\lambda f = R_\lambda(L)f$ есть целая функция по λ и по теореме Лиувилля в силу леммы 3 $R_\lambda f$ не зависит от λ . Значит, если $\mu_1 \neq \mu_2$, то $R_{\mu_1} f = R_{\mu_2} f$. А тогда $R_{\mu_1} R_{\mu_2} f = \frac{R_{\mu_1} f - R_{\mu_2} f}{\mu_1 - \mu_2} = 0$. Отсюда $f(x) = 0$ почти всюду, и полнота системы с.п.ф. оператора L^* установлена.

Установим полноту системы с.п.ф. оператора L . Имеем:

$$L^* z = (-z_1'(x) + \overline{q_1(x)}z_2(x), z_2'(x) - \overline{q_2(x)}z_1(x))^T, \quad U(z) = 0.$$

Поэтому для $R_{-\lambda}(L^*) = (L^* + \lambda E)^{-1}$ справедлива лемма 3, и полнота системы с.п.ф. оператора L получается вышеприведенными рассуждениями. \square



2. УТОЧНЕННАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для получения уточненной асимптотики собственных значений нам потребуется иная система решений системы Дирака, имеющая представление типа операторов преобразования. В отличие от параграфа 1 всюду далее будем обозначать через $(z_{11}(x), z_{21}(x))^T$ решение системы (3)–(4) при $c_1 = 1, c_2 = 0$, а через $(z_{21}(x), z_{22}(x))^T$ — решение системы (3)–(4) при $c_1 = 0, c_2 = 1$. Пусть $c_1 = 1, c_2 = 0$. Подставив (4) в (3), получим

$$z_{11}(x) = 1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) dt \int_0^t e^{2\lambda\tau} q_1(\tau) z_{11}(\tau) dt. \quad (15)$$

Лемма 4. Для решения $z_{11}(x)$ уравнения (15) имеет место формула

$$z_{11}(x) = 1 + \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{11}(x, \xi) d\xi, \quad (16)$$

где $K_{11}(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{11,n}(x, \xi)$,

$$K_{11,n}(x, \xi) = \int_0^x q_2(t_1) dt_1 \int_0^x \varepsilon(t_1, t_2) q_1(t_2) dt_2 \cdots \int_0^x \varepsilon(t_{2n-3}, t_{2n-2}) q_1(t_{2n-2}) dt_{2n-2} \int_0^x \varepsilon(t_{2n-2}, t_{2n-1}) \times \\ \times \varepsilon(\xi, t_{2n}(\xi) + \xi - t_{2n-1}) \varepsilon(t_{2n}(\xi) + \xi, \xi) q_2(t_{2n-1}) q_1(t_{2n}(\xi)) dt_{2n-1}, \quad (17)$$

$t_{2n}(\xi) = t_1 - t_2 + t_3 - \cdots + t_{2n-1} - \xi$, $K_{11}(x, \xi)$ не зависит от λ , и

$$|K_{11,n}(x, \xi)| \leq (M_1 M_2)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}, \quad M_j = \max_x |q_j(x)|. \quad (18)$$

Доказательство. Решая уравнение Вольтерра (15) методом подстановок, получим

$$z_{11}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, \lambda), \quad (19)$$

где

$$A_n(x, \lambda) = \int_0^x q_2(t_1) e^{-2\lambda t_1} dt_1 \int_0^{t_1} q_1(t_2) e^{2\lambda t_2} dt_2 \cdots \\ \cdots \int_0^{t_{2n-2}} q_2(t_{2n-1}) e^{-2\lambda t_{2n-1}} dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} q_1(t_{2n}) e^{2\lambda t_{2n}} dt_{2n}. \quad (20)$$

В (20) все экспоненты внесем в последний интеграл и в нем выполним замену $\xi = t_1 - t_2 + t_3 - \cdots - t_{2n}$. Очевидно, что $\xi \in [0, x]$. Используя функцию $\varepsilon(x, t)$, придем к выражению

$$A_n(x, \lambda) = \int_0^x q_2(t_1) dt_1 \int_0^x \varepsilon(t_1, t_2) q_1(t_2) dt_2 \cdots \int_0^x \varepsilon(t_{2n-3}, t_{2n-2}) q_1(t_{2n-2}) dt_{2n-2} \int_0^x \varepsilon(t_{2n-2}, t_{2n-1}) \times \\ \times q_2(t_{2n-1}) dt_{2n-1} \int_0^x \varepsilon(\xi, t_{2n}(\xi) + \xi - t_{2n-1}) \varepsilon(t_{2n}(\xi) + \xi, \xi) q_1(t_{2n}(\xi)) e^{-2\lambda\xi} d\xi,$$

откуда, меняя порядок интегрирования (переводя последний интеграл на первое место), получим

$$A_n(x, \lambda) = \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{11,n}(x, \xi) d\xi.$$



Освобождаясь в (17) от $\varepsilon(\cdot, \cdot)$ во всех интегралах, кроме последнего, легко получим оценку (18) для $K_{11}(x, \xi)$, из которой следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} K_{11,n}(x, \xi)$. Тем самым формула (16) доказана. \square

Лемма 5. Для $z_{21}(x)$ имеет место формула

$$z_{21}(x) = \int_0^x e^{2\lambda\xi} K_{21}(x, \xi) d\xi, \quad (21)$$

где $K_{21}(x, \xi) = q_1(\xi) + \int_{\xi}^x q_1(\tau) K_{11}(\tau, \tau - \xi) d\tau$.

Доказательство. Формула (21) получается подстановкой (19) в (4) при $c_2 = 0$. \square

Аналогично леммам 4 и 5 доказывается

Лемма 6. Имеют место формулы:

$$z_{12}(x) = \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{12}(x, \xi) d\xi, \quad z_{22}(x) = 1 + \int_0^x e^{2\lambda\xi} K_{22}(x, \xi) d\xi,$$

где K_{22} получается из K_{11} , меняя q_1 на q_2 , q_2 на q_1 , а K_{12} — из K_{21} , меняя q_1 на q_2 и K_{11} на K_{22} .

Всюду далее будем считать, что $Y(x, \lambda) = (y_{ij}(x))_1^2$, где $y_{1j}(x) = z_{1j}(x)e^{\lambda x}$, $y_{2j}(x) = z_{2j}(x)e^{-\lambda x}$ ($j = 1, 2$). Тогда имеем:

$$\Delta(\lambda) = M_0 Y(0, \lambda) + M_1 Y(1, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ z_{11}(1)e^{\lambda} - z_{21}(1)e^{-\lambda} & z_{12}(1)e^{\lambda} - z_{22}(1)e^{-\lambda} \end{pmatrix},$$

и уравнение $\det \Delta(\lambda) = 0$ для собственных чисел задачи (1)–(2) имеет вид

$$e^{2\lambda} = (1 + g_1(\lambda))(1 + g_2(\lambda))^{-1}, \quad (22)$$

где $g_1(\lambda) = \int_0^1 a_1(\xi)e^{2\lambda\xi} d\xi$, $g_2(\lambda) = \int_0^1 a_2(\xi)e^{-2\lambda\xi} d\xi$, $a_1(\xi) = K_{21}(1, \xi) + K_{22}(1, \xi)$, $a_2(\xi) = K_{11}(1, \xi) + K_{12}(1, \xi)$.

Будем обозначать одним и тем же α_n произвольные числа, лишь бы $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$; через β_n — такие α_n , которые можно точно вычислить.

Лемма 7. При $\lambda = \lambda_n = n\pi i + \varepsilon_n$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$1 + g_1(\lambda_n) = 1 + \beta_{n,1} + \beta_n \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2), \quad (23)$$

$$(1 + g_2(\lambda_n))^{-1} = 1 - \beta_{n,2} + \alpha_n \varepsilon_n + \alpha_n^2 \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2), \quad (24)$$

где $\beta_{n,1} = (a_1(\xi), e^{-2n\pi i \xi})$, $\beta_{n,2} = (a_2(\xi), e^{2n\pi i \xi})$, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

Доказательство. Формула (23) сразу следует из равенства

$$g_1(\lambda_n) = \int_0^1 a_1(\xi) e^{2n\pi i \xi} e^{2\xi \varepsilon_n} d\xi = \int_0^1 a_1(\xi) e^{2n\pi i \xi} (1 + 2\xi \varepsilon_n) d\xi + O(\varepsilon_n^2). \quad (25)$$

Далее, имеем

$$(1 + g_2(\lambda_n))^{-1} = \left(1 + \int_0^1 a_2(\xi) e^{-2n\pi i \xi} (1 - 2\xi \varepsilon_n) d\xi + O(\varepsilon_n^2) \right)^{-1} = \frac{1}{1 + r_n},$$

где $r_n = \beta_{n,2} + \beta_n \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2)$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + r_n} - 1 + 1 &= 1 - \frac{\beta_{n,2}}{1 + r_n} + \alpha_n \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) = 1 - \beta_{n,2} \left[1 - \frac{\beta_{n,2}}{1 + r_n} + \alpha_n \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) \right] + \\ &+ \alpha_n \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) = 1 - \beta_{n,2} + \alpha_n \varepsilon_n + \alpha_n^2 \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2), \end{aligned}$$

что и доказывает (24). \square



Теорема 3. Для собственных значений λ_n имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = n\pi i + \beta_{n,0} + \alpha_n^2, \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots), \quad (26)$$

где $\beta_{n,0} = \frac{1}{2}(\beta_{n,1} - \beta_{n,2})$.

Доказательство. Из (22) по лемме 7 имеем $e^{2\lambda_n} = e^{2\varepsilon_n} = 1 + x_n$, где $x_n = 2\beta_{n,0} + \alpha_n \varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$.

Отсюда

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \ln(1 + x_n) = \beta_{n,0} + \alpha_n \varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2). \quad (27)$$

Из (27) получаем, что $\varepsilon_n = \alpha_n$ и тогда, опять используя (27), находим $\varepsilon_n = \beta_{n,0} + \alpha_n^2$. Теперь формула (26) сразу следует из теоремы 1. \square

Замечание. Если вместо (25) взять

$$g_1(\lambda_n) = \int_0^1 a_1(\xi) e^{2\pi n i \xi} \left(1 + 2\xi \varepsilon_n + \dots + \frac{(2\xi \varepsilon_n)^m}{m!} \right) d\xi + O(\varepsilon_n^{m+1})$$

и аналогичное выражение для $g_2(\lambda_n)$, то для ε_n вместо (27) получим

$$\varepsilon_n = \beta_{n,0} + \beta_n \varepsilon_n + \dots + \beta_n \varepsilon_n^m + \alpha_n^{m+1} + O(\varepsilon_n^{m+1}),$$

что приводит к $\varepsilon_n = \gamma_{n,m} + \alpha_n^{m+1}$, где $\gamma_{n,m}$, в свою очередь, точно вычисляются и $\sum |\gamma_{n,m}|^2 < \infty$.

3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе получим уточненную асимптотику собственных функций задачи (1)–(2).

Из лемм 4–6 и формулы

$$\int_0^x e^{\lambda(x-2\xi)} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{\lambda\tau} f((x-\tau)/2) d\tau = \frac{1}{2} \left[\int_0^x e^{\lambda\tau} f((x-\tau)/2) d\tau + \int_0^x e^{-\lambda\tau} f((x+\tau)/2) d\tau \right]$$

следует утверждение

Лемма 8. Имеют место формулы:

$$Y(x, \lambda) = (y_{ij}(x))_1^2 = \text{diag}(e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}) + \int_0^x M(x, \tau) e^{\lambda\tau} d\tau + \int_0^x N(x, \tau) e^{-\lambda\tau} d\tau,$$

где $M(x, \tau) = (M_{ij}(x, \tau))_1^2$, $N(x, \tau) = (N_{ij}(x, \tau))_1^2$, $M_{ij} = \frac{1}{2} K_{ij}(x, \xi_i)$, $\xi_1 = (x - \tau)/2$, $\xi_2 = (x + \tau)/2$, $N_{ij} = \frac{1}{2} K_{ij}(x, \xi_i^*)$, $\xi_1^* = (x + \tau)/2$, $\xi_2^* = (x - \tau)/2$.

Теорема 4. Для собственных функций $\varphi_n(x) = (\varphi_{n1}(x), \varphi_{n2}(x))^T$ задачи (1)–(2), соответствующих собственным значениям λ_n , имеют место асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \varphi_{nj}(x) = e^{p_j n \pi i x} (1 + p_j \beta_n x) + \int_0^x S_j(x, \tau) (1 + \beta_n \tau) e^{n \pi i \tau} d\tau + \\ + \int_0^x T_j(x, \tau) (1 - \beta_n \tau) e^{-n \pi i \tau} d\tau + O(\alpha_n^2), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $S_j(x, \tau) = M_{j1}(x, \tau) + M_{j2}(x, \tau)$, $T_j(x, \tau) = N_{j1}(x, \tau) + N_{j2}(x, \tau)$, $j = 1, 2$. Оценка $O(\alpha_n^2)$ равномерна по $x \in [0, 1]$.

Доказательство. Из условий (2) следует, что при $\lambda = \lambda_n$ имеем $\varphi_{n1}(x) = y_{11}(x) + y_{12}(x)$, $\varphi_{n2}(x) = y_{21}(x) + y_{22}(x)$. По лемме 8

$$\varphi_{n1}(x) = e^{\lambda_n x} + \int_0^x S_1(x, \tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau + \int_0^x T_1(x, \tau) e^{-\lambda_n \tau} d\tau. \quad (28)$$



Так как по теореме 3 $\lambda_n = n\pi i + \beta_{n,0} + \alpha_n^2$ и для ограниченной $f(x, \tau)$ имеет место формула

$$\int_0^x e^{\pm \lambda_n \tau} f(x, \tau) d\tau = \int_0^x e^{\pm n\pi i \tau} f(x, \tau) d\tau \pm \beta_{n,0} \int_0^x e^{\pm n\pi i \tau} f(x, \tau) \tau d\tau + O(\alpha_n^2), \quad (29)$$

то из (28) легко следует утверждение теоремы для $\varphi_{n1}(x)$. Формула для $\varphi_{n2}(x)$ получается аналогично. \square

Замечание. Если взять $\varepsilon_n = \gamma_{n,m} + \alpha_n^{m+1}$ из замечания к теореме 3, то получим более точную асимптотику для $\varphi_n(x)$ с остаточным членом $O(\alpha_n^{m+1})$.

4. БАЗИСНОСТЬ ПО РИССУ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В качестве приложения теорем 3 и 4 получается теорема П. В. Джакова, Б. С. Митягина [2] для $q_j \in C[0, 1]$.

Теорема 5. Система собственных и присоединенных функций задачи (1)–(2) образует базис Рисса в $L_2^2[0, 1]$.

Доказательство. По теореме 4 для любой $f \in L_2^2[0, 1]$ очевидно, что $(f, \varphi_n) = \alpha_n$. Для собственных функций φ_n^* сопряженной краевой задачи имеет место результат, схожий с теоремой 4, и поэтому $(f, \varphi_n^*) = \alpha_n$. Кроме того, $(\varphi_n, \varphi_n^*) = 2 + o(1)$. Отсюда, из теоремы 2 и теоремы Бари [8, с. 374–375] получаем утверждение теоремы. \square

Замечание. Все приведенные в работе утверждения справедливы и в случае $q_j \in L_2[0, 1]$. При этом следует учесть, что оценка (18) переходит в

$$|K_{11,n}(x, \xi)| \leq \frac{\|q_1\| \cdot \|q_2\|}{(2n-2)!} \left(\int_0^x (|q_1(t)| + |q_2(t)|) dt \right)^{2n-2}. \quad (30)$$

Действительно, представим $K_{11,n}(x, \xi)$ из леммы 4 в виде

$$K_{11,n}(x, \xi) = \int_0^x q_2(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} q_1(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{2n-3}} q_1(t_{2n-2}) dt_{2n-2} \times \\ \times \int_0^{t_{2n-2}} \varepsilon(\xi, t_{2n}(\xi) + \xi - t_{2n-1}) \varepsilon(t_{2n}(\xi) + \xi, \xi) q_2(t_{2n-1}) q_1(t_{2n}(\xi)) dt_{2n-1}.$$

Так как

$$|K_{11,n}(x, \xi)| \leq \|q_1\| \cdot \|q_2\| \int_0^x (|q_1(t_1)| + |q_2(t_1)|) dt_1 \cdots \int_0^{t_{2n-3}} (|q_1(t_{2n-2})| + |q_2(t_{2n-2})|) dt_{2n-2}, \quad (31)$$

то используя для $Q(t) = |q_1(t)| + |q_2(t)|$ формулу

$$\int_0^x Q(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} Q(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{2n-3}} Q(t_{2n-2}) dt_{2n-2} \leq \frac{1}{(2n-2)!} \left(\int_0^x Q(t) dt \right)^{2n-2},$$

из (31) сразу получим (30). Кроме того, следует учесть, что функции $K_{11}(x, \xi)$, $K_{22}(x, \xi)$, $K_{12}(x, \xi) - q_2(\xi)$, $K_{21}(x, \xi) - q_1(\xi)$ ограничены, и формула (29) остается справедливой и когда $f(x, \tau)$ есть $q((x + \tau)/2)$ или $q((x - \tau)/2)$, $q(x) \in L_2[0, 1]$.

Результаты параграфов 1 и 3 получены М. Ш. Бурлуцкой, параграф 2 — А. П. Хромовым, параграф 4 — всеми авторами этой статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

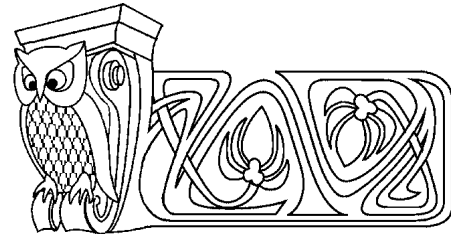


Библиографический список

1. Джаков П. В., Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61, № 4. С. 77–182.
2. Djakov P., Mityagin B. Vari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. Vol. 283 (3). P. 443–462.
3. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.
4. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 340 с.
5. Бурлуцкая М. Ш. Об асимптотике решения одного дифференциального уравнения первого порядка с непрерывным потенциалом // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весенней мат. шк. «Понтрягинские чтения XXI». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж гос. ун-та, 2010. С. 3–9.
6. Хромов А. П. Об асимптотике решений уравнения Дирака // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж : Изд.-полиграф. центр Воронеж гос. ун-та, 2011. С. 346–347.
7. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114 (156), № 3. С. 378–405.
8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М. : Наука, 1965. 445 с.

УДК 517.51

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ПО СИСТЕМЕ ХААРА НА НУЛЬ-МЕРНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ



Н. Е. Комиссарова

Саратовский государственный университет
E-mail: NataliyaKomissarov@yandex.ru

На компактной нуль-мерной группе $(G, \dot{+})$ рассматриваются функции Лебега по системе Хаара. Указываются случаи, когда они являются постоянными, а также получаются двусторонние оценки для функций Лебега.

Ключевые слова: компактные нуль-мерные группы, функции Хаара, функции Лебега.

Lebesgue Functions for Haar System on Compact Zero-Dimensional Group

N. E. Komissarova

In this article we discuss Lebesgue functions for Haar system on compact zero-dimensional group. We find cases when they are constant, also we find two-sided estimates for Lebesgue functions.

Key words: compact zero-dimensional group, Haar functions, Lebesgue functions.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из [1] известно, что для констант Лебега L_N по системе характеров компактной нуль-мерной группы G справедливо неравенство $L_N \leq C \log N$. С. Ф. Лукомским в работе [2] были получены двусторонние оценки констант Лебега, причём в случае $p_n \leq p$ одинаковые по порядку. В [3] Б. И. Голубов рассматривал на отрезке $[0, 1]$ класс полных ортогональных систем X , построенных по последовательности чисел $P = (p_n)_{n=0}^{\infty}$. Для функций Лебега $L_M(x)$, $M = jm_N + q$ по таким системам получил оценку сверху $L_M(x) \leq C \log p_N$. Функции Хаара на произвольной нуль-мерной компактной группе G были определены в работе [4]. Причём если отобразить группу G на отрезок $[0, 1]$ с помощью естественного отображения, то функции Хаара, определённые в [4] на нуль-мерной группе с точностью до меры нуль, совпадают с функциями из [3]. В данной работе изучаются функции Лебега по системе Хаара на компактной нуль-мерной группе и даются для них двусторонние оценки.

Пусть $(G, \dot{+})$ — нуль-мерная компактная абелева группа, топология в которой задана системой вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \dots$ таких, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$, $(G_n/G_{n+1})^{\#} = p_n$, где p_n — простые числа; μ — мера Хаара на G . Положим $m_0 = 1$, $m_{n+1} = p_n m_n$. Пусть далее $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ — базисная последовательность, т. е. $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Напомним, что непрерывная функция $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется характером, если 1) для всех $x \in G$ выполняется $|\chi(x)| = 1$, 2) $\chi(x \dot{+} y) = \chi(x)\chi(y)$.



Совокупность характеров χ , для которых $\chi(G_n) = 1$, называют аннулятором группы G_n и обозначают G_n^\perp .

Известно, что группа характеров группы G представляет из себя объединение возрастающей последовательности аннуляторов $\{1\} = G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp \subset \dots$. При любом $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Функцию r_n будем называть функцией Радемахера. Для функций Радемахера r_n имеем $r_n(G_{n+1}) = 1$.

В работе [2] была доказана лемма, в которой содержатся свойства функций Радемахера, а именно

Лемма 1. Пусть G_n/G_{n+1} — фактор-группа, $G_{n+1} \dot{+} g_n j \in G_n/G_{n+1}$ ($j = 0, 1, \dots, p_n - 1$) — смежные классы. Тогда

- 1) $r_n(t)$ постоянны на каждом смежном классе $G_{n+1} \dot{+} g_n j$;
- 2) $r_n(G_{n+1} \dot{+} g_n j)$ есть различные корни из единицы порядка p_n ;
- 3) $\sum_{j=0}^{p_n-1} r_n^j(t) = \begin{cases} p_n, & t \in G_{n+1}, \\ 0, & t \in G_n \setminus G_{n+1}; \end{cases}$
- 4) $\prod_{k=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{p_k-1} (r_k(t))^j = \begin{cases} m_\nu, & t \in G_{\nu+1}, \\ 0, & t \in G_\nu \setminus G_{\nu+1}. \end{cases}$

Определение. Функции H_{jm_n+k} ($j = \overline{1, p_n - 1}, k = \overline{0, m_n - 1}$), определённые равенствами

$$H_0 \equiv 1, H_{jm_n+k}(x) = \sqrt{m_n} r_n^j(x \dot{-} h_k) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(x) = \sqrt{m_n} r_n^j(x \dot{-} h_k) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} h_k),$$

где $h_k \in G$ и $k \in \mathbb{N}_0$, связаны соотношениями

$$h_k = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1} \Leftrightarrow k = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_{n-1} m_{n-1} \quad (a_i = \overline{0, p_i - 1}),$$

$\mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(x)$ — характеристическая функция множества $G_n \dot{+} h_k$, будем называть функциями Хаара на нуль-мерной группе.

Функции H_0, H_{jm_n+k} были введены в работе [4]. Там же было доказано, что они образуют ортонормированную систему функций на G .

Обозначим через $L_M(x) = \int_G \left| \sum_{k=0}^{M-1} H_k(x) \overline{H_k(t)} \right| d\mu(t)$ ($N = 1, 2, \dots$) функции Лебега по системе Хаара. Любое число $M \in \mathbb{N}$ представимо в виде $M = b_N m_N + q$, где $1 \leq b_N \leq p_N - 1, 0 \leq q \leq m_N - 1$.

При доказательстве основных результатов данной работы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. Пусть дан отрезок $[a, b]$, причём $1 < a < b$. Тогда если $l, l + 1, \dots, l + k$ — все целые числа, попадающие в данный отрезок, расположенные в порядке возрастания, l — наименьшее из этих чисел, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} + \dots + \frac{1}{l+k} \geq \frac{1}{3} \int_a^b \frac{dx}{x}.$$

Лемма 3. Для функций Лебега $L_M(x)$ справедливо неравенство

$$L_M(x) \geq \frac{1}{p_N} \quad (M = b_N m_N + q).$$

Доказательство. Из определения функций Хаара следует, что

$$\begin{aligned} \int_G \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} \right|^2 d\mu(t) &= \sum_{l=0}^{M-1} |H_l(x)|^2 \geq \sum_{l=0}^{m_N-1} |H_l(x)|^2 = \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=m_j}^{m_{j+1}-1} |H_l(x)|^2 = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} m_j (p_j - 1) = m_N. \end{aligned}$$

Поэтому

$$m_N \leq \int_G \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} \right|^2 d\mu(t) \leq \int_G \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} \right| d\mu(t) \sup_t \left| \sum_{l=0}^{M-1} H_l(x) H_l(t) \right| \leq$$



$$\leq L_M(x) \sup_t \sum_{l=0}^{m_{N+1}-1} |H_l(x)H_l(t)| \leq L_M(x) \left(1 + \sum_{j=0}^N \sum_{l=m_j}^{m_{j+1}-1} |H_l(x)|^2 \right) = L_M(x)m_{N+1}.$$

Отсюда находим, что $L_M(x) \geq \frac{m_N}{m_{N+1}} = \frac{1}{p_N}$. □

Замечание. Полученная оценка конечно является неточной, особенно при $p_N \rightarrow \infty$. В дальнейшем мы получим при $p_N \rightarrow \infty$ оценку снизу, точную по порядку.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы получим двусторонние оценки для функций Лебега при некоторых ограничениях на p_N и b_N , которые не являются принципиальными.

Теорема 1. Пусть число M представлено в виде $M = b_N m_N + q$, где $1 \leq b_N \leq p_N - 1$, $0 \leq q \leq m_N - 1$. Тогда 1) если $M = m_N$, то $L_{m_N} \equiv 1$, 2) если $M = b_N m_N$, то $L_{b_N m_N}(x) = \text{const}$.

Доказательство. 1) Рассмотрим функции Лебега с номерами $M = m_N$.

$$L_{m_N} = \int_G |K_{m_N}(x, t)| d\mu(t) = \int_G \left| \sum_{l=0}^{m_N-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} \right| d\mu(t).$$

Выпишем ядро Лебега и преобразуем его:

$$\begin{aligned} K_{m_N}(x, t) &= 1 + \sum_{l=1}^{m_N-1} H_l(x) \overline{H_l(t)} = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} \sum_{k=0}^{m_n-1} m_n r_n^j(x \dot{-} h_k) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(x) \overline{r_n^j(t \dot{-} h_k)} \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(t) = \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} m_n r_n^j(x \dot{-} h_k \dot{+} h_k \dot{-} t) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(x) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(t) \right) = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} m_n r_n^j(x \dot{-} t) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} t). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая инвариантность интеграла относительно сдвига, получим

$$\begin{aligned} L_{m_N}(x) &= \int_G \left| 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} m_n r_n^j(x \dot{-} t) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} t) \right| d\mu(t) = \\ &= \int_G \left| 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} m_n \overline{r_n^j(t \dot{-} x)} \mathbf{1}_{G_n}(t \dot{-} x) \right| d\mu(t) = \int_G \left| 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} m_n \overline{r_n^j(t)} \mathbf{1}_{G_n}(t) \right| d\mu(t). \end{aligned}$$

Так как $\sum_{j=1}^{p_n-1} \overline{r_n^j(t)} \mathbf{1}_{G_n}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin G_n, \\ -1, & t \in G_n \setminus G_{n+1}, \\ p_n - 1, & t \in G_{n+1}, \end{cases}$ то получим

$$L_{m_N} = \int_G \left| 1 + \sum_{n=0}^{N-1} [(m_{n+1} - m_n) \mathbf{1}_{G_{n+1}}(t) - m_n \mathbf{1}_{G_n \setminus G_{n+1}}(t)] \right| d\mu(t) = \int_G |\mathbf{1}_{G_N}(t) m_N| d\mu(t) = 1.$$

2) Пусть теперь $M = b_N m_N$ ($b_N \geq 2$). В этом случае

$$K_M(x, t) = K_{b_N m_N}(x, t) = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} \sum_{k=0}^{m_n-1} H_{j m_n + k}(x) \overline{H_{j m_n + k}(t)} + \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} H_{j m_N + k}(x) \overline{H_{j m_N + k}(t)}.$$

И для функций Лебега получим выражение следующего вида:

$$\begin{aligned} L_M(x) = L_{b_N m_N}(x) &= \int_G \left| 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} \sum_{k=0}^{m_n-1} m_n r_n^j(x \dot{-} h_k) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(x) \overline{r_n^j(t \dot{-} h_k)} \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_k}(t) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} m_N r_N^j(x \dot{-} h_k) \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(x) \overline{r_N^j(t \dot{-} h_k)} \mathbf{1}_{G_N \dot{+} h_k}(t) \right| d\mu(t) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_G \left| \mathbf{1}_{G_N}(t) m_N + \sum_{j=1}^{b_N-1} m_N r_N^j(x \cdot t) \mathbf{1}_{G_N}(x \cdot t) \right| d\mu(t) = \\
 &= \int_G \left| \mathbf{1}_{G_N}(t) m_N + \sum_{j=1}^{b_N-1} m_N \bar{r}_N^j(t) \mathbf{1}_{G_N}(t) \right| d\mu(t) = \int_G \left| \mathbf{1}_{G_N}(t) m_N \sum_{j=0}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| d\mu(t).
 \end{aligned}$$

И снова $L_M(x) = L_{b_N m_N} = \text{const}$, т. е. не зависит от x . \square

Теорема 2. Если $M = b_N m_N + q$ ($p_N > 2$, $2 \leq b_N \leq p_N - 1$, $0 \leq q \leq m_N - 1$), то для всякого $x \in G$ справедливо неравенство

$$\max \left(\frac{1}{3\sqrt{2}\pi} \frac{\ln 3}{\ln 5} \ln \nu_N - 2, \frac{1}{p_N} \right) \leq L_M(x) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln \nu_N + 5,$$

где $\nu_N = \min\{b_N - 1, p_N - (b_N - 1)\}$.

Доказательство. Если $M = b_N m_N + q$, то ядро Лебега будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 K_M(x, t) &= 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{p_n-1} \sum_{k=0}^{m_n-1} H_{j m_n+k}(x) \overline{H_{j m_n+k}(t)} + \\
 &+ \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} H_{j m_N+k}(x) \overline{H_{j m_N+k}(t)} + \sum_{k=0}^{q-1} H_{b_N m_N+k}(x) \overline{H_{b_N m_N+k}(t)} = 1 + S_1 + S_2 + S_3.
 \end{aligned}$$

Отметим, что последняя сумма есть функция от x , так как при некоторых значениях аргумента x мы попадаем в смежные классы, которые не участвуют в суммировании. Будем считать, что $b_N > 1$, так как при $b_N = 1$ сумма $S_2 = 0$. Введём следующие обозначения:

$$I_1 = \int_G |1 + S_1| d\mu(t), \quad I_2 = \int_G |S_2| d\mu(t), \quad I_3 = \int_G |S_3| d\mu(t).$$

Интеграл I_1 уже вычислен при доказательстве теоремы 1: $I_1 = 1$.

Оценим интеграл I_3 :

$$I_3 = \int_G \left| \sum_{k=0}^{q-1} H_{b_N m_N+k}(x) \overline{H_{b_N m_N+k}(t)} \right| d\mu(t) = \int_G \left| \sum_{k=0}^{q-1} m_N r_N^{b_N}(x) \mathbf{1}_{G_N+h_k}(x) \bar{r}_N^{b_N}(t) \mathbf{1}_{G_N+h_k}(t) \right| d\mu(t).$$

Если $x \in G_N+h_l$, то

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{q-1} m_N r_N^{b_N}(x) \mathbf{1}_{G_N+h_k}(x) \bar{r}_N^{b_N}(t) \mathbf{1}_{G_N+h_k}(t) = \\
 &= \begin{cases} m_N r_N^{b_N}(x) \mathbf{1}_{G_N+h_l}(x) \bar{r}_N^{b_N}(t) \mathbf{1}_{G_N+h_l}(t), & \text{если } h_l \in \bigcup_{k=0}^{q-1} G_N+h_k, \\ 0, & \text{если } h_l \notin \bigcup_{k=0}^{q-1} G_N+h_k. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Тогда если $h_l \notin \bigcup_{k=0}^{q-1} G_N+h_k$, то интеграл $I_3 = 0$. В противном случае, так как $\mathbf{1}_{G_N+h_k}(x) \mathbf{1}_{G_N+h_k}(t) = \mathbf{1}_{G_N}(x \cdot t)$, имеем

$$I_3 = \int_G \left| m_N r_N^{b_N}(x \cdot t) \mathbf{1}_{G_N}(x \cdot t) \right| d\mu(t) = \int_G m_N |\bar{r}_N^{b_N}(t)| \mathbf{1}_{G_N}(t) d\mu(t) = 1,$$

т. е. I_3 принимает значения 0 или 1, и справедливо $I_3 \leq 1$.

Теперь будем рассматривать интеграл I_2 .

$$I_2 = \int_G \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} H_{j m_N+k}(x) \overline{H_{j m_N+k}(t)} \right| d\mu(t) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_G \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \sum_{k=0}^{m_N-1} m_N r_N^j(x) \mathbf{1}_{G_N+h_k} \bar{r}_N^j(t) \mathbf{1}_{G_N+h_k}(t) \right| d\mu(t) = \\
 &= \int_G \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} m_N \bar{r}_N^j(t-x) \mathbf{1}_{G_N}(t-x) \right| d\mu(t) = m_N \int_{G_N} \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| d\mu(t).
 \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим подынтегральное выражение, учитывая, что $\bar{r}_N(t) = \exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right)$ при $t \in G_{N+1} + lg_N$ — одно из значений корня из единицы порядка p_N :

$$\left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| = \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \exp\left(\frac{2\pi ilj}{p_N}\right) \right| = \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1} \right|.$$

Сначала рассмотрим знаменатель:

$$\left| \exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1 \right| = 2 \left| \sin \frac{\pi l}{p_N} \right|$$

и $4l/p_N \leq |\exp(2\pi il/p_N) - 1| \leq 2\pi l/p_N$.

Оценка снизу справедлива, если $\pi l/p_N \in (0; \pi/2)$, т. е. при $l \in [1, (p_N - 1)/2]$.

Следовательно,

$$\frac{p_N}{2\pi l} \leq \frac{1}{\left| \exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1 \right|} \leq \frac{p_N}{4l}.$$

Если $l \in \left[\frac{p_N+1}{2}, p_N - 1\right]$, то $2 \left| \sin \frac{\pi l}{p_N} \right| \geq 4 \frac{p_N-l}{p_N}$.

Выражение $\left| \exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) - 1 \right| \geq \sqrt{2}$, если

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \frac{2\pi l(b_N-1)}{p_N} \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad (k = \overline{0, b_N-1}),$$

т. е.

$$\frac{p_N}{(b_N-1)} \left(k + \frac{1}{4}\right) \leq l \leq \frac{p_N}{(b_N-1)} \left(k + \frac{3}{4}\right), \quad k = \overline{0, b_N-1},$$

или если

$$l \in E = \bigsqcup_{k=0}^{b_N-1} \left(\frac{p_N}{b_N-1} \left(k + \frac{1}{4}\right), \frac{p_N}{b_N-1} \left(k + \frac{3}{4}\right) \right).$$

При этом при всех $l \in E$

$$\left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1} \right| \geq \frac{p_N}{\sqrt{2}\pi l}.$$

Оценка сверху для подынтегрального выражения получается в виде

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1} \right| \leq \frac{p_N}{2l}, & \text{если } l \in [1, \frac{p_N-1}{2}] \text{ и } l \in E, \\ \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1} \right| \leq \frac{p_N}{2\sqrt{2}l}, & \text{если } l \in [1, \frac{p_N-1}{2}] \text{ и } l \notin E, \\ \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1} \right| \leq \frac{p_N}{2(p_N-l)}, & \text{если } l \in [\frac{p_N+1}{2}, p_N-1] \text{ и } l \in E, \\ \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi il(b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}\right) - 1} \right| \leq \frac{p_N}{2\sqrt{2}(p_N-l)}, & \text{если } l \in [\frac{p_N+1}{2}, p_N-1] \text{ и } l \notin E. \end{array} \right.$$



Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{p_N-1} \left| \frac{\exp\left(\frac{2\pi i l (b_N-1)}{p_N}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi i l}{p_N}\right) - 1} \right| = \sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}} \dots + \sum_{l=\frac{p_N+1}{2}}^{p_N-1} \dots \leq \\ & \leq \sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{p_N}{2l} + \sum_{l=\frac{p_N+1}{2}}^{p_N-1} \frac{p_N}{2(p_N-l)} = 2 \sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{p_N}{2l} = p_N \sum_{l=1}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{1}{l}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл I_2 снизу.

$$\begin{aligned} I_2 &= m_N \int_{G_N} \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| d\mu(t) = m_N \sum_{l=0}^{p_N-1} \int_{G_{N+1} + l g_N} \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| d\mu(t) = \\ &= \frac{b_N-1}{p_N} + m_N \sum_{l=1}^{p_N-1} \int_{G_{N+1} + l g_N} \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| d\mu(t) \geq \frac{b_N-1}{p_N} + \sum_{l \in E} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{l}. \end{aligned}$$

Рассмотрим последнюю сумму отдельно. Предварительно вычислим:

$$I_1^k = \int_{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})}^{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{5}{4})} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{k+\frac{5}{4}}{k+\frac{1}{4}}\right), \quad I_2^k = \int_{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})}^{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4})} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{k+\frac{3}{4}}{k+\frac{1}{4}}\right).$$

Очевидно, что последовательность I_1^k/I_2^k ограничена. Легко видеть, что она монотонно убывает и $\max_{k=0, b_N-1} I_1^k/I_2^k$ достигается при $k=0$. Следовательно, $I_1^k/I_2^k \leq \ln 5/\ln 3$, т. е. $I_2^k \geq I_1^k \ln 3/\ln 5$.

Перейдём к оценке суммы. Используем лемму 2:

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_{l \in E} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l \in E} \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{b_N-1} \sum_{l=\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})}^{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4})} \frac{1}{l} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{b_N-1} \frac{1}{3} \int_{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})}^{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4})} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\ln 3}{\ln 5} \sum_{k=0}^{b_N-1} \int_{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})}^{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{5}{4})} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\ln 3}{\ln 5} \int_{\frac{p_N}{b_N-1} \frac{1}{4}}^{\frac{p_N}{b_N-1}(b_N-1+\frac{1}{4})} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\ln 3}{\ln 5} \left(\ln\left(b_N-1+\frac{1}{4}\right) + \ln 4 \right) \geq \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\ln 3}{\ln 5} \ln(b_N-1). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку вида

$$I_2 \geq \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\ln 3}{\ln 5} \ln(b_N-1).$$

В итоге для функций Лебега получаем неравенство

$$L_M(x) \geq I_2 - I_1 - I_3 \geq I_2 - 2 \geq \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\ln 3}{\ln 5} \ln(b_N-1) - 2.$$

Оценим теперь I_2 сверху.

$$\begin{aligned} I_2 &= m_N \int_{G_N} \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| d\mu(t) = \frac{b_N-1}{p_N} + m_N \sum_{l=1}^{p_N-1} \int_{G_{N+1} + l g_N} \left| \sum_{j=1}^{b_N-1} \bar{r}_N^j(t) \right| d\mu(t) \leq \\ &\leq \frac{b_N-1}{p_N} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \in E}}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{1}{2l} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \notin E}}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}l} + \sum_{\substack{l=\frac{p_N+1}{2} \\ l \in \bar{E}}}^{p_N-1} \frac{1}{2(p_N-l)} + \sum_{\substack{l=\frac{p_N+1}{2} \\ l \notin \bar{E}}}^{p_N-1} \frac{1}{2\sqrt{2}(p_N-l)} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{b_N - 1}{p_N} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \in E}}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{1}{l} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \notin E}}^{\frac{p_N-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}l} = \frac{b_N - 1}{p_N} + \sum_{k=0}^{b_N-2} \sum_{\substack{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4}) \\ \frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})}} \frac{1}{l} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{b_N-2} \sum_{\substack{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{5}{4}) \\ \frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4})}} \frac{1}{l} \leq \\
 &\leq \frac{b_N - 1}{p_N} + \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4}) - \frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})}{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{1}{4})} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{5}{4}) - \frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4})}{\frac{p_N}{b_N-1}(k+\frac{3}{4})} = \\
 &= \frac{b_N - 1}{p_N} + \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{1}{2(k+\frac{1}{4})} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{b_N-2} \frac{1}{2(k+\frac{3}{4})} \leq \frac{b_N - 1}{p_N} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln(b_N - 1) + 2.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L_M \leq I_1 + I_2 + I_3 \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln(b_N - 1) + 5.$$

В итоге для функций Лебега при $b_N \geq 2$ получаем двусторонние оценки вида

$$\frac{1}{3\sqrt{2}\pi} \frac{\ln 3}{\ln 5} \ln(b_N - 1) - 2 \leq L_M \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln(b_N - 1) + 5.$$

Если $b_N = 1$, то в этом неравенстве надо опустить логарифм. При этом учитывалось условие $b_N \leq \frac{p_N-1}{2}$.

В случае $b_N > \frac{p_N-1}{2}$, принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned}
 &\exp\left(-\frac{2\pi il(b_N - 1)}{p_N}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi il[(b_N - 1) - p_N + p_N]}{p_N}\right) = \\
 &= \exp(-2\pi il) \cdot \exp\left(\frac{2\pi il(p_N - (b_N - 1))}{p_N}\right) = \exp\left(\frac{2\pi il}{p_N}(p_N - (b_N - 1))\right)
 \end{aligned}$$

и проводя аналогичные рассуждения, получаем неравенство того же вида, что и в первом случае.

Итак, при $1 < b_N < p_N - 1$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}\pi} \frac{\ln 3}{\ln 5} \ln \nu_N - 2 \leq L_M(x) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln \nu_N + 5,$$

где $\nu_N = \min\{b_N - 1, p_N - (b_N - 1)\}$. Используя лемму 3 отсюда получаем требуемое неравенство. \square

Замечание. Теорема 2 сформулирована и доказана для $p_N > 2$. При $p_N = 2$ для b_N остается единственная возможность $b_N = 1$. В этом случае, как мы видели из доказательства, $S_2 = 0$, и в окончательном неравенстве пропадает логарифм.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а).

Библиографический список

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : ЭЛМ, 1981.
2. Lukomskii S. F. On Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian groups // East J. of Approximation. 2009. Vol. 15, № 2. P. 219–233.
3. Голубов Б. И. Об одном классе полных ортогональных систем // Сибирский мат. журн. 1968. Т. 9, № 2. С. 297–314.
4. Лукомский С. Ф. О рядах Хаара на компактных нуль-мерных группах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 14–19.



УДК 514.133

ОВАЛЬНЫЕ ЛИНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Н. Ромакина

Саратовский государственный университет
E-mail: romakinaln@mail.ru

Проведена классификация действительных невырожденных линий второго порядка гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны. Доказано, что основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой (невыпуклой) определяют на \hat{H} семь типов несобственных и восемь типов собственных овальных линий. Для каждого типа собственных овальных линий построен присоединенный проективный репер и получено каноническое уравнение.

