



МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: giv001@mail.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Предлагается процедура построения начального приближения управляющего воздействия в минимаксной задаче управления.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

The Problem of Optimal Control for Singularly Perturbed System with Delay with Integral Quadratic Constraints

I. V. Grebennikova

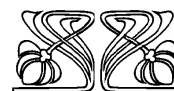
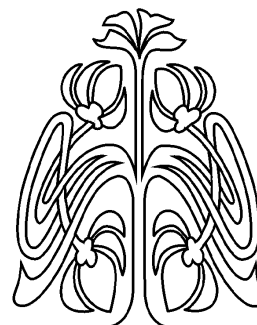
The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and integral quadratic constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Procedure is proposed for construction initial approximation of control response for minimax problem of control.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

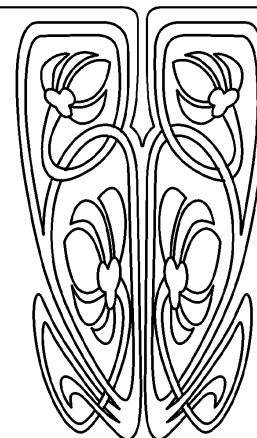
ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы (с малым параметром при части производных) с постоянным запаздыванием (по состоянию). Рассматривается задача оптимального управления по минимаксному критерию в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных.

Формулируется и решается предельная задача управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием, минимаксная по форме, для которой специальным образом выбирается функционал качества. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности [4]. При реализации метода используются результаты исследо-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ваний [1–8], а также аппарат выпуклого анализа [9]. Приводится начальное приближение оптимального решения (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$ при части производных) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t,\mu)u(t), \\ mdy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t,\mu)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij} , B_i , G_i , $i, j = 1, 2$, — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t < t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0 , Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n), непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \left\{ u(\cdot) \mid \int_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t) dt \leq \lambda^2 \right\}, \quad \lambda = \text{const} > 0,$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами; штрих — знак транспонирования. Считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. Собственные значения $\lambda_s(t)$ матрицы $A_{22}(t)$ удовлетворяют неравенству: $\text{Re } \lambda_s(t) < -2c < 0$ при $t \in T$, $c = \text{const} > 0$.

Тогда [10, с. 69] при достаточно малых μ ($0 < \mu \leq \mu_0$) фундаментальная матрица решений $Y[t, \tau]$ системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y$, $Y[\tau, \tau] = E_m$, E_m — единичная матрица $m \times m$, при $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t, \tau]\| \leq c_0 \exp\{-c(t - \tau)/\mu\}, \quad (2)$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0$, $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0 , при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot) : R^{n+m} \rightarrow R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве P :

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)).$$

Запишем систему (1) в виде

$$dz(t)/dt = A(t, \mu)z(t) + G(t, \mu)z(t-h) + B(t, \mu)u(t), \quad (3)$$

где матрицы $A(t, \mu)$, $B(t, \mu)$, $G(t, \mu)$ имеют следующий блочный вид:

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t)/\mu & A_{22}(t)/\mu \end{pmatrix}, \quad B(t, \mu) = \begin{pmatrix} B_1(t, \mu) \\ B_2(t, \mu)/\mu \end{pmatrix}, \quad G(t, \mu) = \begin{pmatrix} G_1(t) & 0 \\ G_2(t)/\mu & 0 \end{pmatrix}.$$



Пусть $Z[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau, \tau] = E_{n+m}$, $Z[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$. Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau]$, $Z_{12}[t, \tau]$, $Z_{21}[t, \tau]$, $Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Решение задачи 1 при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$ описывается следующими соотношениями (используя [2, с. 73; 3, с. 62], но для системы с запаздыванием):

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) &= \min_{u(\cdot) \in P} \max_{l \in R^{n+m}} \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} = \\ &= \max\{\chi^0(l, \mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0, \mu), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\chi^0(l, \mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu) \mid P),$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1, t_0] \mid Z_0) - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(((p' Z_{11}[t, \tau] + q' Z_{21}[t, \tau])G_1(\tau) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t, \tau] + q' Z_{22}[t, \tau])G_2(\tau)) \mid \Psi(\tau - h))d\tau,$$

$$r(\tau; t, l, \mu) = (p' Z_{11}[t, \tau] + q' Z_{21}[t, \tau])B_1(\tau, \mu) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t, \tau] + q' Z_{22}[t, \tau])B_2(\tau, \mu),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$; $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [9, с. 52] к $\varphi(z)$; $h^{**}(l) = \overline{(\text{co } h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [9, с. 65] функции $h(l)$; $\rho(s \mid X)$ — опорная функция множества X на элементе s . Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ удовлетворяет условию минимума:

$$\min_{u(\cdot) \in P} \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u^0(\tau, \mu) d\tau.$$

Полученные $u^0(\cdot, \mu)$, l^0 , $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ . Однако эти величины при $\mu \rightarrow +0$ могут не сходиться [5, с. 38] к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu = 0$).

Наряду с задачей 1, рассмотрим *вырожденную* задачу.

Задача 2. Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u_0 = u_0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J_0(u(\cdot))$:

$$\varepsilon_0(t_1) = J_0(u_0) = \min_{u(\cdot) \in P} J_0(u(\cdot)),$$

$$J_0(u(\cdot)) = \max_{x_0 \in X_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z_0(t_1; u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))),$$

где $z_0(t; u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ — решение вырожденной системы, полученной из (1) при $\mu = 0$:

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + \hat{B}_0(t)u(t), \quad (5)$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_2(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t,0)u(t), \quad (6)$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$, $\hat{B}_0(t) = B_1(t,0) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t,0)$.

Прежде всего, проведем исследование для системы (3) при $B_1(t, \mu) = B_1(t)$, $B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu}B_2(t)$. Другие варианты обсудим уже на основе полученных результатов. При указанных условиях вырожденная система имеет вид: при $t \in T$, $x(t) = \psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) \in X_0$

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \quad (7)$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_2(t)x(t-h). \quad (8)$$

Пусть $X[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (7), (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau, \tau] = E_n$, $X[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$.



Используя методы [2, 3], но для системы с запаздыванием, получим следующие соотношения при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$:

$$\varepsilon_0(t_1) = \max\{\chi_0(p, q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi_0(p_0, q_0); \tag{9}$$

$$\chi_0(p, q) = -h_0^{**}(p, q) - \lambda \left[\int_{t_0}^{t_1} w'(\tau, p, q) B_1(\tau) R^{-1}(\tau) B_1'(\tau) w(\tau, p, q) d\tau \right]^{1/2},$$

где $h_0(p, q) = \varphi^*(p, q) - \rho(w'(t_0, p, q) \mid X_0) - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(w'(\tau, p, q) G_0(\tau) \mid \Psi(\tau - h)) d\tau$, $w'(\tau, p, q) = s'(t_1, p, q) \times X[t_1, \tau] - q' A_{22}^{-1}(t_1) G_2(t_1) X[t_1 - h, \tau]$, $s'(t_1, p, q) = p' - q' A_{22}^{-1}(t_1) A_{21}(t_1)$.

Оптимальное управление $u_0(\cdot)$ при $\tau \in T$ есть

$$u_0(\tau) = -\lambda R^{-1}(\tau) B_1'(\tau) w(\tau, p_0, q_0) \left[\int_{t_0}^{t_1} w'(\tau, p_0, q_0) B_1(\tau) R^{-1}(\tau) B_1'(\tau) w(\tau, p_0, q_0) d\tau \right]^{-1/2}. \tag{10}$$

Предположение 2. Система (7) относительно управляема [11] на T .

Предположение 3. Максимум в (9) достигается на векторе $l'_0 = (p'_0, q'_0)$ таком, что $s'(t_1; p_0, q_0) \neq 0$.

Тогда условие (10) определяет управление $u_0(\cdot) \in P$ как некоторую измеримую на T функцию, при этом найдется такой вектор $x_0 \in X_0$, что $u_0(\cdot)$ приводит траекторию $z_0(\cdot; u_0(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ на границу множества достижимости $F_0(t_1, P, x_0, \psi(\cdot))$ вырожденной системы,

$$F_0(t_1, P, x_0, \psi(\cdot)) = \{z \in R^{n+m} \mid z = z_0(t_1, u(\cdot), x_0, \psi(\cdot)), u(\cdot) \in P\} \tag{11}$$

и

$$\varepsilon_0(t_1) = J_0(u_0(\cdot)) = \max_{x_0 \in X_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z_0(t_1; u_0(\cdot), x_0, \psi(\cdot))).$$

Как уже отмечалось, решение $(u_0(\cdot), l_0, \varepsilon_0(t_1))$ задачи 2 не дает даже начального приближения решения задачи 1. Но конструкция вырожденной системы (с некоторыми расширениями) будет использоваться в дальнейшем, поскольку с ней связаны асимптотические свойства траекторий исходной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. На основании же асимптотических свойств можно существенно упростить получение решения исходной задачи 1, если уже есть аналитический способ описания решения. Поэтому важное значение приобретают методы, позволяющие описать асимптотику ансамбля траекторий, множеств достижимости сингулярно возмущенной системы с запаздыванием, а также построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot, \mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot, \mu))$ с заданной точностью (относительно μ).

В данной работе в основе предложенного способа определения требуемых приближений лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t, \tau; \mu]$ ($i, j = 1, 2$) в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0, t_1]$ последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

В работе [4] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t, \tau]$ ($i, j = 1, 2$), причем последние могут быть представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей (при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало):

$$Z_{11}^{(k+1)}[t, \tau] = X[t, \tau] - \int_{\tau}^t (dZ_{12}^{(0)}[t, s]/ds) A_{22}^{-1}(s) (A_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_2(s) Z_{11}^{(k)}[s - h, \tau]) ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t, \tau] = Y[t, \tau] + \int_{\tau}^t Z_{21}^{(k)}[t, s] A_{12}(s) Y[s, \tau] ds,$$



$$Z_{12}^{(k)}[t, \tau] = \int_{\tau}^t Z_{11}^{(k)}[t, s] A_{12}(s) Y[s, \tau] ds,$$

$$Z_{21}^{(k)}[t, \tau] = (1/\mu) \int_{\tau}^t Y[t, s] (A_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_2(s) Z_{11}^{(k)}[s-h, \tau]) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t, \tau] = X[t, \tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t, \tau] = Y[t, \tau]$.

Для задачи 1 соотношение (4) можно представить, используя [6, с. 10; 7, с. 68] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) = & \min_{u(\cdot) \in P} \max_{p, q} \{ \rho(p' Z_{11}[t_1, t_0] + q' Z_{21}[t_1, t_0] | X_0) + \rho(p' Z_{12}[t_1, t_0] + q' Z_{22}[t_1, t_0] | Y_0) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} [(p' Z_{11}[t_1, \tau] + q' Z_{21}[t_1, \tau]) B_0(\tau, \mu) + (1/\mu) q' Y[t_1, \tau] B_2(\tau, \mu) - \xi(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau, \mu)] u(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+h} \rho((p' Z_{11}[t_1, \tau] + q' Z_{21}[t_1, \tau]) G_0(\tau) - \tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) G_2(\tau) | \Psi(\tau-h)) d\tau - \varphi^*(p, q) \}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $B_0(t, \mu) = B_1(t, \mu) - A_{12}(t) A_{22}^{-1}(t) B_2(t, \mu)$, $\xi(\tau, t_1, p, q) = \frac{d}{d\tau} [p' Z_{12}[t_1, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_1} q' Y[t_1, s] A_{21}(s) \times$
 $\times Z_{12}[s, \tau] ds]$, $\tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q) = \frac{d}{d\tau} [p' Z_{12}[t_1, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_0+h} q' Y[t_1, s] A_{21}(s) Z_{12}[s, \tau] ds]$.

На основании теоремы А. Лебега [12, с. 259] при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $p \in R^n$, $q \in R^m$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(\tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) G_2(\tau) | \Psi(\tau-h)) d\tau \right\| & \leq \omega(\mu) [\|p\| + N_2 \|q\|], \\ \left\| \int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau, \mu) u(\tau) d\tau \right\| & \leq \omega(\mu) [\|p\| + N_1 \|q\|], \end{aligned} \quad (13)$$

где $\omega(\mu) = o(1)$; $N_1, N_2 > 0$ — некоторые постоянные.

Построим начальное приближение $u_{\mu}^{(0)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot))$ с точностью $o(1)$ при $\mu \rightarrow +0$.

Из (12) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot) \in P} \max_{p, q} \left\{ -h^{**}(p, q) - \int_{t_0}^{t_1} [p' X[t_1, \tau] + q' Z_{21}^{(0)}[t_1, \tau]] B_0(\tau, \mu) u(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} (1/\mu) q' Y[t_1, \tau] B_2(\tau, \mu) u(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} [\xi_1(\tau, t_1, p, q) B_0(\tau, \mu) - \xi(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau, \mu)] u(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где обозначено $\xi_1(\tau, t, p, q) = p'(Z_{11}[t, \tau] - Z_{11}^{(0)}[t, \tau]) + q'(Z_{21}[t, \tau] - Z_{21}^{(0)}[t, \tau])$, причем для $0 < \mu \leq \mu_0$, функция $h(l) \equiv h(p, q)$ из (4) представима в виде

$$h(p, q) = h_0(p, q) + o(1).$$

Используя оценку (12) из [4] и оценки (13), получим следующий результат.



Лемма. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, что для любых $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1$, $p \in R^n, q \in R^m$, $0 < \mu \leq \mu_0$, имеет место оценка:*

$$\|\xi_1(\tau, t, p, q)\| \leq \mu N^2 (\|p\| + \|q\|) (c_0/c)(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}). \quad (15)$$

Следующую задачу будем называть *предельной* [8].

Задача 3. *Среди управлений $u(\tau) \in P$, $\tau \in T$, $v(s)$, $s \geq 0$, удовлетворяющих условию $\{u(\cdot), v(\cdot)\} \in P^{(0)}$, где*

$$P^{(0)} = \left\{ u(\cdot), v(\cdot) \left| \int_{t_0}^{t_1} u'(\tau)R(\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^\infty v'(s)R(t_1)v(s)ds \leq \lambda^2 \right. \right\},$$

найти $u^{(0)} = u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)} = v^{(0)}(\cdot)$, доставляющие минимум функционалу $J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot))$:

$$J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)}) = \min\{J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot)) | \{u(\cdot), v(\cdot)\} \in P^{(0)}\},$$

$$J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot)) = \max\{\varphi(\tilde{z}(t_1; u(\cdot), v(\cdot), x_0, \psi(\cdot))) | x_0 \in X_0, \psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)\},$$

где

$$\tilde{z}(t_1; u(\cdot), v(\cdot), x_0, \psi(\cdot)) = \begin{pmatrix} x_0(t_1) \\ -A_{22}^{-1}(t_1)(A_{21}(t_1)x_0(t_1) + G_2(t_1)x_0(t_1 - h)) + \\ + \int_0^\infty \Phi_0[t_1, s]B_2(t_1, \mu)v(s)ds \end{pmatrix},$$

причем $x_0(\cdot) = x_0(\cdot; u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ — решение (7), $\Phi_0[t_1, s] = \exp(A_{22}(t_1)s)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $dy(t)/dt = A_{22}(t_1)y(t)$, $\Phi_0[t_1, 0] = E_m$.

Предположение 4. 1. *Для любого $t \in T$*

$$\text{rank}\{B_2(t_1, \mu), A_{22}(t_1)B_2(t_1, \mu), \dots, A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1, \mu)\} = m.$$

2. *Вектор $(l^{(0)})' = (p^{(0)'}, q^{(0)'})$, доставляющий максимум в*

$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max\{\chi^{(0)}(p, q) | p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(0)}(p^{(0)}, q^{(0)}), \quad (16)$$

таков, что $s'(t_1; p^{(0)}, q^{(0)}) \neq 0$, $q^{(0)} \neq 0$.

Здесь $\chi^{(0)}(p, q) = -h_0^{**}(p, q) - \lambda(\sigma_0(p, q))^{1/2}$, $\sigma_0(p, q) = \int_{t_0}^{t_1} w'(\tau, p, q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau, p, q)d\tau + \int_0^\infty q'\Phi_0[t_1, s]B_2(t_1, \mu)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1, \mu)\Phi_0'[t_1, s]q ds$.

При выполнении предположений 2 и 4 задача 3 разрешима [1, с. 110; 2, с. 76; 8], причем оптимальная пара этой задачи есть

$$u^{(0)}(\tau) = -\lambda R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau, p^{(0)}, q^{(0)})(\sigma_0(p^{(0)}, q^{(0)}))^{-1/2}, \quad \tau \in T, \quad (17)$$

$$v^{(0)}(s) = -\lambda R^{-1}(t_1)B_2'(t_1, \mu)\Phi_0'[t_1, s]q^{(0)}(\sigma_0(p^{(0)}, q^{(0)}))^{-1/2}, \quad s \geq 0, \quad (18)$$

и доставляет функционалу $J^{(0)}$ значение $J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)}) = \varepsilon^{(0)}(t_1)$, где $\varepsilon^{(0)}(t_1)$ определено в (16).

Сравнивая предельную и вырожденную задачи, имеем неравенство $\varepsilon^{(0)}(t_1) \leq \varepsilon_0(t_1)$.

Пусть $F(t_1, P, z_0, \psi(\cdot))$ — множество достижимости к моменту $t = t_1 > t_0 + h$ для исходной системы (1) при $z_0 \in Z_0$, $\psi(\cdot) \in \Psi$, фиксированном $u(\cdot) \in P$: $F(t_1, P, z_0, \psi(\cdot)) = \{z \in R^{n+m} | z = z(t_1, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)), u(\cdot) \in P\}$, $F_0(t_1, P, x_0, \psi(\cdot))$ — множество достижимости (11) вырожденной системы (7), (8): $F^{(0)}(t_1, P, x_0, \psi(\cdot)) = \{\tilde{z} \in R^{n+m} | \tilde{z} = \tilde{z}(t_1, u(\cdot), v(\cdot), x_0, \psi(\cdot)), \{u(\cdot), v(\cdot)\} \in P^{(0)}\}$.

Тогда при $0 < \mu \leq \mu_0$ для $l \in R^{n+m}$, $\|l\| = 1$, $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ справедливы следующие соотношения (аналогично [5, 7]):

$$\rho(l|F(t_1, P, z_0, \psi(\cdot))) = \rho(l|F^{(0)}(t_1, P^{(0)}, x_0, \psi(\cdot))) + o(1),$$

$$\rho(l|F^{(0)}(t_1, P^{(0)}, x_0, \psi(\cdot))) \geq \rho(l|F_0(t_1, P, x_0, \psi(\cdot))).$$



Таким образом, для любых $x_0 \in X_0$, $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ выполняется включение

$$F^{(0)}(t_1, P^{(0)}, x_0, \psi(\cdot)) \supseteq F_0(t_1, P, x_0, \psi(\cdot)).$$

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(0)}(\tau) = \begin{cases} u^{(0)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha(\mu), \\ (1/\sqrt{\mu})v^{(0)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases} \quad (19)$$

где $\alpha = \alpha(\mu) \in R$, $\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha/\mu \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$.

Пусть μ_k , $k = 1, 2, \dots$, где $0 < \mu_k < \mu_0$, есть некоторая сходящаяся к нулю последовательность чисел, $u_k^{(0)}(\cdot) = u_{\mu_k}^{(0)}(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, — соответствующая последовательность оптимальных (для задачи 1) управлений. В силу слабой компактности множества P в пространстве $L_2^r(T)$ можно выделить подпоследовательность $u_{k_j}^{(0)}(\cdot)$, слабо сходящуюся к некоторой функции $u^{(0)}(\cdot) \in P$. Обозначим $v_{k_j}^0(\cdot) \equiv v^0(\cdot, \mu_{k_j})$, $v^0(s, \mu) = \sqrt{\mu}u^0(t_1 - \mu s, \mu)$, $0 \leq s \leq 1/\varepsilon < \alpha(\mu)/\mu$ при $0 < \mu \leq \mu_0$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно выбранное число, μ_0 — достаточно мало.

Теорема. Пусть выполнены предположения 2, 4 и максимум в (16) достигается на единственном векторе $l^{(0)}$. Тогда верно следующее:

1) $u_{k_j}^0(\cdot)$ слабо сходится к $u^{(0)}(\cdot)$ (17), $v_{k_j}^0(\cdot)$ слабо сходится к $v^{(0)}(\cdot)$, где $v^{(0)}(\cdot)$ определено в (18) ($s \in [0, 1/\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$);

2) при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 — достаточно мало, справедливы соотношения

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(0)}(\cdot)) + o(1), \quad \varepsilon^0(t_1, \mu) = \varepsilon^{(0)}(t_1) + o(1);$$

3) для $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ (19), при $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$

$$\left| \rho(l|Z(t_1; u^0(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))) - \rho(l|Z(t_1; u_\mu^{(0)}(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))) \right| \leq \omega_0(\mu),$$

$\omega_0(\mu) = o(1)$, $0 < \mu \leq \mu_0$, равномерно по всем $l \in R^{n+m}$, $l'l = 1$;

4) при $\mu \rightarrow +0$ множество $Z(t_1; u^0(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$ сходится в хаусдорфовой метрике к выпуклому замкнутому ограниченному множеству

$$\tilde{Z}(t_1; u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), X_0, \psi(\cdot)) = \{\tilde{z} \in R^{n+m} | \tilde{z} = \tilde{z}(t_1; u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), x_0), x_0 \in X_0, \psi(\cdot)\}.$$

Доказательство. В (4) имеем

$$\chi^0(l) = -h^{**}(l) - \lambda(\sigma^0(l; \mu))^{1/2}, \quad (20)$$

$$\sigma^0(l, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} l' Z[t_1, \tau; \mu] B(\tau, \mu) R^{-1}(\tau) B'(\tau, \mu) Z'[t_1, \tau; \mu] l d\tau.$$

Используя (14), получим

$$\sigma^0(l, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\sigma}'(t_1, \tau; \mu) R^{-1}(\tau) \tilde{\sigma}(t_1, \tau; \mu) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'(t_1, \tau; \mu) &= (p' X[t_1, \tau] + q' Z_{21}^{(0)}[t_1, \tau; \mu]) B_0(\tau, \mu) + (1/\mu) q' Y[t_1, \tau] B_2(\tau, \mu) + \\ &+ \xi_1(\tau, t_1, p, q; \mu) B_0(\tau, \mu) - \xi(\tau, t_1, p, q; \mu) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau, \mu), \end{aligned}$$

где $B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$, $B_0(\tau, \mu) = B_1(\tau) - \sqrt{\mu} A_{12}(\tau) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau)$.

Тогда, учитывая [7, лемма 1.2] и оценки (13), (15), имеем $\sigma^0(l; \mu) = \sigma_0(p, q) + \hat{\xi}(l; \mu)$, причем $|\hat{\xi}(l, \mu)| \leq \|l\| \hat{\omega}(\mu)$, $\hat{\omega}(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leq \mu_0$, откуда следует 2).

В силу оценок (2), (13), учитывая [7, лемма 1.2; 4, теорема 1] для любых $u(\cdot) \in P$, $v(s) = \sqrt{\mu}u(t_1 - \mu s)$, $s \in [0, \alpha(\mu)/\mu]$, $l' = (p', q') \in R^{n+m}$ справедливо представление:

$$\int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l, \mu) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1 - \alpha(\mu)} w'(\tau, p, q) B_1(\tau) u(\tau) d\tau +$$



$$+ \int_0^{\alpha(\mu)/\mu} q'Y[t_1, t_1 - \mu s; \mu]B_2(t_1 - \mu s; \mu)v(s)ds + \xi'(l, \mu), \quad (21)$$

причем $|\xi'(l, \mu)| \leq \|l\| \omega'(\mu)$, где $\omega'(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leq \mu_0$. Из предположения 4, единственности $l^{(0)}$ имеем $l^0 = l^{(0)} + o(1)$. Тогда из слабой компактности P получим 1). Неравенство 3) (а также 4) при оценке разности опорных функций указанных множеств) определяется на основании (21), свойств управления $u^0(\cdot)$ и управления $u_\mu^0(\cdot)$, определенного в (19). Теорема доказана.

Обсудим теперь другие возможные варианты разложений (по параметру μ) коэффициентов $B(t, \mu)$ системы (3).

1. $B_1(t, \mu) = B_1(t), B_2(t, \mu) = \sigma(\mu)B_2(t), \sigma(\mu) = o(\sqrt{\mu}), 0 < \mu \leq \mu_0$. В этом случае (20) представимо в виде $\sigma^0(l, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} w'(\tau, p, q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau, p, q)d\tau + \hat{\xi}_1(l; \mu), |\hat{\xi}_1(l, \mu)| \leq \|l\| \hat{\omega}_1(\mu), \hat{\omega}_1(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leq \mu_0$, и, следовательно, в предельной задаче 3 необходимо положить $B_2(\cdot) \equiv 0, v(\cdot) \equiv 0$, т.е. решение предельной и вырожденной задач совпадают.

2. $B_1(t, \mu) = B_1(t), B_2(t, \mu) = \sigma(\mu)B_2(t), \sigma(\mu) = o(1), \sigma(\mu)/\sqrt{\mu} \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$.

Здесь уже могут нарушаться условия регулярности [2, с. 53], поскольку имеется «излишек» ресурсов управления по быстрой переменной. Тогда для (20) получим при $0 < \mu \leq \mu_0$

$$\sigma^0(l; \mu) = \int_{t_0}^{t_1} w'(\tau, p, q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau, p, q)d\tau + (\sigma(\mu)/\sqrt{\mu})^2 \left(\int_0^\infty q'\Phi_0[t_1, s]B_2(t_1)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1)\Phi_0'[t_1, s]q ds + \mu \hat{\xi}_2(l, \mu) \right) + \hat{\xi}_3(l, \mu), \quad (22)$$

где $\hat{\xi}_2(l, \mu), \hat{\xi}_3(l, \mu)$ имеют порядок малости $o(1)$. Соотношение (16) представимо в виде

$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max_{p'/p \leq 1} \left\{ -h_0^{**}(p, 0) - \lambda \left(\int_{t_0}^{t_1} p'X[t_1, \tau]B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)X'[t_1, \tau]pd\tau \right)^{1/2} \right\}. \quad (23)$$

При выполнении условий регулярности (максимум достигается на границе) в предельной задаче 3 следует положить $\tilde{z}(t_1; u(\cdot), v(\cdot), x_0, \psi(\cdot)) = (x_0'(t_1), 0')$, $v(\cdot) \equiv 0, l' = (p, 0)$. Управление $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ определяется соотношением (19), причем для $v^{(0)}(s)$, определенного в (18), недостаточно знать лишь начальное приближение $q^{(0)} = 0$, здесь следует найти более точно асимптотику, поскольку $\|q^0\| = o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$. Параметр q ищем в виде $q = (\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))q_1 + o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$.

3. $B_1(t, \mu) = B_1(t), B_2(t, \mu) = B_2(t)$. Данный случай аналогичен 2, в (22) нужно положить $\sigma(\mu) = 1$, отмеченные особенности остаются в силе, причем в (23) $B_1(\tau)$ заменяется на $B_0(\tau, \mu) = B_1(\tau) - A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)$. Однако множество достижимости вырожденной системы (5), (6) становится неограниченным (по быстрым переменным). Здесь q следует искать в виде $q = \sqrt{\mu}q_1 + o(\sqrt{\mu})$.

Библиографический список

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 475 с.
2. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
3. Кремлёв А. Г. Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.
4. Гребенникова И. В. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 14–22.
5. Гребенникова И. В. Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 28–39.
6. Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием при квадратичных ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 1. С. 8–15.



7. Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В. Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // *Новости научной мысли* – 2006 : материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск, 2006. Т. 4. С. 65–69.
8. Кремлёв А. Г. Итерационный метод решения задач оптимального управления сингулярно возмущенными системами при квадратичных ограничениях // *Журн. вычислительной мат. и мат. физики*. 1994. Т. 34, № 11. С. 1597–1616.
9. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 492 с.
10. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. : Наука, 1973. 192 с.
11. Кириллова Ф. М. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // *Доклады АН СССР*. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.
12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 468 с.

УДК 519.6

ОДИН ПРЯМОЙ МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. В. Колбин, М. В. Свищикова

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: vivakolbin@gmail.com, marsvi@mail.ru

Предлагается прямой метод стохастического программирования, основанный на пошаговом вычислении линейной аппроксимирующей программы.

Ключевые слова: стохастическое программирование, выпуклость, прямые методы.

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является получение эффективного алгоритма решения следующей, часто возникающей в экономических моделях, задачи стохастического программирования.

Требуется минимизировать целевую функцию f общего вида при ограничениях двух типов

$$f(x, \omega) \rightarrow \min_{x \geq 0}, \quad (1)$$

$$g(x, \omega) \leq 0, \quad (2)$$

$$H(\omega)x - h(\omega) \leq 0, \quad (3)$$

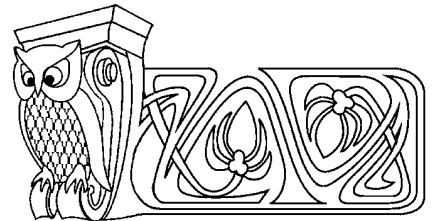
где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)^T \in \Omega \subseteq R^r$ — набор параметров задачи, Ω — пространство элементарных событий, $f : \Omega \times R^+ \rightarrow R^1$, $R^+ = \{x \mid x \geq 0\}$, $g : \Omega \times R^+ \rightarrow R^m$,

$$g = \begin{pmatrix} g_1(x, \omega) \\ \vdots \\ g_m(x, \omega) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{11}(\omega) & \dots & h_{1n}(\omega) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ h_{k1}(\omega) & \dots & h_{kn}(\omega) \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1(\omega) \\ \vdots \\ h_k(\omega) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Неравенства в (2) и (3) понимаются покомпонентно. Функции f и g предполагаются при любом значении набора ω по $x \in R^+$ выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми.

В наборе ω присутствуют параметры двух типов. В один тип входят такие случайные факторы, как спрос, погода, выход из строя оборудования и т. п. Они относятся к будущему. В другой — величины детерминированные, но известные неточно, такие как численность трудящихся, объем месторождения и т. п. Они относятся к прошлому или настоящему. Так же как и в первом типе, эти величины удобно трактовать как случайные с известными параметрами распределения.

Взаимосвязь между набором ω и ограничениями (2) и (3) различна. Ограничения (3) должны выполняться при любой мыслимой реализации параметров (таково, например, ограничение числа пассажиров в такси). Иными словами, необходимо соблюдать при каждой случайной реализации условий задачи общие физические ограничения системы, которых нельзя нарушать вообще. Ограничения (2)



A Direct Method of Stochastic Optimization

V. V. Kolbin, M. V. Svishchikova

A direct method is proposed for stochastic programming. On each step the method uses solving of the linear program which is the linear approximation of input stochastic programs.

Key words: stochastic programming, convex, direct methods.



должны выполняться в среднем (как, например, требование достаточной заполняемости конкретных авиарейсов, для того чтобы данное направление имело доходность и не было убыточным). Таким образом, необходимо, чтобы средние долговременные договорные обязательства в целом (поставки сырья и производство продукции, прибыль и т. п.) были удовлетворены, хотя при этом допускаются нарушения в кратковременных требованиях.

После введения случайностей в f, g, H, h решение задачи (1)–(4) становится случайным, что делает эту задачу как модель каких-то реальных событий неадекватной. Действительно, полученное решение задачи (1)–(4) $x^{opt} = x(\omega)$ должно быть принято до реализации настоящих случайных параметров из набора x , а те параметры из набора ω , которые были известны неточно, так и остаются известными неточно к моменту принятия решения x^{opt} . Иными словами, возникает порочный замкнутый круг: Природа делает свой ход ω после принятия решения x^{opt} , которое выбирается как функция от ω .

Поэтому появление случайностей порождает серьезную проблему: формализацию понятия оптимальности параметров управления x в новых условиях, которое позволило бы создать новую задачу — задачу стохастической оптимизации. Известны различные приемы подобной формализации. Один из самых сложных — использование квантилей [1]. Другой способ — расчет управляющих параметров x по наихудшей реализации ω [2–4], т. е. поиск $\arg_{x, \omega} \min_x \max_{\omega} f(x, \omega)$.

Тем самым реализуется «правильный» порядок действий: Человек делает первый ход, стараясь добиться минимальности $f(x, \omega)$, имея ввиду, что Природа после этого выберет ω наихудшим образом. Поскольку на самом деле Природа не является сознательным противником Человека, поиск минимакса зачастую дает результат, субъективно воспринимаемый как неудовлетворительный.

Наиболее распространено применение детерминированных эквивалентов, которое обращается с Природой как с противником без интеллекта [2–7].

1. ПОСТРОЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ЭКВИВАЛЕНТОВ

При трактовке всех параметров набора ω как случайных величин $\{\omega_t\}_{t=0}^r$ ограничение (2) согласно его смыслу естественно заменить на

$$E[g(x, \omega)] \leq 0, \tag{5}$$

а ограничение (3) практически не меняется

$$H(\omega)x - h(\omega) \leq 0 \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{6}$$

Здесь E — символ математического ожидания.

Наиболее распространенный подход к формированию целевой функции [1–4] аналогичен трансформации (2) в (5) и дает

$$F(x) = E[f(x, \omega)] \rightarrow \min_{x \geq 0}, \tag{7}$$

т. е. x надо выбрать так, чтобы среднее значение целевой функции было минимальным.

Найдем детерминированный эквивалент ограничениям (6), когда элементы матрицы H и столбца h имеют линейную зависимость от параметров ω :

$$h_{ij}(\omega) = \hat{h}_{ij} + \bar{h}_{ij}\omega, \quad h_i(\omega) = \check{h}_i + \tilde{h}_i\omega,$$

где \bar{h}_{ij} и \tilde{h}_i — строки длиной r — $(h_{ij1}, \dots, h_{ijr})$ и $(\check{h}_{i1}, \dots, \check{h}_{ir})$ соответственно, и все случайные величины из набора ω распределены на конечных сегментах с полудлиной $\delta_s > 0$: $[\omega_s^0 - \delta_s, \omega_s^0 + \delta_s]$. Тогда для любых значений переменных x существует максимум по ω левых частей системы (6), т. е. величин

$$\Lambda_i(\omega) \doteq H_i(\omega)x - h_i(\omega) = \sum_{j=1}^n \hat{h}_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{ij}\omega x_j - \check{h}_i - \tilde{h}_i\omega = \sum_{s=1}^r \alpha_{is}(x)\omega_s + \beta_i(x). \tag{8}$$

Здесь $\beta_i(x)$ — скалярная функция, $\alpha_{is}(x) = \sum_j \bar{h}_{ijs}x_j - \tilde{h}_{is}$. Поскольку $\Lambda_i(\omega)$ является сепарабельной функцией, то при сделанных предположениях относительно диапазонов изменения ω_s максимайзер



функции $\Lambda_i(\omega)$ из (8) находится элементарно:

$$\bar{\omega}_s(i, x) = \omega_s^0 + \delta_s \text{sign } \alpha_{is}(x), \quad s = \overline{1, r} \quad (9)$$

для каждого i -го ограничения из (6). Пусть $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_r)$. Подставляя найденные максимайзеры (9), $i = \overline{1, m}$, в каждую строку i -й функции-ограничения (6), получим детерминированный эквивалент для системы (6)

$$H_i(\bar{\omega}(i, x))x - h_i(\bar{\omega}(i, x)) \leq 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (10)$$

Его можно было бы снабдить эпитетом «настоящий», поскольку в отличие от детерминированных эквивалентов (5) и (7) он не требует переосмысления исходной задачи, а является сверткой по ω каждого i -го ограничения из (6).

2. ИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (7), (5), (10)

Изложим для задачи (7), (5), (10) прямой итеративный алгоритм.

Шаг 0. задается $\varepsilon \geq 0$, натуральное число K , выбирается начальная точка x^0 и назначается $y = x^0$, $t = 0$, $S = 0$.

Шаг 1. Генерируется случайный набор параметров $\omega = \omega^t = (\omega_1^t, \dots, \omega_r^t)$ и составляется линейная программа

$$\left. \begin{aligned} f(x^t, \omega^t) + \nabla f(x^t, \omega^t)(x - x^t) &\rightarrow \min_{x \geq 0}, \\ g(x^t, \omega^t) + g'(x^t, \omega^t)(x - x^t) &\leq 0, \\ H_i(\bar{\omega}(i, x^t))x - h_i(\bar{\omega}(i, x^t)) &\leq 0, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь под градиентом понимается строка $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, с помощью штриха обозначается матрица Якоби

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Система (11) решается одним из известных методов (например, симплекс-методом). Обозначим ее решение через \bar{x}^t .

Шаг 3. Положим $x^{t+1} = x^t + \rho_t(\bar{x}^t - x^t)$. (Выбор весов ρ_t обсудим после описания алгоритма.)

Шаг 4. Если $|x^{t+1} - y| > \varepsilon$, тогда $\{y := x^{t+1}; S := 0$; перейти на Шаг 5}.

$$S := S + |x^{t+1} - x^t|.$$

Если $S > K\varepsilon$, то {вывод x^{t+1} ; выход из алгоритма}.

Шаг 5. Полагается $t := t + 1$. Переход к Шагу 1. (Таким образом, если предыдущее t обозначить через t' , то после Шага 5 будет верно $x^t = x^{t'+1}$.)

Пояснения к алгоритму

Формирование весов. Веса $\{\rho_t\}_1^\infty$ будем выбирать классическим образом [2–6] согласно аксиомам:

I. $\rho_t > 0$ для всех t .

II. $\sum_{t=1}^\infty \rho_t^2 < \infty$.

III. $\sum_{t=1}^n \rho_t \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Такие веса существуют. Например, $\rho_t = 1/t$. Они обеспечивают, с одной стороны, возможность уйти от «начальной» точки x^0 к решению задачи (7), (5), (10), сколь далеко бы от «начальной» точки оно ни находилось (аксиома III). С другой стороны, в асимптотике «колебания» элементов последовательности $\{x^t\}_1^\infty$, если она сходится к решению, относительно решения будут стремиться к



нулю (аксиома II). Естественное требование смещения от текущей итеративной точки в направлении полученного минимума содержится в аксиоме I.

Правило остановки (Шаг 4). Зададимся конечной погрешностью $\varepsilon > 0$. После t -й итерации сделаем еще столько шагов, чтобы их суммарная длина превосходила ε в K раз. Другими словами,

$$\sum_{j=t}^{t+N-1} |x^{j+1} - x^j| > K\varepsilon.$$

Если при этом все итерации от i -й до $(i + N)$ -й остаются в шаре радиуса ε с центром x^t , т. е. $\{x^j\}_{j=t}^{N+t} \subset \mathbb{S}_{x^t}^\varepsilon$, то на этом заканчивается итеративный процесс. В качестве ответа можно взять последнюю итеративную точку из множества $\{x^j\}_{j=t}^{N+t}$.

Теорема. Алгоритм Шаг 1 – Шаг 5 с выбором весов согласно аксиомам I, II, III сходится.

Действительно, поскольку разность $\bar{x}^t - x^t$ соответствует обобщенному градиенту, то приведенный алгоритм с указанным выбором весов подпадает под действие теоремы Ю. М. Ермольева [3], что обеспечивает сходимость этого алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый итеративный алгоритм вполне адекватен рассматриваемой задаче. Его сходимость имеет и некоторые недостатки, присущие сходимости классических прямых методов стохастического программирования, в частности замедление сходимости с возрастанием индекса шага итерации. Преимущество по сравнению с ними видится в более легком пошаговом решении линейной программы (11), чем вычисление обобщенного градиента с последующим нахождением проекции на допустимое множество [2, 3, 7].

Представляется интересным расширение области применения приводимого алгоритма на задачу более общего вида, а именно на ограничения вида (3) с нелинейностью по x .

Библиографический список

1. Кибзун А. И., Кан Ю. С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009. 372 с.
2. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюпль В. И. Математические методы исследования операций. М.: Наука, 1979. 312 с.
3. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 340 с.
4. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио, 1974. 400 с.
6. Kolbin V. V. Stochastic programming. Boston, USA: D. Reidel Publ. C., 1977. 325 p.
7. Ермольев Ю. М., Норкин В. И. Методы решения невыпуклых негладких задач стохастической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 5. С. 89–106.

УДК 517.937: 517.983

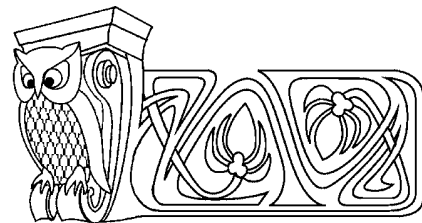
УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. В. Марюшенков

Воронежский государственный университет
E-mail: stasint1@mail.ru

В данной работе получены условия обратимости одного класса несамосопряженных операторов, являющихся разностью неограниченного антисопряженного и нормального оператора.

Ключевые слова: несамосопряженный оператор, нормальный оператор.



The Conditions of Invertibility of a Class Nonselfadjoint Operators

S. V. Maryushenkov

In this work we obtain the conditions of invertibility of a class of nonselfadjoint operator that are difference between the nonbounded antisymmetric and the normal operator.

Key words: nonselfadjoint operator, normal operator.



ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $\text{End } H$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H . Если $A, B \in \text{End } H$ — два самосопряженных оператора, B — непрерывно обратим и операторы A, B перестановочны, то спектр оператора $A + iB$ допускает дихотомию, т. е. не пересекается с мнимой осью $i\mathbb{R}$. Если же операторы A и B не перестановочны, то такой результат без дополнительных условий, вообще говоря, неверен. В качестве условия может, например, выступать $\|A\| \text{dist}(\{0\}, \sigma(B)) < 1$. Если в качестве дополнительного условия рассматривать малость оператора $AB - BA$, то естественно рассмотрение неограниченного оператора A . В статье [1] были получены условия дихотомии спектра оператора $L = A - B$, где B — самосопряженный оператор, случай разностного оператора L на локально-компактных абелевых группах рассмотрен в [2]. В настоящей работе рассматриваются условия обратимости оператора $L = A - B$, когда оператор B — нормальный.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Будем считать, что оператор $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ — антисимметричный, а оператор $B \in \text{End } H$ — нормальный.