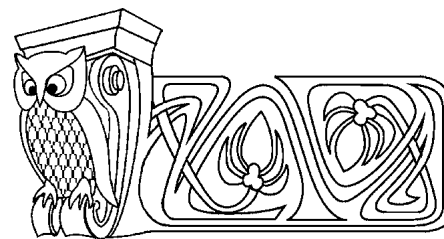
Ключевые слова: гиперболическая плоскость \hat{H} положительной кривизны, овальная линия плоскости \hat{H} , классификация собственных овальных линий плоскости \hat{H} .

ВВЕДЕНИЕ

1. Гиперболическую плоскость \hat{H} положительной кривизны рассматриваем в проективной интерпретации Кэли–Клейна как внешнюю относительно овальной линии γ , называемой абсолют, — область проективной плоскости P_2 , на которой в качестве прямых приняты эллиптические прямые и лежащие в данной области части гиперболических и параболических прямых [1, 2]. В работах [3, 4] построены простые разбиения плоскости \hat{H} , обладающие симметриями, ячейкой которых является простой 4-контур [5]. При построении разбиений использованы *циклы*, линии второго порядка, являющиеся траекториями движений плоскости \hat{H} . В дальнейшем развитии теории разбиений, в частности при построении неизотропных разбиений плоскости \hat{H} , будут использованы и другие линии второго порядка этой плоскости. Кроме того, интерес к линиям второго порядка плоскости \hat{H} как плоскости постоянной положительной кривизны, реализуемой также на сфере действительного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве, возникает в связи с решением проблемы Кеплера (см., например, [6]).

В данной работе проведем классификацию невырожденных действительных линий второго порядка плоскости \hat{H} и дадим позиционные определения этих линий, характеризующие положение линии по отношению к абсолют. На внутренней относительно абсолютной линии γ области плоскости P_2 реализуется полная плоскость Лобачевского, или гиперболическая плоскость отрицательной кривизны. Плоскости Лобачевского и \hat{H} имеют общую фундаментальную группу G преобразований, являющуюся группой автоморфизмов овальной линии проективной плоскости. Классификация невырожденных действительных линий второго порядка плоскости Лобачевского в проективной интерпретации Кэли–Клейна известна [1]. Согласно данной классификации на плоскости Лобачевского существует 12 инвариантных относительно группы G типов овальных линий, причем линии семи типов принадлежат овальным линиям проективной плоскости P_2 , содержащим внешние относительно абсолют точки, т. е. частично принадлежащим и плоскости \hat{H} . Указанная классификация овальных линий основана на классификации коллинеаций, являющихся произведением полярных преобразований двух овальных линий, т. е. на рассмотрении *геометрических ковариантов* двух квадрик проективной плоскости, а именно общих точек и общих касательных овальной линии с абсолют. Назовем эти геометрические коварианты *основными*. При построении классификации учтены количество основных геометрических ковариантов и их природа (вещественность или мнимость).

Собственные овальные линии плоскости \hat{H} в рассмотренной классификации не указаны. В данной работе докажем, что основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой определяют точно восемь типов собственных для плоскости \hat{H} овальных линий. Для каждой собственной



Oval Lines of the Hyperbolic Plane of Positive Curvature

L. N. Romakina

The classification of real nondegenerate second-order lines of the hyperbolic plane \hat{H} of positive curvature is obtained. It is proved that the basic geometric covariants and the property of line to be convex (nonconvex) determine seven types of intrinsic oval lines and eight types of nonintrinsic oval line on \hat{H} . For every intrinsic oval lines the associate projective frame is constructed and the canonical equation is received.

Key words: hyperbolic plane \hat{H} of positive curvature, oval line of the plane \hat{H} , classification of intrinsic oval lines of the plane \hat{H} .



овальной линии плоскости \hat{H} построим присоединенный канонический репер или семейство таких реперов и найдем каноническое уравнение линии. Метрические свойства линий докажем в следующих работах.

Названия несобственных овальных линий плоскости \hat{H} , употребляющиеся для линий в геометрии Лобачевского, не соответствуют свойствам этих линий в геометрии плоскости \hat{H} . Поэтому за каждой несобственной линией плоскости \hat{H} закрепим новый термин. По аналогии с названиями линий второго порядка евклидовой плоскости линии, не имеющие общих действительных точек с абсолютом, называем эллипсами, линии, касающиеся абсолюта, — параболами, линии, пересекающие абсолют в двух вещественных точках, — гиперболами.

2. В работе используем два типа канонических реперов плоскости \hat{H} .

Каноническим репером первого типа плоскости \hat{H} назовем проективный репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины которого образуют автополярный трехвершинник первого рода относительно абсолютной линии γ , а единичная точка принадлежит касательным, проведенным к линии γ из вершин A_1 и A_2 .

Каноническим репером второго типа плоскости \hat{H} назовем проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины которого образуют автополярный трехвершинник второго рода относительно линии γ и единичная точка принадлежит абсолюту.

На примере реперов второго типа покажем, что на \hat{H} семейство $U_*^3 (U^3)$ всех канонических реперов первого (второго) типа зависит от трех параметров.

Пусть $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ — канонический репер второго типа плоскости \hat{H} . Вершины A_1, A_2 и единичная точка E репера принадлежат абсолютной линии γ , следовательно, положение каждой из этих точек однозначно определено заданием одного параметра. Положение первых двух вершин репера однозначно определяет положение третьей его вершины, как полюса прямой, соединяющей вершины A_1, A_2 , относительно абсолютной линии. Таким образом, фиксация всех точек репера R требует закрепления трех параметров, и семейство U^3 — трехпараметрическое.

В каждом репере R^* (R) первого (второго) типа линия γ задана уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (x_1 x_2 - x_3^2 = 0). \quad (1)$$

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОВАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ \hat{H}

Множество σ точек плоскости \hat{H} назовем *невыврожденной действительной линией второго порядка*, или *овальной линией* плоскости \hat{H} , если существует овальная линия σ' проективной плоскости P_2 : $\sigma = \sigma' \cap \hat{H}$.

Если при этом $\sigma' = \sigma \cup \Gamma$, где Γ — множество общих действительных точек линии σ' с абсолютом, то линию σ назовем *собственной* овальной линией плоскости \hat{H} . Множество Γ содержит не более двух точек, которые вместе с мнимо-сопряженными точками множества $\sigma' \cap \gamma$ будем называть *несобственными* точками линии σ . Если для собственной овальной линии σ плоскости \hat{H} множество Γ пустое, то линию σ назовем *конечной* овальной линией плоскости \hat{H} .

Пусть Q' — внутренность линии σ' , множество $Q = Q' \cap \hat{H}$ назовем *внутренностью* линии σ на \hat{H} . Каждую точку множества Q назовем *внутренней* относительно σ . Овальную линию σ плоскости \hat{H} назовем *выпуклой* (*невыпуклой*), если выпуклым (невыпуклым) является множество Q .

Под *выпуклым множеством* A плоскости \hat{H} понимаем множество, любые две точки которого можно соединить таким отрезком плоскости \hat{H} (эллиптической, гиперболической или параболической прямой), что все его точки принадлежат A .

Так как каждая овальная линия плоскости P_2 является выпуклой, то овальная линия σ плоскости \hat{H} является выпуклой тогда и только тогда, когда множество Q' не содержит точек абсолютной линии γ .

Будем говорить, что овальная линия σ плоскости \hat{H} *касается абсолюта в точке* K , если линии σ' и γ касаются в точке K .



2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КЛАССИФИКАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ОВАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПЛОСКОСТИ \hat{H}

Пусть σ — собственная овальная линия плоскости \hat{H} , а σ' — содержащая ее овальная линия проективной плоскости P_2 . В каждом проективном репере плоскости P_2 линия σ' задана общим уравнением вида

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \quad \det \|a_{ij}\| \neq 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Докажем, что линия σ принадлежит одному из восьми типов овальных линий плоскости \hat{H} , определенных основными геометрическими ковариантами и свойством выпуклости линии.

I. Предположим, что линия σ' имеет, по крайней мере, одну общую действительную точку с абсолютной линией γ . Поместим в эту точку координатную вершину A_2 канонического репера R , выделяя тем самым из семейства U^3 двухпараметрическое подсемейство U^2 . В точке A_2 линии σ и γ имеют общую касательную ($A_2A_3 : x_1 = 0$), так как в противном случае линия σ' содержит внутренние относительно абсолюта точки, и, следовательно, линия σ не является собственной для \hat{H} . Общее уравнение линии σ' в реперах R семейства U^2 принимает вид (2) при $a_{22} = 0, a_{23} = 0$:

$$a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0. \quad (3)$$

Координаты общих с абсолютом точек линии σ' являются решениями уравнения (3) и второго уравнения из (1).

Рассмотрим отдельно возможные случаи: $a_{11} = 0$ и $a_{11} \neq 0$.

1. При $a_{11} = 0$ линия σ' задана уравнением

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0 \quad (4)$$

и содержит еще одну действительную общую с абсолютом точку A_1 .

1.1. Если в уравнении (4) линии $\sigma' a_{13} = a_{33} + 2a_{12} = 0$, то σ' совпадает с абсолютной линией γ , этот случай нас не интересует.

1.2. При $a_{13} = 0, a_{33} + 2a_{12} \neq 0$ уравнение (4) можно записать в виде

$$qx_3^2 - x_1x_2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 1, \quad q \neq 0. \quad (5)$$

Линия (5) касается абсолюта в точках A_1, A_2 . Если $q > 1$, то линия (5) принадлежит плоскости Лобачевского и согласно известной классификации является эквидистантой.

Для $q < 1$ возможны варианты. Точка A_3 как точка пересечения действительных касательных ($x_1 = 0, x_2 = 0$) к линии (5) в точках A_2, A_1 является внешней относительно этой линии. Учитывая это, получаем, что при $0 < q < 1$ ($q < 0$) координаты $(x_i), i = 1, 2, 3$, каждой внутренней относительно линии (5) точки удовлетворяют неравенству

$$qx_3^2 - x_1x_2 < 0 \quad (qx_3^2 - x_1x_2 > 0). \quad (6)$$

Если $0 < q < 1$ ($q < 0$), то каждая точка абсолютной линии γ является внутренней (внешней) относительно линии (5), т.е. линия (5) является невыпуклой (выпуклой).

Невыпуклую (выпуклую) овальную линию, касающуюся в двух действительных точках абсолюта, назовем *гиперболическим (эллиптическим) циклом*.

Уравнение (5) при $0 < q < 1$ ($q < 0$) назовем *каноническим* уравнением гиперболического (эллиптического) цикла плоскости \hat{H} в репере второго типа. Неравенство (6) при $0 < q < 1$ ($q < 0$) определяет внутренность гиперболического (эллиптического) цикла (5).

1.3. При $a_{13} \neq 0, a_{33} + 2a_{12} = 0$ уравнение (4) можно записать в виде

$$x_3^2 - x_1x_2 - px_1x_3 = 0, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p \neq 0. \quad (7)$$

На линии (7) найдутся точки и внешние, и внутренние относительно абсолюта. Например, при любом p точки $H_{1,2} \left(2 : 2 : p \pm \sqrt{p^2 + 4} \right)$ принадлежат различным областям относительно абсолютной линии γ . Следовательно, линия (7) не является собственной для плоскости \hat{H} .



1.4. При $a_{13} \neq 0$, $a_{33} + 2a_{12} \neq 0$ линия (4) имеет три различные, общие с абсолютом точки: A_1 , A_2 , $A((a_{33} + 2a_{12})^2 : 4a_{13}^2 : -2a_{13}(a_{33} + 2a_{12}))$, следовательно, содержит и внутренние относительно абсолюта точки, т.е. σ не является собственной на \hat{H} .

Таким образом, в случае $a_{11} = 0$ получили два типа собственных овальных линий плоскости \hat{H} : гиперболический и эллиптический циклы.

2. При $a_{11} \neq 0$ линия σ' (3) пересекает абсолют в точках с координатами

$$\left((a_{13} \pm \sqrt{D})^2 : a_{11}^2 : -a_{11}(a_{13} \pm \sqrt{D}) \right), \quad D = a_{13}^2 - 2a_{11}a_{12} - a_{11}a_{33}. \quad (8)$$

2.1. Пусть $D = 0$. Если при этом $a_{13} = 0$, то $a_{33} + 2a_{12} = 0$, и уравнение (3) можно записать в виде

$$qx_1^2 - x_3^2 + x_1x_2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 0. \quad (9)$$

Линия (9) касается абсолюта в четырежды взятой точке A_2 .

При $q < 0$ ($q > 0$) все точки линии (9), за исключением точки касания, находятся внутри (вне) абсолюта. Следовательно, при $q < 0$ линия является орициклом плоскости Лобачевского, а при $q > 0$ — собственной овальной линией на \hat{H} .

Овальную линию плоскости \hat{H} , касающуюся абсолюта в четырех слившихся точках, назовем *орициклом*.

Уравнение (9) при $q > 0$ назовем *каноническим* уравнением орицикла плоскости \hat{H} в репере второго типа.

Точка A_3 лежит на касательной A_2A_3 к орициклу (9), следовательно, является внешней относительно него. С учетом этого находим неравенство, определяющее внутренность орицикла (9): $qx_1^2 - x_3^2 + x_1x_2 > 0$. Так как для орицикла плоскости \hat{H} в уравнении (9) $q > 0$, то вся абсолютная линия, за исключением точки касания, лежит внутри орицикла.

Если $a_{13} \neq 0$, то, так как $D = 0$, координаты (8) определяют одну действительную общую точку $K(a_{13}^2 : a_{11}^2 : -a_{11}a_{13})$ линии σ' (9) с абсолютом, отличную от точки A_2 . Касательная $k(a_{11}^2 : a_{13}^2 : 2a_{11}a_{13})$ к линии σ' в точке K является общей касательной с абсолютом. Следовательно, линия (9) касается в двух действительных точках абсолюта, т.е. σ является либо гиперболическим, либо эллиптическим циклом.

2.2. Если $D > 0$, то координаты (8) определяют две различные действительные точки $K_{1,2}$ пересечения линии σ с абсолютом. Если ни одна из точек $K_{1,2}$ не совпадает с точкой A_2 , то линия σ' имеет внутренние относительно абсолюта точки, т.е. σ не является собственной линией плоскости \hat{H} . Если одна из точек $K_{1,2}$ совпадает с A_2 , то другая точка не является точкой касания линий σ' и γ . В этом случае на σ' также есть внутренние относительно абсолюта точки, и σ не является собственной на \hat{H} .

2.3. Если $D < 0$, то кроме точки A_2 линия σ' имеет две общие мнимо-сопряженные точки $J_{1,2}$ с абсолютом. В этом случае линии σ' и γ можно рассматривать как две окружности расширенной евклидовой плоскости с абсолютными точками $J_{1,2}$. Поскольку A_2 — точка касания σ' и γ , то возможны только два варианта расположения линий σ' и γ : касание внутренним и касание внешним образом. Кроме действительной общей касательной в точке A_2 линии σ' и γ в первом случае имеют две общие мнимо-сопряженные касательные, во втором — две различные действительные касательные. Если линии касаются внутренним (внешним) образом, то линия σ , будучи внешней относительно γ , не является (является) выпуклой.

Собственную выпуклую (невыпуклую) овальную линию плоскости \hat{H} , касающуюся абсолюта в действительной точке и имеющую с ним две общие мнимо-сопряженные точки, назовем *выпуклой (невыпуклой) эллиптической параболой*.

Найдем канонические уравнения эллиптических парабол.

Уравнение (3) при $D < 0$ определяет эллиптическую параболу в реперах двухпараметрического семейства U^2 всех канонических реперов с фиксированной вершиной A_2 в точке касания параболы с абсолютом. Помещая на параболу точку $E_{12}(-1 : 1 : 0)$, выделим из семейства U^2 однопараметрическое подсемейство U^1 , в котором уравнение параболы примет вид

$$x_1^2 + a_{33}x_3^2 + x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0, \quad a_{33} \neq 0. \quad (10)$$



Общие касательные $k_{1,2}$ линии (10) с абсолютом имеют в реперах семейства U^1 координаты:

$$k_{1,2} \left(1 : \left(\frac{a_{13} \pm \sqrt{a_{33}(1 + a_{33} - a_{13}^2)}}{a_{13}^2 - a_{33}} \right)^2 : 2 \frac{a_{13} \pm \sqrt{a_{33}(1 + a_{33} - a_{13}^2)}}{a_{13}^2 - a_{33}} \right).$$

Касательные $k_{1,2}$ выпуклой (невыпуклой) параболы являются действительными (мнимосопряженными). Пусть $k_1 \cap k_2 = N$. Фиксируя последний параметр, поместим вершину A_1 в точку пересечения прямой NA_2 с абсолютом. После этой фиксации вершина A_3 определена однозначно как пересечение касательных к абсолюту в точках A_1, A_2 . Как четвертая гармоническая для тройки точек A_1, A_2, E_{12} однозначно определена точка $E_{12}(1 : 1 : 0)$, следовательно, и единичная точка E репера из U^1 может быть определена как одна из двух точек пересечения прямой A_3E_{12} с абсолютом. Итак, из семейства U^1 выделили два репера R и R' . Положим, что точка N имеет в этих реперах координаты $(q + 1 : -q : 0)$, где $q \neq -1, q \neq 0$, так как иначе касательные $k_{1,2}$ совпадают, и линия σ' касается абсолюта дважды, это противоречит определению параболы. Координаты точек параболы в реперах R, R' удовлетворяют уравнению

$$x_1^2 + qx_3^2 + x_1x_2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

При $q < -1$ линия (11) содержит внутренние относительно абсолюта точки, т.е. линия σ не является собственной линией плоскости \hat{H} .

При $q > -1$ каждая точка линии (11), за исключением точки касания, является внешней относительно абсолюта.

При $q > 0$ ($-1 < q < 0$) касательные $k_{1,2}$ являются действительными (мнимосопряженными), следовательно, при $q > 0$ ($-1 < q < 0$) парабола (11) является выпуклой (невыпуклой). Уравнение (11) при $q > 0$ ($-1 < q < 0$) назовем *каноническим* уравнением выпуклой (невыпуклой) эллиптической параболы.

Внутренность выпуклой (невыпуклой) эллиптической параболы (11) определена неравенством

$$x_1^2 + qx_3^2 + x_1x_2 < 0, \quad q > 0 \quad (x_1^2 + qx_3^2 + x_1x_2 > 0, \quad -1 < q < 0).$$

Итак, случай $a_{11} \neq 0$ определяет три типа собственных овальных линий на \hat{H} : орицикл, выпуклую эллиптическую параболу, а также невыпуклую эллиптическую параболу.

II. Предположим, что линия σ' не имеет действительных общих точек с абсолютом. Тогда множество $\sigma' \cap \gamma$ содержит четыре мнимые точки. Поскольку линии σ' и γ — действительные, то четверка указанных точек состоит из двух пар мнимосопряженных точек. Обозначим их $J_{1,2}, L_{1,2}$. Рассмотрим линии σ' и γ как окружности расширенной евклидовой плоскости с абсолютными точками $J_{1,2}$. нас интересуют лишь те варианты взаимного расположения линий σ' и γ , когда линия σ' находится вне линии γ . Линия γ может быть внешней или внутренней относительно σ' . Точки в парах $J_{1,2}, L_{1,2}$ совпадать не могут, так как при совпадении две мнимосопряженные точки сливаются в действительную точку, а линии σ' и γ действительных общих точек не имеют.

Предположим, что $J_1 = L_1$, тогда $J_2 = L_2$, и точки $J_{1,2}$, являясь мнимосопряженными, становятся точками касания линий σ' и γ . Мнимые касательные к линиям σ' и γ в точках $J_{1,2}$ пересекаются во внутренней относительно каждой из линий σ', γ точке. Следовательно, в случае совпадения точек из различных пар $J_{1,2}, L_{1,2}$ линия γ расположена внутри линии σ' . Полюсы прямой J_1J_2 относительно линий σ' и γ в этом случае совпадают. На расширенной евклидовой плоскости окружности σ', γ являются концентрическими.

Таким образом, если линии σ' и γ не имеют общих действительных точек, то возможны только три варианта их взаимного расположения: 1) линии σ', γ пересекаются в четырех различных попарно мнимосопряженных точках, линия γ лежит внутри линии σ' ; 2) линии σ', γ пересекаются в дважды взятых мнимосопряженных точках; 3) линии σ', γ пересекаются в четырех различных попарно мнимосопряженных точках, линия γ лежит вне линии σ' .

В первом (третьем) случае овальную линию σ плоскости \hat{H} , принадлежащую линии σ' , назовем *невыпуклым (выпуклым) эллипсом*, во втором — *гиперциклом*. Гиперцикл является частным случаем невыпуклого эллипса, по некоторым своим метрическим свойствам он аналогичен окружности евклидовой плоскости.



Наиболее простой вид уравнения рассмотренных трех линий имеют в каноническом репере R^* первого типа. Присвоим точкам $J_{1,2}$ в репере R^* координаты $(\pm i : 1 : 0)$, полюс прямой $J_1 J_2$ относительно линии σ' поместим на прямую $A_2 A_3$, а в случае гиперцикла — в точку A_3 . Тогда каноническое уравнение эллипса примет вид

$$x_1^2 + (x_2 + qx_3)^2 - r^2 x_3^2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

где для выпуклого эллипса $|r| < |q| - 1$, для невыпуклого — $|r| > |q| + 1$.

Внутренность эллипса (12) определена неравенством $x_1^2 + (x_2 + qx_3)^2 - r^2 x_3^2 < 0$.

Каноническое уравнение гиперцикла имеет вид $x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_3^2 = 0$, $r \in (0; 1)$. Внутренность гиперцикла определена неравенством $x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_3^2 < 0$.

Итак, все возможные случаи расположения собственных овальных линий по отношению к абсолюту рассмотрены. Доказана основная теорема классификации собственных овальных линий плоскости \hat{H} .

Теорема. Основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой определяют восемь типов собственных овальных линий плоскости \hat{H} : гиперболический и эллиптический циклы, орицикл, выпуклую и невыпуклую эллиптические параболы, выпуклый и невыпуклый эллипсы, гиперцикл.

3. ПОЗИЦИОННЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОВАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПЛОСКОСТИ \hat{H}

Согласно проведенным в параграфе 2 рассуждениям все собственные овальные линии плоскости \hat{H} относятся к восьми типам. Несобственные овальные линии плоскости \hat{H} принадлежат овальным линиям проективной плоскости, содержащим также и линии плоскости Лобачевского, и образуют семь типов. Приведем все 15 типов овальных линий плоскости \hat{H} . Для несобственных овальных линий на \hat{H} в скобках укажем названия соответствующих овальных линий в геометрии Лобачевского.

1. *Однополостная бигипербола* (выпуклая гипербола) — линия, пересекающая абсолют в четырех вещественных точках и имеющая с ним четыре общие мнимые касательные. Однополостная бигипербола состоит из двух связных ветвей, ее внутренность является связным множеством на плоскости \hat{H} (рис. 1, а).

2. *Двуполостная бигипербола* (вогнутая гипербола) — линия, пересекающая абсолют в четырех вещественных точках и имеющая с ним четыре общие вещественные касательные. Двуполостная бигипербола состоит из двух связных ветвей, а ее внутренность — из двух связных областей плоскости \hat{H} (рис. 1, б).

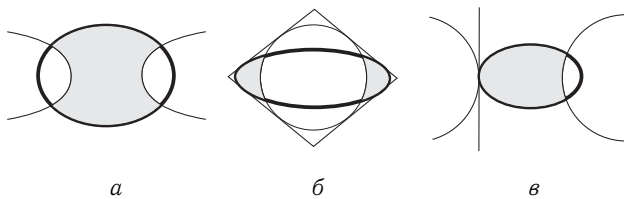


Рис. 1. Однополостная бигипербола (а), двуполостная бигипербола (б), однополостная двухветвевая гиперболическая парабола (в). Абсолют плоскости \hat{H} изображен тонкой линией, овальные линии — жирными линиями, а их внутренности — серой заливкой

гипербола состоит из двух связных ветвей, а ее внутренность — из двух связных областей плоскости \hat{H} (рис. 1, б).

3. *Однополостная двухветвевая гиперболическая парабола* (выпуклая гиперболическая парабола) — линия, касающаяся абсолюта в одной точке, пересекающая его в двух вещественных точках и имеющая с ним две общие мнимые и одну действительную касательные. Линия состоит из двух связных ветвей, внутренность линии на \hat{H} — связное множество (рис. 1, в).

4. *Двуполостная двухветвевая гиперболическая парабола* (одноветвевая вогнутая гиперболическая парабола) — линия, касающаяся абсолюта в одной точке, пересекающая его в двух вещественных точках и имеющая с ним три общие вещественные касательные. На плоскости \hat{H} линия имеет две связные ветви. Внутренность линии состоит из двух связных областей плоскости \hat{H} (рис. 2, а).

5. *Одноветвевая гиперболическая парабола* (двухветвевая вогнутая гиперболическая парабола) — линия, касающаяся абсолюта в одной точке, пересекающая его в двух вещественных точках и имеющая с ним три общие вещественные касательные. На плоскости \hat{H} линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — связное множество на \hat{H} (рис. 2, б).



6. *Гипербола* (полугипербола) — линия, пересекающая абсolut в двух вещественных точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные. На плоскости \hat{H} линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — связное множество на \hat{H} (рис. 2, в).

7. *Парабола* (соприкасающаяся парабола) — линия, касающаяся абсolutа в одной тройной точке, пересекающая его в одной точке и имеющая с ним две общие вещественные касательные. На плоскости \hat{H} линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — связное множество на \hat{H} (рис. 3, а).

8. *Гиперболический цикл* — линия, касающаяся абсolutа в двух точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные. Каждая точка абсolutа является внутренней относительно гиперболического цикла. На \hat{H} линия имеет две связные ветви, ее внутренность состоит из двух связных областей (рис. 3, б).

9. *Эллиптический цикл* — линия, касающаяся абсolutа в двух точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные. Каждая точка абсolutа (эллиптического цикла) является внешней относительно эллиптического цикла (абсolutа). На плоскости \hat{H} линия имеет две связные ветви, ее внутренность — выпуклое связное множество на \hat{H} (рис. 3, в).

10. *Выпуклая эллиптическая парабола* — линия, касающаяся абсolutа в двойной точке, пересекающая его в двух мнимо-сопряженных точках и имеющая с ним одну общую вещественную касательную. Каждая точка абсolutа (выпуклой эллиптической параболы) является внешней относительно выпуклой эллиптической параболы (абсolutа). На плоскости \hat{H} линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — выпуклое связное множество на \hat{H} (рис. 4, а).

11. *Невыпуклая эллиптическая парабола* — линия, касающаяся абсolutа в двойной точке, пересекающая его в двух мнимо-сопряженных точках и имеющая с ним одну общую вещественную касательную. Каждая точка абсolutа является внутренней относительно невыпуклой эллиптической параболы. На плоскости \hat{H} линия имеет одну связную ветвь, ее внутренность — связное множество (рис. 4, б).

12. *Орицикл* — линия, касающаяся абсolutа в четырех слившихся точках и имеющая с ним одну общую вещественную касательную. Каждая точка абсolutа является внутренней относительно орицикла. На плоскости \hat{H} линия имеет одну связную ветвь, ее внутренность — связное множество (рис. 4, в).

13. *Выпуклый эллипс* — конечная линия, пересекающая абсolut в четырех мнимых точках и имеющая с ним четыре общие вещественные касательные. Каждая точка абсolutа (выпуклого эллипса) является внешней относительно выпуклого эллипса (абсolutа). На плоскости \hat{H} линия связна. Внутренность линии — выпуклое связное множество (рис. 5, а).

14. *Невыпуклый эллипс* — конечная линия, пересекающая абсolut в четырех мнимых точках и имеющая с ним четыре общие мнимые касательные. Каждая точка абсolutа является внутренней

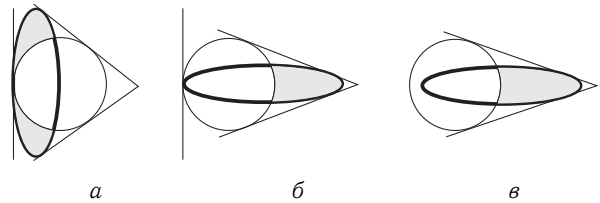


Рис. 2. Двуполостная двухветвевая гиперболическая парабола (а), одноветвевая гиперболическая парабола (б), гипербола (в). См. обозначения на рис. 1

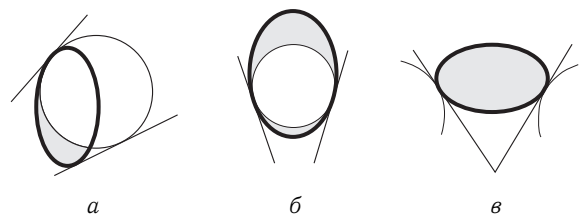


Рис. 3. Парабола (а), гиперболический цикл (б), эллиптический цикл (в). См. обозначения на рис. 1

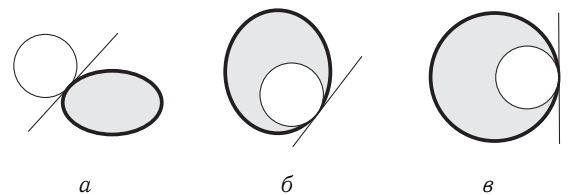


Рис. 4. Выпуклая эллиптическая парабола (а), невыпуклая эллиптическая парабола (б), орицикл (в). См. обозначения на рис. 1

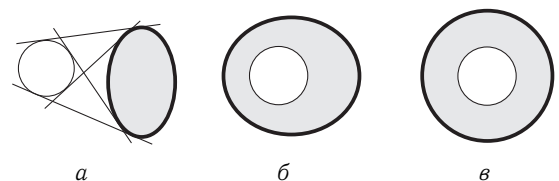


Рис. 5. Выпуклый эллипс (а), невыпуклый эллипс (б), гиперцикл (в). См. обозначения на рис. 1



относительно невыпуклого эллипса. На плоскости \hat{H} линия связна. Внутренность линии — связное множество на \hat{H} (рис. 5, б).

15. *Гиперцикл* — конечная линия, касающаяся абсолюта в двух парах совпадающих мнимых точек и имеющая с ним две общие мнимо-сопряженные касательные. Каждая точка абсолюта является внутренней относительно гиперцикла. На плоскости \hat{H} линия и ее внутренность связны (рис. 5, в).

Замечание. Две квадрики проективной плоскости, кроме основных, имеют и другие геометрические коварианты, которые необходимо учитывать при построении полной классификации овальных линий. Например, если две квадрики имеют две общие действительные точки, то полюсы прямой, соединяющей эти точки, относительно заданных линий, также являются геометрическими ковариантами квадрик. Положение полюсов относительно самих квадрик инвариантно в проективных преобразованиях проективной плоскости, следовательно, каждый возможный вариант этого положения определит самостоятельный тип овальных линий на плоскостях \hat{H} и Лобачевского. Поэтому, к примеру, множество всех гипербол плоскости \hat{H} (или полугипербол плоскости Лобачевского) состоит в соответствующей классификации из девяти G -неэквивалентных типов (рис. 6).

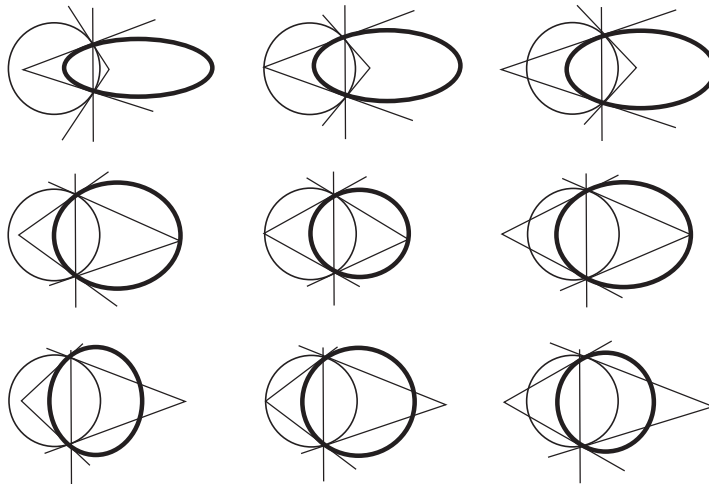


Рис. 6. Представители различных типов гипербол плоскости \hat{H}

Известны и другие классификации овальных линий плоскости Лобачевского (см., например, [7–12]). В классификациях работ [9–12] указаны и некоторые собственные линии плоскости \hat{H} , идеальные для плоскости Лобачевского. В работах [10–12] классификации основаны на фокально-директориальных свойствах линий 2-го порядка и двойственным к ним свойствам. В данной работе, строя классификацию собственных овальных линий плоскости \hat{H} , мы ограничились рассмотрением свойства выпуклости линии и основных ее геометрических ковариантов.

Библиографический список

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М. : ГИТТЛ, 1955.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969.
3. Ромакина Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 9. С. 83–116.
4. Ромакина Л. Н. Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. С. 69–72.
5. Ромакина Л. Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 14–26.
6. Пронько Г. П. Проблема Кеплера в пространстве постоянной кривизны // ТМФ. 2008. Т. 155, № 2. С. 317–326.
7. Liebmann H. Nichteuklidische Geometrie. Leipzig, 1912.
8. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1936.
9. Каган В. Ф. Основания геометрии : в 2 ч. Ч. II. М. : ГТТИ, 1956.
10. Певзнер С. Л. Фокально-директориальные свойства кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского // Изв. вузов. Математика. 1960. № 6. С. 18–194.
11. Певзнер С. Л. Свойства кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского, двойственные фокально-директориальным // Изв. вузов. Математика. 1961. № 5. С. 39–50.
12. Певзнер С. Л. Детальная классификация нераспадающихся кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского с помощью фокально-директориальных инвариантов // Изв. вузов. Математика. 1962. № 6. С. 85–90.



МЕХАНИКА

УДК 622.233.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ФИЗИЧЕСКИ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ МЕТОДОМ ТИМОШЕНКО

А. А. Битюрин

Ульяновский государственный технический университет
Email: denjgy0706@yandex.ru

Осуществляется математическое моделирование продольного упругого центрального удара системы ступенчатого и однородного стержней о жесткую преграду при неудерживающих связях путем решения волнового уравнения методом Даламбера. На основе закона сохранения энергии методом Тимошенко рассчитывается величина критической сжимающей нагрузки, в соответствии с которой, далее рассчитывается величина критической предупредительной скорости, приводящая к потере устойчивости рассматриваемой стержневой системы.

Ключевые слова: удар, устойчивость, моделирование, скорость, деформация.

Mathematical Modelling of Loss of Stability of System of Step and Homogeneous Cores at Blow about the Rigid Barrier Tymoshenko'S Method

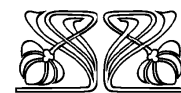
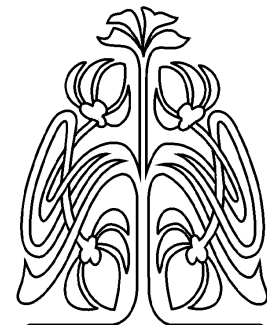
A. A. Bityurin

Mathematical modeling of longitudinal elastic central blow of system of step and homogeneous cores about a rigid barrier is carried out, at not holding communications by a solution of the wave equation by Dalamber's method. On the basis of the law of conservation of energy by Tymoshenko's method the size of critical compressing loading according to which, the size of critical pretonic speed leading to loss of stability of considered rod system further pays off.

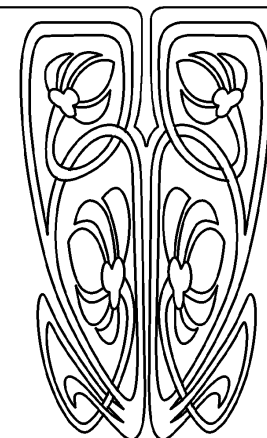
Key words: blow, stability, modeling, speed, deformation.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о динамической устойчивости упругих стержней при мгновенном продольном действии сжимающей нагрузки, которая в дальнейшем сохраняет своё постоянное значение, ранее была решена М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским [1]. Позднее проводилось теоретическое исследование потери устойчивости мгновенно сжатого бесконечного упругого стержня методом малых возмущений [2], а также исследование потери устойчивости полубесконечного упругого стержня [3]. В работах [3, 4] В. И. Малым предложен подход для исследования потери устойчивости стержней при больших и малых прогибах на основе асимптотического метода линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания при ударе полубесконечного упругого стержня телом большой массы, движущимся с постоянной скоростью. Несмотря на довольно пристальное внимание к этой проблеме советских и зарубежных исследователей, вплоть до конца 70-х годов прошлого века, и многочисленные исследования, многое осталось не решенным. Не сложилось однозначной методики расчета кусочно-неоднородных стержневых систем на устойчивость при продольном ударе. При этом о всеобщности данной проблемы при



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





проектировании огромнейшего числа машин и механизмов, архитектурных сооружений, в процессе эксплуатации которых возникают всякого рода динамические взаимодействия, говорить не имеет смысла.

Выполнение поставленных задач сводилось либо к аналитическому, либо к численному решению линеаризованного дифференциального [5] уравнения четвёртого порядка, а также системы дифференциальных уравнений движения стержня с начальной прогибью. Недостатком такого подхода является очевидная трудность математического решения, сопряженная с громоздкими математическими выкладками, а также удовлетворительная сходимость результатов математического моделирования и экспериментальных данных лишь в узком интервале изменения той или иной характеристики, связанная с накоплением погрешности вычислений в ходе проведения математических операций. Задача о потере устойчивости ступенчатых стержней при ударе в перечисленных работах, а также в работах [1–7] не рассматривалась.

Ниже приводится подход для расчета критической предупредной скорости ступенчатого физически однородного стержня, имеющего три участка различной длины и площади поперечных сечений [5]. Решением волнового уравнения методом Даламбера с применением графоаналитического метода характеристик строится диаграмма относительной продольной деформации, с помощью которой рассчитывается величина эквивалентной продольной сжимающей нагрузки. В работе [8] значение критической сжимающей нагрузки, действующей на ступенчатый стержень, рассчитывалось с помощью формулы Эйлера [9, 10]. Более точное решение поставленной задачи можно получить с помощью динамических или энергетических методов расчета [5], основанных на законе сохранения энергии. В данной работе задача нахождения величины критической сжимающей силы решается методом Тимошенко [5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Рассмотрена модель продольного удара ступенчатого физически однородного стержня о жесткую преграду (рис. 1). Длина начального участка ступенчатого стержня равна l_1 , конечного участка l_2 , масса обоих участков m_1 . Длина и масса третьего участка, представляющего из себя отдельный стержень, равны соответственно $l_3 = l - (l_1 + l_2)$ и m_2 .

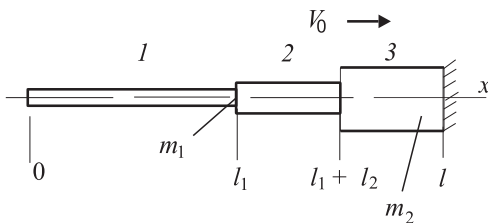


Рис. 1. Схема удара ступенчатого физически однородного стержня о жесткую преграду при неудерживающих связях

V_0 — предупредная скорость стержневой системы, l — общая ее длина. Все участки состоят из одного материала. Используется волновая модель продольного удара [8, 11, 12].

Движение поперечных сечений участков стержня описывается волновым дифференциальным уравнением, составленным для каждого из участков в отдельности [8, 11, 12]:

$$\frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $u_i(x, t)$ — продольное перемещение поперечного сечения участка i , x — координата сечения, t — время, a — скорость распространения продольной волны деформации. Для решения уравнения (1) методом Даламбера задаются необходимые начальные и граничные условия [8, 11, 12].

В случае удара многоступенчатого стержня о жесткую преграду возникает ряд трудностей в определении критической ударной нагрузки, вызывающей потерю устойчивого состояния, поскольку в данном случае в процессе удара функция относительной продольной деформации $\tilde{\epsilon}$ будет кусочно-линейная [8, 11, 12].

Пусть в момент времени $T = t_i$ построена диаграмма относительной продольной деформации $\tilde{\epsilon}$ для начального участка произвольного многоступенчатого стержня (рис. 2). Величину продольной силы P_i на рассматриваемом участке, в соответствии с законом Гука [9, 10] и при использовании данных диаграмм, можно представить в виде

$$P_i = EA \frac{V_0}{a} (\tilde{\epsilon}_i - \tilde{\epsilon}_{i-1}). \quad (2)$$



Для определения эквивалентной продольной нагрузки, приложенной в торце рассматриваемого участка ступенчатого стержня (рис. 3) можно воспользоваться зависимостью, представленной в [10]:

$$P_{\text{экв}} = \left[P_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + P_2 \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + \dots + P_i \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + P_n \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) E — модуль упругости, A — площадь поперечного сечения, $\tilde{\varepsilon}_i$ — относительная продольная деформация на i -м отрезке данного участка многоступенчатого стержня, b_1, b_2, b_i, b_n — координаты приложения продольных сил P_i на этом участке.

Расчет величины критической ударной нагрузки осуществляется методом Тимошенко [5]. Сумма потенциальной энергии деформации и изменения потенциала нагрузки представляет собой полную энергию упругой системы \mathcal{E} , которая представляется в виде

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx, \quad (4)$$

где l — длина рассматриваемого участка, M — изгибающий момент, вызванный действием внешней продольной силы P и прогибом участка v в сечении с координатой x [5].

Учитывая, что при продольном изгибе потенциальная энергия деформации равна работе внешней сжимающей нагрузки, находим значение критической продольной силы:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l \frac{m^2 dx}{EI}}, \quad (5)$$

m — единичный момент, отвечающий силе $P = 1$.

При возможном отклонении стержня от равновесного положения первая вариация от полной энергии должна быть равна нулю: $\delta \mathcal{E} = 0$. Примем, что изогнутая ось стержня в случае потери устойчивости может быть представлена в виде ряда

$$v = f_1 \gamma_1 + f_2 \gamma_2 + \dots + f_n \gamma_n = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \gamma_i. \quad (6)$$

Здесь под y_i понимаются функции x , удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи [5]. Подставим (6) в выражение для полной энергии (4). Тогда полная энергия окажется зависящей от параметров f_i .