Рассмотрим оператор вида $L = A - B : D(A) \subset H \rightarrow H$.

Введем обозначения: $\sigma_+ = \sigma_+(B) = \sigma(B) \cap \mathbb{C}_+$, $\sigma_- = \sigma_-(B) = \sigma(B) \cap \mathbb{C}_-$, где $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\}$, $\sigma(B)$ — спектр оператора B . Обозначим $\chi(B) = \chi_+(B) + \chi_-(B)$, $\chi_0(B) = \min\{\chi_+(B), \chi_-(B)\}$, где $\chi_+(B) = \min_{\lambda \in \sigma_+} \text{Re } \lambda$, $\chi_-(B) = |\max_{\lambda \in \sigma_-} \text{Re } \lambda|$.

Символами $P_+ = P(\sigma_+, B)$, $P_- = P(\sigma_-, B)$ обозначим проекторы Рисса, построенные по множествам σ_+, σ_- соответственно.

Наряду с оператором A , рассмотрим трансформатор $ad_A : D(ad_A) \subset \text{End } H \rightarrow \text{End } H$ с областью определения $D(ad_A)$, состоящей из таких операторов $X \in \text{End } H$, для которых $X(D(A)) \subset D(A)$. При этом оператор $AX - XA$ допускает расширение с $D(A)$ до некоторого оператора из $\text{End } H$, обозначаемого через $AX - XA$ или $[A, X]$. Будем полагать $ad_A X = [A, X]$.

Теорема 1. Пусть обратимый оператор B принадлежит области определения $D(ad_A)$ трансформатора ad_A и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\|AB - BA\| < \chi_0(B)\chi(B)$,
- 2) $\|[B, AB - BA]\| < \chi_0(B)\chi(B)^2$,
- 3) $\|ad_B^n(AB - BA)\| < \chi_0(B)\chi(B)^{n+1}$, $n \geq 2$, где ad_B^n — n -я степень трансформатора $ad_B : \text{End } X \rightarrow \text{End } X$, определенного формулой $ad_B X = BX - XB$.

Тогда оператор $L = A - B$ обратим и норма обратного оператора имеет соответствующую (каждому случаю теоремы) оценку:

- 1) $\|L^{-1}\| \leq \frac{\chi(B)}{\chi_0(B)\chi(B) - \|AB - BA\|}$,
- 2) $\|L^{-1}\| \leq \frac{\chi(B)^2}{\chi_0(B)\chi(B)^2 - \|[B, AB - BA]\|}$,
- 3) $\|L^{-1}\| \leq \frac{\chi(B)^{n+1}}{\chi_0(B)\chi(B)^{n+1} - \|ad_B^n(AB - BA)\|}$, $n \geq 2$.

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $J = P_+ - P_-$. Он является нормальным и удовлетворяет условиям $\|J\| = 1$ и $J^2 = I$.

Покажем, что J принадлежит области определения $D(ad_A)$. Отметим, что если X — обратимый оператор из $D(ad_A)$, то $X^{-1} \in D(ad_A)$, причем $AX^{-1} - X^{-1}A = -X^{-1}(AX - XA)X^{-1}$. Тогда принадлежность оператора J области определения $D(ad_A)$ генератора ad_A следует из представления проектора Рисса:

$$P_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B) d\lambda, \quad R(\lambda, B) = (B - \lambda I)^{-1}, \quad (1)$$

где γ_{\pm} — жорданов контур, окружающий σ_{\pm} , полностью лежащий в полуплоскости \mathbb{C}_{\pm} .



Более того, в силу представления (1)

$$\begin{aligned} ad_A P_{\pm} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} AR(\lambda, B)d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B)Ad\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B)(B - \lambda I)AR(\lambda, B)d\lambda - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B)A(B - \lambda I)R(\lambda, B)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B)(AB - BA)R(\lambda, B)d\lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Покажем, что оператор J — самосопряженный. Для этого достаточно показать, что самосопряженными будут операторы P_+ и P_- .

Отметим, что в силу свойства проекторов Рисса $H = \text{Im } P_+ \oplus \text{Im } P_-$, $H = \text{Im } P_+^* \oplus \text{Im } P_-^*$, где $\text{Ker } P_+ = \text{Im } P_-$ и $\text{Ker } P_+^* = \text{Im } P_-^*$.

Заметим, что $\text{Ker } P_+$ инвариантно относительно P_+^* , и наоборот. Действительно, если $P_+x = 0$, то $P_+(P_+^*x) = P_+^*(P_+x) = 0$.

Пусть, $\text{Ker } P_+ = M$. Тогда $(P_{+M})^* = (P_+^*)_M$. Действительно, если $x, y \in M$, то $(P_{+M}x, y) = (x, P_{+M}^*y) = (P_+x, y) = (x, P_+^*y)$. Тогда для $x \in \text{Ker } P_+$, $P_+^*x = 0$. Таким образом, $\text{Ker } P_+^* \subset \text{Ker } P_+$. Аналогично показывается, что $\text{Ker } P_+ \subset \text{Ker } P_+^*$. Из данных включений следует, что $\text{Im } P_- = \text{Im } P_-^*$, что показывает самосопряженность проекторов P_-, P_+ .

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \text{Re}(JLx, x) &= (1/2)((JL + L^*J)x, x) = (1/2)((JA - JB - AJ - B^*J)x, x) = \\ &= (1/2)((JA - AJ)x, x) - (1/2)((JB + B^*J)x, x) = (1/2)((ad_A J)x, x) - (1/2)((JB + B^*J)x, x). \end{aligned} \quad (3)$$

Оператор $JB + B^*J$ является самосопряженным и его спектр $\sigma(JB + B^*J) \subset (\sigma(B) + \sigma(B^*))$. Действительно, $(JB + B^*J)^* = B^*J + JB = JB + B^*J$. Значит, он положительно определен, и поэтому $((JB + B^*J)x, x) \geq 2\chi_0(B)\|x\|^2$. Таким образом,

$$\text{Re}(JLx, x) \leq -\chi_0(B) + (1/2)\|ad_A J\|. \quad (4)$$

Непосредственно из (4) вытекает, что при условии

$$(1/2)\|ab_A J\| < \chi_0(B), \quad (5)$$

имеет место неравенство

$$\|Lx\| \geq (\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|)\|x\|. \quad (6)$$

Используя аналогичные рассуждения, можно получить неравенство вида (6) для оператора $L^* = -A - B^* : D(A) \subset H \rightarrow H$. Следовательно, при выполнении условия (5) оператор L обратим и

$$\|L^{-1}\| \leq (\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|)^{-1}. \quad (7)$$

Осталось показать, что выполнение любого из условий теоремы влечет за собой выполнение условия (5).

Рассмотрим операторы $B_{\pm} = [B, P_{\pm}]$, которые в силу представления (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} B_{\pm} &= \frac{1}{2\pi i} \left(- \int_{\gamma_{\pm}} BR(\lambda, B)ad_A BR(\lambda, B)d\lambda + \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B)ad_A BR(\lambda, B)Bd\lambda \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(- \int_{\gamma_{\pm}} (B - \lambda I)R(\lambda, B)ad_A BR(\lambda, B)d\lambda - \int_{\gamma_{\pm}} \lambda R(\lambda, B)ad_A BR(\lambda, B)d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B)ad_A BR(\lambda, B)(B + \lambda I)d\lambda + \int_{\gamma_{\pm}} \lambda R(\lambda, B)ad_A BR(\lambda, B)d\lambda \right) = \end{aligned}$$



$$= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B) d\lambda \right) ad_A B - ad_A B \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B) d\lambda = [P_{\pm}, ad_A B]. \quad (8)$$

Из этого представления следует, что оператор $ad_A J$ удовлетворяет операторному уравнению:

$$BX - XB = J ad_A B - (ad_A B) J, \quad (9)$$

рассматриваемому в пространстве $\text{End } X$. Действительно,

$$J ad_A B - (ad_A B) J = [P_+ - P_-, ad_A B] = B_+ - B_- = [B, ad_A P_+ - ad_A P_-] = [B, ad_A J].$$

Поскольку $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$, то $(ad_A P_{\pm})P_{\pm} + P_{\pm} ad_A P_{\pm} = AP_{\pm} - P_{\pm} AP_{\pm} + P_{\pm} AP_{\pm} - P_{\pm} A = ad_A P_{\pm}$. Отсюда следует, что $P_{\pm}(ad_A P_{\pm})P_{\pm} = P_{\pm}((ad_A P_{\pm})P_{\pm} + P_{\pm} ad_A P_{\pm})P_{\pm} = 2P_{\pm}(ad_A P_{\pm})P_{\pm}$, в силу чего $P_{\pm}(ad_A P_{\pm})P_{\pm} = 0$. Следовательно, $ad_A J$ — решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям $P_{\pm}(ad_A J)P_{\pm} = 0$.

Из [3] следует, что оператор $P_+(ad_A J)P_-$ определяется формулой

$$P_+(ad_A J)P_- = \int_0^{\infty} e^{-Bs} P_+[J, ad_A B] e^{Bs} P_- ds, \quad (10)$$

откуда устанавливаем оценку

$$\begin{aligned} \|P_+(ad_A J)P_-\| &\leq \int_0^{\infty} e^{(-\chi_+(B) + \chi_-(B))s} \| [J, ad_A B] \| ds = \\ &= \| [J, ad_A B] \| \int_0^{\infty} e^{-\chi(B)s} ds = \chi(B)^{-1} \| [J, ad_A B] \|. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичны представление и оценка для оператора $P_-(ad_A J)P_+$. Тогда

$$\begin{aligned} \|ad_A J\| &= \|(P_+ + P_-)(ad_A J)(P_+ + P_-)\| = \|P_+(ad_A J)P_- + P_-(ad_A J)P_+\| = \\ &= \sqrt{\|(ad_A J)(ad_A J)^*\|} \leq \sqrt{\max\|(P_{\pm}(ad_A J)P_{\mp})^*\|} \leq \max\|P_{\pm}(ad_A J)P_{\mp}\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} [ad_A B, J] &= ad_A B P_+ - ad_A B P_- - P_+(ad_A B) + P_-(ad_A B) = (P_+ + P_-)(ad_A B)P_+ - \\ &- (P_+ + P_-)(ad_A B)P_- - P_+(ad_A B)(P_+ + P_-) + P_-(ad_A B)(P_+ + P_-) = P_+(ad_A B)P_+ + \\ &+ P_-(ad_A B)P_+ - P_+(ad_A B)P_- - P_-(ad_A B)P_- - P_+(ad_A B)P_+ - P_-(ad_A B)P_+ + \\ &+ P_-(ad_A B)P_+ - P_-(ad_A B)P_- = 2(P_-(ad_A B)P_+ - P_+(ad_A B)P_-). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11)–(13) следует, что

$$\|ad_A J\| \leq \chi(B)^{-1} \| [J, ad_A B] \| \leq 2\chi(B)^{-1} \max_{\pm} \| P_{\pm}(ad_A B)P_{\mp} \| \leq 2\chi(B)^{-1} \| ad_A B \|. \quad (14)$$

Из неравенства (14) получаем, что при выполнении условия 1 теоремы, справедливо неравенство (5). При этом оценка (7) примет вид

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|} \leq \frac{\chi(B)}{\chi_0(B)\chi(B) - \|AB - BA\|}.$$

Пусть теперь выполнено условие 2 теоремы. Рассмотрим операторы $C_{\pm} = [ad_A B, P_{\pm}]$. Отметим, что $C_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B) [B, ad_A B] R(\lambda, B) d\lambda$.



Используя рассуждения, аналогичные доказательству первого условия теоремы, показывается, что оператор $[ad_A B, J]$ удовлетворяет уравнению

$$BX - XB = [[B, ad_A B], J],$$

и условиям $P_{\pm}[ad_A B, J]P_{\pm} = 0$.

Тогда операторы $P_{\pm}[ad_A B, J]P_{\mp}$ допускают оценку вида (10). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|[ad_A B, J]\| &= \|P_+[ad_A B, J]P_- + P_-[ad_A B, J]P_+\| = \max_{\pm} \|P_{\pm}[ad_A B, J]P_{\mp}\| \leq \\ &\leq \chi(B)^{-1} \|[B, ad_A B], J\| \leq 2\chi(B)^{-1} \|[B, ad_A B]\|. \end{aligned}$$

Из данного неравенства и неравенства (14) следует неравенство (5). При этом оценка (7) примет вид

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|} \leq \frac{\chi(B)^2}{\chi_0(B)\chi(B)^2 - \|[B, AB - BA]\|}.$$

Пусть теперь выполнено условие 3 теоремы и $n = 2$. Рассмотрим операторы $D_{\pm} = [[B, ad_A B], P_{\pm}]$. Отметим, что $D_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} R(\lambda, B)[B, [B, ad_A B]]R(\lambda, B)d\lambda$.

Используя рассуждения, аналогичные доказательству первого условия теоремы, показывается, что оператор $[[B, ad_A B], J]$ удовлетворяет уравнению

$$BX - XB = [[B, [B, ad_A B]], J],$$

и условиям $P_{\pm}[[B, [B, ad_A B]], J]P_{\pm} = 0$. Тогда операторы $P_{\pm}[[B, [B, ad_A B]], J]P_{\mp}$ допускают оценку вида (10). Следовательно,

$$\|[ad_A B, J]\| \leq \chi(B)^{-1} \|[B, ad_A B], J\| \leq \chi(B)^{-1} \max_{\pm} \|P_{\pm}[[B, ad_A B], J]P_{\mp}\| \leq 2\chi(B)^{-2} \|[B, [B, ad_A B]]\|.$$

Из данного неравенства и неравенства (14) следует неравенство (5). Применяя тот же прием оценки, можно показать справедливость теоремы при $n > 2$.

Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

Пусть $A = \frac{d}{dt} : D(A) = W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset L_2 \rightarrow L_2$ — оператор дифференцирования, действующий в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(\mathbb{R}, H)$ суммируемых с квадратом нормы функций $x : \mathbb{R} \rightarrow H$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t), y(t))dt$. Его областью определения является пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}_+, H) = \{x \in L_2 \text{ абсолютно непрерывная} : \dot{x} \in L_2\}$. Оператор A является антисопряженным.

Если $B \in \text{End } L_2$ — оператор умножения на ограниченную непрерывную функцию $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } H$, т.е. $(Bx)(t) = Q(t)x(t)$, $x \in L_2$, $t \in \mathbb{R}$, то $B \in D(ad_A)$, если Q непрерывно дифференцируема и ее производная ограничена на \mathbb{R} . В этом случае $((ad_A B)x)(t) = \frac{dQ}{dt}(t)x(t)$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } H$ — непрерывно дифференцируемая ограниченная функция, значения которой являются нормальными обратимыми операторами, и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dQ}{dt}(t) \right\| < \chi_0(Q)\chi(Q)$,
- 2) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| Q(t) \frac{dQ}{dt}(t) - \frac{dQ}{dt} Q(t) \right\| < \chi_0(Q)\chi(Q)^2$,

где $\chi(Q) = \chi_+(Q) + \chi_-(Q)$, $\chi_0(Q) = \min\{\chi_+(Q), \chi_-(Q)\}$, $\chi_+(Q) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \min_{\lambda \in \sigma(Q(t)) \cap \mathbb{C}_+} \text{Re } \lambda$, $\chi_-(Q) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \max_{\lambda \in \sigma(Q(t)) \cap \mathbb{C}_-} |\text{Re } \lambda|$.



Тогда дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - Q(t) : W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset L_2 \rightarrow L_2$ обратим и норма обратного оператора имеет соответствующую (каждому случаю теоремы) оценку:

$$1) \|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\chi(Q)}{\chi_0(Q)\chi(Q) - \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dQ}{dt}(t) \right\|},$$

$$2) \|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\chi(Q)^2}{\chi_0(Q)\chi(Q)^2 - \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| Q(t) \frac{dQ}{dt}(t) - \frac{dQ}{dt} Q(t) \right\|}.$$

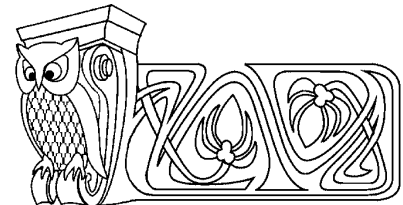
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00276).

Библиографический список

1. Баскаков А. Г. Дихотомия спектра несамосопряженных операторов // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 24–30.
2. Баскаков А. Г., Юргелас В. В. Круговая дихотомия спектра одного класса несамосопряженных операторов // Изв. вузов. 1994. № 10. С. 12–18.
3. Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. М.: Научная книга, 1997. 407 с.

УДК 519.622

АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЯВНЫХ И НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ



Е. А. Новиков

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск
E-mail: novikov@icm.krasn.ru

Algorithm of Integrating Stiff Problems Using the Explicit and Implicit Methods

E. A. Novikov

An L -stable (3,2)-method order 3 and an explicit three-stage Runge–Kutta scheme order 1 are constructed. An integration algorithm of variable order and step is constructed that is based on of the two schemes The most effective numerical scheme is chosen for each step by means of stability control. The results are given that confirm the effectiveness of the algorithm.

Ключевые слова: жесткие задачи, явный и неявный методы, контроль точности и устойчивости, переменный порядок.

Key words: stiff problems, explicit and implicit methods, stability and accuracy control, variable order.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих важных приложениях возникает необходимость решения жестких задач. Основные тенденции при построении численных методов связаны с расширением их возможностей для решения систем все более высокой размерности. В современных методах решения жестких задач при вычислении стадий применяется LU -разложение некоторой матрицы, размерность которой совпадает с размерностью исходной системы дифференциальных уравнений. Разложение осуществляется с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице. В случае достаточно большой размерности быстродействие алгоритма интегрирования, фактически, полностью определяется временем декомпозиции этой матрицы. Для повышения эффективности расчетов в ряде алгоритмов используется замораживание матрицы Якоби, т. е. применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования [1]. Наиболее успешно этот подход применяется в многошаговых методах [2]. Не вызывает эта проблема особых трудностей и при построении алгоритмов интегрирования на основе других численных схем, если в них стадии вычисляются с участием матрицы Якоби в некотором итерационном процессе. В этом случае она не влияет на порядок точности численной схемы, а определяет только сходимость итераций. Поэтому необходимость в ее пересчете возникает при существенном замедлении скорости сходимости итерационного процесса.



В алгоритмах интегрирования на основе известных безытерационных методов, к которым относятся методы типа Розенброка [3] и их различные модификации [1], проблема замораживания является более трудной. Следует отметить, что с точки зрения реализации безытерационные методы существенно проще алгоритмов на основе численных формул, в которых стадии вычисляются с применением итераций. Однако в методах вида [3] матрица Якоби влияет на порядок точности численной схемы, и поэтому возникают трудности с ее замораживанием. В [4] доказано, что максимальный порядок точности методов типа Розенброка равен двум, если в алгоритме интегрирования одна матрица Якоби применяется на нескольких шагах интегрирования. Там же построен алгоритм с замораживанием матрицы Якоби на основе L -устойчивой численной формулы второго порядка, и приведены результаты расчетов, подтверждающие его высокую эффективность при невысокой точности расчетов. Если для таких методов вопрос об использовании одной матрицы на нескольких шагах интегрирования оставить не решенным, то нужно ограничиться либо задачами небольшой размерности, либо невысокой точностью расчетов.

Некоторым аналогом замораживания матрицы Якоби является применение в расчетах алгоритмов интегрирования на основе явных и L -устойчивых методов с автоматическим выбором численной схемы. В этом случае эффективность алгоритма может быть повышена за счет расчета переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, при помощи явного метода [5]. В качестве критерия выбора эффективной численной формулы естественно применять неравенство для контроля устойчивости [6–7]. Следует отметить, что применение таких комбинированных алгоритмов полностью не снимает проблемы замораживания матрицы Якоби, потому что явным методом можно просчитать, вообще говоря, только переходный режим, соответствующий максимальному собственному числу матрицы Якоби.

Здесь на основе явного трехстадийного метода типа Рунге–Кутты первого порядка и L -устойчивого (3,2)-метода третьего порядка точности построен алгоритм переменной структуры, в котором допускается замораживание как численной, так и аналитической матрицы Якоби. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность алгоритма интегрирования.

1. КЛАСС (М,К)-МЕТОДОВ

Рассмотрим задачу Коши для жесткой системы дифференциальных уравнений:

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где y и f — вещественные N -мерные вектор-функции, t — независимая переменная, которая меняется на заданном интервале $[t_0, t_k]$. Зададимся целыми числами m и k , $k \leq m$, и введем в рассмотрение множества

$$M_m = \{1, 2, \dots, m\}, \quad M_k = \{m_i \in M_m | 1 = m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq m\}, \quad M_{m-k} = M_m \setminus M_k, \\ J_i = \{m_{j-1} \in M_m | j > 1, m_j \in M_k, m_j \leq i\}, \quad 2 \leq i \leq m.$$

Для решения задачи (1) будем применять (m, k) -схемы вида [8]

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_m k_m, \quad D_n = E - ahA_n, \\ D_n k_i = hf(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j, \quad i \in M_k, \quad (2) \\ D_n k_i = k_{i-1} + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j, \quad i \in M_{m-k},$$

где матрица A_n представима следующим образом:

$$A_n = f'_n + hB_n + O(h^2), \quad (3)$$

E — единичная матрица, $f'_n = \partial f(y_n) / \partial y$ — матрица Якоби системы (1), h — шаг интегрирования, B_n — некоторая матрица, не зависящая от размера шага интегрирования, $a, p_i, \beta_{ij}, \alpha_{ij}$ — вещественные константы, определяющие свойства точности и устойчивости (2). В отличие от других известных



одношаговых численных схем, в (m, k) -методах правая часть задачи (1) вычисляется не для всех стадий. Для описания вычислительных затрат на шаг интегрирования в традиционных одношаговых методах достаточно одной константы m — числа стадий. В данных схемах затраты определяются двумя постоянными — m и k . В (m, k) -методах на каждом шаге один раз вычисляется матрица Якоби и осуществляется декомпозиция матрицы D_n , k раз вычисляется функция f , m раз осуществляется обратный ход в методе Гаусса. Условие (3) позволяет применять (2) с использованием одной матрицы Якоби на нескольких шагах, которая может быть вычислена как аналитически, так и численно [9]. В отличие от схем типа Розенброка, в рамках (m, k) -методов просто решаются проблемы замораживания матрицы Якоби и ее численной аппроксимации.

2. L-УСТОЙЧИВЫЙ (3,2)-МЕТОД ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Для решения задачи (1) рассмотрим численную схему:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, & D_n &= E - ahA_n, \\ D_n k_1 &= hf(y_n), & D_n k_2 &= k_1, & D_n k_3 &= hf(\tilde{y}_{n+1}) + \alpha_{32} k_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где матрица A_n удовлетворяет условию (3). Численную формулу

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2 \quad (5)$$

называют внутренней или промежуточной схемой метода (4). Для построения метода третьего порядка разложим стадии k_i , $1 \leq i \leq 3$, в ряды Тейлора в окрестности точки y_n до членов с h^3 включительно и подставим в первую формулу (4). Получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + [p_1 + p_2 + (1 + \alpha_{32})p_3]hf_n + [ap_1 + 2ap_2 + (a + \beta_{31} + \beta_{32} + 3a\alpha_{32})p_3]h^2 f'_n f_n + \\ &+ [a^2 p_1 + 3a^2 p_2 + (a^2 + 2a\beta_{31} + 3a\beta_{32} + 6a^2 \alpha_{32})p_3]h^3 f''_n f_n + \\ &+ \frac{1}{2}(\beta_{31} + \beta_{32})^2 p_3 h^3 f''_n f_n^2 + [ap_1 + 2ap_2 + (a + 3a\alpha_{32})p_3]h^3 B_n f_n + O(h^4), \end{aligned}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n . Разложение точного решения $y(t_{n+1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_n до членов с h^3 включительно имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{1}{2}h^2 f'f + \frac{1}{6}h^3 (f'^2 f + f'' f^2) + O(h^4),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$. Сравнивая эти ряды при $y_n = y(t_n)$, получим условия третьего порядка схемы (4), т. е.

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + (1 + \alpha_{32})p_3 &= 1, & ap_1 + 2ap_2 + (a + \beta_{31} + \beta_{32} + 3a\alpha_{32})p_3 &= \frac{1}{2}, \\ a^2 p_1 + 3a^2 p_2 + (a^2 + 2a\beta_{31} + 3a\beta_{32} + 6a^2 \alpha_{32})p_3 &= \frac{1}{6}, & (6) \\ (\beta_{31} + \beta_{32})^2 p_3 &= \frac{1}{3}, & ap_1 + 2ap_2 + (a + 3a\alpha_{32})p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение (6) возникает за счет применения «испорченной» матрицы Якоби. Исследуя совместность системы (6), получим коэффициенты

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\alpha_{32}, & p_2 &= -1 - \frac{3}{2}\alpha_{32}, & p_3 &= \frac{3}{4}, & \beta_{32} &= \frac{2}{3} - \beta_{31}, \\ -a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}a^2 \alpha_{32} - \frac{3}{4}a\beta_{31} &= \frac{1}{6}, & (7) \end{aligned}$$

где β_{31} и α_{32} — свободные параметры.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследуем устойчивость схемы (4) на линейной тестовой задаче

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$



где λ — произвольное комплексное число, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Смысл λ — некоторое собственное число матрицы Якоби задачи (1). Применяя (4) для решения (8), получим $y_{n+1} = Q_3(x)y_n$, где $x = \lambda h$, а функция устойчивости $Q_3(x)$ имеет вид

$$Q_3(x) = \{(-a^3 + a^2 p_1 + a^2 p_3 - a \beta_{31} p_3)x^3 + [3a^2 - 2ap_1 - ap_2 + (\beta_{31} + \beta_{32} - 2a)p_3]x^2 + [-3a + p_1 + p_2 + (1 + \alpha_{32})p_3]x + 1\} / (1 - ax)^3.$$

Из вида $Q_3(x)$ следует, что для L -устойчивости основной схемы (4) необходимо выполнение следующего равенства:

$$a^2 - a(p_1 + p_3) + \beta_{31} p_3 = 0. \quad (9)$$

Запишем условие L -устойчивости промежуточной схемы (5). Применяя ее для решения (8), получим $\tilde{y}_{n+1} = Q_2(x)y_n$, где функция устойчивости $Q_2(x)$ имеет вид

$$Q_2(x) = \frac{1 + (\beta_{31} + \beta_{32} - 2a)x + a(a - \beta_{31})x^2}{(1 - ax)^2}.$$

Из вида $Q_2(x)$ следует, что схема (5) будет L -устойчивой, если $\beta_{31} = a$. Учитывая соотношение (9), из (7) имеем, что коэффициенты метода (4), обладающего L -устойчивостью основной и промежуточной численных схем, записываются следующим образом: $p_1 = \beta_{31} = a$, $p_2 = -2a + 3/2$, $p_3 = 3/4$, $\beta_{32} = 2/3 - a$, $\alpha_{32} = 4a/3 - 5/3$, где a определяется из условия L -устойчивости:

$$6a^3 - 18a^2 + 9a - 1 = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) имеет три корня: $a_1 = 2,40514957850286$, $a_2 = 0,158983899988677$ и $a_3 = 0,435866521508459$. Согласно [10], схема (4) будет A -устойчива, если $1/3 \leq a \leq 1,0685790$. Поэтому выбираем корень $a = a_3 = 0,435866521508459$.

4. КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для контроля точности вычислений используем идею вложенных методов. Для этого введем дополнительную стадию $D_n k_4 = k_3$. Теперь на основе вычисленных ранее стадий k_1, k_2, k_3 и k_4 построим численную схему второго порядка

$$y_{n+1,2} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 \quad (11)$$

и будем контролировать точность расчетов с применением приближений, вычисленных по формулам (4) и (11), т. е.

$$\|y_{n+1} - y_{n+1,2}\| \leq \varepsilon, \quad (12)$$

где ε — требуемая точность расчетов, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N . Для нахождения коэффициентов b_1, b_2, b_3 и b_4 запишем разложение стадий k_1, k_2, k_3 и k_4 в ряды Тейлора и подставим в (11). Сравнивая ряды для точного и приближенного решений, запишем условия второго порядка точности схемы (11):

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + (1 + \alpha_{32})(b_3 + b_4) &= 1, \\ ab_1 + 2ab_2 + (a + \beta_{31} + \beta_{32} + 3a\alpha_{32})b_3 + (2a + \beta_{31} + \beta_{32} + 4a\alpha_{32})b_4 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Напомним, что схема (4) построена с учетом возможности замораживания матрицы Якоби и ее численной аппроксимации. Ошибки, которые вносятся использованием «испорченной» матрицы Якоби, устраняются за счет последнего соотношения (6). Аналогичное требование к формуле (11) приводит к дополнительному уравнению на коэффициенты b_i , т. е.

$$ab_1 + 2ab_2 + (1 + 3\alpha_{32})ab_3 + (2 + 4\alpha_{32})ab_4 = 0. \quad (14)$$

Решая совместно (13) и (14), имеем

$$b_1 = 2a - \frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}\right)b_3, \quad b_2 = 2 - 3a + \left(\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}\right)b_3, \quad b_4 = \frac{3}{4} - b_3,$$

где b_3 — свободный параметр. Положив $b_3 = 0$, получим коэффициенты $b_1 = 2a - 1/2$, $b_2 = 2 - 3a$, $b_4 = 4/3$.



Применение неравенства (12) не приводит к дополнительным вычислениям правой части или обращениям матрицы Якоби. Введение стадии k_4 , используемой только для контроля точности, увеличивает вычислительные затраты на один обратный ход метода Гаусса на шаг интегрирования. Отметим одну важную особенность построенного неравенства (12). Схема (4) L -устойчивая. Следовательно, $Q_3(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Так как для точного решения $y(t_{n+1}) = \exp(x)y(t_n)$ задачи (8) выполняется аналогичное свойство, то естественным будет требование стремления к нулю оценки ошибки. Однако для разности $[y_{n+1} - y_{n+1,2}]$ это свойство не выполняется, потому что схема (11) L -устойчивой не является. С целью исправления асимптотического поведения оценки ошибки вместо (12) будем контролировать неравенство

$$\|D^{1-j_n}(y_{n+1} - y_{n+1,2})\| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq j_n \leq 2. \quad (15)$$

В этом случае поведение оценки ошибки при $j_n = 2$ будет согласовано с поведением точного решения задачи (8) при $x \rightarrow -\infty$. Подчеркнем, что в смысле главного члена оценки ошибок, применяемые в неравенствах (12) и (15), совпадают при любом j_n . Использование неравенства (15) вместо (12), фактически, не приводит к увеличению вычислительных затрат. Это связано с тем, что (15) при $j_n = 2$ проверяется только в том случае, если оно нарушено при $j_n = 1$. Такая ситуация встречается достаточно редко, в основном при быстром росте величины шага. Однако это позволяет выбирать шаг более правильно и тем самым уменьшить количество неоправданных повторных вычислений решения, что повышает надежность расчетов и быстродействие алгоритма интегрирования.

Оценку максимального собственного числа $v_{n,0} = h\lambda_{n,\max}$ матрицы Якоби системы (1), необходимую для перехода на явную схему, оценим по формуле $v_{n,0} = h\|\partial f/\partial y\|$.

5. ЯВНЫЙ МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для численного решения задачи (1) рассмотрим схему вида

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + r_1 k_1 + r_2 k_2 + r_3 k_3, & k_1 &= hf(y_n), & k_2 &= hf(y_n + \beta_{21} k_1), \\ & & k_3 &= hf(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где h — шаг интегрирования, k_1 , k_2 и k_3 — стадии метода, r_1 , r_2 , r_3 , β_{21} , β_{31} , и β_{32} — числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (16). Получим соотношения на коэффициенты метода (16) первого порядка точности. Для этого разложим стадии k_1 , k_2 и k_3 в ряды Тейлора до членов с h^2 и подставим в первую формулу (16). В результате получим

$$y_{n+1} = y_n + (r_1 + r_2 + r_3)hf_n + [\beta_{21}r_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})r_3]h^2 f'_n f_n + O(h^3).$$

Здесь элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n . Точное решение $y(t_{n+1})$ в окрестности точки t_n имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{1}{2}h^2 f' f + O(h^3),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$. Построим схему первого порядка с максимальным интервалом устойчивости. Для этого применим (16) для решения тестового уравнения (8). Получим $y_{n+1} = Q(x)y_n$, где функция устойчивости $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = 1 + (r_1 + r_2 + r_3)x + [\beta_{21}r_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})r_3]x^2 + \beta_{21}\beta_{32}r_3x^3, \quad x = h\lambda.$$

Требование первого порядка точности приводит к соотношению $r_1 + r_2 + r_3 = 1$, которое далее будем считать выполненным. Выберем r_2 и r_3 так, чтобы метод (16) имел максимальный интервал устойчивости. Для этого рассмотрим многочлен Чебышева $T_3(z) = 4z^3 - 3z$ на промежутке $[-1, 1]$. Проведем замену переменных, полагая $z = 1 - 2x/\gamma$. Получим

$$T_3(x) = 1 - \frac{18}{\gamma}x + \frac{48}{\gamma^2}x^2 - \frac{32}{\gamma^3}x^3,$$



при этом отрезок $[\gamma, 0]$ отображается на отрезок $[-1, 1]$. Среди всех многочленов вида

$$P_3(x) = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3$$

для $T_3(x)$ неравенство $|T_3(x)| \leq 1$ выполняется на максимальном интервале $[\gamma, 0]$, $\gamma = -18$ [7]. Потребуем совпадения коэффициентов $Q(x)$ и $T_3(x)$. Это приводит к соотношениям

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1, \quad \beta_{21}r_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})r_3 = \frac{4}{27}, \quad \beta_{21}\beta_{32}r_3 = \frac{4}{729}.$$

В результате имеем коэффициенты

$$r_3 = \frac{4}{729}(\beta_{21}\beta_{32})^{-1}, \quad r_2 = \left[\frac{4}{27} - (\beta_{31} + \beta_{32})r_3\right]\beta_{21}^{-1}, \quad r_1 = 1 - r_2 - r_3$$

метода первого порядка с максимальным интервалом устойчивости. Положим $\beta_{21} = 0.5$, $\beta_{31} = -1$ и $\beta_{32} = 2$. Тогда на каждом шаге приращения k_1 , k_2 и k_3 вычисляются в точках t_n , $t_n + 0.5h$ и $t_n + h$ соответственно. Так как стадии k_1 и k_3 вычисляются в крайних точках интервала интегрирования, то повышается надежность расчетов. Более того, при данных β_{ij} легко построить метод (16) третьего порядка точности [11]. В результате имеем коэффициенты метода (16), т. е.

$$\beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = -1, \quad \beta_{32} = 2, \quad r_1 = \frac{517}{729}, \quad r_2 = \frac{208}{729}, \quad r_3 = \frac{4}{729}, \quad (17)$$

а его локальная ошибка $\delta_{n,1}$ имеет вид $\delta_{n,1} = 19h^2 f' f / 54 + O(h^3)$. Метод первого порядка предполагается использовать на участке установления, где ошибки невелики. Поэтому для контроля точности численной формулы (16), (17) можно использовать оценку локальной ошибки. Учитывая, что имеет место

$$k_2 - k_1 = \frac{1}{2}h^2 f'_n f_n + O(h^3)$$

и вид локальной ошибки, неравенство для контроля точности записывается в виде

$$\frac{19}{27} \|k_2 - k_1\| \leq \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N , ε — точность расчетов.

6. КОНТРОЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ

Неравенство для контроля устойчивости численной формулы (16) построим предложенным в [7] способом. Запишем стадии k_1 , k_2 и k_3 применительно к задаче $y' = Ay$, где A есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим

$$k_1 = Xy_n, \quad k_2 = (X + 0.5X^2)y_n, \quad k_3 = (X + X^2 + X^3)y_n,$$

где $X = hA$. Легко видеть, что имеют место соотношения

$$k_3 - 2k_2 + k_1 = X^3y_n, \quad 2(k_2 - k_1) = X^2y_n.$$

Тогда согласно [7] оценку максимального собственного числа $v_{n,1} = h\lambda_{n \max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$v_{n,1} = 0.5 \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|k_3^i - 2k_2^i + k_1^i|}{|k_2^i - k_1^i|}. \quad (18)$$

Интервал устойчивости схемы (16), (17) равен 18 [7]. Поэтому для ее контроля устойчивости используется неравенство $v_{n,1} \leq 18$.

В случае применения полинома Чебышева в качестве многочлена устойчивости область устойчивости «почти» многосвязная [11]. Появление мнимых частей собственных чисел матрицы Якоби за счет ошибок округлений может приводить к ее сокращению. Алгоритмом из [7] построим многочлен устойчивости

$$Q(x) = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3,$$



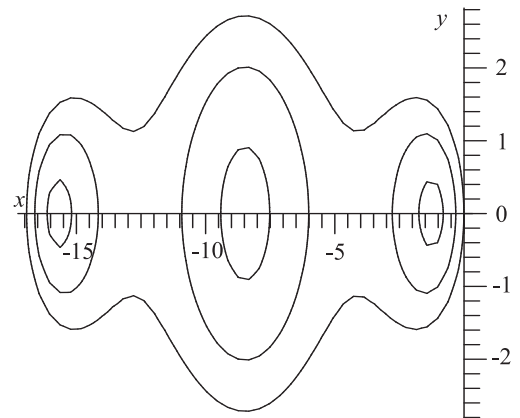
для которого в экстремальных точках имеет место $|Q(x)| = 0.9$. Получим $c_2 = 0.15625736489384$ и $c_3 = 0.0061526400319$, а коэффициенты r_i метода первого порядка определяются формулами $r_3 = c_3$, $r_2 = 2(c_2 - c_3)$, $r_1 = 1 - 2c_2 + c_3$. В итоге имеем

$$r_1 = 0.69363791024424, \quad r_2 = 0.30020944972383, \quad r_3 = 0.0061526400319238. \quad (19)$$

Область устойчивости метода (16), (19) приведена на рисунке, где изображены линии уровня $|Q(x)| = s$ при s равном 0.5, 0.7 и 1. Длина интервала устойчивости (16), (19) равна примерно 17 (см. рисунок, $\gamma = -16.93$). В расчетах применялись коэффициенты (19), а неравенство для контроля устойчивости имеет вид $v_{n,1} \leq 17$, где $v_{n,1}$ определяется по формуле (18).

Оценка (18) является грубой, потому что вовсе не обязательно максимальное собственное число сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. Прогнозируемый шаг h_{n+1} задается следующим образом. Новый шаг h^{ac} по точности определяется по формуле $h^{ac} = q_1 h_n$, где h_n есть последний успешный шаг интегрирования, а q_1 , учитывая соотношение $k_2 - k_1 = O(h_n^2)$, задается уравнением

$$\frac{19}{27} q_1^2 \|k_2 - k_1\| = \varepsilon.$$



Область устойчивости метода (16), (19)

Шаг h^{st} по устойчивости задается формулой $h^{st} = q_2 h_n$, где q_2 , учитывая равенство $v_{n,1} = O(h_n)$, определяется из уравнения $q_2 v_{n,1} = 17$. В результате h_{n+1} вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max[h_n, \min(h^{ac}, h^{st})]. \quad (20)$$

Отметим, что формула (20) применяется для прогноза величины шага интегрирования h_{n+1} после успешного вычисления решения с предыдущим шагом h_n , и поэтому, фактически, не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг h_n . В результате для выбора шага и предлагается формула (20). Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Собственно говоря, именно наличие данного участка существенно ограничивает возможности применения явных методов для решения жестких задач.

7. АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Первый шаг интегрирования всегда выполняется по явной схеме, потому что она не использует матрицы Якоби. Нарушение неравенства $v_{n,1} \leq 17$ вызывает переход на схему (4). Передача управления явному методу происходит в случае выполнения неравенства $v_{n,0} \leq 17$, где при расчетах L -устойчивым (3,2)-методом оценка максимального собственного числа $v_{n,0}$ вычисляется через норму матрицы Якоби. Численную формулу (4) без потери порядка точности можно применять с замораживанием матрицы D_n . Отметим, что при замораживании матрицы Якоби величина шага интегрирования остается постоянной. Попытка замораживания матрицы D_n осуществляется после каждого успешного шага. Размораживание матрицы происходит в следующих случаях: 1) нарушение точности расчетов, 2) если число шагов с замороженной матрицей достигло заданного максимального числа iqh , 3) если прогнозируемый шаг больше последнего успешного в qh раз. Числами iqh и qh



можно влиять на перераспределение вычислительных затрат. При $iqh = 0$ и $qh = 0$ замораживания не происходит, при увеличении iqh и qh число вычислений функции f возрастает, а число декомпозиций матрицы D_n убывает.

Норма $\|\xi\|$ в неравенствах для контроля точности вычисляется по формуле

$$\|\xi\| = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|\xi_i|}{|y_n^i| + r},$$

где i — номер компоненты, r — положительный параметр. Если по i -й компоненте решения выполняется неравенство $|y_n^i| < r$, то контролируется абсолютная ошибка $r\varepsilon$, в противном случае — относительная ошибка ε . Ниже построенный алгоритм переменной структуры будем называть МКЗРК1. Алгоритм переменного шага на основе только (3,2)-метода назовем МКЗ. Отметим, что МКЗ является частью МКЗРК1 и подключается по признаку. В алгоритмах МКЗРК1 и МКЗ матрица Якоби перевычислялась в том случае, если прогнозируемый шаг в полтора раза превышает успешный ($qh = 1.5$). Максимальное число шагов с замороженной матрицей ограничивалось числом десять ($iqh = 10$).

8. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве тестовой задачи рассмотрено уравнение Ван-дер-Поля для имитации осциллирующих физических процессов [1]. В ней переходные режимы чередуются с участками установления, что позволяет исследовать возможности построенного алгоритма. Уравнение Ван-дер-Поля изучается в виде системы двух уравнений $y_1' = y_2$, $y_2' = [(1 - y_1^2)y_2 - y_1]/\mu$ с начальными условиями $y_1(0) = 2$ и $y_2(0) = 0$, $t \in [0, 11]$. Изменением параметра μ варьируется жесткость модели. Сравнение эффективности построенного алгоритма МКЗРК1 проводилось с МКЗ и методом Гира в реализации А. Хиндмарша DLSODE из коллекции ODEPACK [2]. В таблице приведены результаты расчетов при различных значениях μ . Вычислительные затраты приведены в форме $if(ij)$, где через if и ij обозначены соответственно число вычислений правой части и декомпозиций матрицы Якоби на интервале интегрирования. Расчеты проводились таким образом, чтобы в точном и приближенном решениях совпадали три значащие цифры, где под точным понимается решение при точности вычислений $\varepsilon = 10^{-9}$. В алгоритмах МКЗРК1, МКЗ и DLSODE матрица Якоби вычислялась численно.

Результаты расчетов

μ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
МКЗРК1	1297(0)	2964(0)	3243(338)	4362(430)	5047(532)	5809(631)
МКЗ	1056(84)	1462(241)	3148(373)	4343(487)	5037(536)	5844(685)
DLSODE	916(92)	1974(234)	2996(368)	4236(535)	4974(562)	5823(723)

При небольшой жесткости задачи в построенном алгоритме МКЗРК1 работает только явный метод. Начиная с $\mu = 10^{-3}$ в зависимости от устойчивости в процессе вычислений комбинируются L -устойчивая и явная схемы. Изучение пошаговых вычислений показывает, что на переходных участках расчеты осуществляются по явной формуле, а на участках установления — по L -устойчивой схеме. Из сравнения результатов расчетов алгоритмами МКЗРК1 и МКЗ следует при примерно одинаковом числе вычислений правой части сокращение числа декомпозиций за счет расчетов на части интервала по явному методу. По числу декомпозиций матрицы Якоби построенный алгоритм МКЗРК1 при всех значениях μ эффективнее алгоритма DLSODE.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В МКЗРК1 с помощью признака можно задавать различные режимы расчета: 1) явным методом первого порядка точности с контролем или без контроля устойчивости; 2) L -устойчивым методом с замораживанием или без замораживания как аналитической, так и численной матрицы Якоби; 3) с автоматическим выбором численной схемы. Все это позволяет применять данный алгоритм для решения как жестких, так и нежестких задач. При расчетах с автоматическим выбором численной схемы вопрос о том, является ли задача жесткой или нет, перекладывается на алгоритм интегрирования. Наиболее эффективное применение данного алгоритма предполагается при точности вычислений 10^{-4} и грубее.



Использование неравенства для контроля устойчивости, фактически, не приводит к увеличению вычислительных затрат, потому что оценка максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) осуществляется через ранее вычисленные стадии и не приводит к росту числа вычислений функции f . Такая оценка получается грубой. Однако применение контроля устойчивости в качестве ограничителя на рост шага позволяет избежать негативных последствий грубости оценки. Более того, в некоторых случаях это приводит к нестандартно высокому повышению эффективности алгоритма [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00106 и 11-01-00224).

Библиографический список

1. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin : Springer-Verlag, 2004. 614 p.
2. Byrne G. D., Hindmarsh A. C. ODE solvers: a review of current and coming attractions // J. of Comp. Phys. 1987. № 70. P. 1–62.
3. Rosenbrock H. H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer. 1963. № 5. P. 329–330.
4. Новиков В. А., Новиков Е. А., Юматова Л. А. Замораживание матрицы Якоби в методе типа Розенброка второго порядка точности // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1987. Т. 27, № 3. С. 385–390.
5. Новиков Е. А. Построение алгоритма интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений на неоднородных схемах // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 2. С. 272–275.
6. Новиков В. А., Новиков Е. А. Повышение эффективности алгоритмов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений за счет контроля устойчивости // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1985. Т. 25, № 7. С. 1023–1030.
7. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск : Наука, 1997. 197 с.
8. Новиков Е. А., Шитов Ю. А., Шокин Ю. И. Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 6. С. 1310–1314.
9. Новиков А. Е., Новиков Е. А. Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 1. С. 46–56.
10. Демидов Г. В., Юматова Л. А. Исследование точности неявных одношаговых методов. Препринт № 11. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1976. 22 с.
11. Новикова Е. А. Алгоритм переменного порядка и шага на основе явного трехстадийного метода типа Рунге–Кутты // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 1. С. 46–53.

УДК 519.71

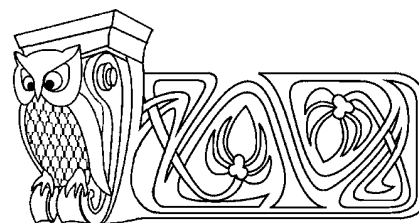
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

В. А. Подчукаев

Саратовская государственная юридическая академия
E-mail: sstu85@yandex.ru

Поставлена и решена задача аналитического конструирования по заданной математической модели динамической системы в пространстве состояний сопровождающей её математической модели в фазовом пространстве. Показано, что изображающая точка всякого решения динамической системы общего вида в пространстве состояний принадлежит гипертсфере со смещённым центром в фазовом пространстве (или эквивалентной ей центральной гипертсфере переменного радиуса). Сконструировано аналитическое представление центра смещения, объясняющее происхождение динамического хаоса бесконечными разрывами второго рода в координатах центра смещения. Показано, что эти разрывы порождены переходом через ноль соответствующих компонент вектора состояний.

Ключевые слова: динамическая система, обыкновенные однородные дифференциальные уравнения, гипертсфера, смещённый центр, динамический хаос.



Mathematical Model of Dynamic Chaos

V. A. Podchukaev

The problem of analytical designing on the set mathematical model of dynamic system in space of states of mathematical model accompanying it in phase space is put and solved. It is shown, that the representing point of any decision of dynamic system of a general view in space of states conditions belongs to hypersphere with the displaced centre in phase space (or to central hypersphere of variable radius equivalent to it). Analytical representation of the centre of the displacement, an explaining origin of dynamic chaos by infinite ruptures of the second sort in co-ordinates of the centre of displacement is designed. It is shown, that these ruptures are generated by transition through a zero corresponding a component of a vector of states.

Key words: dynamic system, ordinary homogeneous differential equations, hypersphere, displaced centre, dynamic chaos.



1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Невзирая на несколько десятилетий развития теории динамического хаоса, до сих пор нет сколь-нибудь внятного объяснения причин, его порождающих (см., например, [1]).

Этому обстоятельству можно дать следующее объяснение. Для простоты изложения ограничимся случаем динамических систем, описываемых обыкновенными однородными дифференциальными уравнениями в форме Коши

$$\dot{x} = P(x, t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in [0, \infty), \quad t_0 \geq 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где x — вектор состояний, x_0 — вектор начальных условий, t — время, $P(x, t)$ — заданная функциональная матрица, элементы которой определены и непрерывны вместе со своими частными производными по x и t в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$, что гарантирует существование единственного решения $x(t, t_0, x_0)$, проходящего через точку (t_0, x_0) , не являющуюся состоянием равновесия.

Будем полагать, что решение $x(t, t_0, x_0)$ детерминированной системы, описываемой уравнением (1) (подстановка которого в (1) обращает его в тождество), известно. Проблема хаоса была идентифицирована в процессе построения (по известным решениям в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$) фазовых портретов этих решений в фазовом пространстве R^n . Собственно фазовое пространство не содержит оси времени t (в то время как изображающая точка самого фазового портрета однозначно определяется текущими значениями компонент соответствующего решения $x(t, t_0, x_0)$). Классические примеры динамического хаоса позволяют говорить о «странном» (случайном, непредсказуемом и т. д.) поведении фазовых портретов детерминированных систем. Ясно, что «странный» характер такого поведения проистекает из перехода от пространства размерности $(n+1)$, каковым является пространство состояний $R^n \times [0, \infty)$, к фазовому пространству R^n размерности n , в явном виде не содержащему времени (а включающему его лишь посредством изображающих точек решения, зависящих от времени).

В дальнейшем уравнение (1) будем называть математической моделью детерминированной системы в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$. Отметим, что общепринятой математической модели той же системы, но уже в фазовом пространстве R^n , на единицу меньшей размерности, до сих пор нет.

Сконструируем такую модель, исходя из математической модели в пространстве состояний.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

2.1. Случай кососимметрической функциональной матрицы $P(x, t)$

Рассмотрим случай, когда функциональная матрица $P(x, t)$ в уравнении (1) является кососимметрической, т. е. удовлетворяет условию $P(x, t) = -P^T(x, t)$.

Лемма [2, с. 100]. *Изображающая точка всякого решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (1) с кососимметрической матрицей $P(x, t)$ принадлежит гиперсфере*

$$x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) = x_0^T x_0 \quad (2)$$

в фазовом пространстве R^n .

Предложенный в [2] алгоритм перехода от математической модели (1) в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$ к математической модели (2) в фазовом пространстве R^n включает следующие операции:

1) умножение обеих частей уравнения (1) слева на транспонированный вектор состояний x^T ;

2) применение к полученному в п. 1 результату следующего тождества для кососимметрических матриц [3, свойство 10.61]

$$x^T P(x, t)x \equiv 0, \quad (3)$$

которое позволяет представить этот результат в виде

$$x^T \frac{dx}{dt} = 0; \quad (4)$$

3) интегрирование полученного в п. 2 результата в пределах от t_0 до t ;

4) замены в полученном равенстве $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, $x(t_0) = x_0$ и представлении полученного результата в каноническом виде гиперсферы (2) [4].



2.2. Случай функциональной матрицы $P(x, t)$ общего вида

Будем рассматривать заданную в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$ математическую модель динамической системы (1) в предположении, что функциональная матрица $P(x, t)$ этой модели является матрицей общего вида, т. е. может быть представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц:

$$P(x, t) \equiv \frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} + \frac{P(x, t) - P^T(x, t)}{2},$$

что дает основание записать уравнение (1) в виде

$$\dot{x} = \left[\frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} + \frac{P(x, t) - P^T(x, t)}{2} \right] x. \quad (5)$$

Сформулируем задачу — требуется для математической модели динамической системы (в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$) общего вида (5) сконструировать сопровождающую её математическую модель в фазовом пространстве R^n .

Теорема. *Изображающая точка всякого решения уравнения (5) $x(t, t_0, x_0)$ общего вида принадлежит гиперсфере со смещённым центром:*

$$x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) + 2G^T[x(t, t_0, x_0), x_0]x(t, t_0, x_0) = x_0^T x_0 \quad (6)$$

или центральной гиперсфере переменного радиуса:

$$\begin{aligned} \{x(t, t_0, x_0) + G[x(t, t_0, x_0), x_0]\}^T \{x(t, t_0, x_0) + G[x(t, t_0, x_0), x_0]\} = \\ = x_0^T x_0 + G^T[x(t, t_0, x_0), x_0]G[x(t, t_0, x_0), x_0], \end{aligned} \quad (7)$$

за исключением «выколотых точек» центра смещения $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$:

$$G[x(t, t_0, x_0), x_0] = -\frac{1}{2} \text{col} \left[x_1(t, t_0, x_0) - \frac{x_{0,1}^2}{x_1(t, t_0, x_0)}, \dots, x_n(t, t_0, x_0) - \frac{x_{0,n}^2}{x_n(t, t_0, x_0)} \right], \quad (8)$$

обусловленных бесконечными разрывами второго рода в его координатах, определяемых переходом через ноль соответствующих координат вектора решения уравнения (5).

Доказательство. Используя алгоритм доказательства леммы, умножим обе части уравнения (5) на транспонированный вектор состояний x^T , получив

$$x^T \dot{x} = x^T \frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} x + x^T \frac{P(x, t) - P^T(x, t)}{2} x.$$

С учетом тождества (3) для кососимметрических матриц представим полученный результат в виде

$$x^T \frac{dx}{dt} = x^T \frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} x.$$

Откуда после интегрирования в пределах от t_0 до t находим

$$\frac{x^T x}{2} \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t x^T(\tau) \frac{P(x, \tau) + P^T(x, \tau)}{2} x(\tau) d\tau.$$

Умножая обе части этого равенства на 2 и раскрывая результат интегрирования левой части, получим

$$x^T(t)x(t) - x_0^T x_0 = \int_{t_0}^t x^T(\tau)[P(x, \tau) + P^T(x, \tau)]x(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Интеграл правой части (9) в соответствии с канонической формой гиперквадрик общего вида [4, с. 340] должен быть представлен посредством следующей билинейной формы:

$$-2G^T[x(t), x_0]x(t) = \int_{t_0}^t x^T(\tau)[P(x, \tau) + P^T(x, \tau)]x(\tau) d\tau. \quad (10)$$



Подстановка левой части (10) в правую часть (9) после замены $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ позволяет полученный результат записать в виде (6) или, что то же самое, (7).

Из сравнения (6) с (7) видно, что вектор $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$ определяет координаты центра смещения.

В дальнейшем (6), (7) будем называть математическими моделями динамической системы общего вида (1) в фазовом пространстве R^n .

Таким образом, как в общем случае, так и в случае кососимметрических матриц, геометрическим местом изображающих точек решения динамической системы в фазовом пространстве является гиперсфера. Для кососимметрических матриц — это гиперсфера постоянного радиуса $\sqrt{x_0^T x_0}$, а в случае функциональных матриц $P(x, t)$ общего вида — гиперсфера переменного радиуса $\sqrt{x_0^T x_0 + G^T[x(t, t_0, x_0), x_0]G[x(t, t_0, x_0), x_0]}$.

Будем рассматривать (10) как уравнение, в котором вектор состояний и интеграл правой части известны, а вектор $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$ подлежит определению. Иными словами, с позиций линейной алгебры задача определения этого вектора не доопределена, и как следствие её решение не единственно.

Поэтому какого-либо конструктивизма к рассматриваемой проблеме результат, зафиксированный в виде (10) [5], не прибавляет, хотя сам вектор $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$ может рассматриваться в качестве нового инструмента исследований.

Наполним этот вектор конструктивным содержанием.

Принимая во внимание исходное уравнение (1), запишем правую часть (10) в виде

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x^T(\tau)[P(x, \tau) + P^T(x, \tau)]x(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^t [x^T(\tau)\frac{dx(\tau)}{d\tau} + \frac{dx^T(\tau)}{d\tau}x(\tau)]d\tau = \int_{t_0}^t 2x^T(\tau)dx(\tau) = \\ &= x^T(\tau)x(\tau)|_{t_0}^t = x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) - x_0^T x_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n [x_i^2(t, t_0, x_0) - x_{0,i}^2] = \sum_{i=1}^n \frac{[x_i^2(t, t_0, x_0) - x_{0,i}^2]}{x_i(t, t_0, x_0)} x_i(t, t_0, x_0). \end{aligned}$$

Отметим, что полученное выражение сконструировано исходя из условия, что для всех $x_i(t, t_0, x_0) \neq 0, i = \overline{1, n}$, справедливо тождество

$$\frac{x_i(t, t_0, x_0)}{x_i(t, t_0, x_0)} \equiv 1.$$

Подобное представление позволяет единственным образом выделить искомый вектор G из билинейной формы левой части (10) в виде (8). Теорема доказана.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Факт получения (8) достаточно красноречив, позволяя связать динамический хаос с бесконечными разрывами второго рода [6, с. 221] в отдельных компонентах вектора G при переходе через ноль знаменателей соответствующих компонент вектора решения уравнения (1). Другими словами, управление хаосом осуществляется посредством вектора центра смещения G , не бравшимся в рассмотрение в многочисленных исследованиях динамического хаоса ранее. Тем самым указанные точки разрыва являются своего рода «выколотыми» точками центра смещения, влекущими за собой «случайный» характер поведения фазового портрета при прохождении этих точек. Отметим, что окрестности «выколотых» точек вряд ли могут быть зафиксированы соответствующим выбором шага интегрирования при численных методах построения фазовых портретов. Полученный результат, вскрывающий причины динамического хаоса, требует динамической компьютерной визуализации, связывающей якобы случайные эффекты фазовых портретов с точками разрыва в компонентах вектора центра смещения, порождающих эти эффекты.



Библиографический список

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 294 с.
2. Подчукаев В. А. Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.
3. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Пензов Ю. Е. Аналитическая геометрия. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1972. 364 с.
5. Подчукаев В. А., Звягина А. С. Новое доказательство гипотезы Ж. А. Пуанкаре // Докл. Академии воен. наук. 2009. № 5(40). С. 115–123.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

УДК 501.1

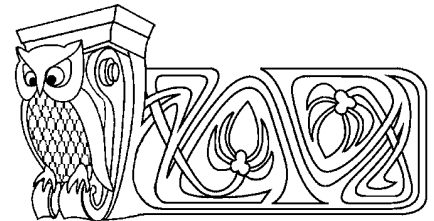
ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА ОТНОСИТЕЛЬНО L -ФУНКЦИЙ АРТИНА ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Д. С. Степаненко

Саратовский государственный университет
E-mail: stepanenko.dmitry@gmail.com

В работе рассматривается задача аналитического продолжения L -функций Артина числовых полей. Приводится уточнение результата Брауэра, а именно показывается, что в случае неглавного характера возможные полюсы L -функций должны лежать на критической прямой.

Ключевые слова: L -функция Артина, теорема Брауэра.



On Verification of Brauer's Theorem Concerning Artin's L -Functions of Number Fields

D. S. Stepanenko

This paper investigates problem of analytic continuation of Artin's L -functions. One refinement of Brauer's theorem was obtained. It states that in the case of non-main character all possible poles of Artin's L -functions should lay on the critical line.

Key words: Artin's L -function, Brauer's theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть K — конечное неабелево расширение числового поля k степени n , G — группа Галуа этого расширения, $\rho: G \rightarrow M_{n \times n}$ — представление этой группы в группу матриц с комплексными коэффициентами, χ — характер этого представления, т. е. при каждом $g \in G$: $\chi(g) = \text{Sp}(M(g))$, \wp — простой идеал поля k , β — неразветвленный простой идеал поля K , лежащий над \wp . Обозначим через $F[\wp]$ автоморфизм Фробениуса группы Галуа расширения полей вычетов $O/\wp \subset O_1/\beta$, где O и O_1 — кольца целых элементов полей k и K соответственно.

L -функция Артина определяется следующим образом:

$$L(s, \chi, K|k) = \prod_{\rho} |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-1}|^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

где $|E - M(g)\lambda|$ — характеристический многочлен матрицы $M(g)$, а произведение берется по всем неразветвленным идеалам \wp поля k .

Эту функцию впервые определил и изучил Артин в 1923 году в работе [1].

Отметим, что в случае абелева расширения $k \subset K$ L -функция Артина за вычетом множителей, относящихся к разветвленным простым идеалам, совпадает с L -функцией Дирихле поля k .

В начале 1930-х годов Артин высказал предположение, что в случае неглавного характера L -функция (1) является целой функцией.

В настоящее время гипотеза Артина доказана только в ряде случаев. В частности, в случае, когда порядок группы G свободен от квадратов и в случае, когда порядок группы G является степенью простого числа.

В 1948 году Брауэр доказал, что L -функция (1) является мероморфной функцией, которая в случае неглавного характера является регулярной и не обращается в нуль при $\sigma \geq 1$ и возможные полюсы этой функции могут располагаться только в критической полосе $0 < \sigma < 1$.

В данной работе мы уточняем результат Брауэра, а именно доказываем, что возможные полюсы могут лежать только на критической прямой $\sigma = 1/2$.



1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА L -ФУНКЦИЙ АРТИНА

Остановимся на отдельных свойствах L -функций Артина, доказательство которых можно найти в работах [1, 2].

1. $L(s, \chi)$ регулярна при $\sigma > 1$, так как соответствующее произведение сходится абсолютно и равномерно в каждом замкнутом подмножестве полуплоскости $\sigma > 1$.

2. Пусть H — нормальный делитель в G и Ω — соответствующее промежуточное поле между k и K . Каждый характер χ группы $G|H$ можно рассматривать как характер группы G , причем $L(s, \chi, K|k) = L(s, \chi, \Omega|k)$.

3. Пусть χ — непростой характер в G , а именно $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Тогда $L(s, \chi) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$.

4. Пусть Ω — промежуточное поле между k и K . Пусть $H = Gal(K|\Omega)$ и пусть $G = \sum_i H\alpha_i$ — разложение группы G на правые классы смежности. Каждому характеру χ группы H соответствует индуцированный характер χ^* группы G , определяемый равенством $\chi^*(g) = \sum_i \chi(\alpha_i g \alpha_i^{-1})$, $g \in G$.

Тогда $L(s, \chi^*, K|k) = L(s, \chi, K|\Omega)$.