Вариации $\delta \mathcal{E}$ можно представить при этом как сумму вариаций, соответствующих возможным изменениям параметров f_i [5]:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta f_i} \delta f_i.$$

Так как рассматриваемые изогнутые состояния являются равновесными, то вариация должна быть равна нулю [5]:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta f_i} \delta f_i = 0. \quad (7)$$

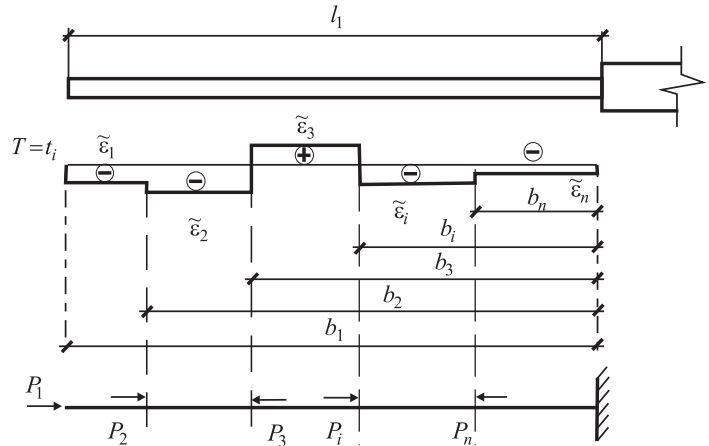


Рис. 2. Начальный участок произвольного многоступенчатого стержня

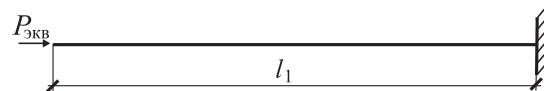


Рис. 3. Схема приложения эквивалентной продольной нагрузки



Но вариации δf_i можно считать независимыми друг от друга, поэтому равенство (7) будет иметь место, если каждый из множителей при δf_i будет равен нулю [5]:

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta f_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Энергия в соответствии с (4) должна являться квадратичной функцией параметров f_i . Подставляя выражение (6) в формулу (5), получим значение критической сжимающей силы $P_{кр}$. Сравнивая значение этой силы с величиной, найденной по формуле (3), получим значение критической предупредной скорости.

Представим упругую линию рассматриваемого участка ступенчатого стержня (см. рис. 1) в случае потери устойчивости в первом приближении в виде отрезка квадратной параболы [5]

$$v = fx^2. \quad (8)$$

Координата x отсчитывается от границы между первым и вторым участками ступенчатого стержня (см. рис. 1).

Изгибающий момент в сечении, лежащем на расстоянии x от границы между этими участками, будет равен $[-P(v_l - v)]$, где через v_l обозначено отклонение свободного торца первого участка.

Нетрудно убедиться в том, что это выражение удовлетворяет геометрическим граничным условиям, прогиб v и угол поворота dv/dx обращаются в нуль для точки $x = 0$.

Вычислим величину критической сжимающей силы по формуле (5) в пределах первого участка стержня, учитывая, что единичный момент $m = f(l_1^2 - x^2)$ [5]:

$$P_{кр} = \frac{\int_0^{l_1} 4f^2 x^2 dx}{\int_0^{l_1} \frac{f^2(l_1^2 - x^2) dx}{EI}} = 2.5 \frac{EI}{l_1^2}. \quad (9)$$

В соответствии с (9) находим выражение для критической предупредной скорости, учитывая, что для круглого поперечного сечения $J_{min} = \pi d^4/64$:

$$V_0 < V_{кр} = \frac{2,5d^2 a}{16l_1^2} \left[\tilde{\varepsilon}_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1) \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + (\tilde{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_2) \left(\frac{b_3}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_3) \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_i) \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (10)$$

ПРИМЕР

Рассмотрим продольный удар о жесткую преграду ступенчатого физически однородного стержня, длина начального участка которого $l_1 = 0.6l$, длины второго и третьего участков равны $l_2 = l_3 = 0.2l$. Соотношение площадей соседних участков $\tilde{A} = A_1/A_2 = A_2/A_3 = 0.5$. На основе решения дифференциального уравнения (1) и с применением метода характеристик [11] построена диаграмма относительной продольной деформации (рис. 4).

Анализируя диаграмму, можно сделать вывод, что максимальное значение деформации имеет место на первом участке ступенчатого стержня при $t = 0.8l/a$ (на отрезке $0.2l < x < 0.6l$ $\tilde{\varepsilon}_{max} = -1.77$), а также при $t = 2,6l/a$ (на отрезке $0 < x < 0.2l$ $\tilde{\varepsilon}_{max} = -0.93$, $0.2l < x < 0.4l$ $\tilde{\varepsilon}_{max} = -1.69$, $0.4l < x < 0.6l$ $\tilde{\varepsilon}_{max} = -0.31$). Следовательно, в данные моменты времени при достижении предупредной скорости некоторого критического значения первый участок и весь ступенчатый стержень могут потерять устойчивость.

Для расчета критической предупредной скорости воспользуемся методом Тимошенко. Учитывая жесткую связь первого участка со вторым в сечении $X = L_1$ и его свободный торец, представим уравнение упругой линии в форме (8) в соответствии с геометрическими граничными условиями. Далее, используя данные диаграммы (рис. 4) и зависимость (10), и учитывая $L_1 = 0.6L$, получим



при $t = 0.8l/a$ значение критической предупредной скорости: $V_{кр} = 0.55d^2a/(l)^2$. При $t = 2,6l/a$ критическая предупредная скорость будет равна $0.39d^2a/(l)^2$. Таким образом, потеря устойчивости ступенчатого стержня возможна при $t = 0.8l/a$, поскольку в этот момент времени может быть достигнуто критическое значение продольной сжимающей нагрузки при данном значении предупредной скорости $V_{кр}$.

ВЫВОД

Используя метод Тимошенко, основанный на законе сохранения энергии, мы получили более простое решение задачи нахождения величины критической сжимающей нагрузки. Однако этот метод по своей точности вычислений не уступает другим энергетическим методам, требующим выполнения значительно большего числа математических процедур. Например, в методе Ритца [5] дополнительно необходимо вычисление производной от продольной силы по параметру f . Далее, приравняв полученное выражение к нулю, можно рассчитать величину критической силы.

Статический метод Эйлера для решения ряда задач на продольный удар стержневых систем часто бывает неприменим, поскольку возникают непреодолимые трудности с определением коэффициента приведения длины.

Библиографический список

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65, № 6.
2. Малый В. И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.
3. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.
4. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.
5. Timoshenko S. Theory of elastic stability. N.Y., 1936 (Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. 1-е изд. М. : Гостехиздат, 1946; 2-е изд. М. : Гостехиздат, 1955); Timoshenko S., Gere J. Theory of elastic stability. N.Y., 1961.
6. Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г. Исследование про-

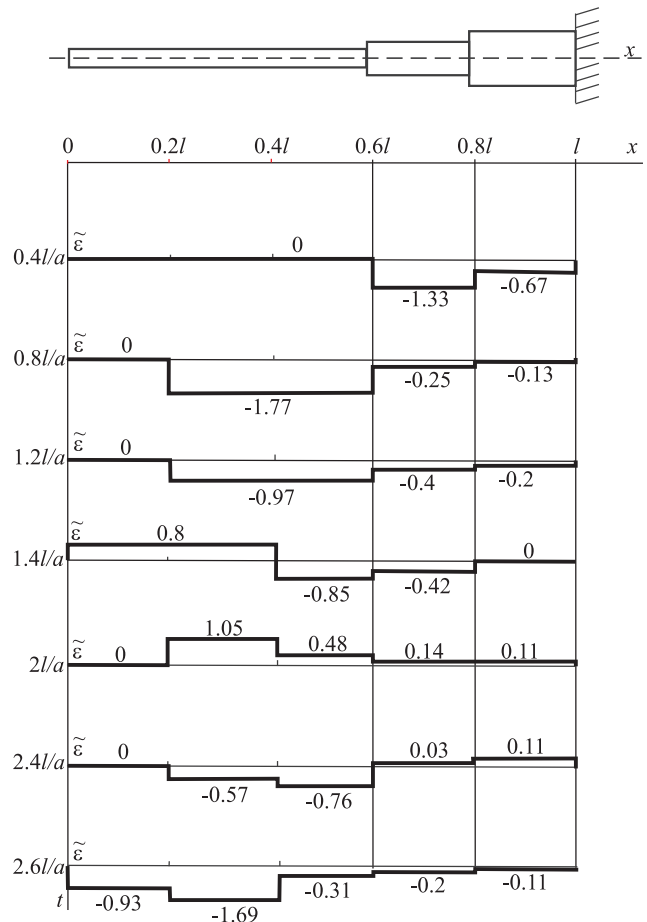


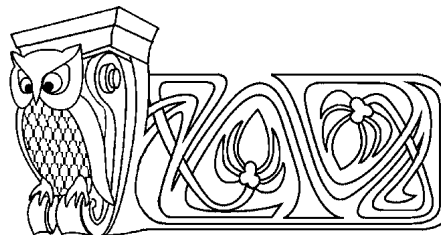
Рис. 4. Диаграмма относительной продольной деформации

- цесса выпучивания стержней при ударе // Докл. АН СССР. 1966. Т. 2, вып. 10.
7. Малышев Б. М. Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.
9. Дарков А. В., Широ Г. С. Сопротивление материалов. М. : Высш. шк., 2003. 641 с.
8. Битюрин А. А. Потеря устойчивости однородного стержня при продольном ударе о стержень, взаимодействующий с жесткой преградой // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2010. Вып. 3, № 30(206). С. 38–44.
10. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1989. 732 с.
11. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Распространение волн деформаций в ударных системах. М. : Наука, 1985. 354 с.
12. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду. Ульяновск : УлГТУ, 2009. 164 с.



УДК 539.3,517.95

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ



В. А. Вестяк, А. В. Земсков, И. А. Фёдоров*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: azemskov1975@mail.ru, vovavest@rambler.ru
*Московский государственный университет путей сообщения
E-mail: fedorov-ia@yandex.ru

The Asymptotic Separation of Variables In Thermoelastic Problem for Anisotropic Layer with Inhomogeneous Boundary Conditions

V. A. Vestyak, V. A. Zemskov, I. A. Fedorov

Предлагается метод решения задачи термоупругости с неоднородными граничными условиями, выражающими неравномерный по поверхности нагрев пластины. Используется асимптотическая процедура разделения переменных, основанная на введении дополнительных пространственных масштабов. Она позволяет решить поставленную задачу в предположении, что неравномерность нагрева носит слабо выраженный характер. Метод излагается для случая, когда нагрев поверхности пластины носит периодический характер. После разделения переменных решение задачи строится с помощью рядов Фурье.

A method for resolving a thermoelasticity problem with inhomogeneous boundary conditions is presented. Boundary conditions represent uneven surface heating of the layer. An asymptotic procedure for separation of variables based on introduction of additional dimensional scales is used. With an additional assumption that the unevenness of the heating is small enough this procedure makes it possible to obtain the solution. The method is shown for periodic heating case. After the separation of variables the solution is obtained using Fourier series.

Ключевые слова: термоупругость, анизотропия, асимптотика.

Key words: thermoelasticity, anisotropic, asymptotics.

ВВЕДЕНИЕ

Основным методом решения многомерных линейных задач механики и математической физики с неоднородными граничными условиями является метод разделения переменных, основанный на интегральном преобразовании Фурье. Главным условием применимости данного метода является то, что подынтегральная функция должна быть быстро убывающей функцией по пространственным переменным. Это требование существенно сужает класс рассматриваемых задач. Кроме того, обращение изображений Фурье, особенно в многомерных случаях, представляет собой очень сложную задачу, требующую использования численных алгоритмов. В этом случае трудно исследовать зависимость искомых величин (компонент температурных и механических полей) от исходных данных (физико-механических характеристик среды), что крайне необходимо, например, как при анализе полученных результатов, так и при постановке и решении обратных задач математической физики, актуальность которых подтверждается, в частности, большим количеством публикаций в научных журналах.

В настоящей работе предложена методика асимптотического разделения переменных, позволяющая построить приближённое решение задачи связанной термоупругости для анизотропного слоя, описываемой гиперболическо-параболической системой уравнений в частных производных с неоднородными граничными условиями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется упругая анизотропная пластина толщины L . Одна из поверхностей пластины $x_3 = 0$ подвергается нагреву, плотность которого имеет неравномерное поверхностное распределение. С обеих поверхностей происходит теплообмен с внешней средой. Нижняя поверхность $x_3 = L$ предполагается закрепленной, а верхняя поверхность $x_3 = 0$ свободна от напряжений. Уравнения в прямоугольной декартовой системе координат, описывающие термомеханические процессы в данной среде и соответствующие краевые условия, имеют вид [1–8]

$$C_{ijmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} - B_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - D_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$



$$\begin{aligned} \left(C_{i3mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - B_{i3} T \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, & u_i \Big|_{x_3=L} &= 0, \\ \left(-k_{i3} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \alpha_1 T \right) \Big|_{x_3=0} &= f(x_1, x_2, t), & \left(k_{i3} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \alpha_2 T \right) \Big|_{x_3=L} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где все величины являются безразмерными, для которых приняты следующие обозначения [1, 2]:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{Z}, & u_i &= \frac{u_i^*}{Z}, & t &= \frac{Ct^*}{Z}, & T &= \frac{T^*}{T_0}, & C^2 &= \frac{C_{3333}^*}{\rho}, & Z &= \frac{k_{33}^*}{C_\varepsilon C}, \\ C_{ijmn} &= \frac{C_{ijmn}^*}{\rho C^2}, & B_{ij} &= \frac{B_{ij}^* T_0}{\rho C^2}, & k_{ij} &= \frac{k_{ij}^*}{k_{33}^*}, & D_{ij} &= \frac{B_{ij}^*}{C_\varepsilon}, \\ L &= \frac{L^*}{Z}, & \alpha_k &= \frac{\alpha_k^* Z}{k_{33}^*} \quad (k = 1, 2), & f(x_1, x_2, t) &= \frac{Z}{T_0 k_{33}^*} f^*(x_1^*, x_2^*, t^*), \end{aligned} \quad (3)$$

x_i^* — прямоугольные декартовы координаты, t^* — время, u_i^* — компоненты вектора перемещений, T^* — приращение температуры, C_{ijmn}^* — компоненты тензора упругих характеристик среды, ρ — плотность среды, k_{ij}^* — компоненты тензора теплопроводности, B_{ij}^* — компоненты тензора теплового расширения, C_ε — удельный объёмный коэффициент теплоёмкости, T_0 — начальная температура, α_k^* — коэффициент теплообмена с внешней средой, Z — линейный масштаб, C — скорость распространения волны растяжения–сжатия вдоль оси Ox_3 , $f^*(x_1^*, x_2^*, t^*)$ — плотность теплового импульса.

Замечание. В постановке задачи (1), (2) не указаны начальные условия. Это обстоятельство вызвано тем, что, как будет видно из дальнейшего изложения, предлагаемая в работе процедура асимптотического разделения переменных затрагивает только уравнения (1) и краевые условия (2). Начальные же условия в силу отсутствия в них производных по пространственным координатам будут инвариантны относительно упомянутых преобразований.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Будем предполагать, что неравномерность нагрева пластины имеет слабо выраженный характер, что позволяет приближённо решить рассматриваемую задачу с помощью метода асимптотического разделения переменных, суть которого заключается в следующем. Слабая неравномерность нагрева пластины учитывается введением малого параметра ε как множителя перед аргументами функции f , т.е. предполагается, что $f = f(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, t)$. Далее вводятся в рассмотрение два масштаба: «тождественный» $\xi_\alpha = x_\alpha$ и «медленный» $\eta_\alpha = \varepsilon x_\alpha$, ($\alpha = 1, 2$) и предполагается далее, что $f = f(\eta_1, \eta_2, t)$. Решение задачи (1), (2) ищется в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра ε :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_i^l(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, x_3, t), \quad T(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l T^l(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, x_3, t). \quad (4)$$

Операторы дифференцирования по переменным x_1 и x_2 будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \eta_\beta} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi_\beta \partial \eta_\alpha} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta}.$$

Подставляя ряды (4) в уравнения (1) и группируя слагаемые при одинаковых степенях ε , получаем рекуррентную последовательность краевых задач, из которых определяются неизвестные функции разложений (4). Порождающая система (уравнения нулевого приближения) будет иметь вид

$$\begin{aligned} C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_3^2} - B_{i\alpha} \frac{\partial T^0}{\partial \xi_\alpha} - B_{i3} \frac{\partial T^0}{\partial x_3} &= \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}, \\ k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + k_{33} \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_3^2} - D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \xi_\alpha \partial t} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t \partial x_3} &= \frac{\partial T^0}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^0}{\partial \xi_\alpha} + C_{i3m3} \frac{\partial u_m^0}{\partial x_3} - B_{i3} T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, & u_i^0 \Big|_{x_3=L} &= 0, \\ \left(-k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_1 T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= f(\eta_1, \eta_2, t), & \left(k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_2 T^0 \right) \Big|_{x_3=L} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$



Уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial x_3^2} - B_{i\alpha} \frac{\partial T^1}{\partial \xi_\alpha} - B_{i3} \frac{\partial T^1}{\partial x_3} = \\ = \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} - 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} + B_{i\alpha} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^1}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + k_{33} \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_3^2} - D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial \xi_\alpha \partial t} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t \partial x_3} = \\ = \frac{\partial T^1}{\partial t} + D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \eta_\alpha \partial t} - 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^1}{\partial \xi_\alpha} + C_{i3m3} \frac{\partial u_m^1}{\partial x_3} - B_{i3} T^1 \right) \Big|_{x_3=0} = -C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \quad u_i^1|_{x_3=L} = 0, \\ \left(-k_{\alpha3} \frac{\partial T^1}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_1 T^1 \right) \Big|_{x_3=0} = k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \\ \left(-k_{\alpha3} \frac{\partial T^1}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_2 T^1 \right) \Big|_{x_3=L} = -k_{\alpha3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=L}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения высших приближений (начиная со второго):

$$\begin{aligned} C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^l}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^l}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^l}{\partial x_3^2} - B_{i\alpha} \frac{\partial T^l}{\partial \xi_\alpha} - B_{i3} \frac{\partial T^l}{\partial x_3} = \\ = \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial t^2} - 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^{l-1}}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} + B_{i\alpha} \frac{\partial T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} - C_{i\alpha m\beta} \frac{\partial^2 u_m^{l-2}}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta}, \\ k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^l}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^l}{\partial \xi_\alpha \partial x_3} + k_{33} \frac{\partial^2 T^l}{\partial x_3^2} - D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial \xi_\alpha \partial t} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial t \partial x_3} = \\ = \frac{\partial T^l}{\partial t} + D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^{l-1}}{\partial \eta_\alpha \partial t} - 2k_{\alpha3} \frac{\partial^2 T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} - k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T^{l-2}}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta}, \quad l = 2, 3, \dots, \\ \left(C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^l}{\partial \xi_\alpha} + C_{i3m3} \frac{\partial u_m^l}{\partial x_3} - B_{i3} T^l \right) \Big|_{x_3=0} = -C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \quad u_i^l|_{x_3=L} = 0, \\ \left(-k_{\alpha3} \frac{\partial T^l}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial T^l}{\partial x_3} + \alpha_1 T^l \right) \Big|_{x_3=0} = k_{\alpha3} \frac{\partial T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \\ \left(k_{\alpha3} \frac{\partial T^l}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial T^l}{\partial x_3} + \alpha_2 T^l \right) \Big|_{x_3=L} = -k_{\alpha3} \frac{\partial T^{l-1}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=L}. \end{aligned}$$

Как видно, все уравнения начиная со второго приближения имеют одинаковый вид и, кроме того, все без исключения уравнения имеют одинаковую левую часть, различаясь только неоднородностями в правых частях. Поэтому принципиально важным является построение только первых двух приближений к решению задачи (1), (2).

Рассмотрим слагаемые порядка ε^0 . Из вида граничных условий (6) следует, что неизвестные функции u_i^0 и T^0 не зависят от переменных ξ_1 и ξ_2 . Тогда задача (5), (6) примет вид [1] (учтено, что в соответствии с (3) $k_{33} = 1$):

$$C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_3^2} - B_{i3} \frac{\partial T^0}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t \partial x_3} = \frac{\partial T^0}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(C_{i3mn} \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} - B_{i3} T^0 \right) \Big|_{x_3=0} = 0, \quad u_\alpha|_{x_3=L} = 0, \\ \left(-\frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_1 T^0 \right) \Big|_{x_3=0} = f(\eta_1, \eta_2, t), \quad \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_2 T^0 \right) \Big|_{x_3=L} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$



В случае произвольной анизотропии система (9) содержит четыре неизвестных функции, её решение для установившегося режима при $f(\eta_1, \eta_2, t) = \bar{f}(\eta_1, \eta_2)e^{i\omega t}$ ищется в форме [1, 2, 9]

$$T^0 = \theta^0(x_3)e^{i\omega t} = \sum_{k=1}^8 \theta_k^0 e^{\lambda_k x_3 + i\omega t}, \quad u_i^0 = U_i^0(x_3)e^{i\omega t} = \sum_{k=1}^8 U_{ik}^0 e^{\lambda_k x_3 + i\omega t}, \quad (11)$$

где в соответствии с (3) $\omega = Z\omega^*/C$, ω^* — частота внешнего периодического воздействия, а λ_k — корень характеристического уравнения, вид которого ввиду громоздкости здесь не приводится. Величины θ_k^0 и U_{ik}^0 определяются из уравнений (9) с точностью до произвольных функций, зависящих от переменных η_α которые находятся из граничных условий (10). На этом построение нулевых приближений закончено.

Перейдём к слагаемым порядка ε^1 . Анализируя, как и прежде уравнения (7) и граничные условия (8), приходим к выводу, что функции u_i^1 и T^1 не зависят от переменных ξ_α . Тогда уравнения для их определения и соответствующие граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial x_3^2} - B_{i3} \frac{\partial T^1}{\partial x_3} &= \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} - 2C_{i\alpha m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3} + B_{i\alpha} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}, \\ \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t \partial x_3} &= \frac{\partial T^1}{\partial t} + D_{i\alpha} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial \eta_\alpha \partial t} - 2k_{\alpha 3} \frac{\partial^2 T^0}{\partial \eta_\alpha \partial x_3}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(C_{i3m3} \frac{\partial u_m^1}{\partial x_3} - B_{i3} T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= -C_{i3m\alpha} \frac{\partial u_m^0}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{x_3=0}, \quad u_i^1|_{x_3=L} = 0, \\ \left(-\frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_1 T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= k_{\alpha 3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}, \quad \left(\frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_2 T^1 \right) \Big|_{x_3=L} = -k_{\alpha 3} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\alpha}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение задач (12) и (13) в случае установившегося режима очень удобно представить в виде суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Подобного рода задачи для одномерных уравнений гиперболического и параболического типа подробно разобраны в монографии [10] и других монографиях, посвященных решению задач математической физики. Общее решение однородной системы здесь имеет вид аналогичный (11). Частное же решение ищется в форме $F_k(\eta_1, \eta_2, x_3)e^{i\omega t}$ методом неопределённых коэффициентов, где в качестве таковых выступают функции $F_k(\eta_1, \eta_2, x_3)$.

Аналогичным образом строятся последующие приближения. Таким образом, формально построено решение задачи (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= u_3^0(x_1, x_2, x_3, t) + o(\varepsilon), \quad u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon u_\alpha^1(x_1, x_2, x_3, t) + o(\varepsilon), \\ T(x_1, x_2, x_3, t) &= T^0(x_1, x_2, x_3, t) + o(\varepsilon), \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned}$$

где функции u_i^0 , u_i^1 , T^0 и T^1 являются решениями задач (9)–(12).

Следует отметить, что предложенная методика асимптотического разделения переменных не ограничивается стационарными или периодическими задачами. Но несмотря на то что задачи (9), (10), (11), (12) существенно проще исходной (1), (2), тем не менее в нестационарном случае их решение крайне затруднительно. Практически здесь могут быть использованы приближённые методы операционного исчисления, как, например, в работах [2, 9].

3. РАСЧЁТНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим решение задач (9)–(12) для ортотропых сред. В этом случае [3, 8]

$$B_{ij} = D_{ij} = k_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$C_{2221} = C_{2223} = C_{2111} = C_{2113} = C_{2133} = C_{2311} = C_{2313} = C_{2333} = C_{1113} = C_{2213} = C_{1333} = C_{2312} = 0.$$

Кроме того, будем рассматривать установившиеся режимы, т.е. $f(\eta_1, \eta_2, t) = \bar{f}(\eta_1, \eta_2)e^{i\omega t}$. В этом случае система уравнений (9) распадается на две независимые задачи [1, 2] ($C_{3333} = 1$ с учётом (3)):

$$C_{\alpha 3\alpha 3} \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (14)$$



$$\left. \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0, \quad u_\alpha|_{x_3=L} = 0 \tag{15}$$

(здесь суммирование по индексу α не производится),

$$\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial T^0}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T^0}{\partial x_3^2} - D_{33} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t \partial x_3} = \frac{\partial T^0}{\partial t}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - B_{33} T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u_3|_{x_3=L} = 0, \\ \left(-\frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_1 T^0 \right) \Big|_{x_3=0} &= \bar{f}(\eta_1, \eta_2) e^{i\omega t}, \quad \left(\frac{\partial T^0}{\partial x_3} + \alpha_2 T^0 \right) \Big|_{x_3=L} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Решение задач (14)–(17) будем искать по-прежнему в виде (9). Если ω не является собственной частотой, т. е. $\omega \neq \sqrt{C_{\alpha 3 \alpha 3} \frac{\pi}{L}} (n + \frac{1}{2})$, то решения задач (14), (15) — нулевые. Для задачи (16), (17) имеем [1, 2, 5]

$$T^0 = \sum_{k=1}^4 A_k e^{(\lambda_k x_3 + i\omega t)}, \quad u_3^0 = \sum_{k=1}^4 \frac{B_{33} \lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} A_k e^{(\lambda_k x_3 + i\omega t)},$$

где λ_k — корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega^2 - B_{33} \lambda \\ -i\omega \lambda D_{33} \lambda^2 - i\omega \end{vmatrix} = 0,$$

величины A_k зависят от переменных η_α и находятся из граничных условий (17). Эта задача сводится к решению системы линейных неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{B_{33} \lambda_k^2}{\lambda_k^2 + \omega^2} - B_{33} \right) A_k &= 0, & \sum_{k=1}^4 \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} e^{\lambda_k L} A_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^4 (-\lambda_k + \alpha_1) A_k &= \bar{f}(\eta_1, \eta_2), & \sum_{k=1}^4 (\lambda_k + \alpha_2) e^{\lambda_k L} A_k &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения первого приближения. Так же как и в нулевом приближении данная задача распадается на две независимые

$$C_{\alpha 3 \beta 3} \frac{\partial^2 u_\beta^1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u_\alpha^1}{\partial t^2} - 2C_{\alpha \beta 33} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3 \partial \eta_\beta} + B_{\alpha \beta} \frac{\partial T^0}{\partial \eta_\beta}, \tag{18}$$

$$C_{\alpha 3 \beta 3} \left. \frac{\partial u_\beta^1}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = -C_{\alpha 3 \beta 3} \left. \frac{\partial u_3^0}{\partial \eta_\beta} \right|_{x_3=0}, \quad u_\alpha^1|_{x_3=L} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial T^1}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T^1}{\partial x_3^2} - D_{33} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial t \partial x_3} = \frac{\partial T^1}{\partial t}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_3^1}{\partial x_3} - B_{33} T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u_3^1|_{x_3=L} = 0, \\ \left(-\frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_1 T^1 \right) \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial T^1}{\partial x_3} + \alpha_2 T^1 \right) \Big|_{x_3=L} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Решения задачи (20), (21) нулевые $u_3^1 = 0, T^1 = 0$. Система (18) представляет собой два независимых уравнения относительно функций u_1^1 и u_2^1 . Их решения строятся в виде [1]

$$u_\alpha^1(x_3, \eta_1, \eta_2, t) = U_\alpha^1(x_3, \eta_1, \eta_2) e^{i\omega t}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{22}$$

где $U_\alpha^1 = U_\alpha^+ e^{i\omega_\alpha x_3} + U_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha x_3} + \sum_{k=1}^4 \bar{U}_{k\alpha} e^{\lambda_k x_3}$, $\omega_\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{C_{\alpha 3 \alpha 3}}}$.

Функции $\bar{U}_{k\alpha}$ находятся подстановкой (22) в уравнения (18)

$$\bar{U}_{k\alpha}(\eta_1, \eta_2) = \frac{2C_{\alpha \alpha 33} B_{33} \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \omega^2)(C_{\alpha 3 \alpha 3} \lambda_k^2 + \omega^2)} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha} + \frac{B_{\alpha \alpha}}{(C_{\alpha 3 \alpha 3} \lambda_k^2 + \omega^2)} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha}. \tag{23}$$



(Суммирование по повторяющимся индексам α в выражении для ω_α и уравнениях (23) нет.)

Неизвестные величины $U_{k\alpha}^+, U_{k\alpha}^-$ зависят от переменных η_α и находятся из граничных условий (19):

$$U_{\alpha}^{-}(\eta_1, \eta_2) = \frac{i}{\omega} (1 + e^{-2i\omega_\alpha L})^{-1} \sum_{k=1}^4 \left[\bar{U}_{k\alpha}(\eta_1, \eta_2) (e^{(\lambda_k - i\omega_\alpha)L} - \lambda_k) - \frac{B_{33}\lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha} \right],$$

$$U_{\alpha}^{+}(\eta_1, \eta_2) = \frac{i}{\omega} (1 + e^{-2i\omega_\alpha L})^{-1} \sum_{k=1}^4 \left[\bar{U}_{k\alpha}(\eta_1, \eta_2) (e^{(\lambda_k - i\omega_\alpha)L} + \lambda_k) - \frac{B_{33}\lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} \frac{\partial A_k}{\partial \eta_\alpha} \right].$$

В качестве модели ортотропного слоя рассматривалась осреднённая слоистая (сталь, алюминий) среда [1, 2, 6]. Плотность теплового импульса моделировалась функцией

$$\bar{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + (\varepsilon x_1)^2 + (\varepsilon x_2)^2}.$$

На рис. 1 и 2 представлены поля температуры и нормального напряжения внутри пластины с учётом нулевого и первого приближений.

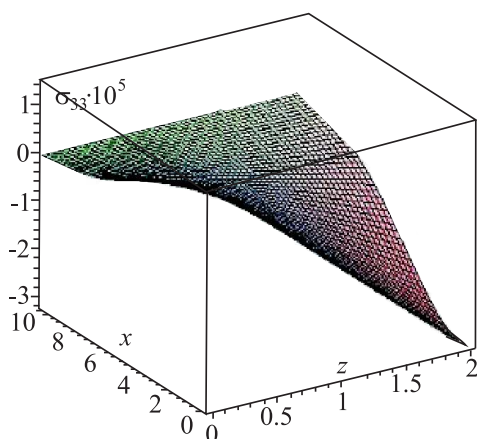


Рис. 1. Распределение напряжений внутри пластины

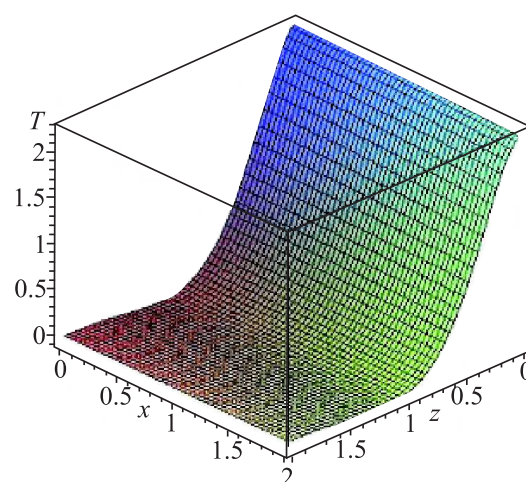


Рис. 2. Распределение приращения температуры внутри пластины

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена рекуррентная последовательность краевых задач, позволяющая найти решение системы (1), (2) в виде асимптотического ряда (4) по степеням малого параметра, характеризующего слабо неоднородный нагрев поверхности анизотропного слоя. Класс рассматриваемых задач не ограничивается ортотропными средами. Наличие симметрии только лишь упрощает решение уравнений соответствующих приближений, постольку они распадаются на ряд независимых задач меньшей размерности. Предложенная методика позволяет построить приближённое решение задачи (1) с неоднородными краевыми условиями (2) в аналитической форме, в частности, тогда, когда невозможно выполнить разделение переменных с помощью интегрального преобразования Фурье. Погрешность полученного решения определяется количеством членов в разложении (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-08-00064-а и 11-08-90453-Укр_ф_а).

Библиографический список

1. Вестяк В. А., Земсков А. В., Федотенков Г. В. Слабо неравномерный нагрев неограниченной слоистой пластины // Вестн. МАИ. 2010. Т. 17, № 6. С. 152–158.
2. Земсков А. В., Эрихман Н. Н. Приближённое решение нестационарной задачи о нагреве ортотропной пластины // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. Дніпропетровськ : ІМА-прес, 2009. Вип. 13. С. 94–99.
3. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические



контактные задачи с подвижными границами М. : Наука; Физматлит, 1995. 352 с.

4. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды : учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.

5. *Моргунов Б. И.* Математический анализ физико-механических процессов. М. : МИЭМ, 1995. 151 с.

6. *Моргунов Б. И.* Математическое моделирование связанных физических процессов. М. : МИЭМ, 1997. 224 с.

7. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости

/ пер. с польск. Я. Рыхлевского; под ред. Г. С. Шапиро. М. : Мир, 1970. 256 с.

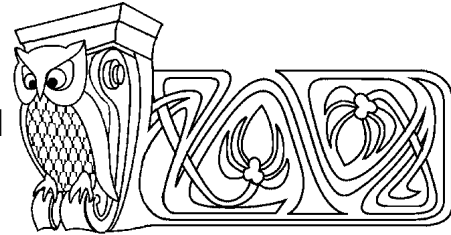
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1973. 536 с.

9. *Вестяк В. А., Лемешев В. А., Тарлаковский Д. В.* Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 2. С. 186–188.

10. *Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Математическое моделирование связанных физических процессов. М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. 736 с.

УДК 539.3

РАСЧЕТ ПЛОСКОНАГРУЖЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ С ТЕНЗОРНО-ВЕКТОРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН



Н. А. Гуреева

Волгоградская государственная академия сельского хозяйства
E-mail: natalya-gureeva@yandex.ru

Изложен в смешанной формулировке МКЭ алгоритм получения на шаге нагружения матрицы деформирования объемного конечного элемента с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

Для численной реализации алгоритма использован функционал, полученный из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения.

Ключевые слова: векторная аппроксимация, тензорная аппроксимация, векторное поле, тензорное поле, смешанная формулировка, вариационный принцип.

Calculation Plainly Loaded Geometrically Nonlinear Designs on the Basis of Mixed FEM with Tenzorno-Vector Approximation Requires Sizes

N. A. Gureeva

The algorithm of reception on a step of loading designs matrixes of deformation of a volume final element with cross-section section in the form of any quadrangle with central unknown persons in the form of increments of movings and increments of deformations is stated in mixed formulation FEM.

For numerical realization of algorithm it is used functional, received of a condition of equality of possible and valid works of external and internal forces on a step loading.

Key words: vector approximation, tensor approximation, vector field, tensor field, mixed formulation, variation principle.

Для расчета плосконагруженных конструкций реализуется шаговый метод. На шаге нагружения разработан конечный элемент с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника в смешанной формулировке МКЭ с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

Для получения матрицы деформирования конечного элемента в геометрически нелинейной постановке получен функционал из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил.

Приводится пример расчета, подтверждающий эффективность использования разработанного конечного элемента.

1. ГЕОМЕТРИЯ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

В декартовой системе координат xOz линия внутреннего контура тонкостенной конструкции принимается в качестве отсчетной. Положение произвольной точки M^0 отсчетной линии определяется радиусом-вектором (рис.1)

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + z(x)\mathbf{k},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты декартовой системы координат.



Векторы локального базиса точки M^0 определяются соотношениями

$$\mathbf{a}_1^0 = \mathbf{R}_{',s}^0 = x_{',s} \mathbf{i} + z_{',s} \mathbf{k}, \quad \mathbf{a}_3^0 = \mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{j} = -z_{',s} \mathbf{i} + x_{',s} \mathbf{k}, \quad (1)$$

где s — координата точки M^0 вдоль отсчетной линии.

Зависимости (1) можно представить в матричном виде

$$\{\mathbf{a}^0\} = [M]\{\mathbf{i}\},$$

где $\{\mathbf{i}\}^T = \{\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}\}$, $\{\mathbf{a}^0\}^T = \{\mathbf{a}_1^0 \ \mathbf{a}_3^0\}$.

Производные векторов локального базиса $\{\mathbf{a}'_s\}^T = \{\mathbf{a}_1'_{,s} \ \mathbf{a}_3'_{,s}\}$ представляются разложением по векторам этого же базиса $\{\mathbf{a}^0\}^T = \{\mathbf{a}_1^0 \ \mathbf{a}_3^0\}$ [1]:

$$\{\mathbf{a}'_s\} = [m]\{\mathbf{a}^0\}. \quad (2)$$

Положение точки M^{0t} , отстоящей на расстояние t от точки M^0 (см. рис. 1), определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{R}^{0t} = \mathbf{R}^0 + t\mathbf{a}_3^0. \quad (3)$$

Векторы локального базиса точки M^{0t} определяются дифференцированием (3)

$$\mathbf{g}_1^0 = \mathbf{R}'_{,s}{}^{0t} = \mathbf{R}'_{,s}{}^0 + t\mathbf{a}_3'_{,s}{}^0 = \mathbf{a}_1^0 + t\mathbf{a}_3'_{,s}{}^0 = (1 + tm_{21})\mathbf{a}_1^0 + tm_{22}\mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{g}_3^0 = \mathbf{R}'_{,t}{}^{0t} = \mathbf{a}_3^0.$$

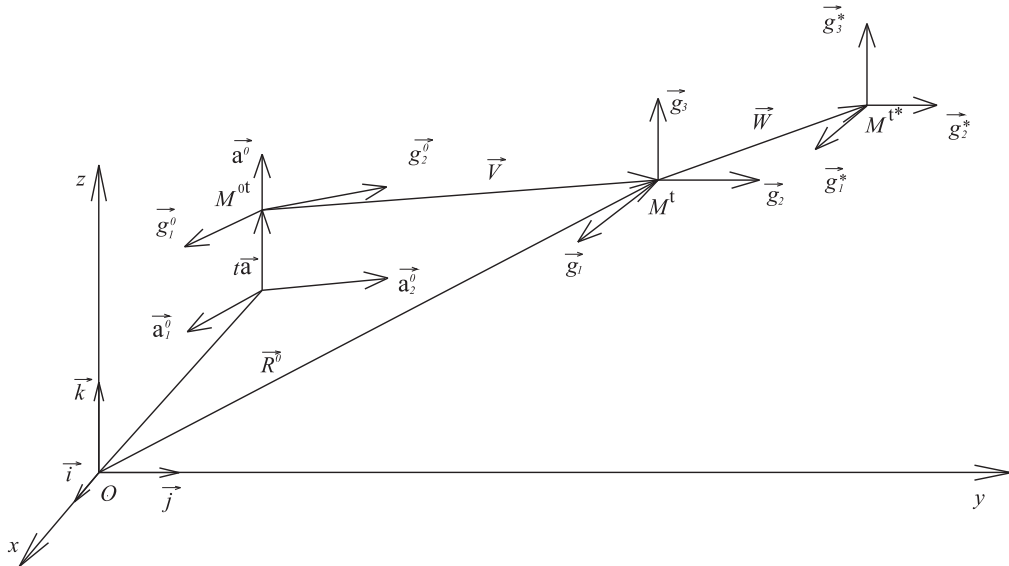


Рис. 1

2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

При реализации шагового нагружения произвольная точка оболочки рассматривается в трех положениях: исходном M^{0t} , деформированном после j шагов нагружения M^t (вектор перемещения \mathbf{V}) и соседнем — после $(j + 1)$ -го шага нагружения M^{t*} (вектор перемещения \mathbf{w}) (см. рис. 1).

Вектор перемещения точки M^{0t} за j шагов нагружения представляется компонентами в локальном базисе точки M^0 :

$$\mathbf{V} = v^1 \mathbf{a}_1^0 + v^3 \mathbf{a}_3^0. \quad (4)$$

Производные вектора (4) с учетом (2) определяются выражениями

$$\mathbf{V}'_{,s} = f_1^1 \mathbf{a}_1^0 + f_1 \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{V}'_{,t} = f_3^1 \mathbf{a}_1^0 + f_3 \mathbf{a}_3^0,$$

где f_1^1, f_1, f_3^1, f_3 — функции компонент вектора \mathbf{V} и их производных.

Положение точки M^t определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{0t} + \mathbf{V}.$$



Векторы локального базиса точки M^t имеют вид

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{R}'_s = \mathbf{g}_1^0 + \mathbf{V}'_s = (1 + tm_{21} + f_1^1)\mathbf{a}_1^0 + (tm_{22} + f_1)\mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3^0 + \mathbf{V}'_t = f_3^1\mathbf{a}_1^0 + (1 + f_3)\mathbf{a}_3^0. \quad (5)$$

Перемещение точки из положения M^t в положение M^{t*} определяется вектором в локальном базисе точки M^0 :

$$\mathbf{w} = w^1\mathbf{a}_1^0 + w^3\mathbf{a}_3^0. \quad (6)$$

Производные вектора (6) имеют вид

$$\mathbf{w}'_s = \alpha_1^1\mathbf{a}_1^0 + \alpha_1\mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{w}'_t = \alpha_3^1\mathbf{a}_1^0 + \alpha_3\mathbf{a}_3^0, \quad (7)$$

где $\alpha_1^1 = w^1_s + w^1m_{11} + w^3m_{21}$, $\alpha_1 = w^3_s + w^1m_{12} + w^3m_{22}$, $\alpha_3^1 = w^1_t + w^1m_{21}$, $\alpha_3 = w^1_t + w^1m_{22}$.

Положение точки M^{t*} определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}^{t*} = \mathbf{R}^t + \mathbf{w}. \quad (8)$$

Векторы ее локального базиса определяются дифференцированием (8)

$$\mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_1 + \mathbf{w}'_s, \quad \mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3 + \mathbf{w}'_t. \quad (9)$$

Приращения деформаций на $(j + 1)$ -ом шаге нагружения определяются соотношениями [2]

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij}^* - g_{ij}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{w}'_j + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{w}'_i + \mathbf{w}'_j \cdot \mathbf{w}'_i) = \Delta\varepsilon_{ij}^l + \Delta\varepsilon_{ij}^h, \quad i, j = 1, 3.$$

Линейная и нелинейная части приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}^l$ и $\Delta\varepsilon_{ij}^h$ с учетом (9), (5) могут быть представлены в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{ij}^l \\ \Delta\varepsilon_{ij}^h \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{Bmatrix} w \\ w \end{Bmatrix}_{2 \times 1}, \quad \{\Delta\varepsilon_{ij}^h\}^T = \{\mathbf{w}'_\alpha \cdot \mathbf{w}'_\beta\},$$

где $\{\mathbf{w}'_\alpha \cdot \mathbf{w}'_\beta\} = \{\mathbf{w}'_1 \cdot \mathbf{w}'_1 \quad \mathbf{w}'_3 \cdot \mathbf{w}'_3 \quad \mathbf{w}'_1 \cdot \mathbf{w}'_3\}$; $\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11} \quad \Delta\varepsilon_{33} \quad 2\Delta\varepsilon_{13}\}$; $\{w\}^T = \{w^1 \quad w^3\}$; $[L]$ – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} связаны с компонентами тензора напряжений σ^{mn} законом Гука [2]:

$$\varepsilon_{ij} = \sigma^{mn} \left(\frac{1 + \nu}{E} g_{im}g_{jn} + \frac{\nu}{E} g_{nm}g_{ij} \right), \quad (10)$$

где ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости.