5. Пусть $\Omega = K$. Тогда $H = \{e\}$. В этом случае имеем только один единичный характер χ_0 . Соответствующий индуцированный характер χ_0^* задается формулой $\chi_0^*(g) = \begin{cases} n, & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$

Пусть $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_s$ — все простые характеры группы G . Тогда $\chi_0^*(g) = \sum_{i=1}^s \Psi_i(g)\Psi_i(e)$ и для дзета-функции Дедекинда $Z_k(s)$ имеет место разложение

$$Z_k(s) = \prod_{i=1}^s L(s, \Psi_i, K|k)^{\Psi_i(e)}.$$

При изучении аналитических свойств L -функций Артина одним из основных подходов является подход, основанный на разложении характера χ в виде линейной комбинации $\chi = \sum_j \alpha_j \chi_j^*$, где χ_j^* — индуцированные характеры для характеров χ_j циклических подгрупп, а $\alpha_j \in \mathbb{Q}$.

В работе [3] было доказано, что в качестве α_j могут быть взяты целые числа. Таким образом, имеет место

Теорема Брауэра. Для любого характера χ группы G L -функция Артина $L(s, \chi, K|k)$ может быть представлена в виде

$$L(s, \chi, K|k) = \prod_i L(s, \chi_i^*, K|\Omega_i)^{n_i},$$

где каждое расширение $K|\Omega_i$ имеет циклическую группу Галуа, χ_i — характер этих циклических групп, n_i — целые числа.

Укажем два следствия теоремы Брауэра (см., например, [4]).

Следствие 1. L -функция Артина, образованная неглавным характером, является мероморфной функцией, возможные полюсы которой могут располагаться только в критической полосе $0 < \sigma < 1$.

Следствие 2. Каждая L -функция Артина удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\Phi(s, \chi) = W(\chi)\Phi(1-s, \bar{\chi}), \tag{2}$$

где $W(\chi)$ — константа, по модулю равная 1, $\Phi(s, \chi) = A(\chi)s^a \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{a(\chi)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{b(\chi)} L(s, \chi)$, A — положительная константа, а a и b — рациональные числа.

2. К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ L -ФУНКЦИЙ АРТИНА

Здесь будет доказано утверждение, уточняющее следствие 1 теоремы Брауэра. А именно имеет место

Теорема 1. В случае неглавного характера L -функция Артина является мероморфной функцией, возможные полюсы которой могут лежать только на критической прямой $\sigma = 1/2$.

Предварительно докажем следующее утверждение.



Пусть расширение $k \subset K$ является конечным абелевым расширением Галуа степени n с группой Галуа G . Рассмотрим ряд Дирихле вида

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (3)$$

где произведение берется по почти всем (за исключением конечного числа) простым идеалам поля k , полностью разлагающимся в поле K .

Относительно рядов вида (3) имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (3), обладает свойством*

$$f(s)^n = \Psi(s)Z_K(s),$$

где $\Psi(s)$ — целая функция, а $Z_K(s)$ — дзета-функция Дедекинда поля K .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_1(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it,$$

где произведение берется по всем простым \wp , для которых индекс инерции f относительно расширения $k \subset K$ равен единице.

Ясно, что

$$f(s) = \phi(s)f_1(s), \quad (4)$$

где $\phi(s)$ — целая функция.

Рассмотрим характер $\hat{\chi}_0$, который на единичном элементе группы G равен единице, а на остальных элементах — нулю. Тогда индуцированный характер $\hat{\chi}_0^*$ определяется следующим образом:

$$\hat{\chi}_0^* = \begin{cases} n, & g = e, \\ 0, & g \neq e \end{cases} \text{ и } \hat{\chi}_0 = \hat{\chi}_0^*/n.$$

Тогда $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ — все характеры группы G . Тогда легко видеть, что $\hat{\chi}_0^* = \chi_1(g)\chi_2(g)\cdots\chi_k(g)$, $g \in G$. Отсюда

$$L(s, \hat{\chi}_0^*, K|k) = \prod_{i=1}^n L_i(s, \chi_i, K|k) = Z_K(s). \quad (5)$$

В то же время

$$L(s, \hat{\chi}_0^*, K|k) = L^n(s, \hat{\chi}_0, K|k) = f_1^n(s).$$

Отсюда в силу (5) и (4) получаем

$$f(s)^n = \phi(s)^n f_1^n(s) = \phi(s)^n Z_K(s),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 1. Запишем L -функцию Артина в виде

$$L(s, \chi, K|k) = \prod_{\wp} ' |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-s}|^{-1} \prod_{\wp} '' |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-s}|^{-1}, \quad (6)$$

где произведение в первом сомножителе берется по всем неразветвленным простым идеалам \wp , для которых индекс инерции f относительно расширения $k \subset K$ равен единице, а во втором сомножителе произведение берется по всем неразветвленным простым идеалам \wp , для которых индекс инерции f относительно расширения $k \subset K$ больше единицы.

Отметим, что локальный множитель для L -функции Артина зависит только от характера χ и не зависит от явного вида матрицы. Для конечной группы G нормальная жорданова форма матрицы $M(g)$ является диагональной матрицей, причем диагональные элементы являются корнями из единицы. Поэтому можно считать, что

$$M(F[\wp]) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_m \end{pmatrix}.$$



Тогда локальный множитель равен $\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{\xi_i}{N(\wp)^s}\right)^{-1}$. Отсюда легко видеть, что второй сомножитель в произведении (6) определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > 1/2$.

Рассмотрим функцию $f(s)$, определенную первым сомножителем в произведении (6),

$$f(s) = \prod_{\wp}' |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-s}|^{-1} = \prod_{\wp}' \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right)^{-1} = f_1(s)^m, \quad (7)$$

где

$$f_1(s) = \prod_{\wp}' \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right)^{-1}. \quad (8)$$

Рассмотрим максимальное абелево расширение $k_{ab}: k \subset k_{ab} \subset K$. Известно [1], что если β — простой идеал поля k_{ab} , лежащий над простым идеалом \wp поля k , а $\hat{\beta}$ — простой идеал поля K , лежащий над простым идеалом \wp поля k , то $N_{k_{ab}|k}(\beta) = N_{K|k}(\hat{\beta}) = p^f$, т.е. если простой идеал \wp полностью разложим при расширении $k \subset K$, то он полностью разложим и при расширении $k \subset k_{ab}$.

Таким образом, к функции $f_1(s)$ вида (8) применима лемма 1 в случае абелева расширения $k \subset k_{ab}$, т.е.

$$f_1^{mn}(s) = \Psi_1^m(s) Z_{k_{ab}}^m(s), \quad (9)$$

где $\Psi_1(s)$ — целая функция.

В силу (7), (8) и (9) получаем $f(s)^n = \Psi_2(s) Z_{k_{ab}}^m(s)$, где $\Psi_2(s)$ — целая функция.

Отсюда в силу представления L -функции Артина (6) в виде произведения двух сомножителей получаем, что $L^n(s, \chi, K|k)$ является функцией, регулярной во всех точках полуплоскости $\sigma > 1/2$, за исключением точки $s = 1$, где она, возможно, имеет полюс n -го порядка.

Отсюда по следствию 1 теоремы Брауэра получаем, что $L(s, \chi, K|k)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 1/2$, а в силу следствия 2 теоремы Брауэра L -функция Артина может иметь полюса только на критической прямой $\sigma = 1/2$. \square

Библиографический список

1. Artin E. Über eine neue Art von L -Reihen // Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. 1923. Vol. 3. P. 89–108.
2. Хейльброн Х. ζ -функции и L -функции // Алгебраическая теория чисел М. : Мир, 1969. С. 310–348.
3. Brauer R. On Artin's L -series with general group characters // Ann. of Math. 1947. Vol. 48. P. 502–514.
4. Кассел Дж., Фрелих А. Нормы из неабелевых расширений // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1969. С. 476.

УДК 517.9

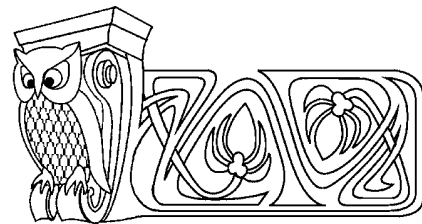
ТЕОРЕМА ВИНЕРА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. И. Струкова

Воронежский государственный университет
E-mail: irina.k.post@yandex.ru

В данной работе определяется банахова алгебра периодических на бесконечности функций. Для таких функций вводится понятие ряда Фурье и его абсолютной сходимости. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций.

Ключевые слова: банахово пространство, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, теорема Винера, абсолютно сходящийся ряд Фурье, обратимость.



Wiener's Theorem for Periodic at Infinity Functions

I. I. Strukova

In this article banach algebra of periodic at infinity functions is defined. For this class of functions notions of Fourier series and absolutely convergent Fourier series are introduced. As a result Wiener's theorem analog devoted to absolutely convergent Fourier series for periodic at infinity functions was proved.

Key words: Banach space, slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions, Wiener's theorem, absolutely convergent Fourier series, invertibility.



ВВЕДЕНИЕ

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C_\omega(\mathbb{R})$ будем обозначать банахово пространство непрерывных ω -периодических функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Будем говорить, что функция $f \in C_\omega(\mathbb{R})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{i \frac{2\pi k}{\omega} t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $AC_\omega(\mathbb{R})$. Заметим, что $AC_\omega(\mathbb{R})$ является банаховой алгеброй (см. [1]) с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{AC} = \|a\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)|.$$

В терминах введенных обозначений теорема Винера формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Если функция $f \in AC_\omega(\mathbb{R})$ и $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то $1/f \in AC_\omega(\mathbb{R})$, т. е. $1/f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k) e^{i \frac{2\pi k}{\omega} t}$, где $b \in l^1(\mathbb{Z})$.*

Доказательство теоремы 1 приводится в [2].

Теорема Винера обобщалась в нескольких направлениях. Отметим теорему Бохнера–Филлипса [3] для функций со значениями в банаховой алгебре, а также статьи [4, 5], в которых теорема Винера была доказана для операторов, матрицы которых имеют абсолютно суммируемые диагонали. Ссылки на исследования, связанные с приложениями результатов, имеются в [6].

В данной статье теорема Винера распространяется на класс периодических на бесконечности функций.

Далее введем множество периодических на бесконечности функций.

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих из X в X .

Символом $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций со значениями в X с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X$.

Символом $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}$ рассмотрим изометрическую группу операторов (или представление) $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_{b,u}$, действующую по правилу

$$(S(\alpha)x)(t) = x(t + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся или стационарной на бесконечности*, если $(S(\alpha)x - x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Например, функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ вида $f(t) = \sin \ln(1 + t^2)$ является медленно меняющейся на бесконечности.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода $\omega > 0$* , если $(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Определение периодической на бесконечности функции было предложено А. Г. Баскаковым и использовалось в статье [7].

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, а множество периодических на бесконечности функций периода ω — символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

В случае $X = \mathbb{C}$ для рассматриваемых пространств будем использовать обозначения $C_{b,u}(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$, $C_{sl}(\mathbb{R})$, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$.

Отметим, что $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X$. Кроме того, $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образуют банаховы алгебры с поточечным умножением, если X — банахова алгебра.



Определение 3. *Обобщенным рядом Фурье функции $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида*

$$x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(t) e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

а функции $x_n, n \in \mathbb{Z}$, определяемые по формулам

$$x_n(t) = \frac{e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t}}{\omega} \int_0^{\omega} x(t + \tau) e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} \tau} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

— *коэффициентами Фурье функции x* . Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье функции x абсолютно сходится, если найдутся функции $y_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X), n \in \mathbb{Z}$, такие, что $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$ и $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|_{\infty} < \infty$.

Заметим, что слово «обобщенный» в дальнейшем будет опускаться.

Отметим также, что рассматриваемый ряд Фурье может не сходиться к функции x и понимается как формальный ряд.

Пример 1. Примером функции из $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье является функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ вида

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{n^2} \sin(\alpha_n \ln(1 + t^2)) \right) e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Отметим, что функции $f_n, n \in \mathbb{Z}$, построенные по функции f по формуле (2), не совпадают с функциями $y_n : t \mapsto \frac{1}{n^2} \sin \alpha_n \ln(1 + t^2), t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, но $f_n - y_n \in C_0(\mathbb{R})$.

Замечание 1. Если $x \in C_{\omega}(\mathbb{R})$, то ряд Фурье из определения 3 совпадает с обычным рядом Фурье функции x .

Далее будем использовать следующее обозначение: $e_n(t) = e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что отображение $x \mapsto \mathcal{P}_n x = x_n e_n : C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X), n \in \mathbb{Z}$, является ограниченным оператором с $\|\mathcal{P}_n\| \leq 1$. Кроме того, $\text{Im}(\mathcal{P}_n^2 - \mathcal{P}_n) \subset C_0(\mathbb{R}, X)$ для образа $\text{Im}(\mathcal{P}_n^2 - \mathcal{P}_n)$ оператора $\mathcal{P}_n^2 - \mathcal{P}_n$ (доказательство приводится в конце параграфа 3), однако операторы $\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{Z}$, не являются проекторами.

До конца этого параграфа символ X будет обозначать банахову алгебру.

Определение 4. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$* , если существует функция $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $xy - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Функцию y будем называть *обратной к x относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$* .

Замечание 2. Непосредственно из определения 4 следует, что функция $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $x = y + x_0$, где $x_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$, а функция $y \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ такова, что $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|y(t)\|_X > 0$. Из определения 4 также следует, что функция $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда существует такое число $A > 0$, что $\inf_{|t| > A} \|x(t)\|_X > 0$.

Нетрудно видеть, что если y_1, y_2 — обратные к $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции, то $y_1 - y_2 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 2. *Если функция $a \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье обратной относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции также абсолютно сходится.*

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ИХ РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть \mathcal{B} — банахова алгебра с единицей и ω — положительное число. Рассмотрим действующую в ней ω -периодическую изометрическую сильно непрерывную группу операторов (представление) $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{B}$, обладающую свойствами

$$T(t)(ab) = T(t)a \cdot T(t)b, \quad T(t)e = e, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

где a, b — произвольные элементы из \mathcal{B} , а e — единица в алгебре \mathcal{B} .



Таким образом, каждый из операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является гомоморфизмом алгебры \mathcal{B} и каждая функция $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{B}$, является непрерывной ω -периодической функцией.

Из приведенных свойств следует, что если элемент $a \in \mathcal{B}$ обратим, то

$$e = T(t)e = T(t)(aa^{-1}) = (T(t)a)T(t)a^{-1} = (T(t)a^{-1})T(t)a, \quad a \in \mathcal{B},$$

и, следовательно, $(T(t)a)^{-1} = T(t)a^{-1}$.

Рассмотрим ряд Фурье (см. [8, с. 64–66]):

$$T(t)a \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

функции $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{B}$, где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Ряд $a \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ назовем *рядом Фурье* элемента $a \in \mathcal{B}$, а a_n , $n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье* этого элемента.

Если ряд Фурье элемента $a \in \mathcal{B}$ *абсолютно сходится*, т. е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty$, то справедливо равенство $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$.

Лемма 1. Пусть $a \in \mathcal{B}$. Тогда $T(\alpha)a_n = e^{i \frac{2\pi n}{\omega} \alpha} a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, где a_n , $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье элемента a . Причем операторы P_n , определяемые формулой

$$P_n a = a_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются проекторами с $\|P_n\| \leq 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $a \in \mathcal{B}$ и зафиксируем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть a_n , $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье элемента a , определяемые по формуле (5). Тогда для них справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} T(\alpha)a_n &= T(\alpha) \left(\frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt \right) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(\alpha)T(t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(\alpha + t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = \\ &= \frac{e^{i \frac{2\pi n}{\omega} \alpha}}{\omega} \int_\alpha^{\omega + \alpha} T(\tau)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} \tau} d\tau = \frac{e^{i \frac{2\pi n}{\omega} \alpha}}{\omega} \int_0^\omega T(\tau)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} \tau} d\tau = e^{i \frac{2\pi n}{\omega} \alpha} a_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $T(\alpha)a_n = e^{i \frac{2\pi n}{\omega} \alpha} a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем теперь, что операторы P_n , $n \in \mathbb{Z}$, определяемые формулой $P_n a = a_n$, являются проекторами, т. е. $P_n^2 = P_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $a \in \mathcal{B}$. Тогда

$$\begin{aligned} P_n a &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ P_n^2 a &= P_n(P_n a) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)a_n e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a_n dt = a_n = P_n a, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $\|P_n\| \leq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ (при доказательстве используется свойство $\|T(t)\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$).

$$\|P_n\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|P_n a\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \left\| \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt \right\| \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \|T(t)a\| dt \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \|T(t)\| \|a\| dt \leq 1.$$

Лемма доказана.



Для элемента $a \in \mathcal{B}$ рассмотрим оператор $A \in \text{End } \mathcal{B}$ вида $Ax = ax$, $x \in \mathcal{B}$. Оператору A поставим в соответствие ω -периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{B}$, определяемую формулой $\Phi_A(t) = T(t)AT(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$\Phi_A(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$A_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)AT(-t)e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ назовем *рядом Фурье оператора A* , а операторы A_n — *коэффициентами Фурье* этого оператора. Определим двустороннюю числовую последовательность $(d_A(n))$, положив $d_A(n) = \|A_n\|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2. Для коэффициентов Фурье A_n , $n \in \mathbb{Z}$, оператора A справедливы представления $A_n x = a_n x$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{B}$, причем $\|A_n\| = \|a_n\|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Покажем, что $A_n x = a_n x$ для всех $x \in \mathcal{B}$.

Используя формулы (5) и (6), а также тот факт, что операторы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, образуют гомоморфизм алгебры, получаем

$$\begin{aligned} A_n x &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)AT(-t)x e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)(aT(-t)x) e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega (T(t)a)T(t)(T(-t)x) e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = \left(\frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)a e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt \right) x = a_n x. \end{aligned}$$

Для любого $x \in \mathcal{B}$ справедливо неравенство $\|A_n x\| \leq \|a_n\| \|x\|$. Поскольку $a_n = A_n e$ и $\|e\| = 1$, то $\|A_n\| = \|a_n\|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма доказана.

Пусть ряд Фурье оператора A абсолютно сходится, т. е. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|A_n\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty$. В этом случае функция Φ_A непрерывна в равномерной операторной топологии.

Далее используется следующая

Теорема 3. Если обратимый оператор $A \in \text{End } \mathcal{B}$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье обратного оператора также абсолютно сходится.

Данное утверждение следует из теоремы 2 и замечания к ней из работы [3] (см. также [9]).

3. ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Всюду в этом параграфе через X обозначается банахова алгебра с единицей. Ясно, что группа сдвигов S , определенная по формуле (1), в пространстве периодических на бесконечности функций не является периодической.

В дальнейшем символом \mathcal{B} будем обозначать фактор-пространство $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, которое становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом:

$$\widetilde{x\tilde{y}} = \widetilde{x\tilde{y}}, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{B}. \quad (7)$$

В нем построим изометрическую группу операторов $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{B}$, действующую по правилу

$$T(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x} = S(t)x + C_0(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

где x — некоторый представитель класса $\tilde{x} \in \mathcal{B}$.



Поскольку $T(\omega)\tilde{x} = \widetilde{S(\omega)x} = S(\omega)x + C_0(\mathbb{R}, X) = (S(\omega)x - x) + x + C_0(\mathbb{R}, X) = x + C_0(\mathbb{R}, X) = \tilde{x}$, то представление T является ω -периодическим.

Кроме того, из сильной непрерывности представления S следует сильная непрерывность представления T .

В терминах группы T принадлежность класса \tilde{x} алгебре \mathcal{B} будет означать, что $T(\omega)\tilde{x} = \tilde{x}$.

Ряд Фурье функции $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$, являющейся представителем класса \tilde{x} , имеет вид

$$x(\tau) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(\tau) e^{i \frac{2\pi n}{\omega} \tau},$$

где коэффициенты Фурье x_n , $n \in \mathbb{Z}$, определяются по формуле (2), а среднее x_0 имеет вид

$$x_0(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} x(t + \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Коэффициенты Фурье функции $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ обладают следующим свойством: $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Вначале покажем, что среднее x_0 функции $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Возьмем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$ и покажем, что $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Непосредственно из леммы 1 следует, что для класса \tilde{x}_0 , содержащего функцию x_0 , справедливо равенство $T(\alpha)\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$, т. е. x_0 обладает свойством $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. В силу произвольности выбора числа $\alpha \in \mathbb{R}$ из определения медленно меняющейся на бесконечности функции получаем, что $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Теперь докажем это свойство для коэффициентов Фурье x_n , $n \in \mathbb{Z}$, функции x . Обозначив $y(t) = x(t)e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, получаем, что $S(\omega)y - y \in C_0(\mathbb{R}, X)$, т. е. $y \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$. Тогда среднее функции y , определяемое формулой

$$y_0(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} x(t + \tau) e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} (t + \tau)} d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Сравнивая последнюю формулу с формулой (2), получаем, что $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Итак, у нас имеется фактор-алгебра $\mathcal{B} = C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующая в ней ω -периодическая сильно непрерывная изометрическая группа операторов (представление) T , определяемая формулой (8).