При плоском напряженном состоянии соотношения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sigma^{11} \frac{1}{E} g_{11}g_{11} + \sigma^{33} \left(\frac{1 + \nu}{E} g_{13}g_{13} - \frac{\nu}{E} g_{33}g_{11} \right) + 2\sigma^{13} \frac{1}{E} g_{11}g_{13}, \\ \varepsilon_{33} &= \sigma^{11} \left(\frac{1 + \nu}{E} g_{31}g_{31} - \frac{\nu}{E} g_{33}g_{11} \right) + \sigma^{33} \frac{1}{E} g_{33}g_{33} + 2\sigma^{13} \frac{1}{E} g_{31}g_{33}, \\ 2\varepsilon_{13} &= 2\sigma^{11} \left(\frac{1 + \nu}{E} g_{11}g_{31} - \frac{\nu}{E} g_{13}g_{11} \right) + 2\sigma^{33} \frac{1}{E} g_{13}g_{33} + 2\sigma^{13} \left(\frac{1 + \nu}{E} g_{11}g_{33} - \frac{\nu}{E} g_{13}g_{13} \right), \end{aligned}$$

которые можно представить в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \end{Bmatrix}_{3 \times 1}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}^{-1}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{Bmatrix}_{3 \times 1}, \quad (11)$$

где $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{13}\}$; $\{\sigma\} = \{\sigma^{11} \quad \sigma^{33} \quad \sigma^{13}\}$.

На $(j + 1)$ -м шаге нагружения зависимости между компонентами тензора приращений деформаций и компонентами тензора приращений напряжений записываются аналогично (11)

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\sigma \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}^{-1}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon \\ \Delta\varepsilon \end{Bmatrix}_{3 \times 1},$$

где $\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_{11} \quad \Delta\varepsilon_{33} \quad 2\Delta\varepsilon_{13}\}$, $\{\sigma\} = \{\Delta\sigma^{11} \quad \Delta\sigma^{33} \quad \Delta\sigma^{13}\}$, $[D]$ – матрица податливости материала.



4. МАТРИЦА ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА НА ШАГЕ НАГРУЖЕНИЯ

В качестве дискретного элемента принимается объемный конечный элемент с поперечным сечением в форме произвольного четырехугольника с узлами i, j, k, l . Узловыми неизвестными принимаются приращения перемещений и приращения деформаций. Для выполнения численного интегрирования произвольный четырехугольник отображается на квадрат с локальными координатами ξ, η , изменяющимися в пределах от -1 до 1 . Глобальные координаты s, t четырехугольника выражаются через узловые значения билинейными соотношениями:

$$s = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{s_y\}, \quad t = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{t_y\}, \quad (12)$$

где $\{s_y\}^T = \{s^i \ s^j \ s^k \ s^l\}$, $\left\{ \begin{matrix} \varphi(\xi, \eta) \\ 1 \times 4 \end{matrix} \right\}^T = \left\{ \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}; \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}; \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}; \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \right\}$ — вектор-строка функций формы, $\{t_y\}^T = \{t^i \ t^j \ t^k \ t^l\}$.

Дифференцированием (12) определяются производные глобальных координат в локальной системе $s'_\xi, s'_\eta, t'_\xi, t'_\eta$ и производные локальных координат в глобальной системе $\xi'_s, \xi'_t, \eta'_s, \eta'_t$.

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через векторы перемещений узловых точек также билинейными соотношениями [1]:

$$\mathbf{w} = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{\mathbf{w}_y\}, \quad (13)$$

где $\{\mathbf{w}_y\}^T = \{\mathbf{w}^i \ \mathbf{w}^j \ \mathbf{w}^k \ \mathbf{w}^l\}$.

Производные вектора (13) определяются выражениями

$$\mathbf{w}'_s = \{\varphi'_s\}^T \{\mathbf{w}_y\}, \quad \mathbf{w}'_t = \{\varphi'_t\}^T \{\mathbf{w}_y\}. \quad (14)$$

Вектор перемещения узловых точек конечного элемента имеет вид

$$\mathbf{w}^\omega = w^{1\omega} \mathbf{a}_1^{0\omega} + w^{3\omega} \mathbf{a}_3^{0\omega} \quad (\omega = i, j, k, l). \quad (15)$$

Базисные векторы узловых точек ω выражаются через базисные векторы внутренней точки конечного элемента зависимостью

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{a}^{0\omega} \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right\} = [n^\omega] \{\mathbf{a}^0\}. \quad (16)$$

С учетом (15) и (16) зависимости (13) и (14) примут вид

$$\mathbf{w} = \{\mathbf{a}^0\}^T \{\varphi_1[n^i]^T \ \varphi_2[n^j]^T \ \varphi_3[n^k]^T \ \varphi_4[n^l]^T\} \{w_y\}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_s &= \{\mathbf{a}^0\}^T \{\varphi_{1's}[n^i]^T \ \varphi_{2's}[n^j]^T \ \varphi_{3's}[n^k]^T \ \varphi_{4's}[n^l]^T\} \{w_y\}, \\ \mathbf{w}'_t &= \{\mathbf{a}^0\}^T \{\varphi_{1't}[n^i]^T \ \varphi_{2't}[n^j]^T \ \varphi_{3't}[n^k]^T \ \varphi_{4't}[n^l]^T\} \{w_y\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — функции, являющиеся элементами аппроксимирующей матрицы $\{\varphi(\xi, \eta)\}^T$ и

$$\left\{ \begin{matrix} w_y \\ 1 \times 8 \end{matrix} \right\}^T = \{w^{1i} \ w^{3i} \ w^{1j} \ w^{3j} \ w^{1k} \ w^{3k} \ w^{1l} \ w^{3l}\}.$$

Приравняв правые части (6) и (17), (7) и (18), можно получить матричные выражения компонент вектора перемещения и их производных

$$\begin{aligned} w^1 &= \{z_1\} \{w_y\}, & w^3 &= \{z_2\} \{w_y\}, \\ w^1_s &= \{z_3\} \{w_y\}, & w^3_s &= \{z_4\} \{w_y\}, \\ w^1_t &= \{z_5\} \{w_y\}, & w^3_t &= \{z_6\} \{w_y\}, \end{aligned}$$

с использованием которых можно сформировать матричные соотношения:

$$\left\{ \begin{matrix} w \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} A \\ 2 \times 8 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} w_y \\ 8 \times 1 \end{matrix} \right\}, \quad \Delta \varepsilon = \left[\begin{matrix} L & A \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} A \\ 2 \times 8 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} w_y \\ 8 \times 1 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} B \\ 3 \times 8 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} w_y \\ 8 \times 1 \end{matrix} \right\}. \quad (19)$$



При скалярной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения на шаге нагружения аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты выражениями

$$w^1 = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{w_y^1\}, \quad w^3 = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{w_y^3\}.$$

Тензоры приращений деформаций во внутренней и узловой точках конечного элемента определяются выражениями

$$\Delta \tilde{\varepsilon} = \Delta \varepsilon_{11} \mathbf{g}^1 \mathbf{g}^1 + \Delta \varepsilon_{33} \mathbf{a}^3 \mathbf{a}^3 + 2\Delta \varepsilon_{13} \mathbf{g}^1 \mathbf{a}^3 = \{\Delta \varepsilon\}^T \{\vec{\mathbf{g}}\}, \quad \Delta \tilde{\varepsilon}^\omega = \{\Delta \varepsilon^\omega\}^T \{\vec{\mathbf{g}}^\omega\}.$$

Тензоры деформаций внутренней точки выражаются через тензоры деформаций узловых точек [1]:

$$\tilde{\varepsilon} = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{\tilde{\varepsilon}_y^\omega\}, \quad \Delta \tilde{\varepsilon} = \{\varphi(\xi, \eta)\}^T \{\Delta \tilde{\varepsilon}_y^\omega\}, \quad (20)$$

где $\{\tilde{\varepsilon}_y^\omega\}^T = \{\tilde{\varepsilon}^i \tilde{\varepsilon}^j \tilde{\varepsilon}^k \tilde{\varepsilon}^l\}$, $\{\Delta \tilde{\varepsilon}_y^\omega\}^T = \{\Delta \tilde{\varepsilon}^i \Delta \tilde{\varepsilon}^j \Delta \tilde{\varepsilon}^k \Delta \tilde{\varepsilon}^l\}$.

Базисные векторы узловой точки ω выражаются через базисные векторы внутренней точки конечного элемента зависимостью

$$\{\mathbf{g}^\omega\} = [z^\omega] \{\mathbf{g}\}, \quad (21)$$

где $\{\mathbf{g}\}^T = \{\mathbf{g}^1 \mathbf{a}^3\}$.

С учетом (21) диадные произведения базисных векторов узловой точки $\{\mathbf{g}^\omega\}^T = \{\mathbf{g}^{1\omega} \mathbf{g}^{1\omega} \mathbf{a}^{3\omega} \mathbf{a}^{3\omega} \mathbf{g}^{1\omega} \mathbf{a}^{3\omega}\}$ могут быть выражены через диадные произведения базисных векторов внутренней точки конечного элемента матричной зависимостью

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{\mathbf{g}}^\omega \\ \vec{\mathbf{g}}^\omega \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} [N] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{\mathbf{g}} \\ \vec{\mathbf{g}} \end{matrix} \right\}. \quad (22)$$

С использованием (22) выражение (20) примет вид

$$\Delta \tilde{\varepsilon} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\mathbf{g}} \\ \vec{\mathbf{g}} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \varphi_1 [N^i]^T & \varphi_2 [N^j]^T & \varphi_3 [N^k]^T & \varphi_4 [N^l]^T \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_y \end{matrix} \right\}, \quad (23)$$

где $\left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_y \end{matrix} \right\} = \{\Delta \varepsilon_{11}^i \Delta \varepsilon_{11}^j \Delta \varepsilon_{11}^k \Delta \varepsilon_{11}^l \dots 2\Delta \varepsilon_{13}^i 2\Delta \varepsilon_{13}^j 2\Delta \varepsilon_{13}^k 2\Delta \varepsilon_{13}^l\}$ — матрица-строка узловых приращений деформаций.

Приравняв правые части (20) и (23), получим матричное выражение:

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \varepsilon \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} [G] \\ 3 \times 12 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_y \end{matrix} \right\}. \quad (24)$$

При скалярной аппроксимации матрица $[G]$ имеет вид

$$[G]_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}.$$

В расчетах при учете геометрической нелинейности реализуется шаговая процедура нагружения. Функционал Лагранжа, выражающий равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения, можно записать в виде

$$\Pi_L \equiv \int_V \left[\{\sigma\}^T + \frac{1}{2} \{\Delta \sigma\}^T \right] [\{\Delta \varepsilon^n\} + \{\Delta \varepsilon^n\}] dV - \int_S \{w\}^T \left[\{p\} + \frac{1}{2} \{\Delta p\} \right] dS = 0, \quad (25)$$

где V — объем деформируемого тела; $\{p\}^T = \{p_1 p_2\}$, $\{\Delta p\}^T = \{\Delta p_1 \Delta p_2\}$ — векторы нагрузок после j -го и $(j+1)$ -го шагов соответственно; S — площадь поверхности с заданной внешней нагрузкой.



Заменяем выражение действительной работы внутренних сил в (25) разностью их возможной и дополнительной работы:

$$\frac{1}{2}\{\Delta\sigma\}^T\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\sigma\}^T[L]\{w\} - \frac{1}{2}\Phi(\sigma) = \{\Delta\varepsilon\}^T[D][L]\{w\} - \frac{1}{2}\{\Delta\varepsilon^n\}^T[D]\{\Delta\varepsilon^n\}. \quad (26)$$

С учетом (26) функционал (25) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi_L \equiv & \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}[D]^{-1}[L]\{w\}dV + \int_V \{\sigma\}^T\{\Delta\varepsilon^n\}dV - \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}^T[D]\{\Delta\varepsilon^n\}dV - \\ & - \frac{1}{2} \int_S \{w\}^T\{\Delta p\}dS - \int_S \{w\}^T\{p\}dS + \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}^T\{\sigma\}dV = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Функционал (27) с учетом (17), (19) и (24) для отдельного конечного элемента на шаге нагружения принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_L \equiv & \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 12}^T \int_V [G]^T [D]^{-1} [B] dV \{w_y\}_{8 \times 1} + \{w_y\}_{1 \times 8}^T [K_H]_{8 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 12}^T \int_V [G]^T [D]^{-1} [G] dV \{\Delta\varepsilon_y\}_{12 \times 1} - \frac{1}{2} \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]^T \{\Delta p\}_{8 \times 2} dS - \\ & - \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]^T \{p\}_{8 \times 2} dS + \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_V [B]^T \{\sigma\}_{8 \times 3} dV = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $[K_H]_{8 \times 8}$ — матрица от нелинейной части приращения деформаций.

Минимизируя функционал (28) по узловым неизвестным $\{\Delta\varepsilon_y\}^T$ и $\{w_y\}^T$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_L}{\partial \{\Delta\varepsilon_y\}^T} &= - [H]_{12 \times 12} \{\Delta\varepsilon_y\}_{12 \times 1} + [Q]_{12 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi_L}{\partial \{w_y\}^T} &= [Q]^T_{8 \times 12} \{\Delta\varepsilon_y\}_{12 \times 1} + [K_H]_{8 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} + \{f\}_{8 \times 1} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} [Q]_{12 \times 8} &= \int_V [G]^T [D] [B] dV, & [H]_{12 \times 12} &= \int_V [G]^T [D] [G] dV, \\ \{f\}_{8 \times 1} &= \int_S [A]^T \{\Delta p\}_{8 \times 2} dS - \int_V [B]^T \{\sigma\}_{8 \times 3} dV + \int_V [A]^T \{p\}_{8 \times 2} dS. \end{aligned}$$

Систему (29) можно представить в традиционной конечно-элементной форме:

$$[k]_{20 \times 20} \{Z_y\}_{20 \times 1} = \{F\}_{20 \times 1}, \quad (30)$$

где $[k]_{20 \times 20} = \begin{bmatrix} - [H]_{12 \times 12} & [Q]_{12 \times 8} \\ [Q]^T_{8 \times 12} & [K_H]_{8 \times 8} \end{bmatrix}$ — матрица деформирования конечного элемента,

$\{Z_y\}_{1 \times 20} = \left\{ \begin{matrix} \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 12}^T & \{w_y\}_{1 \times 8}^T \end{matrix} \right\}$ — вектор узловых неизвестных конечного элемента,

$\{F\}_{1 \times 20} = \left\{ \begin{matrix} \{0\}_{1 \times 12}^T & \{f\}_{1 \times 8}^T \end{matrix} \right\}$ — вектор узловых усилий конечного элемента на шаге нагружения.

Для формирования матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [3].



Пример. Определено напряженно-деформированное состояние круговой арки (рис. 2) при следующих исходных данных [4]: $R = 338.109$ см, $t = 0.47625$ см, $\nu = 0.2$, $E = 700$ Па, $b = 2.54$ см — шири-

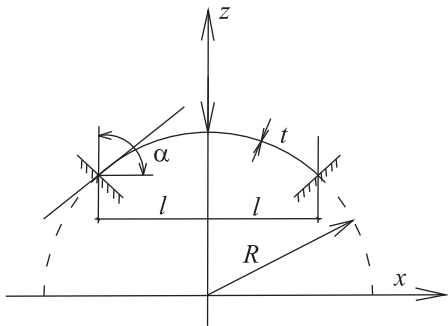


Рис. 2

на сечения арки; $\alpha = 0.128^\circ$. Арка рассматривалась как часть цилиндрической оболочки, срединная линия которой описывается уравнением окружности $x^2 + z^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R . Ввиду симметрии рассматривалась четвертая часть оболочки (длиной l) при разбивке ее на восемь элементов по длине и на два элемента по толщине.

В таблице приведены значения прогиба в центре арки в зависимости от силы P (в Н). Символом ν_1 (см) обозначены прогибы, полученные на основе скалярной аппроксимации приращений перемещений и приращений напряжений.

$P, Н$	16	32	48	64	80	88	96	104	112
$\nu_1, см$	0.033	0.069	0.109	0.160	0.221	0.254	0.297	0.351	0.498
$\nu_2, см$	0.036	0.076	0.112	0.175	0.239	0.277	0.320	0.371	0.429
$\nu_3, см$	0.036	0.076	0.112	0.175	0.241	0.279	0.323	0.376	0.437

Перемещения, полученные при использовании приращений перемещений и приращений напряжений как векторных и тензорных полей, обозначены в таблице символом ν_2 . Символом ν_3 обозначены перемещения [3].

Как видно из таблицы, приемлемые результаты с использованием рассматриваемых способов аппроксимации искомых величин получались при нагрузке меньше 100 Н. При большей нагрузке в случае использования скалярной аппроксимации искомых величин происходил срыв вычислительного процесса.

Указанное обстоятельство доказывает корректность разработанной тензорной интерполяции полей искомых величин методом конечных элементов в смешанной формулировке.

Библиографический список

1. Гуреева Н. А. Решение плоской задачи теории упругости с использованием варианта МКЭ в смешанной формулировке // Изв. вузов. Авиационная техника. 2009. № 2. С. 8–11.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л. : Судостроение, 1974. 344 с.
4. Papenhausen V. Eine energiegerechte, incrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen. Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finiter Elemente / Tech.-wiss. Mitt. Jnst. Konstr. Ingenieurban Ruhr-Univ. Bochum, 1975. № 13, III. 133 p.

УДК 539.3

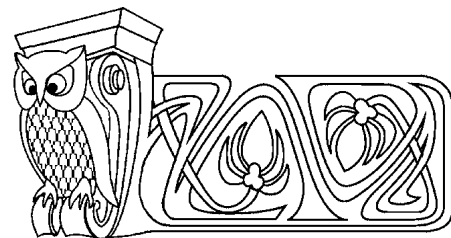
ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕМОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ РАБОТЫ РАСПРЕДЕЛЕННОГО СЕРДЦА

А. В. Доль, Ю. П. Гуляев

Саратовский государственный университет
E-mail: dzero@pisem.net, gulvis@yandex.ru

В работе рассмотрена математическая модель гемодинамики крупных кровеносных сосудов. Предложена трехмерная система уравнений, описывающая движение крови по сосудам с учетом влияния стенок на поток.

Ключевые слова: кровоток, кровеносный сосуд, система уравнений.



3-Dimensional Mathematical Model of Blood Flow with Secondary Heart Theory

A. V. Dol, Yu. P. Gulyaev

This paper presents haemodynamics of blood vessels mathematical model. There is 3-dimentional system of equations describes blood flow, where vessel motions are taking in account.

Key words: blood flow, blood vessel, system of equations.



ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX – начале XX века профессором М. В. Яновским впервые были проведены исследования, направленные на определение степени влияния сосудистой стенки на поток крови [1]. Уже тогда самим ученым и его последователями были сделаны предположения о наличии в организме человека феномена распределенного, или «периферического», «вторичного», сердца: то есть ускорения потока не только за счет работы сердца, но и в результате деятельности стенок артерий. В середине прошлого столетия было экспериментально доказано, что мощности сердечной мышцы не достаточно, чтобы в одиночку поддерживать необходимые параметры кровотока. На сегодняшний день существует несколько математических моделей, которые в той или иной мере отражают влияние сокращения стенок сосудов на кровь. В данной работе предложена трехмерная модель гемодинамики крупных кровеносных сосудов, которая учитывает влияние продольных сокращений стенки на поток.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование будем проводить в цилиндрической системе координат (x, r, θ) , где ось x совпадает с осью симметрии потока. Материал стенки сосуда предполагается упругим и изотропным, а текущая жидкость является ньютоновской и несжимаемой. Основная система уравнений гидроупругости для осесимметричных движений имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right), \\ \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(-\frac{\partial^2 v_x}{\partial r \partial x} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= 0, \\ \rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \tau, \\ \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{R^2} w - \frac{T'}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma, \\ S' &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right), \\ T' &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \Big|_{r=R} \right)$, $\sigma = -p|_{r=R} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{r=R}$. Здесь p – давление, ρ – плотность крови, μ – вязкость крови, v_x – осевая компонента скорости крови, v_r – радиальная компонента скорости крови, R – радиус сосуда, t – время, u, w – перемещения стенки в продольном и поперечном направлениях, S', T' – силы натяжения в окружном и продольном направлениях соответственно, S_0, T_0 – начальные значения сил натяжения в окружном и продольном направлениях, E – модуль Юнга стенки, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина стенки сосуда, ρ_0 – массовая плотность материала стенки сосуда. Функция $u_0(x, t)$ описывает дополнительное продольное смещение стенки сосуда, вызываемое реактивным мышечным сокращением при прохождении по сосуду пульсовой волны давления. Эта функция моделирует работу вторичного сердца и должна определяться экспериментальным путем. К системе уравнений (1) добавим условия кинематического контакта стенки сосуда с жидкостью:

$$v_x|_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad v_r|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2)$$

Таким образом, наша задача заключается в нахождении общего решения системы уравнений гидроупругости (1), (2). В силу линейности уравнений задача традиционно распадается на однородную и неоднородную. Вначале построим общее решение однородной задачи, а затем найдем частное решение неоднородной задачи. В первом случае в качестве базовых функций выбираются волновые гармоники следующего вида:

$$u = u_1 \exp[i(\omega t - \chi x)], \quad w = w_1 \exp[i(\omega t - \chi x)], \quad (3)$$



$$v_x = v_{x1}(r) \exp[i(\omega t - \chi z)], \quad v_r = v_{r1}(r) \exp[i(\omega t - \chi z)], \quad p = p_1(r) \exp[i(\omega t - \chi z)], \quad (4)$$

где ω — частота пульсации кровотока, χ — волновое число.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Подставим функции (4) в первые три уравнения системы (1). Тогда получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, сводящуюся к уравнениям Бесселя для цилиндрических функций нулевого порядка:

$$\begin{aligned} i\rho\omega v_{x1}(r) &= i\chi A J_0(i\chi r) + \mu \left(\frac{d^2 v_{x1}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{x1}(r)}{dr} - \chi^2 v_{x1}(r) \right), \\ i\rho\omega v_{r1}(r) &= i\chi A J_1(i\chi r) + \mu \left(i\chi \frac{dv_{x1}}{dr} - \chi^2 v_{r1}(r) \right), \\ \frac{d^2 p_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_1}{dr} - \chi^2 p_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение системы уравнений (5) имеет вид

$$p_1 = A J_0(i\chi r), \quad v_{x1}(r) = \frac{\chi}{\rho\omega} A J_0(i\chi r) + B J_0(i\beta r), \quad v_{r1}(r) = \frac{\chi}{\rho\omega} A J_1(i\chi r) + \frac{\chi}{\beta} B J_1(i\beta r), \quad (6)$$

где A и B — произвольные постоянные интегрирования, $\beta = \sqrt{\alpha^2/R^2 + i\chi^2}$, $\alpha = R\sqrt{\omega\rho/\mu}$ — параметр Уомерсли. Здесь использованы только регулярные решения при $r = 0$.

3. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Подставим волновые функции (3) в однородные уравнения движения оболочки (1) и в однородные кинематические контактные условия (2). Тогда с учетом решений (6) относительно амплитудных значений продольных и радиальных перемещений оболочки получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c_0^2\chi^2)u_1 - i\chi(c_0^2\frac{\nu}{R} + \frac{S-T}{\rho_0 h R})w_1 + \frac{2\mu}{\rho_0 h} \frac{i\chi^2}{\omega\rho} J_1(i\chi R)A + \frac{\mu}{\rho_0 h} \frac{i(\beta^2 + \chi^2)}{\beta} J_1(i\beta R)B &= 0, \\ i\chi \frac{c_0^2\nu}{R} u_1 + \left[\omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{T}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) - \chi^2 \frac{S}{\rho_0 h} \right] w_1 - \frac{1}{\rho_0 h} \left[(2\mu \frac{i\chi^2}{\omega\rho} - 1) J_0(i\chi R) - \frac{2\mu}{R} \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\beta R) \right] A - \\ - \frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu i\chi J_0(i\beta R) - \frac{2\mu\chi}{R\beta} J_1(i\beta R) \right] B &= 0, \\ -i\omega u_1 + \frac{\chi}{\omega\rho} J_0(i\chi R)A + J_0(i\beta R)B = 0, \quad -i\omega w_1 + \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\chi R)A + \frac{\chi}{\beta} J_1(i\beta R)B = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $c_0^2 = \frac{E}{\rho_0(1-\nu^2)}$ — квадрат скорости продольных волн в круглой цилиндрической оболочке в случае малой вязкости жидкости.

Относительно произвольных постоянных u_1 , w_1 , A и B получена система (7) линейных однородных алгебраических уравнений. Ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю. Таким образом, имеем дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - c_0^2\chi^2 & -i\chi(c_0^2\frac{\nu}{R} - \frac{S-T}{\rho_0 h R}) & \frac{2\mu}{\rho_0 h} \frac{i\chi^2}{\omega\rho} J_1(i\chi R) & \frac{\mu}{\rho_0 h} \frac{i(\beta^2 + \chi^2)}{\beta} J_1(i\beta R) \\ i\chi \frac{c_0^2\nu}{R} & \omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{T}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) - \chi^2 \frac{S}{\rho_0 h} & -\frac{1}{\rho_0 h} \left[(2\mu \frac{i\chi^2}{\omega\rho} - 1) J_0(i\chi R) - \frac{2\mu}{R} \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\beta R) \right] & -\frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu i\chi J_0(i\beta R) - \frac{2\mu\chi}{R\beta} J_1(i\beta R) \right] \\ -i\omega & 0 & \frac{\chi}{\omega\rho} J_0(i\chi R) & J_0(i\beta R) \\ 0 & -i\omega & \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\chi R) & \frac{\chi}{\beta} J_1(i\beta R) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

В общем случае уравнение (8) решается численно. Найденные дисперсионные кривые дают возможность построить общее решение однородной задачи гидроупругости.



**5. УЧЕТ РАБОТЫ РАСПРЕДЕЛЕННОГО СЕРДЦА.
ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ**

Функция $u_0(x, t)$, учитывающая работу распределенного сердца, определяется из эксперимента. В простейшем случае функция $u_0(x, t)$ может быть аналитически представлена в виде:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} \gamma \left(1 - \cos \left(\frac{\pi \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)}{qT} \right) \right), & \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0, & \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T, \end{cases} \quad (9)$$

где γ — параметр, характеризующий степень мышечной активности, $0 < q \leq 1$, T — период пульсации крови, $c_{mk} = \sqrt{\frac{hE}{2R\rho}}$ — скорость пульсовой волны давления Моэнса–Кортевега.

Скорость и ускорение мышечной активности стенок сосуда представим комплексными рядами Фурье:

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} = \frac{2\gamma}{T} + \operatorname{Re} \left[\sum_1^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)} \right], \quad \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} = \operatorname{Re} \left[\sum_1^{\infty} c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)} \right],$$

$$c_n = \frac{2\beta\pi}{T^2 q} \int_0^{qT} \sin \left(\frac{\pi t}{qT} \right) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt.$$

Частное решение неоднородной системы (1)–(2) для каждой волновой гармоники $e^{i \frac{2\pi k}{T} \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)}$ ищем в виде

$$u_0 = u_{10} \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \quad w_0 = w_{10} \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \quad v_{x0} = v_{x10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)],$$

$$v_{r0} = v_{r10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \quad p_0 = p_{10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)] \quad \left(\omega = \frac{2\pi k}{T} \right), \quad (10)$$

где $p_{10} = A_0 J_0(i\chi_0 r)$, $u_{10}(r) = \frac{\chi_0}{\rho\omega} A_0 J_0(i\chi_0 r) + B_0 J_0(i\beta_0 r)$, $v_{10}(r) = \frac{\chi_0}{\rho\omega} A_0 J_1(i\chi_0 r) + \frac{\chi_0}{\beta_0} B_0 J_1(i\beta_0 r)$, $\beta_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{R^2} + i\chi_0^2}$, $\chi_0 = \frac{\omega}{c_{mk}}$, $\alpha = R\sqrt{\frac{\omega\rho}{\mu}}$ — параметр Уомерсли.

Подставляя функции (10) в неоднородную систему (1)–(2), получим неоднородную алгебраическую систему уравнений относительно постоянных u_{10} , w_{10} , A_0 , B_0 :

$$(\omega^2 - c_0^2 \chi_0^2) u_{10} - i\chi_0 \left(c_0^2 \frac{\nu}{R} + \frac{S-T}{\rho_0 h R} \right) w_{10} + \frac{2\mu}{\rho_0 h} \frac{i\chi_0^2}{\omega\rho} J_1(i\chi_0 R) A_0 + \frac{\mu}{\rho_0 h} \frac{i(\beta_0^2 + \chi_0^2)}{\beta_0} J_1(i\beta_0 R) B_0 = i\varpi \rho_0 h c_k,$$

$$i\chi_0 \frac{c_0^2 \nu}{R} u_{10} + \left[\omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{T}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) - \chi_0^2 \frac{S}{\rho_0 h} \right] w_{10} - \frac{1}{\rho_0 h} \left[\left(2\mu \frac{i\chi_0^2}{\omega\rho} - 1 \right) J_0(i\chi_0 R) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\mu}{R} \frac{\chi_0}{\omega\rho} J_1(i\beta_0 R) \right] A_0 - \frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu i\chi_0 J_0(i\beta_0 R) - \frac{2\mu\chi_0}{R\beta_0} J_1(i\beta_0 R) \right] B_0 = 0, \quad (11)$$

$$-i\omega u_{10} + \frac{\chi_0}{\omega\rho} J_0(i\chi_0 R) A_0 + J_0(i\beta_0 R) B_0 = c_k, \quad -i\omega w_{10} + \frac{\chi_0}{\omega\rho} J_1(i\chi_0 R) A_0 + \frac{\chi_0}{\beta_0} J_1(i\beta_0 R) B_0 = 0.$$

Очевидно определитель системы (11) отличен от нуля, и тогда её решение определяется однозначно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена математическая модель гемодинамики крупных кровеносных сосудов, которая учитывает работу распределенного сердца. Построены базовые частные решения, на основании которых методом линейной суперпозиции строится общее решение неоднородной задачи динамики кровотока в крупных артериальных сосудах. Основная трудность при решении поставленной задачи — нахождение корней дисперсионного уравнения (8). В настоящее время разработаны различные асимптотические и численные методы решения подобных дисперсионных уравнений [3].



Библиографический список

1. Обрезан А. Г., Шункевич Т. Н. Теория «периферического сердца» профессора М. В. Яновского: классические и современные представления // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 11. 2008. № 3. С. 14–23.
2. Гуляев Ю. П., Коссович Л. Ю. Математические модели биомеханики в медицине. Саратов, 2001. 49 с.
3. Вильде М. В., Гуляев Ю. П. Низкочастотные осесимметричные волны в кровеносных сосудах постоянного сечения: асимптотический подход // Изв. РАН. 2009. № 4. С. 136–151.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ ПЛОСКИХ ОБРАЗЦОВ

Ю. П. Зезин, Е. В. Ломакин, С. В. Мамонов*, М. И. Мартиросов*, Л. Н. Рабинский*, П. В. Чистяков

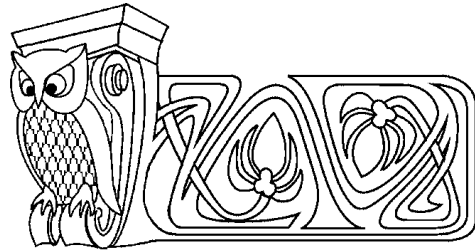
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: yuzezin@gmail.com, lomakin@mech.math.msu.su, chist206@yandex.ru

*Московский авиационный институт

E-mail: sergei.mamonov@gmail.com, f9_dec@mai.ru

Представлены результаты экспериментального определения модуля упругости и коэффициента Пуассона тонких полимерных покрытий на поверхности образцов стали 08-ПС. Оценки модуля упругости получены с использованием простейших правил смесей по результатам стандартных испытаний образцов с покрытиями на растяжение и четырехточечный изгиб. Значения коэффициента Пуассона получены на основе сопоставления результатов испытаний и численного моделирования процесса изгиба исследуемых образцов. Показано, что оба метода дают близкие значения модуля упругости для различных модификаций исследуемых покрытий.

Ключевые слова: покрытия, полимеры, механические характеристики, модуль упругости, коэффициент Пуассона, растяжение, изгиб.



Determination of Elastic Characteristics of Polymeric Covers by Results of Tests of Flat Specimens at Tension and Bending

Yu. P. Zezin, E. V. Lomakin, S. V. Mamonov, M. I. Martirosov, L. N. Rabinsky, P. V. Chistjakov

The results of experimental identification of elastic modulus and Poisson's ratio of thin polymeric covers on the surface of the flat specimens of steel 08-OP are presented. The values of elastic modulus were determined with the rule of the mixtures by the standard tests of the specimens with the covers at the tension and four-point bending. The values of the Poisson's ratio were obtained on the base of the comparison of the tests results and the computer modeling of the bending process the studied specimens. It was shown that both methods give us the narrow values of elastic characteristics for different modifications of the studied covers.

Key words: covers, polymers, mechanical characteristics, stiffness modulus, Poisson's ratio, tension, bending.

В настоящее время практически на все элементы машиностроительных конструкций из металлов наносят различные покрытия. Основной задачей нанесения покрытий является защита деталей машин и металлических конструкций от коррозии и износа. Подсчитано [1], что потери металла, связанные с коррозией и износом, составляют около 1/3 ежегодной выплавки этих материалов. Эксплуатационные расходы, связанные с коррозией и износом оборудования, сопоставимы со стоимостью самого оборудования. Коррозия и износ являются причиной 80% общих потерь рабочего времени в процессе эксплуатации оборудования.

Тем не менее, несмотря на несомненную важность и во многих случаях незаменимость покрытий в современной технике, к настоящему времени не разработано стандартных методов определения их упругих характеристик. Среди множества методов испытаний лакокрасочных покрытий лишь три относятся к оценке механических характеристик: испытания на изгиб, испытания на удар и определение стойкости к истиранию [2]. В испытаниях на изгиб определяют наименьший радиус изгиба образца-полосы с исследуемым покрытием, при котором не происходит растрескивание покрытия. В испытаниях на удар определяют наибольшую высоту падения груза массой 1 кг, при которой не наблюдается повреждений покрытия. Результаты подобных испытаний носят качественный характер и могут использоваться лишь для сравнения покрытий. Очевидно, что методы испытаний, позволяющие оценить прочность и упругие характеристики покрытия, имеют целый ряд преимуществ. Знание



механических характеристик даёт возможность конструкторам не только более обоснованно выбирать необходимый тип покрытий и способ их нанесения, но также прогнозировать работоспособность проектируемых деталей и конструкций в условиях эксплуатации.

В данной работе предпринята попытка оценки модуля упругости порошковых полимерных покрытий по результатам стандартных испытаний на растяжение и изгиб трехслойных образцов-полос. Проведены испытания двух полимерных покрытий нанесённых на поверхности образцов листовой прокатной стали 08-ПС. Для каждого из покрытий определены значения модуля упругости и коэффициента Пуассона.

Основой покрытий являлась краска RAL 9005 на эпоксидно-полиэфирной основе с добавлением современных защитных лаков. В работе принята следующая маркировка исследуемых покрытий:

- покрытие № 1, краска черная RAL 9005, порошковая, глянцевая без лака;
- покрытие № 2, краска черная RAL 9005, порошковая, глянцевая с добавлением прозрачного керамического наноструктурированного лака Ceramiclear Deltron D8105 фирмы PPG Industries (США).

Покрытия наносились на образцы листовой стали 08-ПС в виде полос шириной 12 мм и длиной 120 мм. Толщина стальных полос варьировалась на трех уровнях: 0.75 мм, 0.95 мм и 1.45 мм. Перед нанесением покрытий проводилась предварительная подготовка поверхностей образцов: обезжиривание и фосфатирование для улучшения адгезии покрытий и замедления распространения подпленочной коррозии.

Нанесение покрытий проводилось в камере Gema (Швейцария) в соответствии с принятой технологией. Толщина покрытий составляла 0.1 мм и контролировалась электронным толщиномером QuaNix 7500 (Германия), предназначенным для измерения толщины покрытия на ферромагнитных и неферромагнитных поверхностях.

В соответствии с предлагаемыми методами определение модуля упругости покрытия основано на сопоставлении значений модуля упругости при растяжении или сжатии, полученных для исходного материала (в рассматриваемом исследовании сталь 08-ПС) и для образцов с изучаемыми покрытиями. Различия между этими величинами составляют 10–15%. В этом случае точность оценки модуля упругости покрытия в значительной степени зависит от точности определения напряжения и деформации в процессе испытаний образцов материалов. В данной работе для испытаний образцов исходной стали и образцов с покрытиями использована современная испытательная машина Zwick Z100, позволяющая с высокой точностью определять силы и перемещения при растяжении и изгибе. Система измерения силы в процессе испытания основана на применении тензометрического динамометра и обеспечивает класс точности 0.5 в диапазоне измерений, реализованном в работе. Деформация образца в процессе испытаний на растяжение регистрировалась с применением стандартного экстензомера, входящего в комплект испытательной машины. Расстояние между щупами экстензомера составляло 35 мм.

Эффективный модуль упругости полос с покрытиями определялся по результатам испытаний образцов на растяжение с постоянной скоростью перемещения захватов 0.05 мм/с, что соответствует скорости деформации $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. В этом же режиме были проведены испытания на растяжение полос листовой стали 08-ПС, на которые наносились покрытия.

Для определения модуля упругости стали 08-ПС проведено 7 испытаний образцов без покрытий шириной 12 мм и толщиной 1.41 мм. Для дальнейших вычислений принималось среднее значение модуля упругости стали $1.96 \cdot 10^5$ МПа. Среднеквадратичное отклонение при этом составляло $5.83 \cdot 10^3$ МПа.

Для определения модуля упругости покрытия по результатам испытаний на растяжение образца-полосы с покрытием воспользуемся простейшим решением соответствующей задачи. Примем, что в испытании задается определенный уровень деформаций, общий как для слоя покрытия, так и для полосы стали. Используем уравнение равновесия полосы, которое в рассматриваемом случае запишем в виде

$$E_0 S_0 = E_n S_n + E_{ст} S_{ст}, \quad (1)$$

где E_0 — эффективный модуль упругости; S_0 — общая площадь сечения образца-полосы с покрытием, определяемый по результатам испытания на растяжение полосы с покрытием; E_n — модуль упруго-



сти покрытия; $S_{\text{п}}$ — площадь поперечного сечения, соответствующая слою покрытия; $S_{\text{ст}}$ — модуль упругости стали; $E_{\text{ст}}$ — площадь поперечного сечения стальной полосы.

На рис. 1 представлена характерная кривая растяжения полосы с покрытием № 1, на рис. 2 — фрагмент диаграммы растяжения, соответствующий упругому сопротивлению образца.

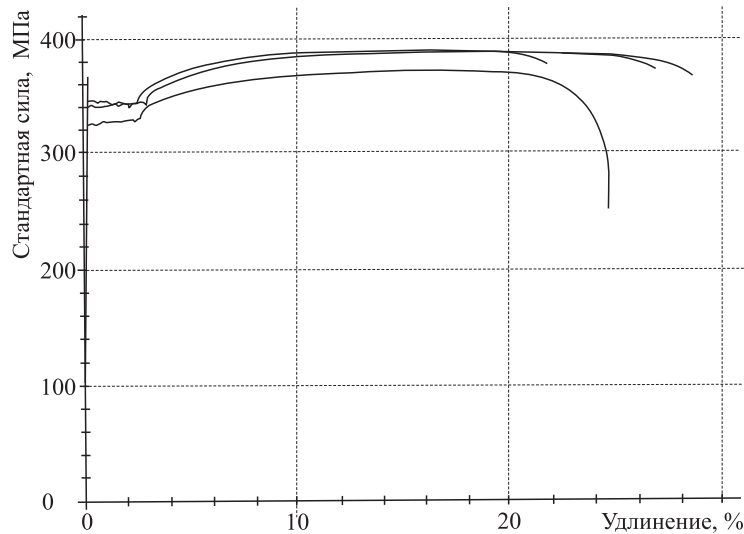


Рис. 1. Экспериментальные кривые растяжения образцов с покрытиями № 1

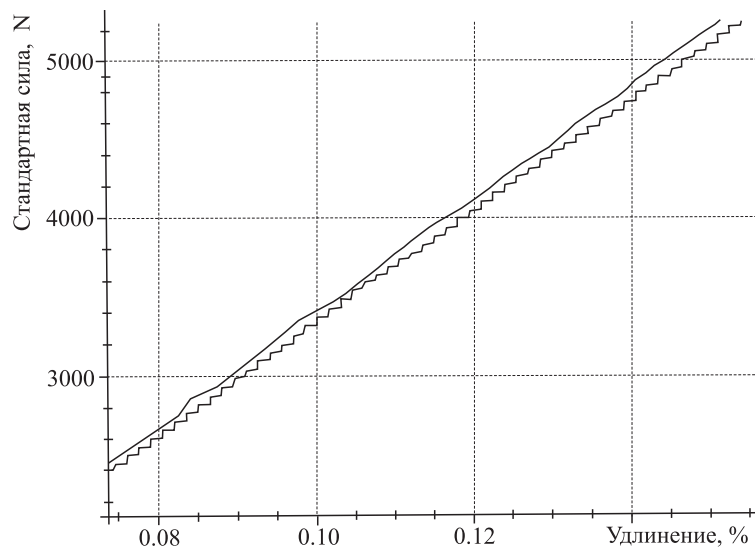


Рис. 2. Фрагменты кривых растяжения образцов с покрытием № 1, соответствующие участку упругого сопротивления деформированию

По этим данным и определялось значение эффективного модуля упругости для трехслойных образцов. Далее значение модуля упругости покрытия определялось в соответствии с соотношением (1). Результаты определения модулей упругости покрытий при растяжении представлены в табл. 1, в которой принята двойная нумерация испытываемых образцов: первая цифра обозначает тип покрытия (1 или 2), вторая — порядковый номер испытания. Средние значения модуля упругости для исследуемых покрытий составляют $3.53 \cdot 10^4$ МПа для покрытия № 1 и $2.81 \cdot 10^4$ МПа для покрытия № 2 при среднеквадратичных отклонениях $0.26 \cdot 10^4$ МПа и $1.23 \cdot 10^4$ МПа соответственно [3].