Представлению T поставим в соответствие его ряд Фурье:

$$T(t)\tilde{x} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{P}_n \tilde{x} e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{x} \in \mathcal{B}.$$

Коэффициенты Фурье представления T имеют вид

$$\widetilde{P}_n \tilde{x} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} T(t)\tilde{x} e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На представителях рассматриваемых классов имеем

$$(P_n x)(\tau) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} (S(t)x)(\tau) e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} x(t + \tau) e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} t} dt = x_n(\tau) e^{i \frac{2\pi n}{\omega} \tau},$$

где x_n , $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции x , определяемые по формуле (2).

Из формулы (5) непосредственно следует, что коэффициенты Фурье представления T обладают следующим свойством: $\widetilde{P}_n \tilde{x} = \widetilde{x}_n$, $n \in \mathbb{Z}$.



Пусть x — представитель класса $\tilde{x} \in \mathcal{B}$. Тогда последнее равенство означает, что $\widetilde{P_n x} = \tilde{x}_n$, т. е. $P_n x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу того что $\widetilde{P_n}$ являются проекторами, справедливо равенство $\widetilde{P_n^2 \tilde{x}} = \widetilde{P_n \tilde{x}} = \tilde{x}_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\widetilde{P_n^2 x} = \tilde{x}_n$, т. е. $P_n^2 x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $P_n^2 x - P_n x \in C_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $\text{Im}(P_n^2 - P_n) \subset C_0(\mathbb{R}, X)$.

Если ряд Фурье класса $\tilde{x} \in \mathcal{B}$ абсолютно сходится, т. е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\tilde{x}_n\| < \infty$, то из свойств нормы в фактор-пространстве следует, что в этом случае можно найти такие представители y_n классов \tilde{x}_n , что $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Заметим, что функция $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда обратим класс $\tilde{x} \in \mathcal{B}$, ее содержащий. Это утверждение непосредственно вытекает из определения 4.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Теперь для получения основного результата в качестве алгебры \mathcal{B} рассмотрим фактор-алгебру $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, а в качестве представления $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{B}$ рассмотрим ω -периодическую группу изометрических операторов $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{B}$, определяемую по формуле (8).

Покажем, что группа T обладает свойствами (4).

С использованием формул (7) и (8) получаем, что

$$T(t)(\tilde{x}\tilde{y}) = T(t)(\widetilde{xy}) = \widetilde{S(t)(xy)} = S(t)xS(t)y + C_0(\mathbb{R}, X) = (T(t)\tilde{x})T(t)\tilde{y}, \quad x \in \tilde{x}, \quad y \in \tilde{y}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т. е. для группы T свойство (4) действительно выполняется.

Рассмотрим оператор $A \in \text{End } \mathcal{B}$ следующего вида:

$$A\tilde{x} = \tilde{a}\tilde{x}, \quad \tilde{a} \in \mathcal{B}. \tag{9}$$

Оператору A поставим в соответствие ω -периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{B}$, определяемую формулой $\Phi_A(t) = T(t)AT(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом, для рассматриваемого оператора справедлива теорема 3.

Приступим к доказательству теоремы 2. Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{B} = C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующую в ней ω -периодическую изометрическую группу операторов T , определяемую по формуле (8).

По обратимой функции $a \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$, объявленной в условиях теоремы, построим класс $\tilde{a} \in \mathcal{B}$, который также будет обратим. Обозначив обратный класс символом \tilde{b} , получаем, что $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{1}$.

Введем в рассмотрение оператор $A \in \text{End } \mathcal{B}$, определяемый формулой (9). Это оператор умножения на элемент $\tilde{a} \in \mathcal{B}$, причем он обратим. Его обратный оператор имеет вид $B\tilde{x} = \tilde{b}\tilde{x}$, $\tilde{b} \in \mathcal{B}$.

Для оператора A справедлива теорема 3, и, значит, ряд Фурье класса \tilde{b} абсолютно сходится. Тогда можно найти такой представитель b класса \tilde{b} , что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$, и его ряд Фурье абсолютно сходится: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|b_n\|_\infty < \infty$. Теорема доказана.

Расшифровкой теоремы 2 является следующая

Теорема 4. Если функция $a \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и ее ряд Фурье абсолютно сходится, то существует функция $b \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, такая, что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00276).

Библиографический список

1. Кахан Ж. П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М. : Мир, 1976. 203 с.
2. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М. : Физматлит, 1963. 256 с.
3. Bochner S., Fillips R. S. Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings // Ann. of Math. 1942. № 3. P. 409–418.
4. Баскаков А. Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26.
5. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 14–28.
6. Groechenig K. Wiener's lemma : theme and variations.



An introduction to spectral invariance and its applications // Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston : Birkhäuser, 2010. P. 60–63.

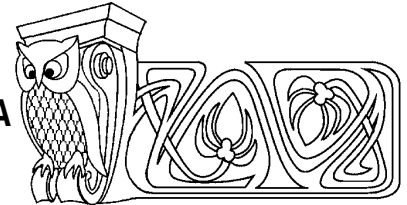
7. Калужина Н. С. Медленно меняющиеся функции, периодические на бесконечности функции и их свойства // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 97–102.

8. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 9. С. 3–151.

9. Баскаков А. Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 17–26.

УДК 517.518

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССАМ БЕСОВА–ПОТАПОВА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ



Р. Н. Фадеев

Саратовский государственный университет
E-mail: belal_templier@mail.ru

В данной статье мы получаем необходимые и достаточные условия принадлежности функции классам Бесова–Потапова. Используя функции с коэффициентами Фурье по мультипликативным системам класса GM, мы показываем точность некоторых из этих результатов.

Ключевые слова: мультипликативная система, классы Бесова–Потапова, обобщенная монотонность, теорема Харди–Литтлвуда–Пэли.

Necessary and Sufficient Conditions of Belonging to the Besov–Potapov Classes and Fourier Coefficients with Respect to Multiplicative Systems

R. N. Fadeev

In this paper we obtain necessary and sufficient conditions for a function to belong to the Besov–Potapov classes. Using functions with Fourier coefficients with respect to multiplicative systems from the class GM, we show the sharpness of some these results.

Key words: multiplicative system, Besov–Potapov classes, generalized monotonicity, Hardy–Littlewood–Paley theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \leq p_j \leq N$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Если $m_0 = 1, m_j = m_{j-1}p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, то каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \quad (1)$$

Это разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n, 0 < k < m_n, k, n \in \mathbb{Z}_+$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Если $x, y \in [0, 1)$ записать в виде (1), то по определению $x \oplus y = \sum_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}, z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}, z_j \in \mathbb{Z}_j$. Аналогично определяется $x \ominus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2)$$

Для чисел $x \in [0, 1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j \right).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой, или системой Виленкина. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L[0, 1)$ (см. [1, §1.5]). Поэтому можно определить коэффициенты Фурье и частичную сумму Фурье формулами

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) \overline{\chi_n(x)} dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad S_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i) \chi_i(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$



По теореме Харди–Литтлвуда–Пэли (см. [2, гл. 6, теорема 6.3.2]) для $f \in L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2} \leq C \|f\|_p^p, \quad 1 < p \leq 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2} + |\hat{f}(0)|^p \geq C \|f\|_p^p, \quad p \geq 2, \quad (3)$$

где $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ — норма в пространстве $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0, 1] : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$ и $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. Определим модуль непрерывности $\omega^*(f, t)_p$ при $1 \leq p < \infty$ равенством $\omega^*(f, t)_p = \sup_{0 < h < t} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p$. Далее будем обозначать $\omega^*(f, 1/m_n)_p$ через $\omega_n(f)_p$. Имеет место важное неравенство А. В. Ефимова [1, §10.5] для $f \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$,

$$E_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega_n(f)_p \leq 2E_{m_n}(f)_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

Пусть $\phi(t)$ — измеримая положительная функция на $[0, 1)$ такая, что $\phi(t) \in L[\delta, 1)$ при всех $0 < \delta < 1$. Введем две последовательности: $\{\beta(n)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\alpha(n)\}_{n=1}^{\infty}$ формулами $\beta(n) = \int_{1/(n+1)}^1 \phi(t) dt$ при $n \in \mathbb{N}$, $\beta(0) = 1$, и $\alpha(n) = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \phi(t) dt$ при $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать также $\mu(n) = \int_{1/m_n}^{1/m_{n-1}} \phi(t) dt$. Для $p, \theta \in [1, \infty)$ определим пространство

$$B(\theta, p, \phi) = \left\{ f \in L^p[0, 1] : \|f\|_{\theta, p, \phi} = \|f\|_p + \left(\int_0^1 \phi(t) \left(\omega^*(f, t)_p \right)^\theta dt < \infty \right)^{1/\theta} \right\}.$$

Далее считаем, что $\phi(t)$ удовлетворяет δ_2 -условию

$$\int_{\delta/2}^{\delta} \phi(t) dt \leq C \int_{\delta}^{2\delta} \phi(t) dt \leq C \int_{\delta}^1 \phi(t) dt, \quad \delta \in (0, 1/2), \quad C > 0. \quad (5)$$

Если $p_n \leq P \leq 2^a$, $n \in \mathbb{N}$, то из δ_2 -условия вытекает неравенство

$$\mu(n+1) \leq \int_{2^{-a}/m_n}^{1/m_n} \phi(t) dt \leq \sum_{j=1}^{[a]+1} C^j \int_{1/m_n}^{2/m_n} \phi(t) dt \leq A(C)\mu(n). \quad (6)$$

Для 2π -периодических функций аналогичные $B(\theta, p, \phi)$ классы функций изучались М. К. Потаповым [3, 4]. При $\phi(t) = t^{-\theta r - 1}$ они соответствуют классическим пространствам Бесова $B_{p\theta}^r$. Изучаемые здесь классы введены С.С. Волосивцом [5]. Необходимые и достаточные условия принадлежности функции пространствам $B_{p\theta}^r$ в терминах коэффициентов Фурье были найдены М. К. Потаповым и М. Беришей [6]. Эти результаты были перенесены на обобщенные пространства Бесова–Потапова М. Беришей [7–9]. Целью нашей работы является изучение условий принадлежности функций пространствам $B(\theta, p, \phi)$ и $B(\theta, H, \phi)$ в терминах коэффициентов Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$. При этом для рядов Фурье с коэффициентами класса GM , введенного С. Ю. Тихоновым [10], получаются более точные оценки, позволяющие установить неулучшаемость ряда общих результатов.

По определению $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$, если для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$. Как показано в [10], класс GM содержит в себе класс $RBVS$ последовательностей, удовлетворяющих условию $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$, и класс квазимонотонных последовательностей QM , удовлетворяющих условию $a_n n^{-\tau} \downarrow$ при некотором $\tau > 0$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 принадлежит L. Leindler [11] и является обобщением неравенства Харди–Литтлвуда [12, теорема 346].

Лемма 1. Пусть $a_n \geq 0$ и $\lambda_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$. 1) при $p \geq 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^p a_n^p.$$



2) при $0 < p < 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \geq 9^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^p a_n^p.$$

Будем говорить, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \geq 0$, квазиубывает, если $Ca_n \geq a_i$ при $n \leq i \leq 2n$. Как показал С. Ю. Тихонов [10], последовательности класса GM удовлетворяют этому условию. Поэтому если $\{\hat{f}(i)\}_{i=0}^{\infty} \in GM$, то $\{(\hat{f}(i))^p i^{p-2}\}_{i=0}^{\infty}$ является квазиубывающей.

Будем называть последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти возрастающей степени γ , если при всех $n \geq m$ верно неравенство $Cn^\gamma \lambda_n \geq m^\gamma \lambda_m$. В [13] установлена

Лемма 2. 1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазиубывает, $\lambda_n > 0$. Тогда при $0 < p < 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} \left(n\lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \right).$$

2. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазиубывает, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — почти возрастающая последовательность степени $\gamma \in (0, 1)$ и одновременно $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазиубывает. Тогда при $p \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \geq C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^p a_n^p.$$

Лемма 3. Пусть $f \in L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

1) при $2 \leq p < \infty$ имеем $E_n(f)_p \leq C \left(\sum_{i=n}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p i^{p-2} \right)^{1/p}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) при $1 < p \leq 2$ имеем $E_n(f)_p \leq E_n(f)_2 = \left(\sum_{i=n}^{\infty} |\hat{f}(i)|^2 \right)^{1/2}$, если ряд справа сходится;

3) при $2 \leq p \leq \infty$ имеем $E_n(f)_p \geq E_n(f)_2 = \left(\sum_{i=n}^{\infty} |\hat{f}(i)|^2 \right)^{1/2}$;

4) при $1 < p \leq 2$ имеем $E_n(f)_p \geq C \left(\sum_{i=n}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p i^{p-2} \right)^{1/p}$.

Доказательство. Все утверждения леммы 3 вытекают либо из теоремы Харди–Литтлвуда–Пэли либо из формулы $E_n^2(f)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$, верных для произвольной ортонормированной системы.

Лемма 4. Пусть $1 \leq p, \theta < \infty$, $f \in L^p[0, 1]$. Тогда

$$C_1 \sum_{i=m_1}^{\infty} \alpha(i) E_i(f)_p^\theta \leq \int_0^1 \phi(t) (\omega^*(f, f)_t)^\theta dt \leq C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) E_i(f)_p^\theta. \quad (7)$$

Доказательство. Результат леммы 4 легко следует из следствия 2 работы [5].

Лемма 5. ([14, гл. 4, §4.3]) Пусть $D_n = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|D_n(x)| \leq \min(n, N/x)$, $x \in (0, 1)$, и, как следствие, $\|D_n\|_p \leq Cn^{1-1/p}$ при $1 < p < \infty$.

Лемма 6. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. Тогда при $n \leq i \leq 2n$ справедливо неравенство $a_n \geq Ca_i$. Как следствие, для $n \in [m_k, m_{k-1})$ имеем $C_1 a_{m_k} \geq a_n \geq C_2 a_{m_{k+1}}$.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано С. Ю. Тихоновым [10]. Для доказательства второго утверждения отметим, что если $[\log_2 N] = b$, то $n/m_k \leq 2^{b+1}$ и $a_{m_k} \geq C^{b+1} a_n$. Аналогично, $a_n \geq C^{b+1} a_{m_k}$. Лемма доказана.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p i^{p-2}$ сходится. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x)$ является рядом Фурье функции $f \in L^p[0, 1)$ и имеют место оценки

$$E_n(f)_p \leq C \left(n^{1-1/p} a_n + \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2} \right)^{1/p} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$



$$n^{1-1/p} a_n + E_n(f)_p \geq C \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2} \right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

При $p \geq 2$ можно убрать $n^{1-1/p} a_n$ в правой части (8), а при $1 < p \leq 2$ это выражение можно убрать из левой части (9).

Для доказательства используется лемма 6 и аналог теоремы Литтлвуда–Пэли для системы $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, доказанный С. Watari [15] (ср. с доказательством теоремы 1 в [16]).

Сформулируем достаточные условия принадлежности функции классу Бесова–Потапова $B(\theta, p, \phi)$.

Теорема 2. 1. Пусть $2 \leq p < \infty$, $f \in L^p[0, 1]$, $\theta \geq 1$.

а) если $\theta/p \geq 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p} \beta(k)^{\theta/p} |\hat{f}(k)|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p} < \infty$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$;

б) если $\theta/p \leq 1$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k) |\hat{f}(k)|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$;

2. пусть $1 < p \leq 2$, $f \in L^p[0, 1]$, $\theta \geq 1$;

а) если $\theta \geq 2$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/2} \beta(k)^{\theta/2} |\hat{f}(k)|^{\theta}$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$;

б) если $\theta \leq 2$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k) |\hat{f}(k)|^{\theta}$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$.

Доказательство. 1. Пусть $p \geq 2$. Используя пункт 1) леммы 3 и лемму 1, получаем при $\theta/p \geq 1$, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p} \left(\sum_{i=1}^k \alpha(i) \right)^{\theta/p} |\hat{f}(k)|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p} = C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p} (\beta(k))^{\theta/p} |\hat{f}(k)|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}. \end{aligned}$$

При $\theta/p \leq 1$ применяем неравенство Йенсена и меняем порядок суммирования. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} = C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha(k) |\hat{f}(i)|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} = C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) |\hat{f}(i)|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p}. \end{aligned}$$

С помощью леммы 4 получаем в обоих случаях $f \in B(\theta, p, \phi)$.

2. Используя пункт 2) леммы 3 и лемму 1 при $\theta/2 \geq 1$, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^2 \right)^{\theta/2} \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/2} \left(\sum_{i=1}^k \alpha(i) \right)^{\theta/2} |\hat{f}(k)|^{\theta} = C \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/2} (\beta(k))^{\theta/2} |\hat{f}(k)|^{\theta}. \end{aligned}$$

При $\theta/2 \leq 1$ применяем неравенство Йенсена и меняем порядок суммирования. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \alpha(k) |\hat{f}(i)|^{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) |\hat{f}(i)|^{\theta}.$$

С помощью леммы 4 получаем $f \in B(\theta, p, \phi)$. Теорема доказана.

Для $\phi(t) = t^{-\beta}$, $\beta > 1$ имеем $\alpha(k) \asymp k^{\beta-2}$, а $\beta(k) \asymp k^{\beta-1}$. Поэтому $\sum_{k=1}^n \alpha(k) = O(n\alpha(n))$ и $n\alpha(n) = O\left(\sum_{k=1}^n \alpha(k)\right)$. Будем использовать далее оба этих условия.



Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0, 1)$, $\theta \geq 1$ и $\phi(t)$ такова, что $\beta(k) \leq Ck\alpha(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда для $f \in B(\theta, p, \phi)$ достаточными являются следующие условия:

- а) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta} k^{\theta-\theta/p} < \infty$ при $p \geq 2$ и $\theta/p \geq 1$;
- б) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p+1} < \infty$ при $p \geq 2$ и $0 < \theta/p \leq 1$;
- в) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta} k^{\theta/2} < \infty$ при $1 < p \leq 2$ и $\theta \geq 2$;
- г) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta} k < \infty$ при $1 < p \leq 2$ и $1 \leq \theta \leq 2$.

Следствие 2. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0, 1)$, $\theta \geq 1$ и $\phi(t) = t^{-\theta r-1}$, $r > 0$. Тогда для $f \in B(\theta, p, \phi)$ достаточными являются следующие условия:

- а) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(1+r-1/p)-1} \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta}$ при $p \geq 2$ и $\theta/p \geq 1$;
- б) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-2/p)} \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta}$ при $p \geq 2$ и $0 < \theta/p \leq 1$;
- в) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(1/2+r)-1} \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta}$ при $1 < p \leq 2$ и $\theta \geq 2$;
- г) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta r} \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta}$ при $1 < p \leq 2$ и $1 \leq \theta \leq 2$.

Теперь получим необходимые условия принадлежности пространству $B(\theta, p, \phi)$

Теорема 3. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $f \in B(\theta, p, \phi)$. Тогда

- а) при $1 < p \leq 2$ и $\theta/p \geq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k) \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$;
- б) при $1 < p \leq 2$ и $\theta/p \leq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p} \beta(k)^{\theta/p} \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}$;
- в) при $p \geq 2$ и $\theta \geq 2$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k) \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta}$;
- г) при $p \geq 2$ и $\theta \leq 2$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/2} \beta(k)^{\theta/2} \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta}$.

Доказательство. а. Применим пункт 4) леммы 3 и неравенство Йенсена. Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} &\geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \sum_{i=k}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} = \\ &= C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha(k) \left| \hat{f}(i) \right|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p} = C \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) \left| \hat{f}(i) \right|^{\theta} i^{\theta-2\theta/p}. \end{aligned}$$

б. Используя пункт 4) леммы 3 и пункт 2) леммы 1, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} &\geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \geq \\ &\geq 9^{-1} C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p} \beta(k)^{\theta/p} \left| \hat{f}(k) \right|^{\theta} k^{\theta-2\theta/p}. \end{aligned}$$

в. Применим пункт 3) леммы 3 и неравенство Йенсена. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^{\theta} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^2 \right)^{\theta/2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \sum_{i=k}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^{\theta} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha(k) \left| \hat{f}(i) \right|^{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i) \left| \hat{f}(i) \right|^{\theta}. \end{aligned}$$



г. Используя пункт 3) леммы 3 и пункт 2) леммы 1, находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^\theta \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^2 \right)^{\theta/2} \geq 9^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/2} \beta(k)^{\theta/2} |\hat{f}(k)|^\theta.$$

С помощью леммы 4 завершаем доказательство теоремы.

Следствие 3. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $\phi(t)$ такова, что $\beta(k) \geq Ck\alpha(k)$, $k \in \mathbb{N}$, и $f \in B(\theta, p, \phi)$.

Тогда

а) при $1 < p \leq 2$ и $\theta/p \geq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta-2\theta/p+1} \alpha(k) |\hat{f}(k)|^\theta$;

б) при $1 < p \leq 2$ и $0 < \theta/p \leq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta-\theta/p} \alpha(k) |\hat{f}(k)|^\theta$;

в) при $p \geq 2$ и $\theta/2 \geq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha(k) |\hat{f}(k)|^\theta$;

г) при $p \geq 2$ и $0 < \theta/2 \leq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta/2} \alpha(k) |\hat{f}(k)|^\theta$.