Другой способ определения модуля упругости покрытий предполагает использование экспериментальной оценки эффективного модуля упругости образцов с покрытиями при изгибе. В предлагаемой работе испытания на изгиб проведены по четырехточечной схеме. В процессе испытаний регистрировались значения перерезывающих сил и прогибов в точках их приложения, а также величина продольной и поперечной деформаций растяжения или сжатия на поверхности образца в месте наи-



Таблица 1

Результаты испытаний на растяжение образцов с покрытиями
и экспериментальные значения модуля упругости исследуемых покрытий

№ образца	Ширина образца, мм	Толщина образца, мм	Эффективный модуль упругости E_0 , 10^5 МПа	Модуль упругости покрытия, E_n , 10^4 МПа
1-1	12.2	0.95	1.595	3.27
1-2	12.2	0.95	1.595	3.27
1-3	12.2	0.95	1.605	3.72
1-4	12.2	1.14	1.657	3.58
1-5	12.2	1.14	1.657	3.58
1-6	12.2	1.15	1.655	3.19
1-7	12.2	1.66	1.745	3.72
1-8	12.2	1.66	1.749	3.94
1-9	12.2	1.66	1.745	3.72
1-10	12.2	1.66	1.740	3.29
2-1	12.2	1.66	1.756	4.64
2-2	12.2	1.66	1.727	2.42
2-3	12.2	1.65	1.723	2.21
2-4	12.2	1.65	1.721	1.98

большого прогиба. Деформация измерялась с применением тензодатчиков FLA-2 производства фирмы TML, Япония. База датчиков составляла 2 мм, сопротивление — 120 Ом. Датчики по полумостовой схеме подключались к цифровому усилителю типа Spider-8. Сигнал с тензоусилителя подавался на персональный компьютер для регистрации и автоматической обработки. Прогибы определялись по перемещению траверсы установки Zwick Z100. Изгибающая сила регистрировалась с использованием стандартной системы измерения испытательной машины. Для получения расчетных значений деформации покрытий при изгибе полос с покрытиями использованы основные соотношения теории изгиба балок постоянного сечения [4]. В соответствии с этими соотношениями изгибающий момент M в центральной части изгибаемого образца между опорами можно представить в виде суммы:

$$M = \frac{Pl}{2} = M_n + M_{ст}, \quad (2)$$

где M_n — часть момента, приходящаяся на покрытие, $M_{ст}$ — часть момента, соответствующая сопротивлению стальной полосы; P — изгибающая сила; l — расстояние между опорами. В то же время для M , M_n и $M_{ст}$ можно записать:

$$M = \frac{E_0^n J_0}{R} = \frac{E_n J_n}{R} + \frac{E_{ст} J_{ст}}{R}, \quad (3)$$

где E_0^n — эффективный изгибный модуль, $E_{ст}$ и E_n — значения модуля упругости стали и покрытия; J_0 , J_n , $J_{ст}$ — моменты инерции полного поперечного сечения образца, слоя покрытия и стали соответственно; R — радиус кривизны изогнутого образца.

С учетом (2) и (3) для E_0 и $E_{ст}$ можно записать следующие соотношения:

$$E_n = E_0 \frac{J_0}{J_n} - E_{ст} \frac{J_{ст}}{J_n}, \quad E_0 = \frac{Pl}{2\varepsilon W_0},$$

где W_0 и ε — момент сопротивления поперечного сечения образца и экспериментально определенное значение продольной деформации в середине образца.

Известно, что экспериментальные значения модуля упругости стали, определенные в условиях растяжения и изгиба, могут различаться. В этой связи были проведены испытания на изгиб образцов стали 08-ПС без покрытия для уточнения значения модуля упругости материала при изгибе. Испытания стальных образцов проведены также по схеме четырехточечного изгиба по методике, принятой



для испытаний образцов с покрытиями. Модуль упругости определялся в соответствии с известными рекомендациями [4]. Среднее значение модуля упругости стали, определенное в условиях изгиба, составляет $1.79 \cdot 10^5$ МПа при среднеквадратичном отклонении $0.6 \cdot 10^4$ МПа.

В табл. 2 и 3 представлены значения модуля упругости покрытий № 1 и № 2, определенные по результатам испытаний образцов с покрытиями на изгиб. Средние значения модуля упругости этих покрытий по данным испытаний на изгиб составляют $2.03 \cdot 10^4$ МПа для покрытия № 1 и $1.58 \cdot 10^4$ МПа для покрытия № 2 при среднеквадратичных отклонения $0.62 \cdot 10^4$ МПа и $1.1 \cdot 10^4$ МПа. Эти значения вполне удовлетворительно согласуются с данными, полученными по результатам испытаний на растяжение: $3.53 \cdot 10^4$ МПа и $2.81 \cdot 10^4$ МПа.

Таблица 2

Результаты определения модуля упругости покрытия № 1 по данным испытаний на изгиб

№ образца	P, Н	$\varepsilon, 10^{-3}$	$E_0, 10^5$ МПа	$E_n, 10^4$ МПа
1-1С	20.5	-0.523	1.238	1.37
	41.8	-1.054	1.252	2.18
1-1Р	20.7	0.515	1.267	2.27
	41.5	1.026	1.279	2.62
1-2С	20.9	-0.538	1.309	3.51
	42	-1.069	1.241	1.47
1-2Р	20.3	0.51	1.26	2.04
	41.5	1.044	1.236	1.31
1-3С	21	-0.535	1.241	1.48
	42.4	-1.064	1.259	2.01
1-3Р	20.4	0.513	1.255	1.88
	41.4	1.032	1.267	2.25

Таблица 3

Результаты определения модуля упругости покрытия № 2 по данным испытаний на изгиб

№ образца	P, Н	$\varepsilon, 10^{-3}$	$E_0, 10^5$ МПа	$E_n, 10^4$ МПа
2-1С	17.5	-0.456	1.211	1.09
	37.4	-0.978	1.21	1.06
2-1Р	18	0.428	1.326	4.55
	38	0.924	1.3	3.25
2-2С	19.9	-0.516	1.218	1.3
	40	-1.039	1.219	1.33
2-2Р	18.8	0.462	1.286	2.82
	38.8	0.959	1.279	2.61
2-3С	17.7	-0.46	1.217	1.27
	38.1	-0.984	1.224	1.48
2-3Р	17.9	0.464	1.222	1.36
	38.1	0.984	1.222	1.36

Методика определения коэффициента Пуассона покрытия основана на использовании результатов измерений продольной и поперечной деформации на поверхности покрытия в процессе испытаний на изгиб и численной модели изгиба трехслойного образца. Конечноэлементная модель изгиба образца разработана с использованием коммерческого программного комплекса PATRAN/NASTRAN. Для сокращения объема вычислений было использовано свойство симметрии принятой схемы нагружения, что дало возможность ограничиться рассмотрением лишь половины образца с заданными силами. Отброшенная часть в этом случае заменилась соответствующими граничными условиями. Разработанная модель содержит 11832 восьмиузловых элементов в виде прямоугольных параллелепипедов.



На рис. 3 представлен график расчетного распределения продольной деформации по толщине слоя покрытия. Следует сказать о линейном характере распределения деформаций и удовлетворительном совпадении расчетных и экспериментальных значений продольной деформации на поверхности образца, свидетельствующих об адекватности разработанной численной модели. Для проведения вычислений принимались экспериментальные значения модулей упругости стали и покрытия, полученные в данной работе. Коэффициент Пуассона стали принимался равным 0.28.

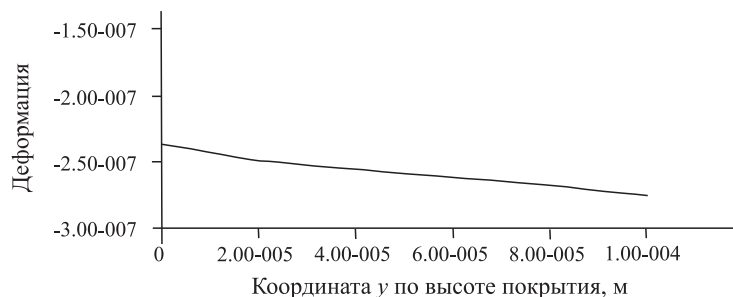


Рис. 3. Расчетное распределение деформации по толщине покрытия

Для определения коэффициента Пуассона покрытий проведено параметрическое исследование разработанной конечноэлементной модели, в процессе которого задавались различные значения коэффициента Пуассона покрытия в пределах от 0.2 до 0.35. Результаты вычислений зависимости отношения расчетных величин поперечной и продольной деформаций от заданного значения коэффициента Пуассона покрытия представлены на рис. 4 (1 — экспериментальное значение отношения поперечной деформации покрытия к продольной, 2 — расчетная зависимость отношения поперечной деформации к продольной деформации покрытия от заданного значения коэффициента Пуассона покрытия). Горизонтальная прямая на этом графике соответствует экспериментальному значению отношения поперечной и продольной деформаций. За истинное значение коэффициента Пуассона покрытия принимается такое, при котором отношение расчетных деформаций совпадает с отношением экспериментальных.

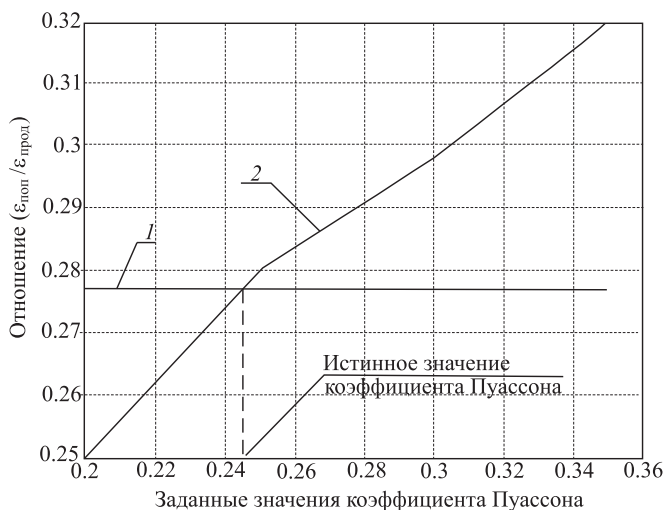


Рис. 4. Иллюстрация к определению коэффициента Пуассона покрытия

Как следует из данных, представленных на рис. 4, полученное значение коэффициента Пуассона покрытия № 1 составляет 0.245. Для покрытия № 2 эта величина составляет 0.238. Различия в значениях коэффициента Пуассона для исследуемых покрытий лежат в пределах неизбежных погрешностей измерений. В этой связи не представляется возможным сделать выводы о влиянии использованной рецептуры покрытия на величину его коэффициента Пуассона.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены два способа определения модуля упругости полимерных покрытий на плоских поверхностях металлических деталей. Оба способа основаны на анализе результатов испытаний на растяжение или изгиб образцов исходного материала и трехслойных образцов с исследуемыми покрытиями. Показано, что оба способа дают близкие оценки модуля упругости полимерных покрытий. По результатам испытаний на растяжение образцов с покрытиями различной рецептуры установлено, что добавление лаков к исходной краске приводит к снижению модуля упругости покрытия. Разработан метод экспериментальной оценки коэффициента Пуассона покрытий, основанный на использовании результатов испытаний на изгиб трехслойных образцов с покрытиями и данных параметрического исследования пространственной конечноэлементной модели изгиба образцов.



Библиографический список

1. Каверин А. В., Буйских К. П., Семенов Г. Р., Борисов Ю. С., Задворный Е. А. Исследование термической долговечности покрытий для камер сгорания газовых турбин // Проблемы прочности. 1999. № 1. С. 60–67.
2. Лившиц М. Л. Технический анализ и контроль производства лаков и красок. М. : Высш. шк., 1980. 216 с.
3. Румиисский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента : справочное пособие. М. : Наука, 1971. 192 с.
4. Тимошенко С. П. Сопrotивление материалов : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1965. 364 с.

УДК 539.374

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТРЕТЬЕГО ТИПА (GNIII)

В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*

Московский городской университет управления Правительства Москвы

E-mail: vlad_koval@mail.ru

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

E-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

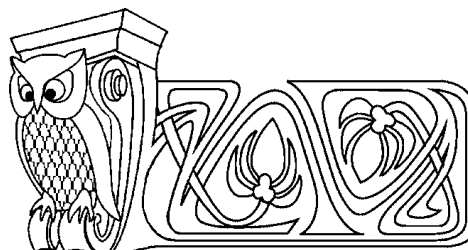
В представляемой работе в рамках модели термоупругого континуума Грина–Нахди GN третьего типа (GNIII, type-III thermoelasticity) получены нелинейные определяющие уравнения термодинамической (термомеханической) ортогональности в «пространстве» термодинамических сил: в связанных процессах термоупругого деформирования и теплопроводности твердых тел термодинамический поток (точнее, его необратимая составляющая), в роли которого выступает референциальный вектор потока энтропии, геометрически ортогонален в «пространстве» референциальных градиентов температурного смещения поверхности уровня потенциала рассеяния. Устанавливается нелинейный определяющий закон теплопроводности в теории GNIII, удовлетворяющий принципу ортогональности термодинамических потоков и сил. Рассматриваются также предельные варианты определяющих законов термоупругости третьего типа: GNI/CTE (type-I thermoelasticity) — стандартная термоупругость, основанная на законе теплопроводности Фурье; GNII (type-II thermoelasticity) — гиперболическая недиссипативная термоупругость, характеризуемая нулевым внутренним производством энтропии в процессах теплопроводности и референциальным потоком энтропии, имеющим только обратимую составляющую.

Ключевые слова: термоупругость, принцип максимума, термодинамическая ортогональность, термодинамическая сила, термодинамический поток, определяющий закон.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

К настоящему времени в ряде областей механики и физики были предприняты успешные попытки выйти за пределы классической линейной термодинамики необратимых процессов. Главная идея новых подходов (extended irreversible thermodynamics) в термодинамике необратимых процессов состоит в расширении числа переменных, представляющих состояние термодинамической системы. В качестве дополнительных переменных состояния при этом выступают обобщенные термодинамические потоки или в двойственных формулировках — обобщенные термодинамические силы¹. В такой новой поста-

¹Термодинамическая сила, как правило, определяется в форме пространственного (или отсчетного) градиента стандартной термодинамической переменной состояния. Поэтому расширение списка стандартных термодинамических переменных состояния происходит за счет добавления их градиентов. В этом случае предполагается, что в каждом данном состоянии значения термодинамической переменной состояния и ее градиента являются независимыми и в известном диапазоне произвольными.



Thermomechanical Orthogonality in Nonlinear Type-III Thermoelasticity (GNIII)

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

The present paper is devoted to formulations of constitutive equations for the non-linear Green–Naghdi type-III thermoelastic continuum consistent with the principle of thermodynamic (or thermomechanical) orthogonality. The principle of thermodynamic orthogonality proposed by Ziegler as a generalization of the Onsager linear irreversible thermodynamics states that the irreversible constituent parts of thermodynamic currents (velocities) are orthogonal to the convex dissipation potential level surface in the space of thermodynamic forces for any process of heat transport in a solid. The principle of the thermomechanical orthogonality takes its origin from the von Mises maximum principle of the perfect plasticity, where it provides existence of a yield surface, its convexity, and the associated flow rule. Non-linear constitutive laws of heat propagation as of type-III thermoelasticity complying with the principle of thermomechanical orthogonality are discussed. Important for applied thermoelasticity cases covered by type-III theory are studied: GNI/CTE - conventional thermoelasticity based on the Fourier heat conduction law and GNII — dissipationless hyperbolic thermoelasticity. In the latter case the internal entropy production equals zero for any heat transport process having the form of the undamped thermoelastic wave propagating at finite speed.

Key words: thermoelasticity, von Mises maximum principle, thermodynamic orthogonality, thermodynamic force, thermodynamic flux, constitutive law.



новке энтропия термодинамической системы и термодинамические потенциалы состояния (например, свободная энергия Гельмгольца) также оказываются функциями дополнительных переменных состояния, приобретая совершенно новые, по сравнению со стандартными, аналитические формы. То же самое касается вектора потока энтропии и внутреннего производства энтропии.

Как известно, *стандартные* термодинамические переменные состояния относятся к числу «медленных» переменных. Их использование, например, при построении теорий транспорта тепла в твердых деформируемых телах в качестве переменных состояния вместе с законами сохранения приводит к ряду противоречий: бесконечной скорости распространения тепла и ненулевому внутреннему производству энтропии во всех без исключения термодинамических процессах, связанных с передачей тепла. Учет дополнительных переменных состояния («быстрых» переменных) позволяет дать формулировку теории в форме дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа. В частности, следуя по этому пути, можно получить гиперболические теории теплопроводности и гиперболические уравнения транспорта тепла, обладающие решениями в форме распространяющихся с конечной скоростью тепловых волн «второго звука» незатухающей амплитуды.

Теория связанной термоупругости Грина–Нахди (А. Е. Green, Р. М. Naghdi) [1, 2] в полной мере отвечает принципам новой термодинамики необратимых процессов. В этой теории в качестве основной термической «медленной» переменной выступает температурное смещение, а его референциальный градиент — в качестве «быстрой» переменной. Однако в нелинейной теории Грина–Нахди по-прежнему остается достаточно широкий спектр теоретически допустимых определяющих уравнений, сузить который до практически приемлемого диапазона нельзя без дальнейшего развития теории. Одним из важных инструментов, пригодных для этой цели, является принцип термодинамической ортогональности, появление которого исторически связано с построением математической теории пластичности.

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Принцип, аналогичный принципу ортогональности термодинамических потоков и сил, первоначально возник в математической теории пластичности (там он известен как принцип максимума Мизеса (R. von Mises)) и выступал (и в настоящее время выступает) в качестве ее основополагающего принципа, из которого следовали геометрическая выпуклость в «пространстве» напряжений поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ($\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши) и в действительном процессе пластического течения ортогональность приращения пластической деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ поверхности текучести в гладких ее точках. Условие, выражающее геометрическую ортогональность в «пространстве» напряжений свободного вектора поверхности текучести, представляющего тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, является основным определяющим законом математической теории пластичности — ассоциированным с условием пластичности $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ законом пластического течения:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad df(\boldsymbol{\sigma}) = 0), \quad (1)$$

где $d\lambda \geq 0$ — неопределенный множитель, выступающий в качестве множителя Лагранжа при решении экстремальной задачи, соответствующей принципу максимума². Уравнения в (1), заключенные в круглые скобки, представляют собой признаки активного нагружения идеально пластического тела, выполнение которых указывает на наличие необратимого термодинамического потока $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ только тогда, когда действительные напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ находятся на пределе текучести и, кроме того, при малом догружении $d\boldsymbol{\sigma}$ напряжения $\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$ также *будут* находиться на пределе текучести, т.е. $f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

Таким образом, ассоциированный закон пластического течения (1) устанавливает геометрическую ортогональность в «пространстве» напряжений термодинамического потока, в роли которого в данном случае выступает приращение пластической деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, поверхности текучести в геометрическом месте, определяемом действительным напряжением $\boldsymbol{\sigma}$. Сдвиговая природа пластического течения

²Неопределенность множителя $d\lambda$ в теории идеальной пластичности проявляется в том, что он не рассматривается как предзаданная функция термодинамических переменных состояния и, следовательно, для него не может быть сформулировано специальное определяющее уравнение.



металлов и горных пород прекрасно отображается решениями гиперболических уравнений математической теории пластичности с определяющим уравнением в форме ассоциированного закона течения и критерием текучести в форме Кулона–Треска.

Принцип максимума Мизеса как исходный принцип математической теории пластичности и ассоциированный закон пластического течения обсуждаются практически во всех монографиях, посвященных математическим теориям идеальной пластичности (см., например [3, 4]).

Не подлежит никакому сомнению, что принцип максимума Мизеса является одним из фундаментальных принципов механики деформируемого твердого тела, а в широком смысле — всеобъемлющим принципом современного естествознания. В сочетании с критерием текучести Кулона–Треска он дает возможность сформулировать математическую теорию пластичности с помощью дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа.

Рассмотрим более подробно формулировку принципа максимума Мизеса и связанные с ним вопросы. Нам потребуются геометрические представления в так называемом «пространстве» напряжений. Тензору $d\varepsilon^P$ в этом «пространстве» соответствует свободный вектор \vec{RQ} ; тензору напряжений σ — связанный вектор \vec{OS} . Уравнение замкнутой поверхности текучести идеально пластического тела в «пространстве» напряжений примем в форме

$$f(\sigma) = 0, \tag{2}$$

предполагая все точки поверхности регулярными, что позволит вести речь об однозначно определенной нормали к поверхности текучести.

Действительные напряжения σ и приращения пластической деформации $d\varepsilon^P$ должны удовлетворять следующим уравнениям (∇ — пространственный оператор Гамильтона, $d\lambda \geq 0$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= \mathbf{0}, & f(\sigma) &\leq 0, \\ d\varepsilon^P &= (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \sigma} & (f(\sigma) = 0, \quad df(\sigma) = 0), \\ d\varepsilon^P &= \mathbf{0} & (f(\sigma) = 0, \quad df(\sigma) < 0; \quad \text{или} \quad f(\sigma) < 0), \\ \nabla \times (d\varepsilon^P) \times \nabla &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3}$$

последнее из которых есть уравнение совместности полных приращений деформаций.

Необратимая часть приращения работы при пластическом течении вычисляется для действительных состояний согласно

$$dW_p = \operatorname{tr}(\sigma \cdot d\varepsilon^P) \tag{4}$$

и удовлетворяет (для действительных состояний) неравенству необратимости

$$dW_p \geq 0. \tag{5}$$

Это неравенство выражает также неотрицательность внутреннего производства энтропии в процессах атермического пластического течения.

Допустим, что действительное напряженное состояние σ находится на пределе текучести: изображающая в пространстве напряжений действительное напряжение σ точка S располагается на поверхности текучести (2). Наряду с действительными напряжениями σ рассмотрим напряжения сравнения σ^* , подчинив их единственному ограничению³: изображающая точка S^* может располагаться либо внутри, либо на поверхности текучести, т. е. должно удовлетворяться неравенство

$$f(\sigma^*) \leq 0. \tag{6}$$

Для действительного приращения пластической деформации $d\varepsilon^P$ введем функцию

$$dW_p^* = \operatorname{tr}(\sigma^* \cdot d\varepsilon^P), \tag{7}$$

определенную на множестве напряжений сравнения, и исследуем ее на наличие максимума. Следуя геометрическим представлениям математической теории пластичности, запишем dW_p^* в виде скалярного произведения: $dW_p^* = \vec{OS}^* \cdot \vec{RQ}$, где связанный вектор \vec{OS}^* представляет в «пространстве»

³Ясно, что тензор напряжений сравнения σ^* будет предполагаться симметричным.



напряжений напряжение сравнения σ^* , а свободный вектор \overrightarrow{RQ} — действительное приращение пластической деформации $d\varepsilon^P$.

Очевидно, что максимум функции dW_p^* всегда положительный⁴, и к тому же он не может достигаться в точках, расположенных строго внутри поверхности текучести. В самом деле, если бы такая точка S_0^* нашлась, то, выпустив луч из точки S_0^* параллельно вектору \overrightarrow{RQ} и определив точку S_1^* пересечения этого луча с поверхностью текучести, очевидно, получим $\overrightarrow{OS_1^*} \cdot \overrightarrow{RQ} > \overrightarrow{OS_0^*} \cdot \overrightarrow{RQ}$, что противоречит неравенству $\overrightarrow{OS_0^*} \cdot \overrightarrow{RQ} \geq \overrightarrow{OS_1^*} \cdot \overrightarrow{RQ}$.

Таким образом, поиск максимума следует ограничить тем условием, что точка S^* может располагаться только на самой поверхности текучести. Вводя неопределенный множитель Лагранжа $d\lambda$ для определения экстремальных значений функции dW_p^* , имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^*} [\text{tr}(\sigma^* \cdot d\varepsilon^P) - f(\sigma^*)d\lambda] = 0.$$

Следовательно, экстремальные напряжения сравнения σ^* должны быть такими, чтобы совместно удовлетворялись уравнения

$$d\varepsilon^P = d\lambda \frac{\partial f(\sigma^*)}{\partial \sigma^*}, \quad f(\sigma^*) = 0. \quad (8)$$

Докажем, что если поверхность текучести замкнутая, гладкая и геометрически строго выпуклая⁵, то решение системы уравнений (8) существует и единственно, и, если обозначить указанное решение через σ , что оправдано, поскольку на основании (3) действительные напряжения σ должны совместно удовлетворять уравнениям (8), функция dW_p^* достигает при $\sigma^* = \sigma$ глобального строгого максимума на множестве напряжений сравнения.

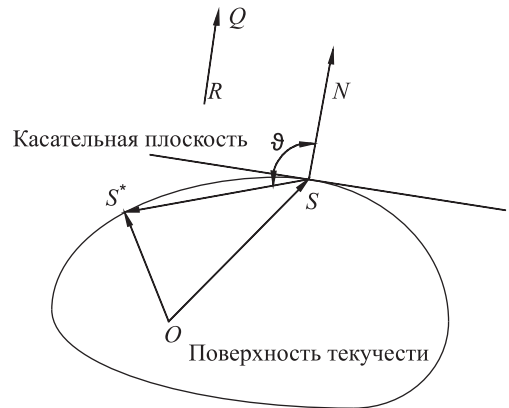
Доказательство можно провести с помощью следующих простых геометрических рассуждений. Точка S^* в силу (8) такова, что нормаль к поверхности текучести в точке S^* должна быть параллельна заданному направлению \overrightarrow{RQ} . Очевидно, что такая точка S^* существует и будет единственной, если поверхность текучести замкнутая и строго выпуклая. Обозначим далее указанную точку через S : для $S^* = S$, т. е. при выполнении равенства $\sigma^* = \sigma$, удовлетворяются оба уравнения (8). Далее оценим разность $dW_p^* - dW_p$. Для этого снова воспользуемся геометрическими представлениями. В результате находим

$$dW_p^* - dW_p = \overrightarrow{SS^*} \cdot \overrightarrow{RQ} < 0 \quad (S \neq S^*),$$

так как угол ϑ между векторами $\overrightarrow{SS^*}$ и \overrightarrow{RQ} всегда тупой в силу строгой выпуклости поверхности нагружения (рисунок). Тем самым доказываются все высказанные выше положения.

Заметим, что если поверхность текучести выпуклая, но не строго, то решение системы уравнений (8) не будет единственным. Функция dW_p^* от напряжений сравнения и в этом случае также достигает при $\sigma^* = \sigma$ глобального максимума, но этот максимум не строгий, по крайней мере, для некоторых приращений $d\varepsilon^P$.

Проведенные выше рассуждения можно полностью обратить, приняв в качестве исходного положения принцип максимума: функция $dW_p^* = \text{tr}(\sigma^* \cdot d\varepsilon^P)$ от напряжений сравнения σ^* , где $d\varepsilon^P$ — действительные приращения пластических деформаций, достигает строгого глобального максимума на множестве напряжений сравнения на действительных напряжениях, т. е. когда $\sigma^* = \sigma$. В этом случае следствием того, что экстремум функции dW_p^* есть строгий (не строгий) максимум, является строгая (не строгая) геометрическая выпуклость поверхности текучести и ассоциированный закон пластического течения.



Отрицательность скалярного произведения $\overrightarrow{SS^*} \cdot \mathbf{N}$ для любой точки $S^* \neq S$ на замкнутой геометрически строго выпуклой поверхности текучести

⁴Это следует из неравенства необратимости (5).

⁵Т. е. всегда расположена по одну сторону от касательной плоскости и пересекается с ней только в одной точке.



Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в «пространстве» напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщения принципа максимума и ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой были предложены Койтером, 1953 (W. T. Koiter). Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа p гладких поверхностей текучести $f_\gamma(\sigma) = 0$; каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Таким образом, предположение о гладкости поверхности текучести не является обязательным. Если точка S — угловая точка поверхности текучести, то из принципа максимума Мизеса следует, что вектор \overrightarrow{RQ} должен располагаться внутри конуса, образованного в «пространстве» напряжений нормальными к поверхности текучести в точке S .

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется следующими признаками:

$$f_\omega(\sigma) = 0, \quad df_\omega(\sigma) = 0, \quad f_\kappa(\sigma) = 0, \quad df_\kappa(\sigma) < 0 \quad \text{или} \quad f_\kappa(\sigma) < 0,$$

где индексы ω и κ различны, и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса $\gamma = 1, 2, \dots, p$, причем индекс ω пробегает непустое множество значений.

Полное приращение $d\varepsilon^P$ есть сумма соответствующих всем индексам ω приращений $d\varepsilon^{P(\omega)}$:

$$d\varepsilon^P = \sum_{\omega} d\varepsilon^{P(\omega)},$$

где каждое приращение $d\varepsilon^{P(\omega)}$ вычисляется согласно ассоциированному закону течения с регулярной функцией текучести f_ω

$$d\varepsilon^{P(\omega)} = \frac{\partial f_\omega(\sigma)}{\partial \sigma} d\lambda_\omega,$$

а величины $d\lambda_\omega$ должны быть положительными. Множители $d\lambda_\omega$ неопределены в том смысле, что они не могут быть вычислены на основании определяющих уравнений и произвольны до такой степени, в какой это допускается условиями совместности полных деформаций, краевыми условиями и условиями сопряжения на поверхностях, ограничивающих пластическую зону.

Окончательно *обобщенный* ассоциированный закон течения принимает следующий вид:

$$d\varepsilon^P = \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial f_\gamma(\sigma)}{\partial \sigma} d\lambda_\gamma, \tag{9}$$

$$d\lambda_\gamma > 0 \quad (f_\gamma(\sigma) = 0, \quad df_\gamma(\sigma) = 0),$$

$$d\lambda_\gamma = 0 \quad (f_\gamma(\sigma) = 0, \quad df_\gamma(\sigma) < 0; \quad \text{или} \quad f_\gamma(\sigma) < 0).$$

Геометрически обобщенный ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформаций в «пространстве» напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям $f_\omega(\sigma) = 0$ в указанной точке векторов, причем ни абсолютная величина, ни направление указанного вектора в угловой точке поверхности текучести обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируются, а остаются неопределенными.

3. ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ В ПРОЦЕССАХ ТРАНСПОРТА ТЕПЛА В ТЕРМОУПРУГИХ СРЕДАХ

Принцип максимума может быть распространен на процессы транспорта тепла в твердых деформируемых телах с целью построения таких определяющих уравнений термоупругости, которые исключали бы присущие классической теории теплопроводности Фурье (СТЕ) недостатки: уравнения



СТЕ предсказывают конечную скорость распространения упругой волны и — бесконечную для теплового импульса. Заметим, что, как показывает анализ научной литературы работы, в этом направлении ранее по-видимому не выполнялись.

В последние годы было предложено достаточно много различных обобщений теории связанной термоупругости с тем, чтобы устранить парадокс бесконечной скорости распространения тепла и допустить возможность волнового характера транспорта тепла в форме *незатухающих* волн «второго звука». В начале 90-х гг. XX в. Грином и Нахди [1, 2] была разработана теория связанной обобщенной термоупругости (GN-theory). Предложенная ими теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и недиссипативной термоупругости, предполагающей отсутствие внутреннего производства энтропии в процессах транспорта тепла в твердых деформируемых телах и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трех различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и GNIII. В линейном приближении первый вариант (GNI) приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности; второй (GNII) — устанавливает, что распространение тепла есть волновой недиссипативный процесс (dissipationless thermoelasticity), не сопровождающийся внутренним производством энтропии, и приводит к *гиперболическому* уравнению транспорта тепла; третий (GNIII) — наиболее общий из рассматриваемых — включает GNI/СТЕ и GNII в качестве предельных случаев. Именно по этой причине GN-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, связанных с переносом тепла, по сравнению с теорией Фурье. Ниже приводится расчет внутреннего производства энтропии для процессов транспорта тепла и с помощью концепции потенциала рассеяния формулируются определяющие уравнения термодинамической ортогональности в обобщенной термоупругости третьего типа GNIII.

Для представления деформации термоупругого тела воспользуемся классическим лагранжевым отсчетным описанием: «конечная» деформация описывается «конечным» преобразованием отсчетной конфигурации в актуальную

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (10)$$

где \mathbf{x} — пространственное положение точки, которая занимала место \mathbf{X} в отсчетном положении.

В дальнейшем изложении систематически будет использоваться отсчетный оператор Гамильтона $\nabla_{\mathbf{R}}$, ассоциированный с лагранжевой переменной \mathbf{X} . «Конечные» тензоры деформации конструируются, исходя из (10), с помощью градиента деформации:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}. \quad (11)$$

Система основных соотношений нелинейной связанной термоупругости третьего типа (GNIII) состоит из:

— уравнения баланса массы

$$\left. \frac{\partial \rho_{\mathbf{R}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = 0; \quad (12)$$

— уравнения баланса импульса

$$\rho_{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}, \quad (13)$$

где $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}$ — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа, $J = \det \mathbf{F}$ — якобиан деформации, \mathbf{T} — тензор напряжений Коши;

— уравнения баланса внутренней энергии

$$\dot{e} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{R}} + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}}) + \varepsilon, \quad (14)$$

где e — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии \mathbf{R}) внутренней энергии, $\mathbf{h}_{\mathbf{R}}$ — референциальный вектор потока тепла (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии), ε — плотность объемных источников тепла (radiant heat, лучистое тепло);

— уравнения баланса энтропии

$$\dot{s} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \sigma + \xi, \quad (15)$$



где s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии), \mathbf{j}_R — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии), σ — внешнее производство энтропии, $\xi \geq 0$ — внутреннее производство энтропии.

Внутреннее производство энтропии должно удовлетворять неравенству необратимости:

$$\xi \geq 0. \tag{16}$$

Уравнение баланса энтропии (15) играет центральную роль в термодинамике необратимых процессов.

В качестве основной термической переменной в теории Грина–Нахди GN используется температурное смещение ϑ . В теории третьего типа GNIII полный термодинамический базис состоит из следующих термодинамических переменных состояния:

$$\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}. \tag{17}$$

Перечисленные переменные состояния считаются термодинамически независимыми и в этом смысле образуют термодинамический базис. Выбор термодинамического базиса чрезвычайно важен и решающим образом сказывается на построении математической модели тех процессов, для исследования которых он собственно и используется.

Далее полагается, что допустимы лишь такие процессы, когда выполняется уравнение баланса энтропии (15) с неотрицательным внутренним производством энтропии (16) при дифференциальных ограничениях (12)–(14). Возможная двойственная формулировка: выполняется уравнение баланса энергии (14) при ограничениях (12), (13), (15). Исходная и двойственная формулировки выступают как проявление принципа непротиворечивости уравнений термомеханики: баланс энтропии (энергии) не должен нарушать баланса массы, импульса, энергии (энтропии), т.е. уравнение баланса энтропии (энергии) должно удовлетворяться тождественно для всех термодинамически допустимых процессов в силу выполнения всех оставшихся уравнений баланса.

Ограничения в форме дифференциальных уравнений (12)–(14) учитываются с помощью множителей Лагранжа. В результате можно получить соотношения (θ — абсолютная температура, обратное значение которой («холодность») выступает в качестве множителя Лагранжа)

$$\theta \mathbf{j}_R = \mathbf{h}_R, \quad \theta \sigma = \varepsilon. \tag{18}$$

На основании уравнений (12)–(15) и соотношений (18) выводится приведенное уравнение баланса энергии:

$$-(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) - \mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \theta = \theta \xi, \tag{19}$$

где $\psi = e - s\theta$ — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) свободной энергии Гельмгольца.

Дифференциальные уравнения термоупругости должны быть дополнены определяющими уравнениями. Определяющие уравнения связанного термоупругого поля обязаны иметь форму

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \mathbf{h}_R &= \mathbf{h}_R(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \mathbf{S} &= \mathbf{S}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ s &= s(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \xi &= \xi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \theta &= \theta(\dot{\vartheta}). \end{aligned} \tag{20}$$

В такой общей форме определяющие уравнения термоупругости мало пригодны в прикладных вопросах. Дальнейшие ограничения на форму определяющих уравнений (20) могут быть получены следующим образом. Приведенное уравнение баланса энергии (19) с неотрицательным внутренним производством энтропии (16) должно удовлетворяться для всех термодинамически допустимых процессов в силу выполнения всех оставшихся уравнений баланса. Выполнив подстановку определяющих зависимостей (20) в уравнение (19) и замечая, что коэффициенты при $\dot{\vartheta}$, $\nabla_R \dot{\vartheta}$, $\dot{\mathbf{F}}$ должны обращаться в нуль, заключаем, что свободная энергия в действительности не может зависеть от переменной состояния $\nabla_R \dot{\vartheta}$, т.е.

$$\psi = \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F});$$



кроме того, должны выполняться следующие равенства:

$$s = -\frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta}} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad (21)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}. \quad (22)$$

Для внутреннего производства энтропии, следовательно, остается выражение

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}\right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}. \quad (23)$$

Предполагая, что определяющие уравнения не содержат *явных* вхождений температурного смещения ϑ , находим

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}\right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}. \quad (24)$$

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ В ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ GNIII

Принцип термодинамической ортогональности и его двойственная формулировка были предложены Циглером (H. Ziegler) в ряде публикаций начиная с 1958 г., как обобщение линейной теории Онсагера (L. Onsager), восходящей к 1931 г. (см. [5–7]; соответствующий круг вопросов обсуждается также в [8]).

Следуя принципу термодинамической ортогональности, введем потенциал рассеяния (точнее говоря, сопряженный потенциал рассеяния) согласно

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) \quad (25)$$

и будем рассматривать его как функцию от термодинамической силы $-\nabla_R \dot{\vartheta}$, приходим к определяющему уравнению в форме соотношения термодинамической ортогональности в пространстве термодинамических сил необратимой составляющей термодинамического потока $\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}$ поверхности уровня потенциала рассеяния $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) = \text{const}$. В гладких точках поверхности уровня имеем следующее уравнение градиентальности:

$$\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} = -\lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}, \quad (26)$$

или

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} - \lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (27)$$

Множитель λ^* в уравнении (26) вычисляется на основании определяющего потенциал рассеяния \mathcal{D} равенства

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \lambda^* (\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}},$$

откуда сразу же следует, что

$$\lambda^* = \frac{1}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \mathcal{D}. \quad (28)$$

Таким образом, подставляя (28) в уравнение (27), закон теплопроводности в теории термоупругости типа GNIII с учетом принципа термодинамической ортогональности будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} - \frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (29)$$

Выполнение неравенства $\xi \geq 0$ обеспечивается выпуклостью поверхностей уровня $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) = \text{const}$ в пространстве термодинамических сил.



Полученное выше уравнение (29) устанавливает определяющий закон теплопроводности в GNII теории, основанный на принципе ортогональности термодинамических потоков и сил. Очевидно, что термодинамически корректен и такой вариант, когда процесс термоупругого деформирования не сопровождается внутренним производством энтропии. В этом случае $\mathcal{D} = 0$ и закон теплопроводности приобретает форму

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}, \quad (30)$$

характерную для теории GNII. Это определяющее уравнение для вектора потока энтропии — одно из самых замечательных в термомеханике континуума, поскольку поток энтропии, а следовательно, и поток тепла определяются согласно (30) заданием свободной энергии.

Теория связанной термоупругости GNI/СТЕ основывается на допущении о независимости свободной энергии ψ от температурного смещения ϑ и градиента температурного смещения $\nabla \vartheta$. Поэтому следует полагать, что $\psi = \psi(\vartheta, \mathbf{F})$. В результате внутреннее производство энтропии вычисляется как $\theta \xi = -\mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}$. Уравнение термодинамической ортогональности, обобщающее закон теплопроводности Фурье, имеет форму

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (31)$$

Итак, в теории GNIII, дополненной принципом термодинамической ортогональности, вектор потока энтропии определяется, как следует из уравнения (29), через два потенциала: свободную энергию ψ и потенциал рассеяния \mathcal{D} . Он естественным образом распадается на две составляющих:

$$\text{обратимую } -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}} \text{ и необратимую } -\frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}.$$

5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ GNIII

На практике обычно применяются линеаризованные уравнения термоупругости. Не вдаваясь в дальнейшие подробности, приведем замкнутую систему уравнений линейной теории термоупругости третьего типа (GNIII).

В линейном приближении GNIII термоупругое поведение тела подчиняется определяющему закону Дюгамеля–Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha(\theta - \theta_0)) \mathbf{I}, \quad (32)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, \mathbf{I} — единичный тензор; мы по-прежнему используем следующие обозначения: λ, μ — упругие постоянные Ламе; α — термомеханическая постоянная ($\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$); β^* — коэффициент объемного теплового расширения (coefficient of thermal expansion); θ — абсолютная температура; θ_0 — отсчетная (равновесная) температура. (Отметим, что при температуре, равной θ_0 , отсутствуют деформации и напряжения.)

Линейная теория GNIII-термоупругости характеризуется тем, что вектор потока тепла \mathbf{h} линейно зависит как от градиента температуры, так и от градиента температурного смещения:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta - \Lambda \nabla \vartheta, \quad (33)$$

Λ_* — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity), Λ — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate).

Уравнение (33) получается как следствие (29) при условии, что свободная энергия квадратично зависит от градиента температурного смещения $\nabla \vartheta$, а потенциал рассеяния — от градиента температуры $\nabla \theta$, и, следовательно, не противоречит принципу термодинамической ортогональности.

Заметим, что внутреннее производство энтропии в модели GNII-термоупругости исчезает $\xi = 0$ в силу $\mathbf{j} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta}$.

Классическая связанная термоупругость GNI/СТЕ основывается на допущении о независимости свободной энергии ψ от температурного смещения ϑ и градиента температурного смещения $\nabla \vartheta$, в силу чего внутреннее производство энтропии вычисляется как $\theta \xi = -\mathbf{j} \cdot \nabla \theta$.



Кроме того, полная система соотношений линейной GNIII-теории включает уравнения движения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (34)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений, ρ — плотность; уравнение баланса энтропии:

$$\dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma + \xi, \quad (35)$$

где s — плотность (на единицу объема) энтропии, \mathbf{j} — вектор потока энтропии, σ — внешнее производство энтропии, $\xi \geq 0$ — внутреннее производство энтропии, или

$$\theta \dot{s} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot \nabla \theta + \theta(\sigma + \xi); \quad (36)$$

и уравнение баланса энергии, которое мы примем в форме

$$-\left(\dot{\psi} + s\dot{\theta}\right) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta} = \theta \xi, \quad (37)$$

где ψ — плотность (на единицу объема) свободной энергии Гельмгольца. Здесь необходимо учесть, что вектор потока тепла и вектор потока энтропии связаны уравнением

$$\mathbf{h} = \theta \mathbf{j}, \quad (38)$$

а для внутреннего производства энтропии справедливо соотношение

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta}\right) \cdot \nabla \dot{\vartheta}. \quad (39)$$

Приведем также соотношения Коши, связывающие тензор малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и градиент вектора перемещения $\nabla \otimes \mathbf{u}$:

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T. \quad (40)$$

Заключая, запишем линейные связанные уравнения движения и теплопроводности термоупругости GNIII в той форме, в которой они обычно применяются при решении прикладных задач термоупругости [9]:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \Delta \theta + \Lambda_* \Delta \dot{\theta} - \kappa \ddot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (41)$$

В этих уравнениях: \mathbf{u} — вектор перемещения; θ — абсолютная температура, точнее, ее превышение (инкремент) над отсчетной (референциальной) температурой θ_0 ; κ — теплоемкость (на единицу объема) при нулевой постоянной деформации⁶; ∇ — трехмерный оператор Гамильтона; $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа.

Таким образом, уравнения GNIII для связанных (сопряженных) перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного и сопряженного ему скалярного связанных дифференциальных уравнений в частных производных. Их связанность проявляется через определяющую термомеханическую постоянную α в слагаемом с градиентом температуры $\nabla \theta$ в векторном уравнении системы (41). Очевидно, что связанность уравнений GNIII-теории обуславливается (так же как и в классической теории термоупругости СТЕ) взаимным влиянием нагрева (охлаждения) и объемной деформации тела, проявляется, как уже указывалось, через определяющую постоянную α и является следствием принципов термодинамики.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00184-а).

⁶Поскольку рассматривается линейная теория, теплоемкость κ не зависит от температуры для ее значений в окрестности референциальной температуры θ_0 .



Библиографический список

1. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
2. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 232 с.
4. Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд., перераб. и доп. Самара : Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. 340 с.
5. Ziegler H. Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21, № 6. P. 853–863.
6. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М. : Мир, 1966. 134 с.
7. Ziegler H. Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50, № 3. P. 149–164.
8. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М. : Высш. шк., 1983. 399 с.
9. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

УДК 531.36

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДСТВИЙ ЗАКЛИНИВАНИЯ ТРОСА В ЗАДАЧЕ О ДОСТАВКЕ ГРУЗА С ОРБИТЫ

А. С. Ледков, Д. И. Дюков

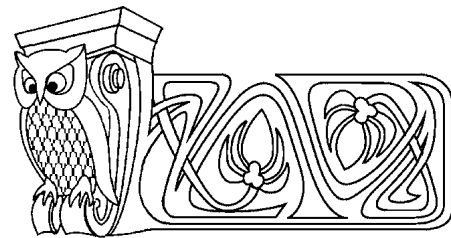
Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: ledkov@inbox.ru, dmitry_dyukov@mail.ru

В статье рассматривается нештатная ситуация заклинивания троса, которая может проявляться при решении задачи доставки груза с орбиты с помощью троса. Использована математическая модель на основе формализма Лагранжа, описывающая движение космической тросовой системы, состоящей из базового космического аппарата, троса и груза. При построении модели масса и демпфирующие свойства троса не учитывались, считалось, что базовый КА движется по круговой орбите. Для случая линейного закона развертывания троса было исследовано влияние заклинивания троса на движение системы. Была проведена серия численных расчетов для систем с различными параметрами. По ее результатам были построены диаграммы, позволяющие оценивать влияние параметров системы на последствия заклинивания (обрыв троса, столкновение троса с КА, намотка троса на КА). На основе анализа этих диаграмм были сформулированы некоторые общие выводы о влиянии параметров системы на последствия нештатной ситуации заклинивания троса.

Ключевые слова: космическая тросовая система, линейное развертывание, нештатная ситуация, уравнения Лагранжа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Космические тросовые системы являются важным элементом современной космонавтики. Одной из наиболее близкой к широкой практической реализации является задача доставки груза с орбиты [1]. К настоящему времени уже проведено несколько экспериментов, доказавших возможность осуществления этой транспортной операции (SEDS-1 в 1993 году [2] и YES-2 в 2007 [3]). В научной литературе этой задаче уделяется большое внимание, большинство работ посвящено исследованию динамики КТС, ее устойчивости и выбору закона развертывания троса [4, 5]. С практической точки зрения очень важным является вопрос моделирования нештатных ситуаций и прогнозирования их последствий. Нельзя сказать, что работы на эту тему отсутствуют. Довольно подробно исследован вопрос выживаемости КТС при столкновении троса с микрометеоритом [6]. Существуют работы, посвященные изучению влияния неправильной ориентации базового КА и отказа его системы управле-



Research of Consequences of Tether's Jamming in the Task of Payload Delivery from an Orbit

A. S. Ledkov, D. I. Dyukov

In article the off-normal situation of tether's jamming at the decision of the task of payload delivery from an orbit by means of a tether is considered. The mathematical model described the space tether system consisting of the basic space vehicle, the tether and the payload is used. At creation of model the mass and damping properties of the tether weren't considered. It is supposed that basic space vehicle moves on a circle orbit. For a case of the linear law of tether development an influence of jamming of a tether on system motion has been researched. A series of numerical calculations for systems with various parameters has been led. The charts allowing to estimate influence of system's parameters on jamming consequences (a tether breakaway, collision of a tether with basic space vehicle, tether winding on basic space vehicle) have been constructed. On the basis of the analysis of these charts some general conclusions about influence of system's parameters on consequences of this off-normal situation have been formulated.

Key words: space tether system, linear deployment, off-normal situation, Lagrange equations.



ния на процесс разворачивания троса [7], оценке возможности доставки груза на Землю при преждевременном разрыве троса [8]. Не менее опасной нештатной ситуацией является заклинивание механизма разворачивания троса. Ее последствиями могут стать обрыв троса, намотка троса на КА, столкновения груза и базового КА в результате отскока. Целью данной работы является исследование этой нештатной ситуации и ее последствий.

2. ОПЕРАЦИЯ ДОСТАВКИ ГРУЗА

Для спуска груз на Землю необходимо перевести его на орбиту, перигей которой пересекается с плотными слоями атмосферы. Традиционно для решения этой задачи используются реактивные двигатели, при этом рабочее тело, выброшенное из сопла при торможении груза, безвозвратно теряется. Альтернативным подходом, лишенным этого недостатка, является использование космического троса. С его помощью на орбите образуется временная связка, состоящая из базового КА, троса и груза, которая позволяет без потерь передавать энергию и момент количества движения от одного связанного тела другому [4]. Груз отделяется от КА с небольшой относительной скоростью, порядка нескольких метров в секунду, и опускается на тросе в направлении Земли на несколько десятков километров. Установленный на базовом КА механизм разворачивания постоянно удерживает трос в натянутом состоянии, что делает КА, груз и трос единой механической системой, центр масс которой движется по орбите, близкой к исходной орбите базового КА. При этом в процессе выпуска троса скорость и высота орбиты КА увеличиваются по сравнению с исходными значениями, а скорость и высота орбиты груза — уменьшаются. Происходит перераспределение энергии между элементами системы. После разрыва троса груз оказывается на более низкой эллиптической орбите, пересекающей с атмосферой, что делает возможным его спуск на Землю.

Известно два принципиально разных способа разворачивания троса при решении задачи доставки груза. Первый способ, называемый статическим разворачиванием, подразумевает медленный выпуск троса, когда груз все время находится в окрестности местной вертикали. Второй способ — динамическое разворачивание, подразумевает раскачку троса за счет действующей на него силы Кориолиса и использование возвратного колебания для дополнительного гашения скорости груза, в результате требуемое уменьшение перигея орбиты может быть достигнуто с помощью троса значительно меньшей длины [7].

Поскольку система доставки груза является вспомогательной, ее функционирование не должно препятствовать и угрожать работе базового КА. Важно заранее предвидеть возможные нештатные ситуации, оценивать их последствия и разрабатывать стратегию поведения. В рамках данной работы рассматривается одна из потенциально возможных нештатных ситуаций — заклинивание троса в процессе разворачивания.

При заклинивании длина троса перестает увеличиваться, при этом груз продолжает двигаться, растягивая трос. Сила натяжения резко возрастает, что, с одной стороны, может привести к обрыву троса (рис. 1, а), а с другой — к раскачке и закручиванию базового КА, что, в свою очередь, приведет к наматыванию троса на КА (рис. 1, б). Если трос выдержит растяжение, то через некоторое время начнется обратное колебательное движение, в результате которого груз будет двигаться в направлении КА и может с ним столкнуться (рис. 1, в). В случае, если ни один из перечисленных сценариев не реализуется, будет наблюдаться серия отскоков груза, когда фазы связанного и свободного движения будут сменять друг друга.

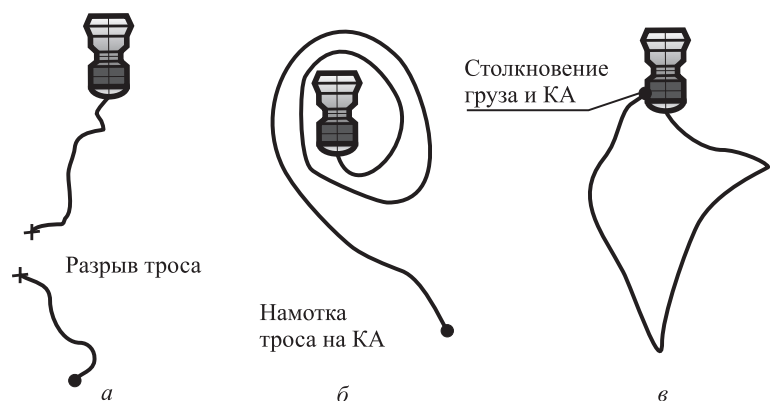


Рис. 1. Последствия заклинивания троса



3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из базового КА, невесомого упругого троса и груза (рис. 2). КА представляет собой твердое тело массой m_1 с центром масс в точке D_1 , а груз – материальную точку D_2 массой m_2 . A, B, C – главные моменты инерции КА [9].

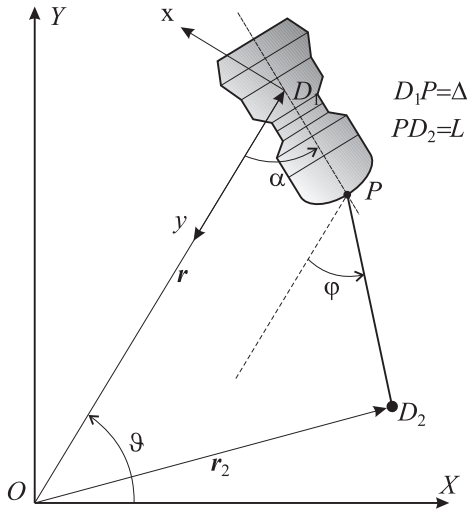


Рис. 2. Космическая тросовая система

Будем считать, что центр масс КА движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu r^{-3}}$, где μ – гравитационный параметр, r – геоцентрическое расстояние. В процессе движения на КА действует только гравитационный момент и момент от силы натяжения троса. Будем пренебрегать демпфирующими свойствами троса.

Получим уравнения движения механической системы, воспользовавшись формализмом Лагранжа. В качестве обобщенных координат выберем угол отклонения оси КА от местной вертикали α , угол отклонения троса от местной вертикали спутника φ , длину троса l . Получим функцию Лагранжа для рассматриваемой КТС:

$$L = T - W = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы, W – потенциальная энергия, $\mathbf{q} = \{\alpha, \varphi, l\}$ – вектор обобщенных координат, t – время. Кинетическая энергия КТС складывается из кинетической энергии КА T_1 и кинетической энергии груза T_2 .

$$T_1 = \frac{m_1 r^2 \omega^2}{2} + \frac{1}{2} C (\dot{\alpha} + \omega)^2, \quad T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2}, \quad (2)$$

где $V_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}$ – абсолютная скорость груза, x_2, y_2 – координаты груза в инерциальной системе координат OXY :

$$x_2 = r \cos \vartheta - \Delta \cos(\alpha + \vartheta) - l \cos(\varphi + \vartheta), \quad y_2 = r \sin \vartheta - \Delta \sin(\alpha + \vartheta) - l \sin(\varphi + \vartheta),$$

$\vartheta = \omega t$ – угол истинной аномалии центра масс КА.

Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальной энергии гравитационного поля W_G [10] и потенциальной энергии упругого троса W_E :

$$W_G = -\frac{\mu m_1}{r} - \frac{\mu m_2}{r_2} + \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} (A - B) \cos^2 \alpha, \quad W_E = \frac{c}{2} (l - l_0)^2, \quad (3)$$

где c – жесткость троса, l_0 – длина недеформированного троса, r_2 – радиус-вектор точки D_2 . Отметим, что длина l_0 является функцией времени и изменяется в процессе движения КТС в соответствии с заданным законом развортыгивания. Сила упругости возникает только при растяжении троса. Если в процессе движения КТС длина l становится меньше l_0 , то сила упругости пропадает, и КА с грузом движутся как два независимых тела. Такое поведение системы можно учесть, если рассматривать жесткость c как кусочно-заданную функцию длины троса:

$$c = \begin{cases} ESl_0^{-1}, & l > l_0, \\ 0, & l \leq l_0, \end{cases}$$

E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения троса.

Поскольку центр масс КА движется по круговой орбите, $\mu = \omega^2 r^3$ и W_G можно записать в виде

$$W_G = -\omega^2 r^2 m_1 - \frac{m_2 \omega^2 r^3}{r_2} + \frac{3}{2} \omega^2 (A - B) \cos^2 \alpha. \quad (4)$$



Используя (1)–(4), запишем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

разрешая их относительно старших производных, получим:

$$\ddot{\alpha} = \frac{3}{2} \omega^2 \frac{(A-B)}{C} \sin 2\alpha - \frac{\Delta c}{C} (l-l_0) \sin(\alpha-\varphi), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{l} = & (\Delta \cos(\alpha-\varphi) - r \cos \varphi + l) \omega^2 + (2l\dot{\varphi} + 2\Delta\dot{\alpha} \cos(\alpha-\varphi)) \omega + \\ & + \Delta\dot{\alpha}^2 \cos(\alpha-\varphi) + l\dot{\varphi}^2 + c(l-l_0) \left[\frac{\Delta^2(\cos(2\alpha-2\varphi)-1)}{2C} - \frac{1}{m_2} \right] + \\ & + \frac{3\Delta\omega^2(A-B) \sin 2\alpha \sin(\alpha-\varphi)}{2C} - \frac{\omega^2 r^3 (\Delta \cos(\alpha-\varphi) - r \cos \varphi + l)}{(r^2 + \Delta^2 + l^2 - 2r\Delta \cos \alpha - 2rl \cos \varphi + 2\Delta l \cos(\alpha-\varphi))^{3/2}}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & \frac{\omega^2 r \sin \varphi}{l} + \frac{-2\dot{l}(\omega + \dot{\varphi}) + (\omega + \dot{\alpha})^2 \Delta \sin(\alpha-\varphi)}{l} + \frac{\Delta^2 c}{2lC} (l-l_0) \sin(2\alpha-2\varphi) - \\ & - \frac{3\Delta\omega^2(A-B) \sin 2\alpha \cos(\alpha-\varphi)}{2lC} - \frac{(r \sin \varphi + \Delta \sin(\alpha-\varphi)) \omega^2 r^3}{l(r^2 + \Delta^2 + l^2 - 2r\Delta \cos \alpha - 2rl \cos \varphi + 2\Delta l \cos(\alpha-\varphi))^{3/2}}. \quad (7) \end{aligned}$$

Уравнения (5)–(7) описывают динамику КТС в случае движения базового КА по круговой орбите и являются частным случаем уравнений, приведенных в [9].

При моделировании процесса развертывания будем использовать линейный закон изменения длины троса. Под заклиниванием будем понимать ситуацию, когда длина недеформированного троса мгновенно перестает изменяться, то есть l_0 определяется выражением

$$l_0(t) = \begin{cases} kt + b, & t < t_*, \\ kt_* + b, & t \geq t_*, \end{cases} \quad (8)$$

где t_* — время заклинивания троса, k, b — постоянные коэффициенты.

После заклинивания груз продолжит движение, растягивая трос. Это приведет к резкому возрастанию силы натяжения троса $T = c(l-l_0)$. Если при этом будет превышено граничное значение $T_* = \sigma_* S$, где σ_* — предел прочности, то трос оборвется. Если трос не оборвется, то через некоторое время груз начнет возвратное движение под действием силы натяжения, которое в конечном итоге может привести к столкновению груза и КА. Под столкновением будем понимать ситуацию, когда расстояние между грузом и центром масс КА станет меньше, чем некоторое расстояние Δ .

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕШТАТНОЙ СИТУАЦИИ

Проведем численное моделирование процесса развертывания троса. Исследуем влияние параметров системы и времени заклинивания t_* на движение системы. Проведем серию численных расчетов, отслеживая в каждом из них ситуации обрыва троса, столкновения КА и груза и наматывания троса на КА. Будем рассматривать системы, параметры которой лежат в следующих диапазонах: $m_2 \in [10, 300]$ кг, $A = [1000, 15000]$ кг·м², $B = C = 1.5 \cdot 10^4$ кг·м², высота орбиты базового КА $H = [250, 750]$ км, $E = [50, 200]$ ГПа, $\sigma_* = 3$ ГПа, толщина троса $d = 0.5$ мм, расстояние $\Delta = 2$ м. Отметим, что диапазон изменения модуля упругости троса выбран с учетом существующих в настоящее время материалов. Развертывание происходит по линейному закону с коэффициентами $k = [0.5, 5]$ м/с, $b = \Delta$. В качестве начальных условий для всех расчетов примем

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad l = 2 \text{ м}, \quad \dot{l} = 1 \text{ м/с}.$$

В ходе исследования было выполнено около миллиона расчетов. Полученные результаты позволяют осуществить выбор параметров, обеспечивающих наиболее безопасный режим работы системы. В качестве примера исследуем влияние массы груза и времени заклинивания на движение КТС с параметрами $E = 150$ ГПа, $A = 1000$ кг·м², $H = 500$ км, $k = 1$ м/с. На рис. 3 показана диаграмма, на которой по оси абсцисс отложено время заклинивания, а по оси ординат — масса груза.



Каждая точка диаграммы соответствует расчету. Светло серыми точками обозначены траектории, заканчивающиеся разрывом троса; черными точками — столкновением груза и базового КА; серыми — наматыванием троса на базовый КА; белыми — безопасные траектории, на которых груз совершает серию отскоков, не приводящих ни к одному из описанных выше опасных последствий заклинивания. При построении диаграммы параметры m_2 и t_* менялись с шагом 1 кг и 5 с соответственно.

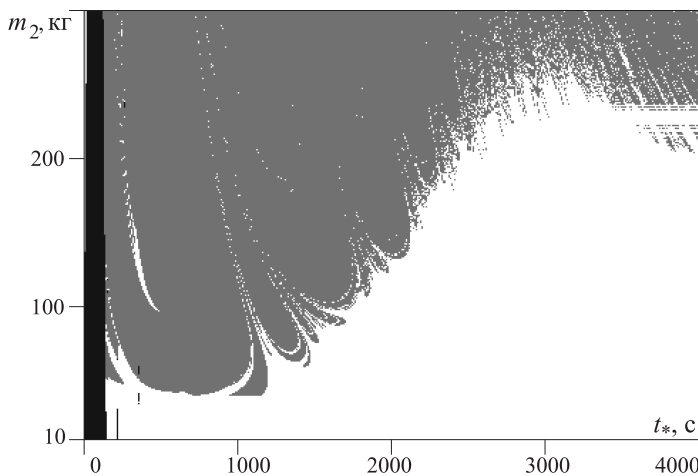


Рис. 3. Диаграмма последствий заклинивания троса

Из рис. 3 видно, что независимо от массы груза заклинивание на начальном этапе приводит к столкновению груза и КА. Разрыв троса наблюдается только при массе груза большей 143 кг при заклинивании в первые несколько десятков секунд. При использовании груза массой менее 42 кг заклинивание не приводит к наматыванию троса на базовый КА.

На рис. 4, 5 показаны графики зависимостей длины троса и углов α , φ от времени (сплошной линией показаны кривые, соответствующие точке $m_2 = 100$ кг, $t_* = 1000$ с, а пунктирной — точке $m_2 = 100$ кг, $t_* = 3000$ с). В первом случае заклинивание троса приводит к тому, что базовый КА переходит во вращение (см. рис. 4), при этом трос продолжает колебаться около местной вертикали. В результате происходит наматывание троса на КА. Во втором случае заклинивание не приводит к переходу во вращательный режим. В обоих случаях после возникновения нештатной ситуации происходит серия отскоков (см. рис. 5), не приводящих к обрыву троса и столкновению груза с базовым КА. То есть заклинивание на поздних стадиях разворачивания троса не несет опасности для базового КА. Подобная ситуация наблюдалась в эксперименте SEDS-1, где к моменту окончания разворачивания не удалось погасить скорость выпуска троса до нуля. Груз совершил серию отскоков, но в результате его удалось успешно доставить на Землю [2].

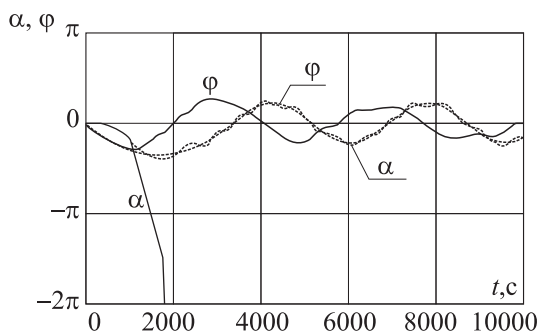


Рис. 4. Зависимость углов α , φ от времени

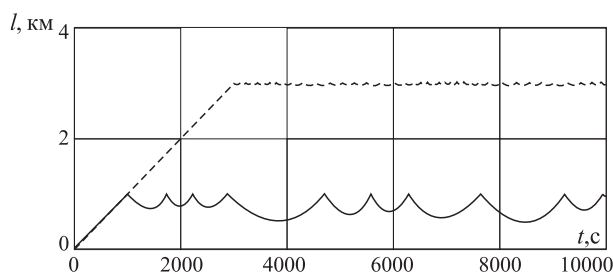


Рис. 5. Зависимость расстояния между точкой выпуска троса и грузом от времени

Анализ результатов серии расчетов позволил сделать следующие выводы:

- с увеличением массы груза увеличивается интервал времени заклинивания, приводящего к разрыву троса;
- с увеличением высоты орбиты увеличивается величина опасного интервала заклинивания, приводящего к намотке троса на КА;
- обрыв троса и столкновение в результате отскока могут произойти только на начальном этапе разворачивания. Для рассматриваемых систем граничное время для отскока составляло $t_* = 1213$ с, граничное время для разрыва $t_* = 1763$ с;
- уменьшение разницы между продольным и поперечным моментом инерции практически не влияет на интервал времени заклинивания, вызывающий разрыв троса и столкновение, но приводит к



возрастанию опасного с точки зрения закрутки интервала. Например, сравнивая $A = 5000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и $A = 10000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, можно отметить, что в первом случае наибольший интервал опасного заклинивания составлял 1860 с, а во втором — 1920 с;

– увеличение скорости выпуска троса приводит к увеличению интервала заклинивания, соответствующего разрыву троса, а также к увеличению интервала, опасного с точки зрения закрутки КА. Для систем с рассматриваемыми параметрами выпуск троса со скоростью, большей 4.3 м/с, приводит к намотке троса на КА независимо от момента заклинивания.

Авторы выражают благодарность профессору В. С. Асланову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00317-а).

Библиографический список

1. Cartmell M. P., McKenzie D. J. A review of space tether research // Progress in Aerospace Sciences. 2008. Vol. 44. P. 1–21.
2. Smith H. F. The First and Second Flights of the Small Expendable Deployer System (SEDS) // Proceedings of the Fourth Intern. Conf. on Tethers in Space, Smithsonian Inst., Washington, DC. 1995. P. 43–55.
3. Kruijff M., Heide E. J. van der. Qualification and in-flight demonstration of a European tether deployment system on YES2 // Acta Astronautica. 2009. Vol. 64, № 9–10. P. 882–905.
4. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
5. Zimmermann F., Schottle U. M., Messerschmid E. Optimization of the tether-assisted return mission of a guided re-entry capsule // Aerospace Science and Technology. 2005. № 9. P. 713–721.
6. Асланов В. С., Волошенюк О. Л., Кислов А. В., Яцук А. В. Определение времени выживания космической тросовой системы // Изв. Самарского науч. центра РАН. 2010. Т. 12, № 4. С. 138–143.
7. Асланов В. С., Ледков А. С., Стратилатов Н. Р. Пространственное движение космической тросовой системы, предназначенной для доставки груза на Землю // Общероссийский науч.-техн. журн. Полет. 2007. № 2. С. 28–33.
8. Асланов В. С., Ледков А. С., Пироженко А. В., Храмов Д. А. Исследование влияния обрыва тросовой системы на возможность доставки груза на Землю // Сборник трудов XIV Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара: СГАУ, 2011. С. 36–39.
9. Асланов В. С. Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 4. С. 582–593.
10. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1975. 308 с.

УДК 629

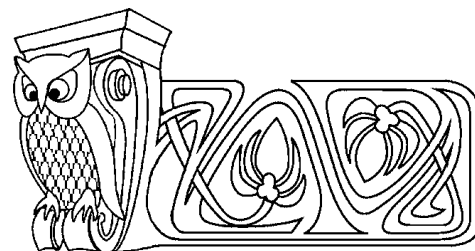
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

Саратовский государственный университет,
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

С помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионных уравнений решается задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Функционал, определяющий качество процесса управления, равен взвешенной интегральной сумме времени переориентации орбиты КА и модуля (или квадрата) управления. Сформулированы дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА. Получены законы оптимального управления, построены условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Приведены примеры численного решения задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, космический аппарат, кватернион.



About a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation

I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov

The problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit is solved with the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion equations. Control (thrust vector, orthogonal to the orbital plane) is limited in magnitude. Functional, which determines a quality of control process is weighted sum of time and module (or square) of control. We have formulated a differential boundary problems of reorientation of spacecraft's orbit. We have obtained optimal control laws, built the transversality conditions, not containing Lagrange multipliers. Examples of numerical solution of the problem are given.

Key words: optimal control, spacecraft, quaternion.



1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Будем считать, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА будем рассматривать в инерциальной системе координат X — геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре O притяжения Земли. Ось OX_3 этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси OX_1 и OX_2 лежат в плоскости экватора Земли, ось OX_1 направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось OX_2 дополняет систему до правой тройки векторов.

Введем также в рассмотрение систему координат ξ , связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы координат находится в центре O , ось ξ_1 направлена вдоль радиуса-вектора перицентра орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора \mathbf{c} момента скорости центра масс КА, а ось ξ_2 образует правую тройку с осями ξ_1 и ξ_3 . Ориентация системы координат ξ в инерциальной системе координат X характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла Ω_u , наклоном орбиты I и угловым расстоянием перицентра от узла ω_π .

Дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в инерциальной системе координат в угловых элементах орбиты в рассматриваемом случае имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_u}{dt} &= u \frac{r}{c} \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{cosec} I, & \frac{dI}{dt} &= u \frac{r}{c} \cos(\omega_\pi + \varphi), \\ \frac{d\omega_\pi}{dt} &= -u \frac{r}{c} \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{ctg} I, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, \\ r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & c &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); r — модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА; p и e — параметр и эксцентриситет орбиты, c — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); u — проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА).

Задача переориентации орбиты КА в угловых переменных формулируется следующим образом: требуется построить управление u , переводящее орбиту КА, изменение ориентации которой описывается уравнениями (1), из заданного начального положения

$$\Omega_u = \Omega_u(t_0) = \Omega_u^0, \quad I = I(t_0) = I^0, \quad \omega_\pi = \omega_\pi(t_0) = \omega_\pi^0, \quad I^0 \neq 0, \pi,$$

в требуемое конечное положение

$$\Omega_u = \Omega_u(t^*) = \Omega_u^*, \quad I = I(t^*) = I^*, \quad \omega_\pi = \omega_\pi(t^*) = \omega_\pi^*, \quad I^* \neq 0, \pi.$$

Решение сформулированной задачи достаточно сложно в силу нелинейности дифференциальных уравнений (1) движения центра масс КА в угловых переменных и наличия в этих уравнениях особых точек $I = 0, \pi$. Задача решается гораздо проще, если использовать дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона), имеющие вид [3–5]

$$2 \frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = u \frac{r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2), \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \operatorname{const}, \quad (3)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$ — кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $\mathbf{\Omega}_\xi$ — отображение вектора $\mathbf{\Omega}$ на базис ξ (вектор $\mathbf{\Omega}$



мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты направлен вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА и определяется формулой: $\mathbf{\Omega} = (u/c)\mathbf{r}$; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, \circ — символ кватернионного умножения; $\Lambda_j, (j = \overline{0, 3})$ — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА (системы координат ξ) в инерциальной системе координат X .

Параметры Эйлера Λ_j связаны с угловыми элементами орбиты соотношениями

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \cos \frac{I}{2} \cos \left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2} \right), & \Lambda_1 &= \sin \frac{I}{2} \cos \left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2} \right), \\ \Lambda_2 &= \sin \frac{I}{2} \sin \left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2} \right), & \Lambda_3 &= \cos \frac{I}{2} \sin \left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что скалярные уравнения ориентации орбиты в параметрах Эйлера использовались для описания орбитального движения и другими авторами [6, 7].

Отметим также, что если (1) — система 4 нелинейных стационарных дифференциальных уравнений первого порядка относительно угловых переменных $\Omega_u, I, \omega_\pi, \varphi$, то (2), (3) — система 5 нелинейных стационарных дифференциальных уравнений первого порядка относительно параметров Эйлера $\Lambda_j (j = \overline{0, 3})$, и истинной аномалии φ . Однако система (2), (3) в отличие от (1) не имеет особых точек, к тому же при переходе в ней от времени t к новой независимой переменной φ в соответствии с дифференциальным соотношением $d\varphi = (c/r^2) dt$ мы получаем (при $u = u(\varphi)$) систему 4 линейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно параметров Эйлера Λ_j .

Отметим также, что системы уравнений (1) и (2), (3) могут рассматриваться как нестационарные системы дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков соответственно относительно переменных Ω_u, I, ω_π и $\Lambda_j (j = \overline{0, 3})$, так как последнее уравнение в этих системах для истинной аномалии φ интегрируется в квадратурах независимо от других уравнений, в силу чего переменная φ может рассматриваться как известная функция времени t . При таком рассмотрении (1) является нелинейной системой, а (2), (3) — линейной.

Указанные обстоятельства делают использование уравнений (2), (3) для решения задачи переориентации орбиты более удобным и эффективным в сравнении с использованием уравнений (1). Такое решение задачи переориентации орбиты КА с использованием комбинированного функционала, равного взвешенной сумме времени переориентации и интегрального квадратичного (в отношении управления) функционала качества, рассмотрено в работах [8–10].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Требуется определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = \pm |\mathbf{u}|, \quad (5)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (2), (3), из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}^0 \quad (6)$$

в конечное состояние

$$t = t^*, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \mathbf{\Lambda}(t^*) = \pm \mathbf{\Lambda}^* \quad (7)$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt \quad \text{или} \quad J_2 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

При $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ имеем задачу переориентации орбиты, оптимальную в смысле быстродействия; при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ минимум функционала J_2 означает минимум характеристической скорости [1].



Фигурирующая в краевых условиях кватернионная переменная Λ характеризует ориентацию орбиты КА, а переменная φ — положение КА на орбите. Величины $c, p, e, \varphi_0, \Lambda^0$ и Λ^* заданы (начальные и конечные значения кватерниона Λ могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты Ω_u, I, ω_π по формулам (4)). Подлежат определению оптимальный закон управления $u = u(t)$ и величины t^*, φ^* .

Четыре компоненты Λ_j кватерниона Λ удовлетворяют условию $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$, поэтому краевое кватернионное условие (7), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\text{vect} [\tilde{\Lambda}(t^*) \circ \Lambda^*] = 0, \tag{8}$$

эквивалентное трем скалярным (в (8) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион). Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

3. ЗАКОНЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [11]. Для этого введем дополнительные переменные $\mathbf{M} = M_0 + M_1 i_1 + M_2 i_2 + M_3 i_3$ и χ , сопряженные по отношению к фазовым переменным Λ и φ . Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_0 \sigma + \chi \frac{c}{r^2} + u \frac{r}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi),$$

где в соответствии с принципом максимума постоянная $\psi_0 \leq 0$, N_1, N_2 — компоненты кватерниона $\mathbf{N} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{M}$; для функционала $J_1 \sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$, для функционала $J_2 \sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$, в случае быстрогодействия $\sigma = 1$.

В дальнейшем рассматривается случай, когда постоянная $\psi_0 < 0$. В этом случае в силу однородности функции Гамильтона–Понтрягина относительно сопряженных переменных константу ψ_0 можно выбрать произвольным образом, поэтому в дальнейшем нами полагается $\psi_0 = -1$.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$2 \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \circ \Omega_\xi, \tag{9}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = 2 \frac{\chi}{r} \frac{dr}{dt} + u \frac{r}{2c} (N_1 \sin \varphi - N_2 \cos \varphi) - u \frac{r^2}{2c^2} \frac{dr}{dt} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi). \tag{10}$$

Отметим, что сопряженное уравнение (9) совпадает по своей форме с фазовым уравнением (2), поскольку кватернионное уравнение (2) обладает свойством самосопряженности.

Законы оптимального управления (т. е. законы управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности) находятся из условий максимума функции H по переменной u с учетом наложенного ограничения (5) и имеют вид:

1. В случае $\sigma = 1$ (быстродействия)

$$u^o = u_{\max} \text{sign } k, \quad k = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi. \tag{11}$$

2. В случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$

$$u^o = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} k, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |k| \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \text{sign } k, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |k| > u_{\max}. \end{cases} \tag{12}$$

3. В случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$

$$u^o = \begin{cases} u_{\max} \text{sign } k, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |k| - 1 > 0, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |k| - 1 < 0, \\ \forall u \in [-u_{\max}, u_{\max}], & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |k| - 1 \equiv 0. \end{cases} \tag{13}$$

Случай особого управления, когда $r|k| \equiv 2\alpha_2 c$, в работе не рассматривается.



4. УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Вводя неопределенные множители Лагранжа A_1, A_2, A_3 , получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (8):

$$\text{при } t = t^* \quad \mathbf{M} - \mathbf{\Lambda}^* \circ \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A} = A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3, \quad \chi = 0. \quad (14)$$

Из (14) получаем следующие условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа:

$$\text{при } t = t^* \quad \Lambda_0^* M_0 + \Lambda_1^* M_1 + \Lambda_2^* M_2 + \Lambda_3^* M_3 = 0, \quad \chi = 0. \quad (15)$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (3), (9), (10), (11) (или (12), или (13)) десятого порядка и восемью краевыми условиями (6), (8), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (15) и равенством

$$H^o|_{t^*} = H^o(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \chi, u^o)|_{t^*} = 0,$$

имеющим место для оптимального управления u^o и оптимальной траектории.

5. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Фазовые Λ_j и сопряженные M_j переменные являются безразмерными. Безразмерные переменные r^b, t^b и управление u^b связаны с размерными переменными r, t и управлением u соотношениями: $r = Rr^b, u = u_{\max} u^b, t = Tt^b$, где R — характерное расстояние (в его качестве принималась величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); V, T — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями: $V = c/R, T = R^2/c$.

Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появляется характерный безразмерный параметр $N = u_{\max} R^3/c^2$.

Отметим также, что при численном решении задачи удобно перейти к новой независимой переменной — истинной аномалии. При этом порядок краевой задачи понижается на две единицы.

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2} N (r^b)^3 u^b \mathbf{\Lambda} \circ (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2), \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (16)$$

Начальные условия интегрирования этой системы

$$\varphi = \varphi_0, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^0 \quad (17)$$

являются заданными.

Для правого конца траектории КА имеем условия

$$\varphi = \varphi^* = ?, \quad \mathbf{\Lambda} = \pm \mathbf{\Lambda}^* \Leftrightarrow \text{vect} [\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Lambda}^*] = 0, \quad (18)$$

где $\mathbf{\Lambda}^*$ — заданная кватернионная величина.

Ограничение по управлению в безразмерном виде $|u^b| \leq 1$.

Система сопряженных уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\varphi} = \frac{1}{2} N (r^b)^3 u^b \mathbf{M} \circ (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2). \quad (19)$$

Таким образом, в безразмерных переменных задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (16), (19) восьмого порядка, и семью краевыми условиями (17), (18), которые необходимо дополнить первым из условий трансверсальности (15) и равенством гамильтониана нулю в конце движения. При этом законы оптимального управления аналогичны (11) (или (12), или (13)). (В дальнейшем верхние индексы у безразмерных переменных опускаются.)



6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Задачи оптимального управления решались для функционалов J_1 и J_2 . Алгоритмы численного решения задач реализуют комбинацию метода Рунге–Кутты 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска.

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [4] (a_{or} – большая полуось орбиты):

$$a_{or} = 25500000 \text{ м}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35;$$

для начального положения КА ($\varphi_0 = 3.940323$ рад.) $\Lambda_0^0 = 0.679417$, $\Lambda_1^0 = -0.245862$, $\Lambda_2^0 = -0.539909$, $\Lambda_3^0 = -0.353860$; для конечного положения КА вариант 1 (малое отличие в ориентациях орбит КА): $\Lambda_0^* = 0.678275$, $\Lambda_1^* = -0.268667$, $\Lambda_2^* = -0.577802$, $\Lambda_3^* = -0.366116$; вариант 2 (большое отличие в ориентациях орбит КА): $\Lambda_0^* = -0.440542$, $\Lambda_1^* = -0.522476$, $\Lambda_2^* = -0.125336$, $\Lambda_3^* = -0.719189$.

Значения выбранных масштабирующих множителей равны: $R = 26000000 \text{ м}$, $V = 2751.405874 \text{ м/с}$, $T = 9449.714506 \text{ с}$. Указанные значения этих величин отвечают значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в [12].

Ориентации начальной и конечной орбит КА характеризуются параметрами Эйлера Λ_j^0 и Λ_j^* , $j = \overline{0,3}$. Если в варианте 1 эти значения близки (отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перигея от узла составляет единицы градусов: $\Delta\Omega_u = \Omega_u^0 - \Omega_u^* = -3.30^\circ$, $\Delta I = I^0 - I^* = -1.51^\circ$, $\Delta\omega_\pi = \omega_\pi^0 - \omega_\pi^* = -1.59^\circ$), то в варианте 2 они существенно отличаются (отличие ориентаций орбит в угловой мере составляет десятки градусов: $\Delta\Omega_u = -32.00^\circ$, $\Delta I = -117.57^\circ$, $\Delta\omega_\pi = 39.96^\circ$).

На рис. 1–4 приведены законы изменения фазовых, сопряженных переменных, управления и фазовые портреты для случая быстрогодействия ($e = 0$), случая минимизации характеристической скорости ($e = 0.25$) для варианта 2 и случая минимизации функционала J_1 ($e = 0.5$, $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 4.2$) для вариантов 1 и 2.

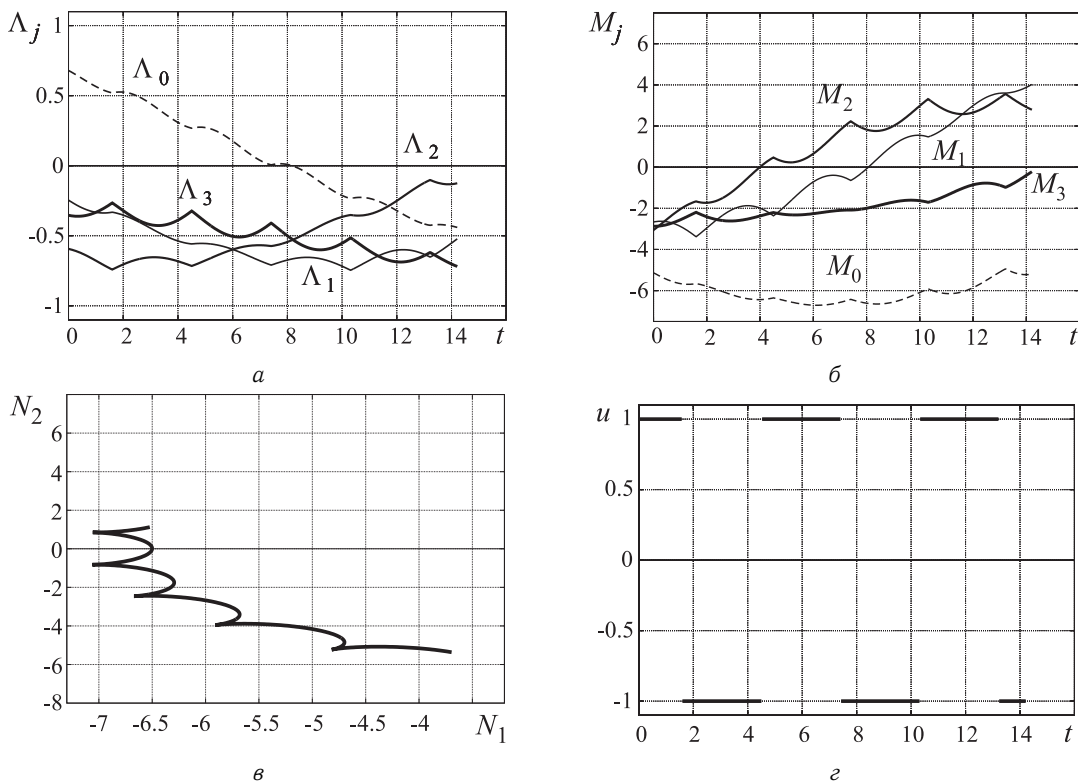


Рис. 1. Круговая орбита, вариант 2, быстрогодействие

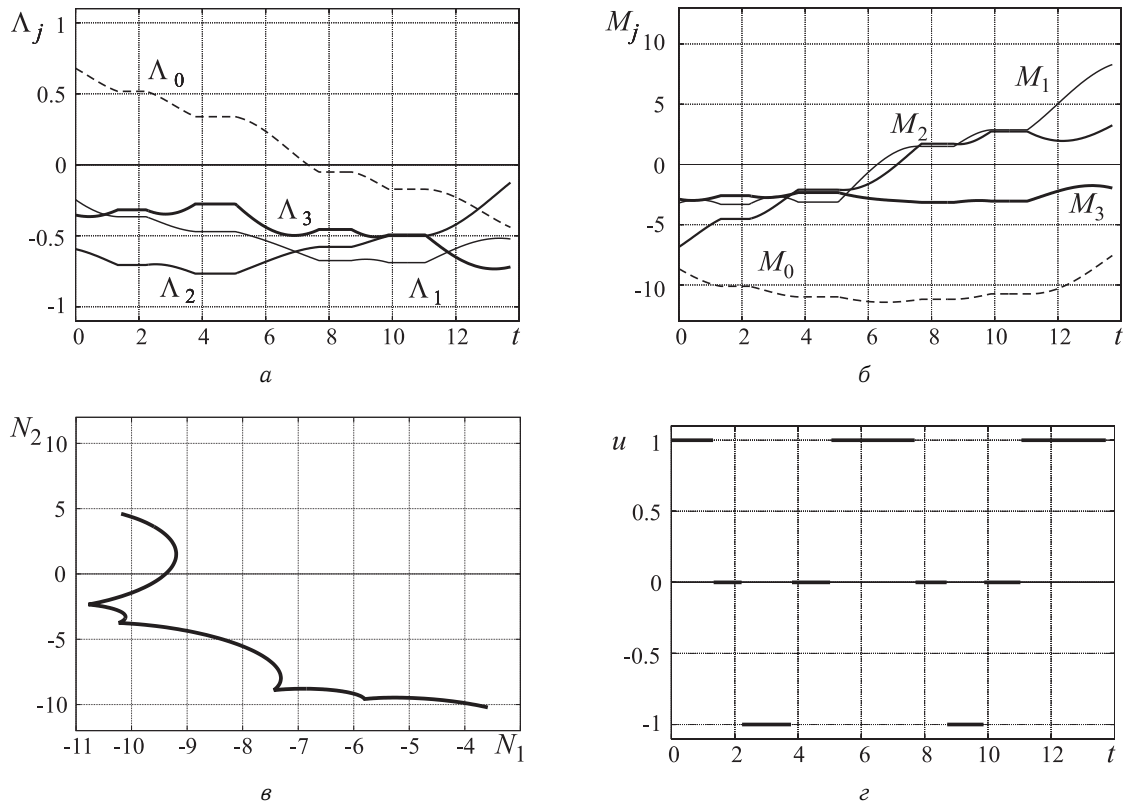


Рис. 2. Эллиптическая орбита ($e = 0.25$), вариант 2, $\int_0^{t^*} |u| dt \rightarrow \min$

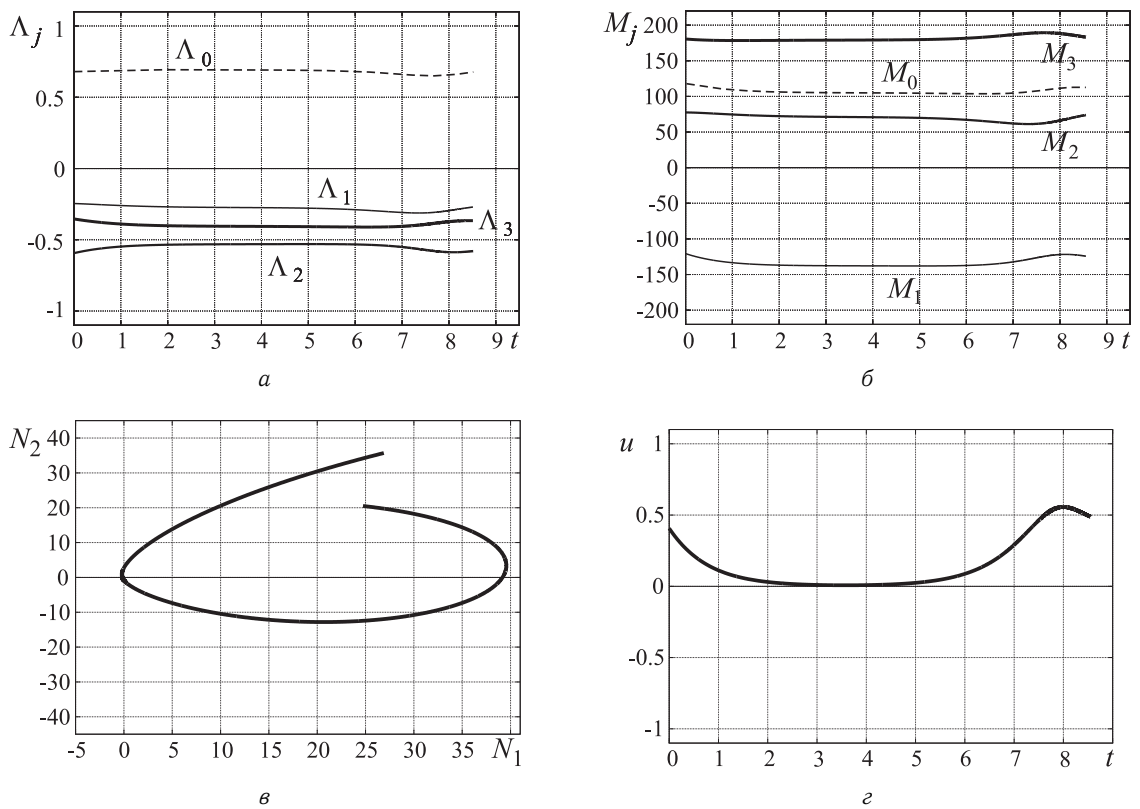


Рис. 3. Эллиптическая орбита ($e = 0.5$), вариант 1, $\int_0^{t^*} (1 + 4.2u^2) dt \rightarrow \min$

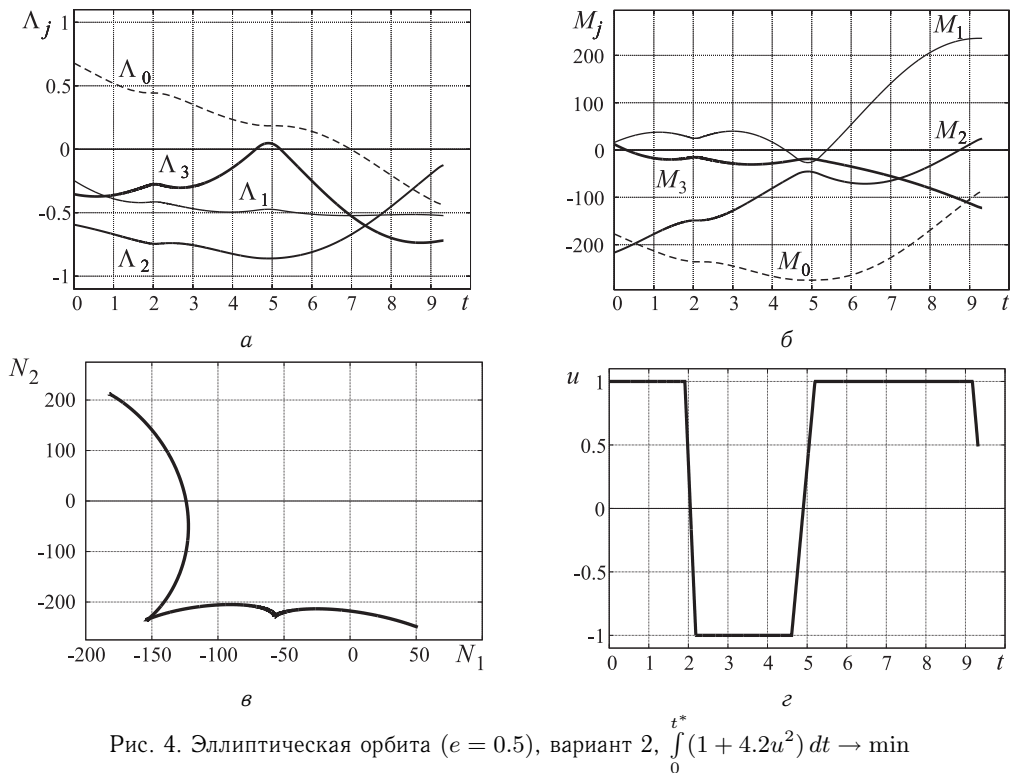


Рис. 4. Эллиптическая орбита ($e = 0.5$), вариант 2, $\int_0^{t^*} (1 + 4.2u^2) dt \rightarrow \min$

В случае быстрогодействия управление носит релейный характер, что доставляет большие неудобства при численном решении задачи. Длительность процесса переориентации орбиты КА составила 14.209544 безразмерных единиц, или 134276.134060 с (37.298926 ч). Имеется 5 переключений знака управления на всем интервале движения КА. Из графиков (см. рис. 1) видно, что в момент переключения управления происходит резкая смена законов изменения фазовых и сопряженных переменных.

Длительность процесса переориентации орбиты КА ($e = 0.25$) в случае минимизации характеристической скорости составила 13.723368 безразмерных единиц, или 129681.91 с (36.022753 ч). Значение минимизируемого функционала при этом оказалось равным 8.081946.

Длительность процесса переориентации орбиты КА ($e = 0.5$) в случае минимизации функционала J_1 составила 8.553301 безразмерных единиц, или 80826.252534 с (22.451737 ч) для варианта 1 и 9.317650 безразмерных единиц, или 88049.132367 с (24.458092 ч) для варианта 2. Значение минимизируемого функционала при этом оказалось равным 10.817037 и 42.600058 соответственно.

Отметим, что при смене знака управления с $+1$ на -1 , и наоборот, резко меняется закон изменения переменной $N_2(N_1)$ на фазовых портретах.

Отметим также и выявленную неединственность численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА, связанную с нелинейностью дифференциальных уравнений задачи. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления (с одним и тем же функционалом) получены различные решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них было выбрано то, при котором функционал минимален.

В ходе численного решения задачи были выявлены особенности и закономерности построенных оптимальных траекторий и управлений. Так, установлено, что при увеличении эксцентриситета орбиты от 0 до 0.5 уменьшается количество активных участков движения, их длительности и общее время переориентации. При увеличении эксцентриситета орбиты от 0.5 до 0.7 и далее пропадают участки, на которых управление принимает свое максимальное по модулю значение в случае минимизации затрат времени и энергии. В случае малого различия начальной и конечной ориентаций орбит (единицы градусов) время переориентации, а также диапазоны изменения фазовых и сопряженных переменных меньше, чем в случае, когда различие начальной и конечной ориентаций орбит составляет десятки градусов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00165).



Библиографический список

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М. : Наука, 1976. 864 с.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968. 799 с.
3. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения спутника. I, II // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759–770; 1993. Т. 31, вып. 3. С. 3–15.
4. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I–III // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып. 5. С. 502–517; 2003. Т. 41, вып. 1. С. 92–107; 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488–505.
5. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М. : Физматлит, 2006. 512 с.
6. Deprit A. Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celestial Mechanics. 1976. Vol. 13, № 2. P. 253–262.
7. Брумберг В. А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М. : Наука, 1980. 208 с.
8. Ненахов С. В., Челноков Ю. Н. Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления : сб. тр. междунар. конф. М. : МАИ, 1997. С. 59–60.
9. Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Проблемы точной механики и управления: сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. / Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов, 2002. С. 64–75.
10. Афанасьева Ю. В., Челноков Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 153–155.
11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
12. Бордовицына Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с.

ИНФОРМАТИКА

УДК 681.03.06:531.383:532.516

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СОСНЫХ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ МЕЖДУ НИМИ

А. Ю. Блинкова, А. Д. Ковалев, И. А. Ковалева, Л. И. Могилевич*

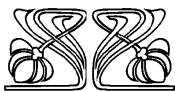
Саратовский государственный университет

E-mail: anblinkova@yandex.ru, irinakovaleva1406@gmail.com, irinakovaleva1406@gmail.com

*Московский государственный университет путей сообщения

(Поволжский филиал), Саратов

E-mail: Mogilevich@sgu.ru



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных сосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы с позиций теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, нелинейные волны деформации, гидроупругость, вязкая несжимаемая жидкость, солитон, базис Грёбнера.

Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Coaxial Physically Nonlinear Shells with Viscous Incompressible Fluid between Them

A. Yu. Blinkova, A. D. Kovalev, I. A. Kovaleva, L. I. Mogilevich

This study focuses on the analysis of nonlinear wave propagation deformations in the elastic physically nonlinear coaxial cylindrical shells containing a viscous incompressible fluid between them. Wave processes in an elastic cylindrical shell without interacting with fluid were previously studied from the standpoint of the theory of solitons. The presence of fluid required developing a new mathematical model and computer modeling of processes occurring in the system.

Key words: cylinder shell, non-linear deformation waves, hydroelasticity, viscous incompressible liquid, solitary wave, Gröbner basis.

Приведение систем алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений к канонической форме, называемой базисом Грёбнера [1], представляет собой качественный аналитический метод исследования соответствующих математических моделей.

В частности, при поиске частных решений дифференциальных уравнений методом неопределённых коэффициентов возникают переопределённые системы алгебраических уравнений. Построение базиса Грёбнера позволяет проверить совместность системы, определить, обладает ли система конечным или бесконечным числом решений, а в ряде случаев построить решения в явном виде.

Не для всех моделей, описываемых уравнениями в частных производных, удаётся построить аналитические решения и в этом случае для их исследования можно применять численные эксперименты на соответствующих разностных схемах. Так, для построения разностных схем из первоначально заданных базовых разностных соотноше-



ний, аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений, строится базис Грёбнера разностного идеала. Из этого базиса, иногда в нелинейном и всегда в линейном случае, можно извлечь разностную схему, которую невозможно построить традиционными методами генерации разностных схем. Зачастую такие разностные схемы обладают уникальными свойствами, хорошо передающими физику процессов, описываемых исходными дифференциальными уравнениями [2].

Кроме того, знание базиса Грёбнера даёт возможность проверить совместность исходных разностных соотношений, определить произвол в решении, посчитав полином Гильберта, и, применяя специальный вид допустимого упорядочения при его построении, получить другое представление первоначальных разностных соотношений.

В представленной работе данная техника будет использована в качестве примера для анализа распространения нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними.

1. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы в [3, 4] с позиций теории солитонов. Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости:

$$V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_i - W^{(i)}. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) V_r, V_x — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; t — время; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости; $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочек по оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; R_1 — внутренний радиус внешней оболочки; R_2 — внешний радиус внутренней оболочки ($R_1 = R_2 + \delta$); δ — толщина слоя жидкости в кольцевом сечении трубы; $i = 1$ относится к внешней, а $i = 2$ — к внутренней оболочке.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрических оболочек в перемещениях для модели Кирхгофа–Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_1 от интенсивности деформаций e_1 [6]:

$$\sigma_1 = Ee_1 + me_1^3, \quad (3)$$

где E — модуль Юнга; m — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Кроме этого, учтем конструкционное демпфирование в материале оболочки, характеризуемое величиной, пропорциональной $\partial W^{(i)}/\partial t$, добавляемой к Даламберовой силе инерции [7].

Уравнения динамики физически нелинейных оболочек с учетом (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\} + \frac{4}{3} \frac{m^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - \right. \\ \left. - \left(1 + \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \mu_0^{(i)} \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -q_x^{(i)}, \\ \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^4 W^{(i)}}{\partial x^4} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right\rangle + \frac{4}{3} \frac{m^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{1}{R^{(i)}} \left[\mu_0^{(i)} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \left(1 + \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \Big] + \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \\
 & + \varepsilon_g^{(i)} \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = q_n (-1)^{i-1}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_g^{(i)}$ — коэффициент демпфирования; $\rho_0^{(i)}$ — плотность материала оболочки; $\mu_0^{(i)}$ — коэффициент Пуассона; $R^{(i)}$ — радиусы срединной поверхности оболочек; $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек ($h_0^{(1)}/2 = R_1 - R_1$, $h_0^{(2)}/2 = R_2 - R_2$); $c_0^{(i)}$ — скорость звука в материале оболочки; $q_x^{(i)}, q_n$ — напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочек ($W^{(i)} \ll R_i$), то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x^{(i)} = \left[\rho \nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R_i}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho \nu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R_i}. \tag{5}$$

2. Принимая за характерную длину — длину волны l и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного материала, т. е. опуская индекс i у $E, m, \rho_0, \mu_0, \varepsilon_g$, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}. \tag{6}$$

Положим

$$\begin{aligned}
 \frac{w_m}{l} &= \varepsilon = o(1), & \frac{w_m}{R^{(i)}} &= O(\varepsilon), & \frac{R^{(i)}}{l} &= O(\varepsilon^{1/2}), \\
 \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} &= O(\varepsilon), & \varepsilon_g \frac{R^{(i)}}{c_0} &= O(\varepsilon^{3/2}), & \frac{E}{m} &= O(\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр в задаче (4).

Применим метод двухмасштабных асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \tag{8}$$

где c — безразмерная неизвестная скорость волны, τ — внутренняя переменная, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру ε :

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \tag{9}$$

Подставляя (6), (8), (9) в уравнения (4) с учетом оценок (7), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \tag{10}$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \tag{11}$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (10) и (11), находится система уравнений, являющихся составными для $u_{10}^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \\
 & - \varepsilon_g \frac{R^{(i)2}}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} \right]. \tag{12}
 \end{aligned}$$



В случае отсутствия жидкости правая часть уравнений (12) равна нулю и система распадается на два одинаковых уравнения, представляющих модифицированные уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргера для

$$\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{w_m l}{\mu_0 u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)}.$$

3. Для определения правой части уравнения (12) введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r - R_2}{\delta}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3} P; \\ \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = O\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), \\ \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \psi \frac{R_2}{l} \ll 1, \quad \psi \ll 1, \quad \lambda \ll 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру λ :

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (14)$$

В нулевом приближении по ψ ($\delta/l \approx 0$ — гидравлическая теория смазки), считая $(\delta/l)(\delta c_0/\nu) \ll 1$ (ползущие течения [6, 7]), и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки):

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (15)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1, \\ v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из решения задачи (15), (16) следует, что

$$\begin{aligned} P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*, \\ \left[\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \left[\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=0} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что были введены переменные (8), (9), а также имея соотношения (10) и (11), из (17) получим

$$P^0 = 12\sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi = 12\mu_0 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{w_m}{w_m l} (R^{(1)} u_{10}^{(1)} - R^{(2)} u_{10}^{(2)}). \quad (18)$$

С принятой точностью по $\varepsilon, \psi, \lambda$ из (5) найдем

$$q_x^{(i)} = \left[\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1,0}, \quad q_n = -\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{l}{\delta} P, \quad \frac{q_x^{(i)}}{q_n} = O\left(\frac{\delta}{l}\right)$$

и, следовательно, $q_x^{(i)} \ll q_n$ и в правой части уравнения (12) остается выражение

$$6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(i)}} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left[\frac{R^{(i)} R^{(2)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R^{(i)} R^{(1)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right] (-1)^{i-1}. \quad (19)$$



С принятой точностью по ψ, ε положим

$$R^{(1)} \approx R^{(2)} = R, \quad h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} = h_0.$$

Подставляя (19) в уравнение (12), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \\ - \varepsilon_g \frac{R^2}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} - 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) (-1)^i = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} = c\varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} = c\varphi^{(2)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \quad (21)$$

позволяет записать систему уравнений (20) в виде

$$\varphi^{(i)}_t + \varphi^{(i)}_{\eta\eta\eta} + 6\varphi^{(i)2} \varphi^{(i)}_{\eta} - \sigma_g \varphi^{(i)}_{\eta\eta} - (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (-1)^i = 0. \quad (22)$$

Постоянные c, c_1, c_2 определяются при подстановке (21) в (20) и имеют вид

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3}, \quad c = \left[3 \frac{E}{2m} \frac{R^2}{u_m^2} \frac{\mu_0^2}{1 - \mu_0 + \mu_0^2} \right]^{1/2} c_1.$$

При этом вводится обозначение

$$\sigma_g = \varepsilon_g \frac{R^2}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{c_1^2}{c_2}.$$

В случае отсутствия жидкости последние два слагаемых $(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})$ в уравнениях (22) исчезают, и система распадается на два независимых уравнения МКдВ-Б (модифицированные уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса), которые только при $\sigma_g = 0$ превращаются в МКдВ и имеют точное частное решение в виде солитона

$$\varphi = \frac{k}{\text{ch}(k(\eta + \eta_0) - k^3 t)}. \quad (23)$$

Эти решения при $t = 0$ можно взять в качестве начальных условий при решении задачи Коши для системы уравнений (22).

4. Новые решения методом неопределённых коэффициентов для системы уравнений (22) будем искать в виде

$$\theta = k(\eta + \eta_0) - \omega t, \quad \varphi^{(i)} = \frac{e^\theta}{a^{(i)} e^{2\theta} + b^{(i)} e^\theta + c^{(i)}} + d^{(i)}.$$

После подстановки на 11 переменных $a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}, d^{(i)}, k, \omega, \sigma_g$ получим достаточно громоздкую систему из 22 уравнений, для исследования которой построен базис Грёбнера.

В результате имеем только одно нетривиальное решения для $\sigma_g = 0$:

$$\theta = k(\eta + \eta_0) - \left(k^3 + \frac{3}{2} b^2 k^5 \right) t, \quad \varphi^{(i)} = \frac{e^\theta}{\frac{1}{4} \frac{b^2 k^2 + 1}{c k^2} e^{2\theta} + b e^\theta + c} + \frac{1}{2} b k^2. \quad (24)$$

Здесь b, c, k — произвольные постоянные. Остальные нетривиальные решения, в том числе и для $\sigma_g \neq 0$, имеют мнимую часть и должны быть отброшены как не физические. Для символьных вычислений была использована свободная система компьютерной алгебры *Matha* [8], а для построения и работы с базисами Грёбнера [9].

Поскольку для решения (24) выполнено $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$, то данное решение будет также являться и решением МКдВ и переходить в известное решение (23) при $b = 0, c = 1/(2k)$.



5. Метод конечных объёмов сводится к дискретизации исходных уравнений, представленных в интегральной форме, в противоположность методу конечных разностей, который обычно применяется к исходным уравнениям в их дифференциальной форме. При этом если исходная система обладала законами сохранения, то построенная разностная схема будет обладать хорошими консервативными свойствами просто по построению. Кроме того, при этом подходе упрощается вывод разностных соотношений на границах вычислительной области.

Если исходные уравнения содержат производные выше первого порядка, то метод конечных объёмов нуждается в модификации. Эта модификация получила название интегроинтерполяционного метода, недостатком которого является отход от работы только с интегральными соотношениями и прямая замена производных их конечными разностями. Если на этом этапе добавить интегральные соотношения, связывающие искомые функции с их производными, и затем, использовать алгоритм Бухбергера построения базисов Грёбнера или инволютивный алгоритм, то можно получить соотношения, связывающие только искомые функции [2, 10].

Запишем уравнение (22) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega} -(2\varphi^{(i)3} + \varphi^{(i)}_{\eta\eta} - \sigma_g \varphi^{(i)}_{\eta}) dt + \varphi^{(i)} d\eta - \iint_{\Omega} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (-1)^i dt d\eta = 0 \quad (25)$$

для любой области Ω . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u^{(i)n}_j = \varphi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1.

Добавим интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta &= u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta &= u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j). \end{aligned} \quad (26)$$

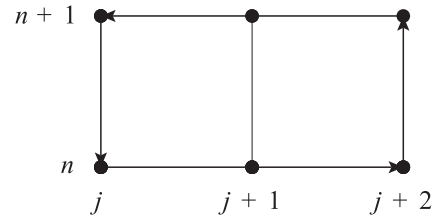


Рис. 1. Базовой контур для уравнения (25)

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (25), (26) в виде

$$\begin{aligned} - \left(\left(2u^{(i)3n}_j + 2u^{(i)3n+1}_j - 2u^{(i)3n}_{j+2} - 2u^{(i)3n+1}_{j+2} \right) + \left(u^{(i)}_{\eta\eta j} + u^{(i)}_{\eta\eta j}^{n+1} - u^{(i)}_{\eta\eta j+2} - u^{(i)}_{\eta\eta j+2}^{n+1} \right) - \right. \\ \left. - \sigma_g \left(u^{(i)}_{\eta j} + u^{(i)}_{\eta j}^{n+1} - u^{(i)}_{\eta j+2} - u^{(i)}_{\eta j+2}^{n+1} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} \left(u^{(i)}_{t j} + u^{(i)}_{t j}^{n+1} \right) \cdot \frac{\tau}{2} = u^{(i)j}_{j+2} - u^{(i)j}_j, \\ \left(u^{(i)}_{\eta j+1} + u^{(i)}_{\eta j} \right) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)j}_{j+1} - u^{(i)j}_j, \quad u^{(i)}_{\eta\eta j+1} \cdot 2h = u^{(i)j}_{\eta j+2} - u^{(i)j}_{\eta j}. \end{aligned}$$

Вводя сеточные операторы сдвига θ_t , θ_η по переменным t , η соответственно, запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned} -(1 + \theta_t - \theta_\eta^2 - \theta_t \theta_\eta^2) \circ (3u^{(i)2} + u^{(i)}_{\eta\eta} - \sigma_g \varphi_\eta) \cdot \frac{\tau}{2} + (\theta_\eta \theta_t - \theta_\eta) \circ (\theta_t + 1) \circ u^{(i)}_t \cdot \frac{\tau}{2} = (\theta_t - 1) \circ u^{(i)}, \\ (\theta_\eta + 1) \circ u^{(i)}_\eta \cdot \frac{h}{2} = (\theta_\eta - 1) \circ u^{(i)}, \quad \theta_\eta \circ u^{(i)}_{\eta\eta} \cdot 2h = (\theta_\eta^2 - 1) \circ u^{(i)}_\eta. \end{aligned}$$

Выбирая допустимое лексикографическое упорядочение сначала по функциям $u^{(1)}_{\eta\eta} \succ u^{(2)}_{\eta\eta} \succ u^{(1)}_\eta \succ u^{(2)}_\eta \succ u^{(1)} \succ u^{(2)}$, затем по переменным $\theta_t \succ \theta_\eta$, можно построить базис Грёбнера, или инволютивный базис [10]. В результате получим в качестве отдельных элементов авторедуцированного базиса Грёбнера следующие разностные схемы для уравнений (22), аналогичные схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{u^{(i)j}_{j+2} - u^{(i)j}_j}{\tau} + 2 \frac{(u^{(i)3n+1}_{j+1} - u^{(i)3n+1}_{j-1}) + (u^{(i)3n}_{j+1} - u^{(i)3n}_{j-1})}{4h} + \\ + \frac{(u^{(i)j}_{j+2} - 2u^{(i)j}_{j+1} + 2u^{(i)j}_{j-1} - u^{(i)j}_{j-2}) + (u^{(i)j}_{j+2} - 2u^{(i)j}_{j+1} + 2u^{(i)j}_{j-1} - u^{(i)j}_{j-2})}{4h^3} - \end{aligned}$$



$$-\sigma_g \frac{(u^{(i)n+1}_{j+1} - 2u^{(i)n+1}_j + u^{(i)n+1}_{j-1}) + (u^{(i)n}_{j+1} - 2u^{(i)n}_j + u^{(i)n}_{j-1}))}{2h^2} - \frac{u^{(i)n+1}_j + u^{(i)n}_j}{2} (-1)^i = 0.$$

Полученные неявные разностные схемы имеют кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v^3_{k+1} = v^3_{k+1} - v^3_k + v^3_k = (v_{k+1} - v_k)(v^2_{k+1} + v_{k+1}v_k + v^2_k) + v^3_k \approx v_{k+1} \cdot 3v^2_k - 2v^3_k.$$

Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало 2. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчёта была написана на языке Python с использованием пакета SciPy [11] и занимает около 120 строк, включая сам расчёт и построение графиков.

Результаты проведённого компьютерного моделирования представлены на рис. 2–3 и позволяют сделать следующие выводы. В первом случае при $\sigma_g = 0.0$ наличие жидкости между оболочками приводит к возникновению уединённой волны деформации (солитона) и во внутренней оболочке, в которой в начальный момент деформации равнялись нулю (рис. 2). Это процесс происходит за счёт «перекачки» энергии (через слой жидкости) от солитона во внешней оболочке и сопровождается падением амплитуды солитона во внешней оболочке и, как следствие, снижением скорости его распространения.

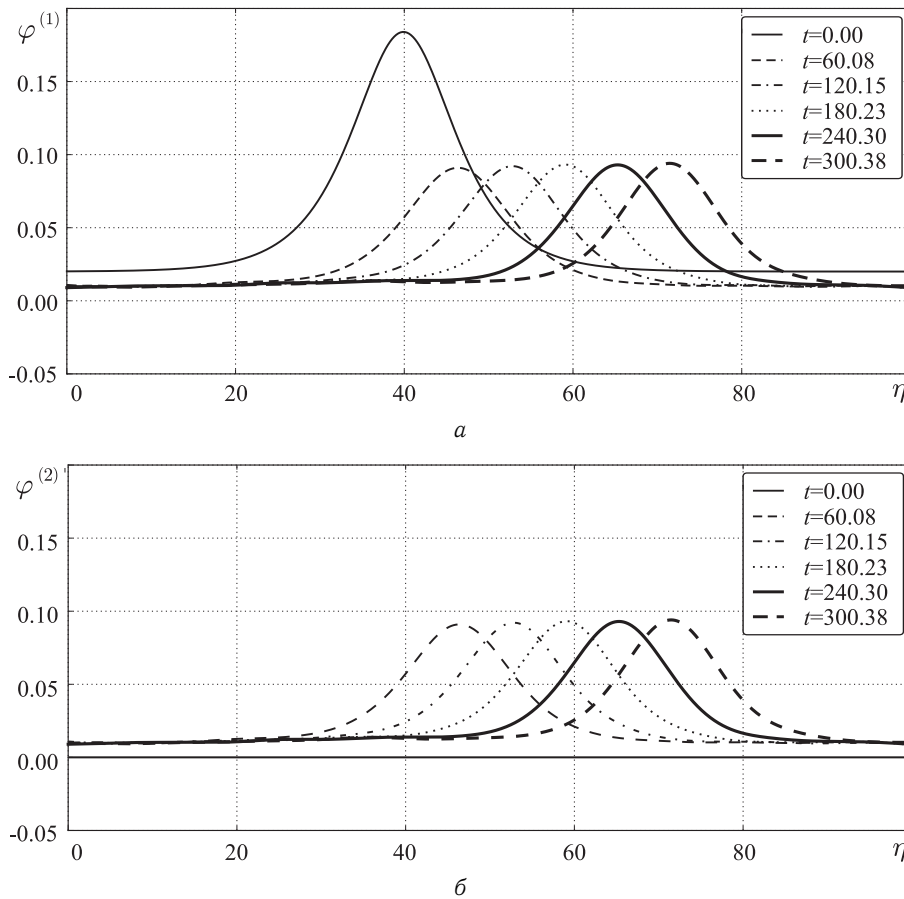


Рис. 2. График численного решения уравнений (22) при $\sigma_g = 0.0$ и с начальным условием, (24) для $\varphi^{(1)}$ (а) с $k = 0.2$, $\eta_0 = 40.0$, $b = 1.0$, $c = 1/(2k)$ и для $\varphi^{(2)} = 0.0$ (б)

В втором случае $\sigma_g \neq 0.0$ и (24) не является точным решением МКДВ-Б. Как и в первом случае, наличие жидкости между оболочками приводит к возникновению волны деформации во внутренней оболочке, в которой в начальный момент деформации равнялись нулю (рис. 3).

Данный процесс происходит за счёт «перекачки» энергии через слой жидкости от возбуждающей волны во внешней оболочке и сопровождается снижением её амплитуды и скорости распространения.



При этом происходит размазывание солитона, что объясняется наличием диссипации (σ_g отлично от нуля в отличие от первого случая). В результате, как и в первом случае, во внешней и внутренней оболочках устанавливается волна деформации постоянной амплитуды и скорости распространения.

Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что рассматриваемая механическая система начинает вести себя как единый трёхслойный пакет с двумя несущими слоями (внешняя и внутренняя оболочки), по которым распространяются волны деформации, и заполнителем — слоя вязкой несжимаемой жидкости.

Проведённое компьютерное исследование новой математической модели с использованием теории базисов Грёбнера позволило найти новое аналитическое решение МКдВ, а также построить качественную разностную схему, которая по построению соответствует исходной непрерывной модели.

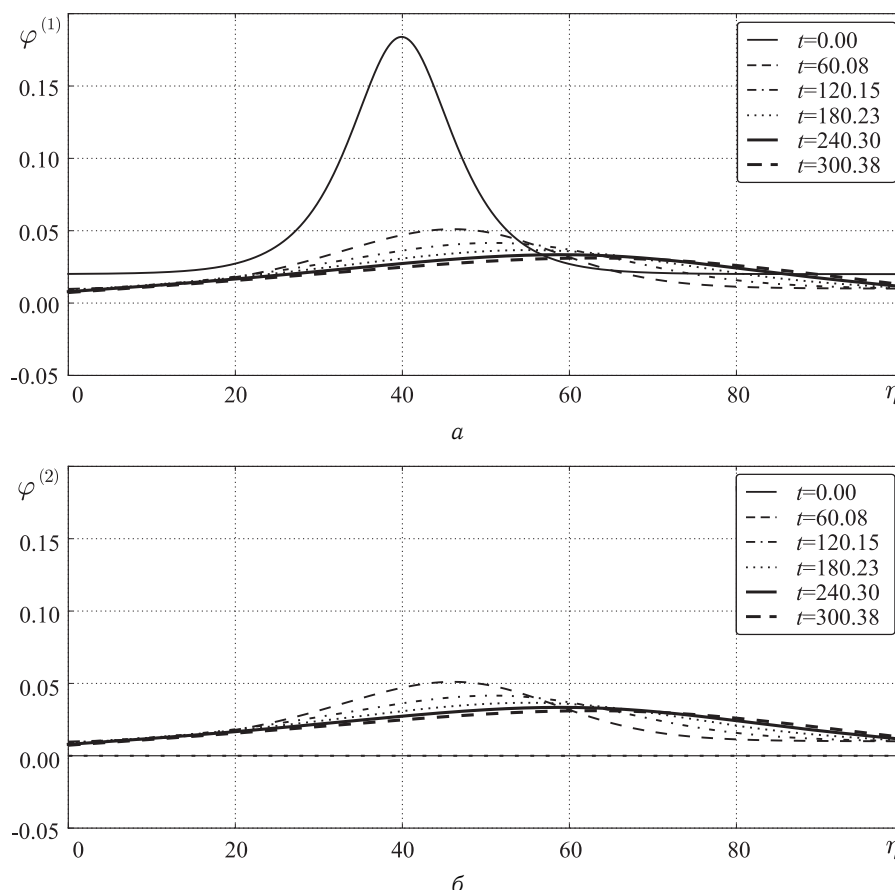


Рис. 3. График численного решения уравнений (22) при $\sigma_g = 1.0$ и с начальным условием, (24) для $\varphi^{(1)}$ (а) с $k = 0.2$, $\eta_0 = 40.0$, $b = 1.0$, $c = 1/(2k)$ и для $\varphi^{(2)} = 0.0$ (б)

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00177-а) и гранта Президента РФ (проект МД-1025.2012.8).

Библиографический список

1. Gröbner Bases and Applications / eds. B. Buchberger, F. Winkler. London Mathematical Society Lectures Notes. Ser. 251. Cambridge University Press, 1998. 522 p.
2. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006. Vol. 2. 26 p. URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html> (дата обращения 28.02.10).
3. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
4. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрия, эволюция / Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов, 1999. 132 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.



6. Каузерер К. Нелинейная механика. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 240 с.
7. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. Maxima, a Computer Algebra System. URL: <http://maxima.sourceforge.net/> (дата обращения 28.02.10).
9. Блинков Ю. А., Гердт В. П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. 2008. Т. 34, № 2. С. 67–80.
10. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргера построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. Т. 32, № 2. С. 71–74.
11. SciPy.org. URL: <http://www.scipy.org> (дата обращения 28.02.10).

УДК 519.713

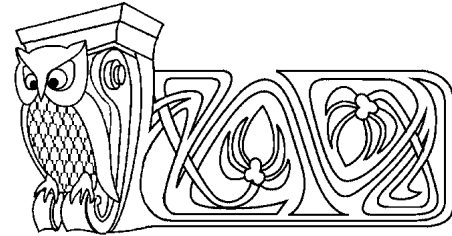
АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Д. О. Матов

Саратовский государственный университет
E-mail: MatovDO@info.sgu.ru

Рассматривается подкласс аффинных преобразований геометрических образов автоматов. Приводятся результаты исследования свойств и вида рассматриваемых преобразований.

Ключевые слова: автомат, геометрический образ, аффинное преобразование.



Affine Transformations of Geometrical Images of Finite Automata

D. O. Matov

A subclass of affine transformations on the set of geometrical images of finite automata is investigated. The results about the characteristics and the form of these transformations are described.

Key words: automaton, geometrical image, affine transformation.

ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется поведение конечных детерминированных автоматов, заданных в виде геометрических образов.

При решении различных задач, связанных с автоматами, как правило, используются традиционные способы задания автоматов (таблицы, графы, матрицы переходов и т.п.). Однако находят свое применение и относительно новые способы задания функционирования автоматов. В 1994 году В. А. Твердохлебовым был предложен геометрический подход к изучению автоматов. В рамках этого подхода поведение автомата отображается в геометрических фигурах, в частности, в кривых на плоскости. Была разработана дискретная словарная геометрия, и к изучению поведения автоматов был привлечен аппарат непрерывной математики, в том числе многие инструменты геометрии. Тогда впервые появилось понятие «геометрический образ автомата» как некоторая геометрическая фигура, содержащая в себе всю информацию о его поведении. В 1999 году Л. Б. Тяпаев в рамках геометрического подхода предложил в качестве геометрического образа автомата рассматривать множество точек на плоскости с рациональными координатами. Были рассмотрены многие задачи анализа, синтеза, эквивалентности и распознавания автоматов на основе их задания геометрическими образами [1]. Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней используется предложенный Л. Б. Тяпаевым способ построения геометрических образов автоматов.

Основным объектом исследования являются аффинные преобразования множеств точек, представляющих геометрические образы конечных детерминированных автоматов.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ АВТОМАТОВ

Пусть автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S — множество состояний, X, Y — входной и выходной алфавиты, $\delta : S \times X \rightarrow S$, $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ — функции переходов и выходов соответственно. Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. С инициальным автоматом (A, s) связано автоматное отображение $\Lambda_A^s : X^* \rightarrow Y^*$. Геометрическое пространство Γ для автомата (A, s) определяется по следующему алгоритму [1].



1. Сопоставим элементам множества X натуральные числа от 1 до n , т.е. осуществим взаимно однозначное отображение $f : X \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

2. Определим координатную ось абсцисс \tilde{X} для пространства Γ как отрезок числовой оси $[0, n+1]$.

3. Каждому слову $p = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ сопоставим вектор $\omega = (f(x_{i_1}), \dots, f(x_{i_k}))$, т.е. осуществим взаимно однозначное соответствие $g : X^* \rightarrow V_N$, где V_N — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа.

4. Каждому такому вектору $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ взаимно однозначно сопоставим точку $\tilde{x} \in Q$ на оси абсцисс:

$$\tilde{x} = \frac{\omega_1}{(n+1)^0} + \frac{\omega_2}{(n+1)^1} + \frac{\omega_3}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\omega_k}{(n+1)^{k-1}}.$$

Аналогично определяется нумерация элементов множества Y , ось ординат \tilde{Y} пространства Γ и отображение $h : Y^* \rightarrow V_N$. Каждой паре $(p, q) \in \Lambda_A^s$ в пространстве Γ сопоставляется точка с координатами (\tilde{x}, \tilde{y}) , где

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, & (c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) &= g(p), \\ \tilde{y} &= \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}, & (b_1, b_2, \dots, b_{|q|}) &= h(q). \end{aligned}$$

Множество таких пар (\tilde{x}, \tilde{y}) понимается под геометрическим образом Ω_A^s автомата (A, s) .

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБРАЗОВ

В работе [1] было введено понятие аффинной эквивалентности геометрических образов автоматов. Два геометрических образа называются *аффинно-эквивалентными*, если множество точек одного образа может быть преобразовано в множество точек другого образа некоторым поточечным аффинным преобразованием. Аффинное преобразование задается формулами

$$\tilde{x}' = c_{11}\tilde{x} + c_{12}\tilde{y} + r_1, \quad \tilde{y}' = c_{21}\tilde{x} + c_{22}\tilde{y} + r_2, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

выражающими для каждой данной точки $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ координаты преобразованной точки $M'(\tilde{x}', \tilde{y}')$ (в той же системе координат).

Класс автоматов, у которых $|S| = N$, $|X| = L$ и $|Y| = M$ будем обозначать $K(N, L, M)$. Зафиксируем некоторый класс автоматов $K(N, L, M)$ и рассмотрим множество Ω геометрических образов всевозможных инициальных автоматов из данного класса. Будем рассматривать те аффинные преобразования образов, путем применения которых можно некоторый образ $\Omega_i \in \Omega$ преобразовать в другой образ $\Omega_j \in \Omega$. В этой статье рассматривается следующее аффинное преобразование: параллельный перенос вдоль оси ординат одновременно с растяжением или сжатием относительно оси абсцисс. Данное преобразование имеет вид

$$\tilde{x}' = \tilde{x}, \quad \tilde{y}' = a\tilde{y} + b. \tag{1}$$

Будем говорить, что образы Ω_i, Ω_j *совместимы* с выбранным видом аффинного преобразования, если при применении преобразования (1) ко всем точкам из Ω_i получаются точки, составляющие Ω_j .

Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset \Omega^2$, образованное парами совместимых образов. Легко показать, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, поэтому является отношением эквивалентности на множестве Ω и задает разбиение этого множества на классы эквивалентности. Множество всех различных геометрических образов всевозможных инициальных автоматов из класса $K(N, L, M)$ будем обозначать $\Omega(N, L, M)$. Множество пар коэффициентов преобразований образов из $\Omega(N, L, M)$ будем обозначать $F(N, L, M)$.



3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Лемма 1. Пусть A, B — пара сравнимых автоматов, геометрические образы $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$ которых совместимы. Пусть реакции этих автоматов на произвольное слово $p \in X^*$ имеют вид $q_A = y_{i_1}y_{i_2} \dots y_{i_k}$ и $q_B = y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_k}$. Тогда если пара (a, b) задает коэффициенты преобразования для совмещения $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$, то номера символов выходного алфавита, составляющих q_A и q_B , связаны соотношением

$$n(y_{i_1}) = a \cdot n(y_{j_1}) + b, \quad n(y_{i_t}) = a \cdot n(y_{j_t}), \quad 2 \leq t \leq k,$$

где $n(c)$ означает номер символа c в выходном алфавите.

Доказательство. По определению совместимости $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$ для любого $1 \leq l \leq k$ имеет место равенство

$$\sum_{f=1}^l \frac{n(y_{i_f})}{(M+1)^{f-1}} = a \cdot \sum_{f=1}^l \frac{n(y_{j_f})}{(M+1)^{f-1}} + b.$$

При $l = 1$ получаем, что $n(y_{i_1}) = a \cdot n(y_{j_1}) + b$. Вычитая равенство при $l = t - 1$ из равенства при $l = t$, получаем, что $n(y_{i_t}) = a \cdot n(y_{j_t})$. \square

Лемма 2. Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A, s_0)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B, t_0)$, $a, s_f \in S, t_f \in T$ — некоторая пара состояний. Тогда если существует $p \in X^*$ такое, что $\delta_A(s_0, p) = s_f$ & $\delta_B(t_0, p) = t_f$, то существует слово $p' \in X^+$ длины не более $|S| \cdot |T|$ с таким же свойством.

Для рассматриваемого вида аффинных преобразований был сформулирован и доказан критерий совместимости геометрических образов:

Теорема 1. Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A, s_0)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B, t_0)$. Тогда если $\exists a, b \in R$ такие, что для всех $p \in X^*, |p| \leq |S| \cdot |T| + 1$, верно

$$\tilde{h}(q_A) = a \cdot \tilde{h}(q_B) + b, \tag{2}$$

где $q_A = \lambda_A(p), q_B = \lambda_B(p)$, то (2) верно для любого $p \in X^*$, т.е. образы автоматов A и B совместимы.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по длине слова p . В качестве базы индукции возьмем посылку из условия теоремы: (2) верно для всех слов длины не более $|S| \cdot |T| + 1$.

Предположим, что (2) выполнено для всех слов длины k и менее, причем $k \geq |S| \cdot |T| + 1$. Рассмотрим произвольное слово $p = x_{l_1}x_{l_2} \dots x_{l_k}x_{l_{k+1}}$. Пусть $q_A = y_{i_1}y_{i_2} \dots y_{i_k}y_{i_{k+1}}$ и $q_B = y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_k}y_{j_{k+1}}$. Свойство (2) по условию теоремы выполнено для всех префиксов слова p . Тогда по лемме 1 для того чтобы (2) было верно для p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $n(y_{i_{k+1}}) = a \cdot n(y_{j_{k+1}})$. Обозначим префикс слова p длины k через p' , а пару состояний, в которые p' переводит автоматы A и B , через (s_f, t_f) . Согласно лемме 2, найдется слово p'' длины не менее 1 и не более $|S| \cdot |T|$, переводящее автоматы в эти же состояния. Образует новое слово $w = p''x_{i_{k+1}}$. Очевидно, что последние символы реакций автоматов на слово w равны $y_{i_{k+1}}$ и $y_{j_{k+1}}$ соответственно. По предположению индукции для w имеет место (2). По лемме 1 получаем, что $n(y_{i_{k+1}}) = a \cdot n(y_{j_{k+1}})$. В силу произвола выбора p равенство (2) верно для всех слов длины $k + 1$. \square

Из приведенной теоремы следует, что для установления факта совместимости образов следует проверить совместимость их конечных частей, что дает способ непосредственной проверки совместимости образов.

Лемма 3. $F(N, M) \subseteq F(2, M)$.

Доказательство. Пусть пара (a, b) задает коэффициенты преобразования совмещения для некоторой пары образов $\Omega(A), \Omega(B)$ инициальных автономных автоматов $A, B \in K(N, M)$. Пусть реакции этих автоматов на входное слово бесконечной длины равны соответственно $y_1^A y_2^A \dots y_k^A \dots$ и $y_1^B y_2^B \dots y_k^B \dots$. Согласно лемме 1

$$n(y_1^A) = a \cdot n(y_1^B) + b, \quad n(y_k^A) = a \cdot n(y_k^B), \quad k > 1. \tag{3}$$



Построим два инициальных автомата $\bar{A}, \bar{B} \in K(2, M)$, для геометрических образов $\Omega(\bar{A}), \Omega(\bar{B})$ которых пара (a, b) также будет задавать совмещающее преобразование. Эти автоматы изображены на рисунке.

Их реакции на слова бесконечной длины можно записать в виде $y_1^A(y_2^A)$ и $y_1^B(y_2^B)$ соответственно. Очевидно, что (3) выполняется для этих последовательностей, поэтому $(a, b) \in F(2, M)$. \square

Теорема 2. $F(N, L, M) = F(2, 1, M)$ для всех $N \geq 2$ и $L \geq 1$.

Доказательство. I. Покажем, что $F(N, L, M) \subseteq F(2, 1, M)$. Пусть пара $(a, b) \in F(N, L, M)$ задает коэффициенты совмещающего преобразования геометрических образов $\Omega(A), \Omega(B)$ автоматов $A, B \in K(N, L, M)$. Это означает, что при приложении к этим автоматам произвольного слова $p \in X^*$ для наблюдаемых реакций $q_A, q_B \in Y^*$ имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{h}(q_A) = a \cdot \tilde{h}(q_B) + b. \quad (4)$$

Зафиксируем произвольный входной сигнал $x \in X$ и рассмотрим автономные компоненты автоматов A, B по этому входному сигналу. Обозначим эти компоненты через A' и B' . Выберем в автоматах A' и B' такие же начальные состояния, как и в исходных. Автоматные отображения, порождаемые автоматами A' и B' , являются ограничениями отображений, порождаемых соответственно A и B , на множестве $\{x\}^*$, поэтому равенство (4) будет выполнено для этих отображений. Из этого следует, что образы $\Omega(A')$ и $\Omega(B')$ будут совместимы, причем с теми же коэффициентами преобразования, т. е. $(a, b) \in F(N, 1, M)$. По лемме 3 $F(N, 1, M) \in F(2, 1, M)$, поэтому в итоге $(a, b) \in F(2, 1, M)$.

II. Покажем, что $F(2, 1, M) \in F(N, L, M)$. Пусть A — произвольный инициальный автомат из $K(2, 1, M)$. Порождаемое им отображение можно задать в виде реакции на входное слово бесконечной длины. Для автомата с двумя состояниями длина периодической части этой записи не больше двух. Таким образом, эта запись может иметь два вида: 1) $u(v)$, 2) (uv) , где $u, v \in Y$ (при этом в первом случае допускается, что $u = v$).

Для каждого из этих случаев построим автомат $A' \in K(2, L, M)$, выходная реакция которого зависит только от длины входного слова. Пусть множество состояний автомата A это $\{s_0, s_1\}$. Определим функции переходов и выходов автомата A в каждом из случаев так:

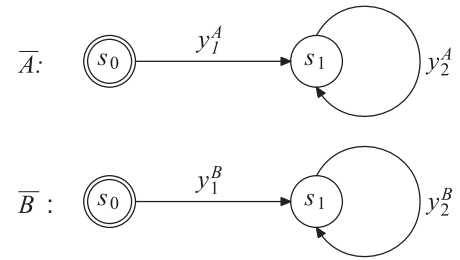
- 1) $\delta(s_0, x) = s_1, \delta(s_1, x) = s_1, \lambda(s_0, x) = u, \lambda(s_1, x) = v$ для всех $x \in X$;
- 2) $\delta(s_0, x) = s_1, \delta(s_1, x) = s_0, \lambda(s_0, x) = u, \lambda(s_1, x) = v$ для всех $x \in X$.

Начальным состоянием в A' выберем s_0 . Тогда автомат A' обладает следующим свойством: на любом входном слове фиксированной длины выходная реакция этого автомата совпадает с выходной реакцией автомата A на слово такой же длины. Теперь дополним A' до автомата $A'' \in K(N, L, M)$, добавив в него $N - 2$ новых состояния и произвольным образом доопределив функции δ и λ . Тогда новые состояния будут недостижимы из начального.

Пусть теперь пара $(a, b) \in F(2, 1, M)$ задает коэффициенты совмещающего преобразования для геометрических образов автоматов $A, B \in K(2, 1, M)$. Применив к ним описанную выше процедуру, получим пару инициальных автоматов $A'', B'' \in K(N, L, M)$. Очевидно, что в силу описанных свойств автоматов A'', B'' по отношению к A, B образы $\Omega(A'')$ и $\Omega(B'')$ будут совместимы преобразованием с коэффициентами (a, b) . В силу произвола выбора (a, b) , $F(2, 1, M) \in F(N, L, M)$. \square

Таким образом, оказалось, что все классы автоматов с одинаковой мощностью выходного алфавита имеют одинаковый набор преобразований геометрических образов, совпадающий с $F(2, 1, M)$.

Коэффициенты преобразований являются рациональными числами, причем справедлива следующая теорема.



Автоматы \bar{A} и \bar{B}



Теорема 3. Если $(a, b) \in F(N, L, M)$, то $a = p_a/q_a$, $b = p_b/q_b$, $p_a, q_a, p_b, q_b \in Z$, $1 \leq p_a \leq M$, $1 \leq q_a \leq M$, $0 \leq |p_b| \leq M^2 - 1$, $1 \leq q_b \leq M$.

Доказательство. Согласно теореме 2 $F(N, L, M) = F(2, 1, M)$, поэтому докажем теорему для случая $L = 1$. Пусть пара (a, b) задает совмещающее преобразование образов $\Omega(A)$, $\Omega(B)$ инициальных автономных автоматов $A, B \in K(N, M)$. Пусть реакции этих автоматов на входное слово бесконечной длины равны соответственно $y_1^A y_2^A \dots y_k^A \dots$ и $y_1^B y_2^B \dots y_k^B \dots$.

Выпишем ординаты точек, составляющих образы $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$: $\tilde{y}_1^A \tilde{y}_2^A \dots \tilde{y}_k^A \dots$ и $\tilde{y}_1^B \tilde{y}_2^B \dots \tilde{y}_k^B \dots$.

По определению геометрического образа

$$\tilde{y}_k^A = \sum_{t=1}^k \frac{n(y_t^A)}{(M+1)^{t-1}}, \quad \tilde{y}_k^B = \sum_{t=1}^k \frac{n(y_t^B)}{(M+1)^{t-1}}. \quad (5)$$

Образы $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$ совместимы, поэтому $\tilde{y}_k^A = a \cdot \tilde{y}_k^B + b$ для всех $k \geq 1$. Запишем два равенства для $k = 1$ и $k = 2$, подставляя вместо ординат их выражения в (5):

$$\begin{aligned} n(y_1^A) &= a \cdot n(y_1^B) + b, \\ n(y_1^A) + \frac{n(y_2^A)}{M+1} &= a \cdot \left(n(y_1^B) + \frac{n(y_2^B)}{M+1} \right) + b. \end{aligned}$$

Из этой системы получаем, что

$$a = \frac{n(y_2^A)}{n(y_2^B)}, \quad (6)$$

$$b = \frac{n(y_1^A)n(y_2^B) - n(y_2^A)n(y_1^B)}{n(y_2^B)}. \quad (7)$$

Заметим, что номера всех символов — целые числа из диапазона $[1, M]$. Поэтому из (6) получаем, что $a = p_a/q_a$, где $1 \leq p_a, q_a \leq M$. Числитель дроби в (7) может принимать значения от $-M^2 + 1$ до $M^2 - 1$, поэтому $b = p_b/q_b$, где $0 \leq |p_b| \leq M^2 - 1$, $1 \leq q_b \leq M$. \square

Из этой теоремы вытекает очевидное следствие о верхней оценке мощности множества преобразований:

Следствие. $|F(N, L, M)| \leq 2M^5$.

Таким образом, рассмотрен подкласс аффинных преобразований геометрических образов автоматов и определяемое ими отношение совместимости образов. Найден и доказан критерий совместимости геометрических образов, доказана инвариантность множества преобразований образов для классов автоматов с различным количеством состояний и различным количеством выходных сигналов. Получена оценка количества преобразований образов из заданного класса $\Omega(N, L, M)$.

Библиографический список

1. Тьяев Л. Б. Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2006. Т. 6. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 121–133.
2. Тьяев Л. Б., Матов Д. О. Базисы геометрических образов для динамических систем, определяемых некоторыми классами автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов, 2009. С. 201–204.
3. Матов Д. О. Классы аффинной эквивалентности геометрических образов автономных автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы науч. конф. Саратов, 2010. С. 103–108.
4. Матов Д. О. Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов // Проблемы теоретической кибернетики : материалы междунар. науч. конф. Н. Новгород, 2011. С. 303–306.



УДК 681.3.06, 681.322

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ВАРИАНТ АЛГОРИТМА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ БОКСА

А. Н. Савин

Саратовский государственный университет
E-mail: savinan@info.sgu.ru

Представлены результаты адаптации алгоритма поиска глобального экстремума при наличии явных и неявных ограничений комплексным методом Бокса для систем параллельных и распределённых вычислений. Определено оптимальное число узлов вычислительной системы с точки зрения надёжности нахождения глобального экстремума и времени его поиска. При этом время выполнения программы оказалось в несколько раз меньше, чем на одной ЭВМ, а надёжность нахождения глобального экстремума значительно выше за счёт одновременного исследования целевой функции в нескольких областях факторного пространства.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, условная оптимизация, комплексный метод Бокса, многоэкстремальная целевая функция, параллельные вычислительные системы.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время решение большого количества технических задач требует поиска экстремума некоторой целевой функции (ЦФ) на заданной области определения, то есть необходимо применение условной оптимизации.

Например, разработка приборов СВЧ предполагает численное или физическое моделирование процессов в них и последующую оптимизацию прибора с целью достижения требуемых значений выходных параметров [1].

Задачи оптимизации зачастую содержат различные явные ограничения (ограничения типа равенств) на значения параметров и дополнительные условия, например, условия согласования, устойчивости и т. д. — неявные ограничения (ограничения типа неравенств). При этом ЦФ часто оказываются многоэкстремальными. Существующие для решения таких задач методы условной оптимизации, как градиентные, так и случайного поиска, не гарантируют нахождения глобального экстремума и требуют больших вычислительных затрат [1].

Проблема нехватки вычислительных ресурсов в этом случае может решаться применением современных параллельных и распределённых вычислительных систем (ВС) в сочетании с эффективно работающими на таких системах алгоритмами условной оптимизации [2].

В данной работе была поставлена задача адаптации для выполнения на параллельных и распределённых вычислительных системах алгоритма условной оптимизации комплексным методом Бокса [3, 4] многоэкстремальных ЦФ многих переменных при наличии явных и неявных ограничений.

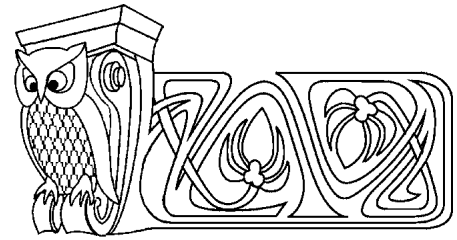
1. ОБЩИЙ ВИД ЗАДАЧИ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА ПРИ НАЛИЧИИ ЯВНЫХ И НЕЯВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Поиск глобального минимума функции $f: R^n$ при наличии ограничений осуществляется на некотором собственном подмножестве Ω метрического пространства R^n :

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min, x \in \Omega, \quad \Omega \subset R^n, \quad (1)$$

где подмножество Ω определяется явными ограничениями:

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$



The Parallel Variant of Conditional Optimization Algorithm with Box Complex Method

A. N. Savin

This article presents the results of the adaptation algorithm for global extremum searching with presence explicit and implicit constraints complex method created by Box for systems of the distributed and parallel computing. The optimal count of nodes of computing system from the point of view of reliability a global extremum finding and time of its search is defined. At the same time, the run time was several times smaller than on one computer and reliability of searching the global extremum is much higher due to the simultaneous researching of the target function in several areas of the factor space.

Key words: global optimization, conditional optimization, Box complex method, multiextreme criterion function, parallel computing system.



а также неявными ограничениями:

$$h_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Пусть имеется некоторое множество X , состоящее из элементов x , принадлежащих подмножеству $\Omega \subset R^n$, и на нём определена скалярная функция $f(x)$. Говорят, что $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x^* , если существует некоторая конечная ϵ -окрестность этой точки, в которой выполняется условие

$$f(x^*) < f(x), \quad \|x - x^*\| \leq \epsilon.$$

У функции может быть много локальных минимумов. Если выполняется неравенство $f(x^*) < f(x)$, $x \in X$, где $x \neq x^*$ — любая точка множества X , то говорят о глобальном минимуме функции $f(x)$ [5].

2. ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА МОДИФИЦИРОВАННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ БОКСА

Поиск глобального минимума многоэкстремальной функции (1) при наличии явных (2) и неявных (3) ограничений на варьируемые параметры может быть осуществлён комплексным методом Бокса [3] с учётом его модификаций, предложенных в [4].

Комплексный метод Бокса использует при поиске экстремума только значения функции, а не её производные, то есть это метод прямого поиска. Он является модификацией симплексного метода Нелдера–Мида [3], основанного на применении процедуры симплекс-планирования при поиске экстремумов, однако позволяет учитывать явные и неявные ограничения на изменения варьируемых параметров.

Если функция $f(x)$ (1) выпукла и неявные ограничения $h_i(x)$ (3) тоже выпуклы, то сформулированная выше задача поиска минимума имеет единственное решение, которое успешно находится комплексным методом Бокса. Однако при наличии локальных невыпуклостей функции $f(x)$, т. е. при её многоэкстремальности, данный метод имеет возможность заикливания [3].

В [4] предложена модификация комплексного метода Бокса, исключающая возможность заикливания. Она основана на дополнительном исследовании функции $f(x)$ в текущей области изменения варьируемых параметров для выявления локальных невыпуклостей $f(x)$ и на их обходе. Алгоритм оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса приведён ниже.

1. Поиск глобального минимума целевой функции $f(x)$ (1) начинается с определения количества параметров n , инициализации нижних и верхних границ явных ограничений (2) $l_j, u_j, j = 1, \dots, n$, ввода неявных ограничений (3) $h_i(x), i = 1, \dots, m$.

2. Строится комплекс из $k = sn$ случайным образом распределённых точек в области, заданной ограничениями (2) и (3) (Бокс использовал коэффициент умножения комплекса $s = 2$):

- выбирается начальная точка $x[1]$, удовлетворяющая ограничениям (2) и (3);
- координаты остальных точек, удовлетворяющих ограничениям (2), выбираются следующим образом:

$$x_j[q] = l_j + r(u_j - l_j), \quad (4)$$

где $j = 1, \dots, n, q = 2, \dots, k, r$ — псевдослучайная равномерно распределённая переменная в интервале $(0, 1)$.

• если выбранная в соответствии с (4) точка $x[q]$ не удовлетворяет неявным ограничениям (3), то она смещается на половину расстояния до центра тяжести множества уже принятых точек — $x^c : x^c = \sum_{e=1}^{q-1} x[e]/(q-1)$, т. е. формируется точка $x'[q]$:

$$x'[q] = (x[q] + x^c)/2; \quad (5)$$

• точке $x[q]$ присваивается значение смещённой точки $x'[q] : x[q] = x'[q]$;

• если точка $x[q]$ всё ещё не является допустимой, то описанная соотношением (5) процедура повторяется до тех пор, пока точка $x[q]$ не станет допустимой, а если функции $h_i(x)$ выпуклы, то, в конце концов, ограничения выполняются;

- точки комплекса упорядочиваются в соответствии со значениями ЦФ: $f(x[1]) \leq \dots \leq f(x[k])$.

3. Определяется наименьшее значение ЦФ — $f_{\min} : f_{\min} = f(x[1])$.



4. Определяются точка с наибольшим значением ЦФ — $x[k]$ и центр тяжести остальных $k - 1$ точек — $x^0 : x^0 = \sum_{e=1}^{k-1} x[e]/(k - 1)$.

5. Вычисляется точка x^r отражением худшей точки $x[k]$ относительно центра тяжести x^0 , используя коэффициент отражения $\alpha > 1 : x^r = x^0 - \alpha(x[k] - x^0)$.

6. Вычисляется значение ЦФ в центре тяжести $k - 1$ точек $f(x_0)$.

7. Осуществляется проверка ЦФ на выпуклость: если $f(x^0) < f(x[k - 1])$, то ЦФ выпукла и переходим к шагу 8, иначе центр тяжести x^0 заменяется на лучшую точку — $x[1] : x^0 = x[1]$.

8. Выполняется проверка, является ли отражённая точка x^r допустимой:

- если не выполняются ограничения для $l_j, j = 1, \dots, n$, то $x_r^j = l_j + 10^{-6}$;
- если не выполняются ограничения для $u_j, j = 1, \dots, n$, то $x_r^j = u_j - 10^{-6}$;
- если не выполняются неявные ограничения (3), то точка x^r перемещается на половину расстояния между x^r и центром тяжести $x^0 : x^{rr} = (x^r + x^0)/2$, а отражённой точке x^r присваивается значение $x^r : x^r = x^{rr}$.

9. Производится повторная проверка отражённой точки x^r на допустимость, и шаг 8 повторяется до тех пор, пока не будет получена допустимая точка.

10. Осуществляется проверка на улучшение отражённой точки x^r :

- вычисляется значение ЦФ $f(x^r)$ и сравнивается с $f(x[k])$ — наибольшим значением ЦФ в комплексе;
- если $f(x^r) \geq f(x[k])$, т.е. не лучше, чем наибольшее значение ЦФ, полученное ранее, то отражённая точка x^r перемещается на половину расстояния между x^r и центром тяжести $x^0 : x^{rr} = (x^r + x^0)/2$, отражённой точке x^r присваивается значение $x^r : x^r = x^{rr}$, и процесс возвращается на шаг 8;
- если $f(x^r) < f(x[k])$, то худшая точка $x[k]$ заменяется на точку $x^r : x[k] = x^r$, то есть комплекс обновляется, а точки комплекса упорядочиваются в соответствии со значениями ЦФ: $f(x[1]) \leq \dots \leq f(x[k])$.

11. Оценивается значение ЦФ в лучшей точке — $f(x[1])$: если $f(x[1]) = f_{\min}$, то есть наименьшее значение ЦФ — f_{\min} не уменьшено, то процесс возвращается на шаг 4. Иначе выполняется проверка сходимости:

- вычисляется квадрат стандартного отклонения значений ЦФ для всех k точек комплекса — $\sigma^2 : \sigma^2 = \sum_{e=1}^k (f(x[e]) - \bar{f})^2/k$, где $\bar{f} = \sum_{e=1}^k f(x[e])/k$;
- вычисляется максимальное расстояние между точками комплекса — d_{\max} :

$$d_{\max} = \max \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j[e] - x_j[q])^2}, \quad e = 1, \dots, k - 1, \quad q = e + 1, \dots, k;$$

- если $\sigma^2 \leq \epsilon_1$ и $d_{\max} \leq \epsilon_2$, где ϵ_1, ϵ_2 достаточно малые заданные величины, то процедура поиска минимума целевой функции $f(x)$ (1) заканчивается. Иначе осуществляется возврат на шаг 3 и продолжается поиск минимума.

Шаги 6 и 7, введённые в представленный в [3] исходный алгоритм комплексного метода Бокса, обеспечивают выявление и обход локальных невыпуклостей ЦФ. Соответственно такие изменения, совместно со случайным выбором начальных точек в факторном пространстве позволяют использовать модифицированный комплексный метод Бокса для поиска глобального минимума многоэкстремальных ЦФ при наличии явных и неявных ограничений.

При этом, как установлено в [3], для проверки того, что был найден глобальный, а не локальный минимум, требуется производить несколько запусков при различных начальных точках. Это приводит к пропорциональному увеличению вычислительных и соответственно временных затрат, что недопустимо для сложных, многопараметрических ЦФ.

В этом случае проблема повышения эффективности работы рассматриваемого алгоритма с точки зрения минимизации времени вычислений может быть решена путём его распараллеливания.



3. АДАПТАЦИЯ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ БОКСА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Анализ приведённого выше алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса показывает:

- процедура инициализации комплекса (шаги 1, 2) подразумевает обновление центра уже определенных точек и дальнейшее его использование на каждой итерации, следовательно, распараллеливание данного участка алгоритма представляется невозможным.
- в основном процессорное время расходуется на многократное вычисление ЦФ в итерационном процессе улучшения точек построенного комплекса (шаги 3–12). Следовательно, наиболее ценным является распараллеливание этого участка алгоритма.

Поэтому было предложено одновременно выполнять процедуру улучшения p худших точек комплекса на параллельной вычислительной системе, состоящей из $p + 1$ узлов. При этом один выделенный узел должен осуществлять начальную инициализацию данных, построение комплекса, выработку заданий по улучшению точек комплекса, обновление комплекса, проверку сходимости. Вопрос выбора оптимального числа вычислительных узлов будет рассматриваться далее при анализе результатов тестирования.

На рис. 1, 2 представлены блок-схема распараллеленного вышеуказанным способом алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса, выполняемого на параллельной вычислительной системе, и блок-схема процедуры улучшения одной из худших точек комплекса, выполняемой на отдельном узле.

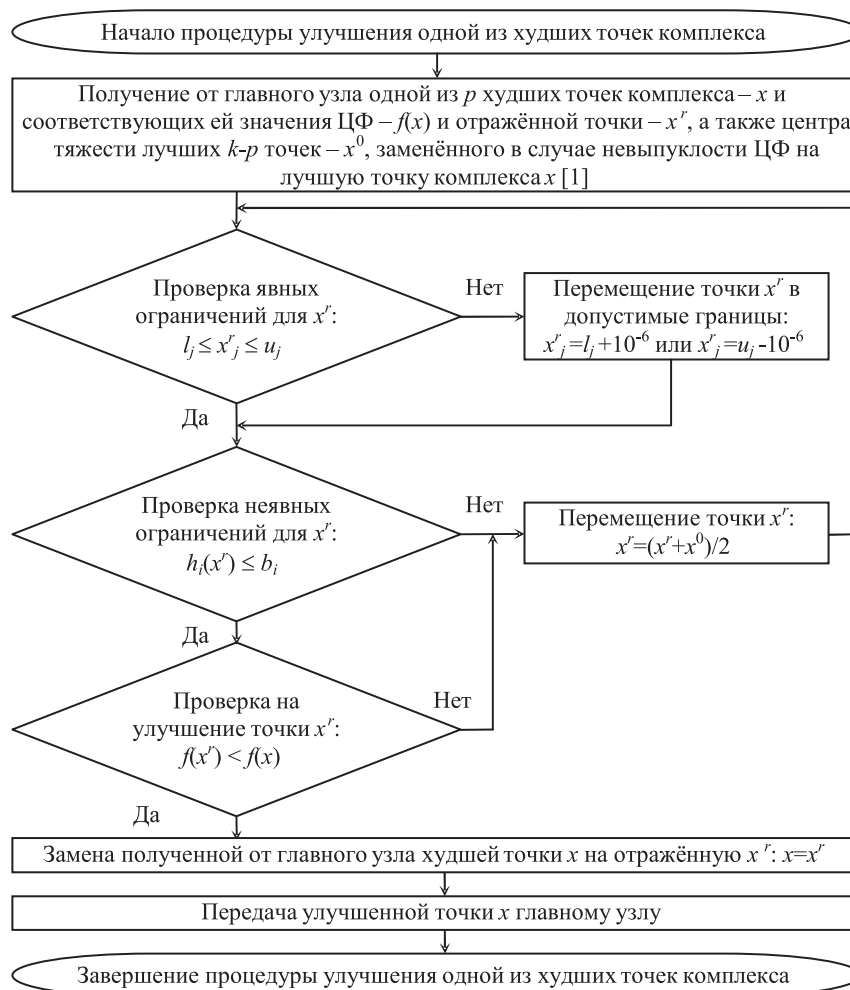


Рис. 1. Блок-схема процедуры улучшения одной из худших точек комплекса, выполняемой на отдельных узлах параллельной вычислительной системы

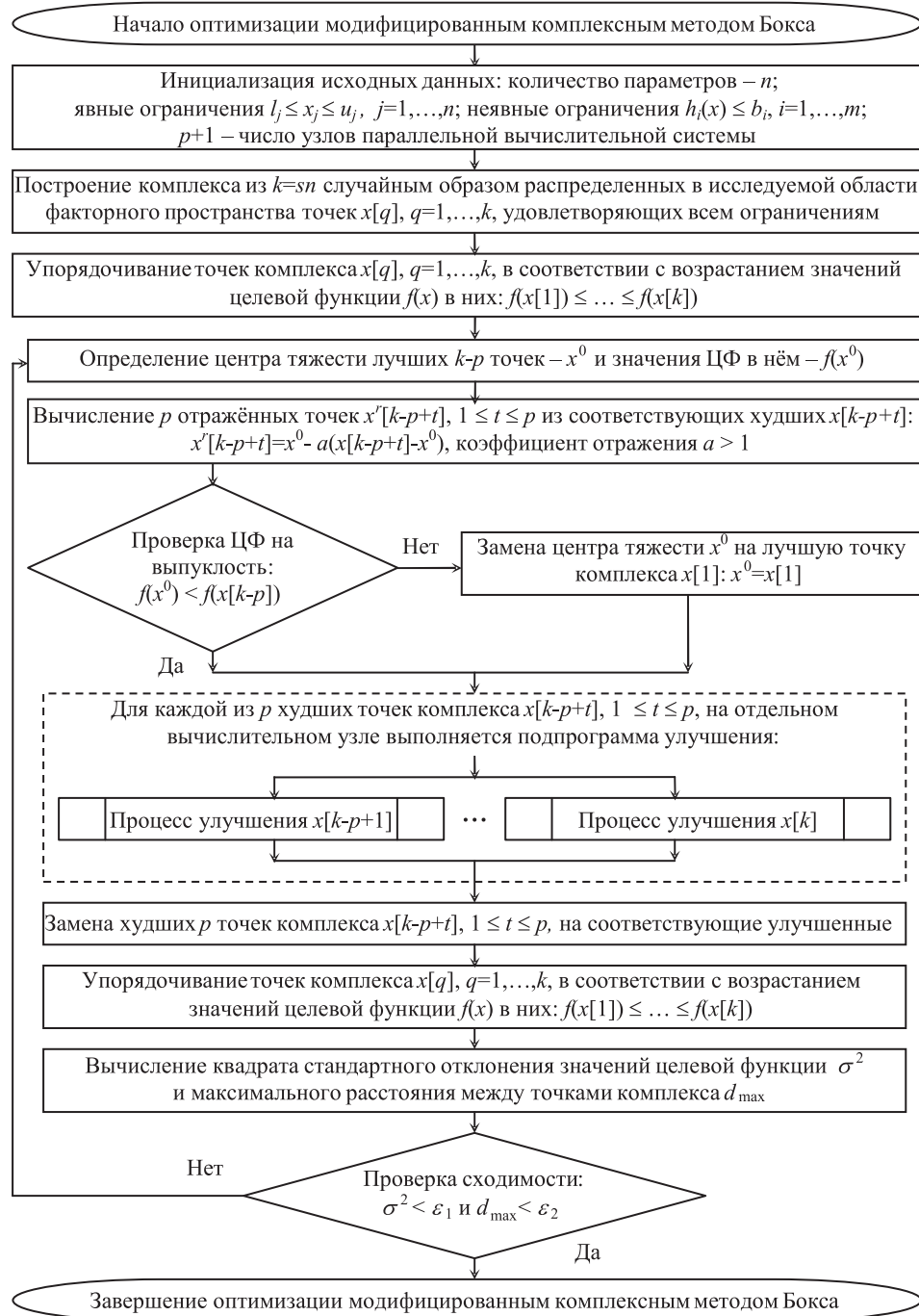


Рис. 2. Блок-схема алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса, выполняемого на параллельной вычислительной системе. Пунктиром выделена параллельно выполняемая часть алгоритма

Реализованный таким образом для выполнения на параллельной вычислительной системе алгоритм оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса должен обеспечивать надёжный поиск глобального минимума ЦФ за счёт её одновременного исследования в нескольких областях факторного пространства.

При этом, так как процесс поиска минимума осуществляется одновременно на нескольких машинах, то затраченное на его выполнение время должно значительно уменьшиться.

Программная реализация предложенного алгоритма осуществлена на языке программирования Java для применения в распределённых и параллельных вычислительных системах, использующих технологии GigaSpaces eXtreme Application Platform [6].



4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПАРАЛЛЕЛЕННОГО АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ БОКСА

Оценка надёжности и эффективности распараллеленного алгоритма оптимизации методом имитации отжига по схеме Больцмановского тушения осуществлялась на многоэкстремальных ЦФ при количестве параметров оптимизации n , равном 4, 6 и 8:

- число параметров оптимизации n равно четырем:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{j=1}^4 \{x_j^2 - 0.1 \cos(18x_j)\}, \quad (6)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, \dots, 4$; $f_{\min} = -0.4$ при $x_j = 0$, $j = 1, \dots, 4$.

- число параметров оптимизации n равно шести:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \sum_{j=1}^6 \{x_j^2 - 0.1 \cos(18x_j)\}, \quad (7)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, \dots, 6$; $f_{\min} = -0.6$ при $x_j = 0$, $j = 1, \dots, 6$.

- число параметров оптимизации n равно восьми:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \sum_{j=1}^8 \{x_j^2 - 0.1 \cos(18x_j)\}, \quad (8)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, \dots, 8$; $f_{\min} = -0.8$ при $x_j = 0$, $j = 1, \dots, 8$.

Процесс поиска глобального минимума завершался при выполнении следующих условий: квадрат стандартного отклонения значений ЦФ для всех k точек комплекса — $\sigma^2 \leq 0.0000001$ и максимальное расстояние между точками комплекса — $d_{\max} \leq 0.001$.

Для оценки времени работы разработанного приложения в указанные ЦФ добавлялась инструкция задержки таким образом, чтобы время их выполнения составляло 1 мс. Соответственно по времени поиска глобального экстремума можно оценить количество вычислений ЦФ, так как основное время затрачивается на её вычисление.

Статистическая достоверность полученных данных обеспечивалась усреднением по результатам 100 запусков процесса поиска глобального минимума при каждом сочетании параметров.

Тестирование распараллеленного алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса для функций (6), (7) и (8) осуществлялось при различном числе узлов параллельной ВС p .

Увеличение p должно приводить к уменьшению времени поиска глобального минимума, так как будут одновременно улучшаться p точек комплекса, состоящего в исходном алгоритме [2] из $k = 2n$ точек. Однако при этом уменьшается оставшееся в комплексе число точек (равное $k - p$), по которым определяется направление движения к глобальному минимуму. Соответственно должна уменьшаться вероятность его нахождения.

Увеличением числа точек в комплексе k можно повысить вероятность нахождения глобального минимума, но это должно приводить к увеличению времени его поиска.

Поэтому было решено исследовать также влияние количества точек комплекса $k = sn$ на время и надёжность поиска глобального минимума. При этом целый коэффициент умножения комплекса s изменялся в пределах от 2 (как в исходном алгоритме [2]) до $n + 1$.

На рис. 3 приведены усредненные по итогам 100 запусков ВС вероятность нахождения глобального минимума (a , v , d) и время его поиска (b , z , e) распараллеленным алгоритмом оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса в зависимости от числа узлов ВС p и коэффициента умножения комплекса s соответственно для ЦФ (6), (7) и (8).

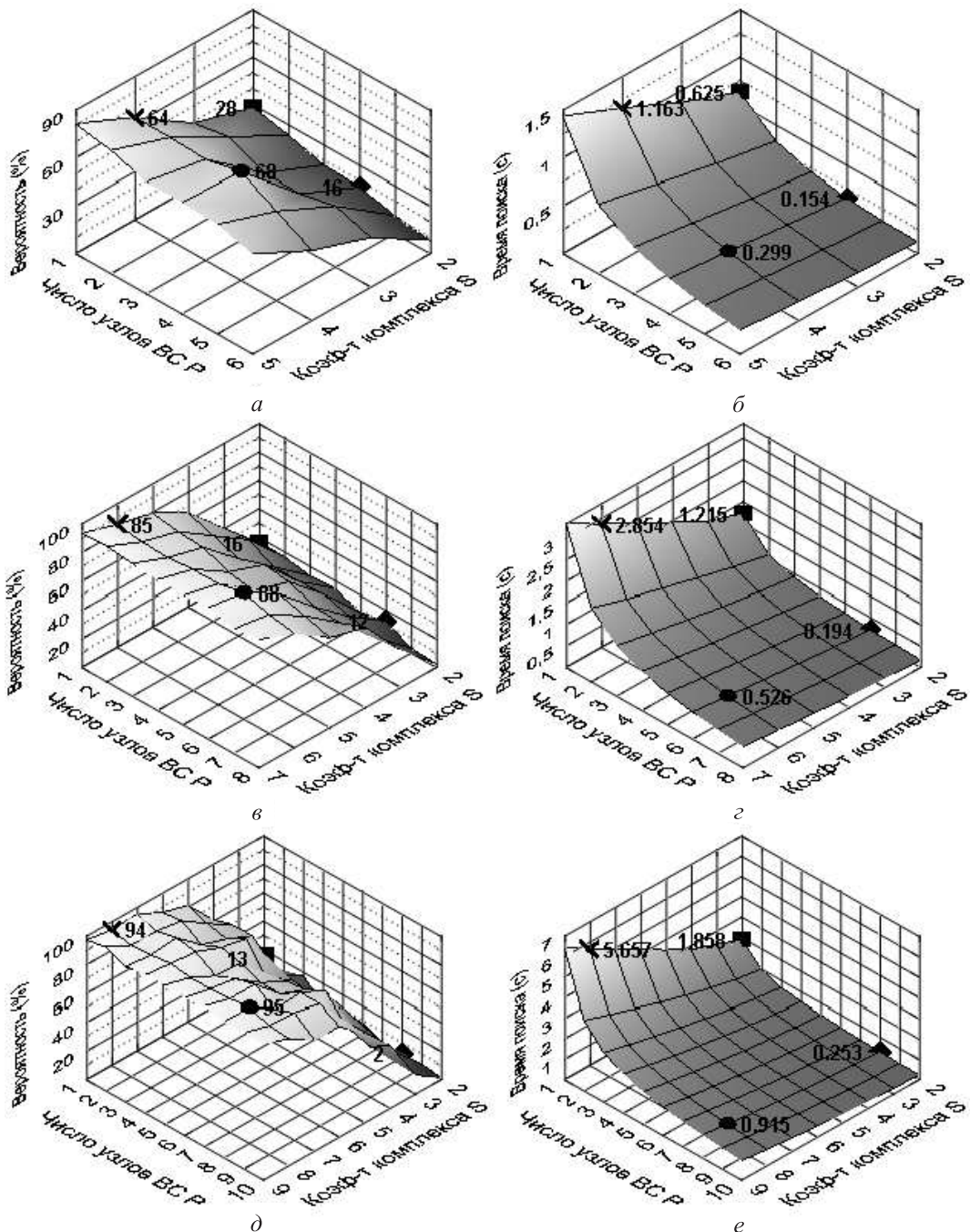


Рис. 3. Вероятность нахождения глобального минимума (а, в, д) и время его поиска (б, г, е) методом Бокса на параллельной ВС при числе параметров оптимизации $n = 4$ (а, б); $n = 6$ (в, г); $n = 8$ (д, е) с помощью исходного алгоритма ($p = 1, s = 2$) (■), при оптимальном числе узлов и исходном коэффициенте умножения комплекса ($p = n, s = 2$) (◆), при одном узле и оптимальном коэффициенте умножения комплекса ($p = 1, s = n$) (X), при оптимальных числе узлов и коэффициенте умножения комплекса ($p = n, s = n$) (●)

Из рис. 3 видно:

- исходный алгоритм метода Бокса (■) показывает низкую вероятность нахождения глобального минимума: 28%, 16% и 13%;
- увеличение числа узлов ВС (◆), как и предполагалось выше, уменьшает время поиска глобального минимума примерно в 4, 6.2 и 7.3 раза по сравнению с исходным алгоритмом (■), но вероятность нахождения глобального минимума при этом понижается до 16%, 12% и 2%;
- повышение вероятности нахождения глобального минимума до 64%, 85% и 94% достигается



увеличением числа точек в комплексе k (X), но это приводит к увеличению времени его поиска по сравнению с исходным алгоритмом (■) в 1.9, 2.3 и 3 раза;

- оптимальными с точки зрения эффективности распараллеленного алгоритма являются число одновременно улучшаемых точек $p = n$ и число точек комплекса $k = sn$ при $s = n$ (●), обеспечивающие наибольшую вероятность нахождения глобального минимума, составляющую 68%, 88% и 95%, при уменьшении времени его поиска примерно в 2.1, 2.3 и 2 раза по сравнению с исходным алгоритмом (■);

- увеличение числа узлов ВС p выше оптимального значения $p = n$ снижает вероятность нахождения глобального экстремума при незначительном уменьшении времени его поиска;

- увеличение числа точек в комплексе k выше оптимального значения $k = sn$ при $s = n$ не повышает вероятности нахождения глобального экстремума, но увеличивает время его поиска.

В табл. 1 приведены результаты сравнения надёжных и временных характеристик исходного алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса ($p = 1, k = 2n$) и распараллеленного с оптимальным количеством узлов ВС $p = n$ и количеством точек в комплексе $k = sn$ при $s = n$.

Таблица 1

Результаты тестирования исходного алгоритма оптимизации модифицированным методом Бокса с оптимальным распараллеленным вариантом

Количество параметров оптимизации, n	Число узлов ВС $p = 1$ Число точек комплекса $k = 2n$		Число узлов ВС $p = n$ Число точек комплекса $k = sn$ при $s = n$		Коэффициент ускорения	Коэффициент повышения надёжности
	Время поиска, с	Вероятность нахождения глобального минимума, %	Время поиска, с	Вероятность нахождения глобального минимума, %		
4	0.625	28	0.299	68	2.09	2.43
6	1.215	16	0.526	88	2.31	5.5
8	1.858	13	0.915	95	2.03	7.31

Как видно из табл. 1, коэффициент ускорения времени выполнения распараллеленного алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса на оптимальных числе узлов ВС и количестве точек комплекса по сравнению с исходным алгоритмом составляет в среднем 2.14, а вероятность нахождения глобального минимума повышается в среднем в 5.1 раза за счёт одновременного исследования ЦФ в большем количестве точек факторного пространства.

В табл. 2 приведены результаты сравнения надёжных и временных характеристик алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса, выполняемого на ВС с одним узлом ($p = 1$) с оптимальным количеством точек в комплексе $k = sn$ при $s = n$ и выполняемого на ВС с оптимальным числом узлов ВС $p = n$ и с оптимальным количеством точек в комплексе $k = sn$ при $s = n$.

Таблица 2

Результаты тестирования алгоритма оптимизации методом Бокса с оптимальным числом точек комплекса, выполняемом на одном и оптимальном числе узлов ВС

Количество параметров оптимизации, n	Число узлов ВС $p = 1$ Число точек комплекса $k = sn$ при $s = n$		Число узлов ВС $p = n$ Число точек комплекса $k = sn$ при $s = n$		Коэффициент ускорения	Коэффициент повышения надёжности
	Время поиска, с	Вероятность нахождения глобального минимума, %	Время поиска, с	Вероятность нахождения глобального минимума, %		
4	1.163	64	0.299	68	3.89	1.06
6	2.854	85	0.526	88	5.43	1.04
8	5.657	94	0.915	95	6.18	1.01



Как видно из табл. 2, вероятность нахождения глобального минимума при его поиске распараллеленным алгоритмом оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса на оптимальном числе узлов ВС и количестве точек комплекса по сравнению с алгоритмом, выполняемым на ВС с одним узлом и с оптимальным количеством точек в комплексе, увеличивается незначительно, в среднем в 1.04 раза, а коэффициент ускорения составляет в среднем в 5.17 раза за счёт одновременного улучшения n точек комплекса на $p = n$ узлах ВС.

Таким образом, из результатов тестирования видно, что распараллеливание алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса значительно повышает его надёжность и эффективность при поиске глобального экстремума многоэкстремальных ЦФ.

ВЫВОДЫ

В работе предложен способ распараллеливания алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса, основанный на одновременном улучшении нескольких точек в факторном пространстве и предназначенный для нахождения глобального минимума многоэкстремальной ЦФ многих переменных с явными и неявными ограничениями на параллельных и распределённых ВС.

В результате экспериментального исследования определены оптимальные с точки зрения надёжности нахождения глобального минимума и времени его поиска параметры комплекса и число узлов ВС.

При использовании распараллеленного алгоритма с оптимальными параметрами время поиска глобального экстремума оказалось в несколько раз меньше, чем на одной ЭВМ, а вероятность его нахождения значительно выше за счёт одновременного исследования ЦФ в нескольких областях факторного пространства.

Таким образом, применение на параллельной ВС распараллеленного алгоритма оптимизации модифицированным комплексным методом Бокса позволяет эффективно решать различные задачи, требующие поиска глобального экстремума многоэкстремальных ЦФ при наличии явных и неявных ограничений.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ «Подготовка и переподготовка профильных специалистов на базе центров образования и разработок в сфере информационных технологий в Южном и Северо-Кавказском федеральных округах» (государственный контракт № 07.Р20.11.0029).

Библиографический список

1. Батура М. П. Моделирование и оптимизация мощных приборов СВЧ. Минск : БГУИР, 2006. 275 с.
2. Орлянская И. В. Современные подходы к построению методов глобальной оптимизации // Электронный журнал «Исследовано в России». С. 2097–2108. URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/189.pdf> (дата обращения 02.12.2011).
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М. : Радио и связь, 1988. 128 с.
4. Савин А. Н., Шараевский Ю., П., Тимофеева Н. Е. Модификация комплексного метода условной оптимизации Бокса для определения размеров замедляющих систем по заданным электродинамическим характеристикам // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии : материалы 15-й междунар. Крымской конф. (КрыМиКо2005). Украина. Севастополь : Вебер, 2005. С. 779–780.
5. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.
6. GigaSpaces eXtreme Application Platform (XAP). URL: <http://www.gigaspaces.com/xap> (дата обращения 02.12.2011).