Следствие 4. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \leq 1$, $\phi(t) = t^{-\theta r-1}$, $r > 0$, $f \in B(\theta, p, \phi)$. Тогда

а) при $1 < p \leq 2$ и $\theta/p \geq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-2/p)} |\hat{f}(k)|^\theta$;

б) при $1 < p \leq 2$ и $0 < \theta/p \leq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-1/p)-1} |\hat{f}(k)|^\theta$;

в) при $p \geq 2$ и $\theta/2 \geq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta r} |\hat{f}(k)|^\theta$;

г) при $p \geq 2$ и $0 < \theta/2 \leq 1$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(1/2+r)} |\hat{f}(k)|^\theta$.

Теперь получим аналогичные теореме 2 оценки для функций с коэффициентами Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ класса GM.

Теорема 4. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $f \in L^p[0, 1]$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty} \in GM$. Для включения $f \in B(\theta, p, \phi)$ достаточными являются следующие условия:

а) $p \geq 2$, $\theta/p \geq 1$ и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p} (\beta(k))^{\theta/p} (\hat{f}(k))^\theta k^{\theta-2\theta/p}; \tag{10}$$

б) $p \geq 2$, $0 < \theta/p \leq 1$ и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}(k))^\theta k^{\theta-\theta/p-1} (k\alpha(k) + \beta(k)); \tag{11}$$

в) $1 < p \leq 2$, $\theta/p \geq 1$ и сходятся ряды (10) и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) (\hat{f}(k))^\theta k^{\theta-\theta/p}; \tag{12}$$

г) $1 < p \leq 2$, $0 < \theta/p \leq 1$ и сходятся ряды (11) и (12).

Доказательство. а. В этом случае применим результат пункта а) теоремы 2.

б. Пользуясь леммой 2 и оценкой 1) леммы 3, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^\theta &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} (\hat{f}(i))^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}(k))^\theta k^{\theta-2\theta/p} k^{\theta/p-1} (k\alpha(k) + \beta(k)) \leq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}(k))^\theta k^{\theta-\theta/p-1} (k\alpha(k) + \beta(k)). \end{aligned}$$

С помощью леммы 4 заключаем, что $f \in B(\theta, p, \phi)$.



в. В силу неравенства (8) имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^\theta \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} (\hat{f}(i))^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) k^{\theta-\theta/p} (\hat{f}(k))^\theta = I_1 + I_2. \quad (13)$$

Сходимость I_2 следует из условия. Ряд I_1 аналогично пункту а) теоремы 2 оценивается через (10). Поэтому левая часть (13) сходится.

г. Снова рассмотрим неравенство (13). К I_1 применяем лемму 2 аналогично пункту б), а сходимость ряда I_2 вытекает из условия. Осталось применить лемму 4.

Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $f \in L^p[0, 1)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^{\infty} \in GM$, $\phi(t)$ такова, что $\beta(k) \leq Ck\alpha(k)$. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) k^{\theta-\theta/p} (\hat{f}(k))^\theta$, то $f \in B(\theta, p, \phi)$.

Доказательство. Ряды (10) и (11) с помощью неравенства $\beta(k) \leq Ck\alpha(k)$ мажорируются рядом (12).

Следствие 6. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $f \in L^p[0, 1)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty} \in GM$, $\phi(t) = t^{-\theta r-1}$, $r > 0$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-1/p)-1} (\hat{f}(k))^\theta$ следует, что $f \in B(\theta, p, \phi)$.

Теорема 5. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $f \in B(\theta, p, \phi)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^{\infty} \in GM$. Тогда

а) если $1 < p \leq 2$, $0 < \theta/p \leq 1$, то сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p} \beta(k)^{\theta/p} (\hat{f}(k))^\theta k^{\theta-2\theta/p}; \quad (14)$$

б) если $1 < p \leq 2$, $\theta/p \geq 1$, а $\{\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ является почти возрастающей степени $\gamma \in (0, 1)$ и квазиубывающей, то сходится ряд (14);

в) если $p \geq 2$, $0 < \theta/p \leq 1$, а $\{\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ квазиубывает, то сходится ряд (14);

г) если $p \geq 2$, $\theta/p \geq 1$, а $\{\alpha(k)\}_{k=0}^{\infty}$ является почти возрастающей степени $\gamma \in (0, 1)$ и квазиубывающей, то сходится ряд (14).

Доказательство. а. Используем результат пункта б) теоремы 6.

б. Используя пункт 2) леммы 7 и пункт 2) леммы 3, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^\theta &\geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} (\hat{f}(i))^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \geq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p} \left(\sum_{i=1}^k \alpha(i) \right)^{\theta/p} \times \\ &\times \left((\hat{f}(k))^p k^{p-2} \right)^{\theta/p} = C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p} (\beta(k))^{\theta/p} \left((\hat{f}(k))^p k^{p-2} \right)^{\theta/p}. \end{aligned}$$

В случаях в) или г) применяем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\sum_{i=k}^{\infty} (\hat{f}(i))^p i^{p-2} \right)^{\theta/p} \leq C_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k(f)_p^\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) k^{\theta-\theta/p} (\hat{f}(k))^\theta \right), \quad (15)$$

вытекающее из неравенства (9). Если $\|f - t_n\|_p = E_n(f)_p$, то из ортогональности системы $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, неравенства Гельдера и леммы 9 получаем

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \hat{f}(k) = \int_0^1 (f(x) - t_n(x))(D_{2n}(x) - D_n(x)) dx \leq \|f - t_n\|_p \|D_{2n} - D_n\|_{p'} \leq C_4 n^{1/p} E_n(f)_p,$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Но для $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty} \in GM$ имеем $n\hat{f}(2n), n\hat{f}(2n-1) = O\left(\sum_{k=n}^{2n-1} \hat{f}(k)\right)$, откуда легко



вывести оценку $\hat{f}(n) = O(n^{1/p-1} E_{[n/2]}(f)_p)$. Поэтому в силу квазиубывания $\{\alpha(k)\}_{k=0}^\infty$ находим

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha(k) k^{\theta-p} (\hat{f}(k))^\theta \leq C_6 \sum_{k=2}^{\infty} \alpha(k) E_{[k/2]}^\theta(f)_p \leq C_6 \sum_{k=2}^{\infty} \alpha([k/2]) E_{[k/2]}^\theta(f)_p = 2C_6 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) E_k^\theta(f)_p.$$

Поскольку $\hat{f}(1) \leq E_1(f)_p$, то в правой части (15) можно опустить вторую сумму. Дальнейшее доказывается аналогично пунктам а) и б).

Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $f \in B(\theta, p, \phi)$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^\infty \in GM$ и $\phi(t)$ такова, что $\beta(k) \geq Ck\alpha(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) k^{\theta-p} (\hat{f}(k))^\theta$ сходится при выполнении одного из следующих условий:

а) $1 < p \leq 2$, $0 < \theta/p \leq 1$;

б) $1 < p \leq 2$, $\theta/p \geq 1$, $\{\alpha(k)\}_1^\infty$ является почти возрастающей степени $\gamma \in (0, 1)$ и квазиубывает;

в) $p \geq 2$, $0 < \theta/p \leq 1$, $\{\alpha(k)\}_1^\infty$ квазиубывает;

г) $p \geq 2$, $\theta/p \geq 1$, $\{\alpha(k)\}_1^\infty$ является почти возрастающей степени $\gamma \in (0, 1)$ и квазиубывает.

Следствие 8. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $\{\hat{f}(k)\}_{k=1}^\infty \in GM$ и $\phi(t)$ такова, что $\beta(k) \asymp k\alpha(k)$. Если, кроме того, $\{\alpha(k)\}_{k=1}^\infty$ является почти возрастающей степени $\gamma \in (0, 1)$ и почти убывает, то условия $f \in B(\theta, p, \phi)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) k^{\theta-p} (\hat{f}(k))^\theta < \infty$ равносильны. В частности, для $\phi(t) = t^{-\theta r-1}$, $r > 0$, условия $f \in B(\theta, p, \phi)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-1/p)-1} (\hat{f}(k))^\theta < \infty$ равносильны.

Замечание. Помимо критериев следствия 8 можно установить некоторые результаты о неулучшаемости результатов теорем 2 и 3 при более слабых условиях.

Автор выражает признательность С.С.Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

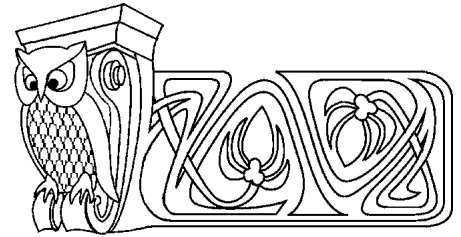
Библиографический список

1. Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М. : Физматгиз, 1958.
3. Потапов М. К. О взаимосвязи некоторых классов функций // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 4. С. 361–372.
4. Потапов М. К. О вложении и совпадении некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 4. С. 840–860.
5. Volosivets S. S. Fourier–Vilenkin series and analogs of Besov and Sobolev classes // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 2010. Vol. 33. P. 343–363.
6. Potapov M. K., Berisha M. Modules of smoothness and Fourier coefficients of periodic functions of one variable // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1979. Vol. 26(40). P. 215–228.
7. Бернша М. О коэффициентах Фурье некоторых классов функций // Glasnik Mat. Ser. II. 1981. Vol. 16(36). P. 75–90.
8. Бернша М. Необходимые условия коэффициентов Фурье периодических функций, принадлежащих $B(p, \theta, k, \alpha)$ -классам типа Бесова // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1984. Vol. 35(49). P. 87–92.
9. Бернша М. Оценка коэффициентов Фурье функций, принадлежащих классам Бесова // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1985. Vol. 38(52). P. 153–157.
10. Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326, № 1. P. 721–735.
11. Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged). 1970. Vol. 31, № 3–4. P. 279–285.
12. Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
13. Leindler L. Inequalities of Hardy–Littlewood type // Analysis Math. 1976. Vol. 2, № 2. P. 117–123.
14. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.
15. Watari C. On generalized Walsh–Fourier series // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 16, № 3. P. 211–241.
16. Агафонова Н. Ю. О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 4. P. 247–262.



УДК 517.927

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА



А. Е. Федосеев

Саратовский государственный университет
E-mail: fedoseev_ae@mail.ru

В статье исследуется обратная задача восстановления оператора Штурма–Лиувилля на полуоси с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя внутри интервала по заданной функции Вейля. Получена процедура решения, доказана единственность такого восстановления, а также получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Штурма–Лиувилля, неинтегрируемая особенность, функция Вейля.

Inverse Problem for Sturm–Liouville Operator on the Half-line Having Nonintegrable Singularity in an Interior Point

A. E. Fedoseev

The inverse problem of recovering Sturm–Liouville operators on the half-line with a nonintegrable Bessel-type singularity in an interior point from the given Weyl function is studied. The corresponding uniqueness theorem is proved, a constructive procedure for the solution of the inverse problem is provided. Necessary and sufficient conditions of the solvability of the inverse problem are obtained.

Key words: inverse problem, Sturm–Liouville operator, nonintegrable singularity, Weyl function.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\ell y = -y'' + \left(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x) \right) y = \lambda y, \quad x > 0, \quad (1)$$

на полуоси с неинтегрируемой особенностью в точке $a > 0$. Здесь ν_0 — комплексное число, $q(x)$ — комплекснозначная функция. Положим $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и, для определенности, $\operatorname{Re} \nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, \dots$. Предположим, что $q(x)|x-a|^{\min(0, 1-2\operatorname{Re} \nu)} \in L(0, T)$ при некотором $T > a$ и $q(x) \in L(T, \infty)$. Класс таких функций $q(x)$ будем обозначать через W .

В данной статье исследуется краевая задача $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(x), h)$ для дифференциального уравнения (1) с краевым условием:

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0$$

и с дополнительным *условием склейки* решений около особой точки $x = a$. При этом рассматриваются произвольные в некотором смысле условия склейки, порождаемые матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, которая связывает решения уравнения (1) в окрестности особой точки (подробнее см. параграф 2). В частном случае при $(\nu_0 = 0)$ рассматриваемые условия склейки соответствуют условию

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (a+0) = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (a-0).$$

Целью работы является исследование нелинейной обратной задачи восстановления \mathcal{L} по заданной функции Вейля. Доказана единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля, получен алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Метод оператора преобразования, используемый в [1, 2] для классических операторов Штурма–Лиувилля, оказывается неудобным для задачи \mathcal{L} . В данной статье используется другой метод, связанный с развитием идей метода контурного интеграла (см. [3, 4]). В работе [5] данная обратная задача исследовалась в другой постановке и была доказана единственность и алгоритм решения обратной задачи. Для уравнения высшего порядка на полуоси с регулярной особенностью единственность решения обратной задачи была доказана в статье [6].



2. ФУНКЦИЯ ВЕЙЛЯ

Пусть $\lambda = \rho^2$ и $\text{Im } \rho \geq 0$. Рассмотрим функции

$$C_j(x, \lambda) = (x - a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(\rho(x - a))^{2k}, \quad j = 1, 2,$$

где $\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2$, $c_{10}c_{20} = (2\nu)^{-1}$, $c_{jk} = (-1)^k c_{j0} \left(\prod_{s=1}^k ((2s + \mu_j)(2s + \mu_j - 1) - \nu_0) \right)^{-1}$.

Здесь и в дальнейшем $z^\mu = \exp(\mu(\ln|z| + i \arg z))$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_j(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$. Пусть функции $s_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, являются решениями следующих интегральных уравнений при $x > a$ и $x < a$:

$$s_j(x, \lambda) = C_j(x, \lambda) + \int_a^x g(x, t, \lambda) q(t) s_j(t, \lambda) dt,$$

где $g(x, t, \lambda) = C_1(t, \lambda)C_2(x, \lambda) - C_1(x, \lambda)C_2(t, \lambda)$. При каждом фиксированном x функции $s_j(x, \lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$ и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Пусть задана матрица $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, $\det A \neq 0$ с комплексными a_{jk} . Введем функции $\{\sigma_j(x, \lambda)\}_{j=1,2}$, $x \in J_- \cup J_+$, $J_\pm = \{\pm(x - a) > 0\}$ по формуле

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x \in J_-, \\ \sum_{k=1}^2 a_{kj} s_k(x, \lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{\sigma_j(x, \lambda)\}$ будет использоваться для склейки решений в окрестности особой точки $x = a$.

Введем числа ξ_{jk} , $j, k = 1, 2$, по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \pi \nu} \begin{bmatrix} -a_{11} e^{2\pi i \nu} + a_{22} e^{-2\pi i \nu} & -i(a_{11} e^{\pi i \nu} - a_{22} e^{-\pi i \nu}) \\ -i(a_{11} e^{\pi i \nu} - a_{22} e^{-\pi i \nu}) & a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Поведение спектра краевой задачи \mathcal{L} зависит от величин ξ_{jk} . Для определенности в дальнейшем будем рассматривать наиболее важный частный случай, когда $|\xi_{jj}| > |\xi_{12}| > 0$ и $a_{12} = 0$. В этом случае, в отличие от классических операторов Штурма-Лиувилля, дискретный спектр является неограниченным, и возникают новые качественные эффекты при исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа.

Обозначим

$$\varphi_1(x, \lambda) = \sigma_2'(0, \lambda) \sigma_1(x, \lambda) - \sigma_1'(0, \lambda) \sigma_2(x, \lambda), \quad \varphi_2(x, \lambda) = \sigma_1(0, \lambda) \sigma_2(x, \lambda) - \sigma_2(0, \lambda) \sigma_1(x, \lambda).$$

Функции $\varphi_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, являются решениями дифференциального уравнения (1) при $x \in J_\pm$ и удовлетворяют начальным условиям:

$$\varphi_j^{(m-1)}(0, \lambda) = \delta_{jm}, \quad j, m = 1, 2,$$

где δ_{jm} — символ Кронекера.

Обозначим через Π_+ λ -плоскость с двухсторонним разрезом Π_0 вдоль луча $\Lambda_+ := \{\lambda : \lambda \geq 0\}$ и положим $\Pi := \overline{\Pi_+} \setminus \{0\}$. Тогда при отображении $\rho \rightarrow \rho^2 = \lambda$ множества Π_+ , Π_0 и Π соответствуют множествам $\Omega_+ = \{\rho : \text{Im } \rho > 0\}$, $\Omega_0 = \{\rho : \text{Im } \rho = 0\}$ и $\Omega = \{\rho : \text{Im } \rho \geq 0, \rho \neq 0\}$. Пусть $e(x, \rho)$, $x \geq 0$, $\text{Im } \rho \geq 0$ — разрывное решение Йоста, введенное в [5], для уравнения (1). Обозначим $S_{k_0} = \{\rho : \arg \rho \in (k_0 \pi/2, (k_0 + 1)\pi/2)\}$, $k_0 = 0, 1$, и $\Delta(\rho) = e'(0, \rho) - h e(0, \rho)$, $\text{Im } \rho \geq 0$. Функция $\Delta(\rho)$ называется характеристической функцией краевой задачи \mathcal{L} . Функция $\Delta(\rho)$ имеет счетное множество нулей вида

$$\rho_k = \rho_k^\pm + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \pm\infty,$$



где $\rho_k^\pm = (k + \theta_\pm)\pi/a$ — нули функций $\Delta^\pm(\rho) = \xi_{12} + \xi_{jj} \exp(2i\rho a)$, $\rho \in S_{2-j}$, $j = 1, 2$, и

$$\theta_\pm = -\frac{i}{2\pi} \ln \left| \frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}} \right| + \frac{1}{2\pi} \arg \left(-\frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}} \right)$$

(«−» при $j = 1$, «+» при $j = 2$). Ясно, что $\text{Im} \theta_\pm > 0$. Для определенности пусть $\arg(-\xi_{12}/\xi_{jj}) \in [0, 2\pi)$. Обозначим $\Lambda = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega, \Delta(\rho) = 0\}$, $\Lambda' = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega_+, \Delta(\rho) = 0\}$, $\Lambda'' = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega_0, \rho \neq 0, \Delta(\rho) = 0\}$. Тогда $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$, Λ' — счетное неограниченное множество, Λ'' — ограниченное множество. Положим

$$\Phi(x, \lambda) = e(x, \rho)/\Delta(\rho), \quad M(\lambda) := \Phi(0, \lambda).$$

Функция $\Phi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям $U(\Phi) = 1$, $\Phi(x, \lambda) = O(\exp(i\rho x))$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in \Omega$ и называется *решением Вейля* для \mathcal{L} . Функцию $M(\lambda)$ будем называть *функцией Вейля* для \mathcal{L} . Пусть заданы фиксированные матрица A и число ν_0 .

Задача 1. По заданной функции Вейля $M(\lambda)$ построить функцию $q(x)$ и найти число h .

Ясно, что

$$M(\lambda) = e(0, \rho)/\Delta(\rho), \quad \Phi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad (2)$$

где $\varphi(x, \lambda) := \varphi_1(x, \lambda) + h\varphi_2(x, \lambda)$. Функция Вейля $M(\lambda)$ является аналитической в $\Pi_+ \setminus \Lambda'$ и непрерывной в $\Pi \setminus \Lambda$. Множество особенностей $M(\lambda)$ (как аналитической функции) совпадает с множеством $\Lambda_0 := \Lambda_+ \cup \Lambda$. Введем область $G_\delta := \{\rho : \text{Im} \rho \geq 0, |\rho - \rho_k| \geq \delta, \rho_k \in \Lambda\}$. Функция Вейля при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\rho \in G_\delta \cap \bar{S}_{2-j}$, $j = 1, 2$, имеет следующую асимптотику:

$$M(\lambda) = \frac{1}{i\rho} \left(M_0^\pm(\lambda) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad (3)$$

$$M_0^\pm(\lambda) = \frac{\xi_{12} - \xi_{jj} \exp(2i\rho a)}{\xi_{12} + \xi_{jj} \exp(2i\rho a)},$$

где «−» соответствует $j = 1$, «+» соответствует $j = 2$.

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для исследования обратной задачи условимся, что наряду с \mathcal{L} будем рассматривать краевую задачу $\tilde{\mathcal{L}}$ того же вида, но с другими коэффициентами \tilde{q} и \tilde{h} . Если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче \mathcal{L} , то соответствующий символ $\tilde{\gamma}$ с волной наверху будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{\mathcal{L}}$, а $\hat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Теорема 1. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду при $x > 0$ и $h = \tilde{h}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет краевую задачу \mathcal{L} .

Доказательство. Определим матрицу $P(x, \lambda) = [P_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1,2}$ по формулам

$$\begin{aligned} P_{k1}(x, \lambda) &= \frac{1}{\eta(x)} \left(\varphi^{(k-1)}(x, \lambda) \tilde{\Phi}'(x, \lambda) - \Phi^{(k-1)}(x, \lambda) \tilde{\varphi}'(x, \lambda) \right), \\ P_{k2}(x, \lambda) &= \frac{1}{\eta(x)} \left(\Phi^{(k-1)}(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \lambda) - \varphi^{(k-1)}(x, \lambda) \tilde{\Phi}(x, \lambda) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\eta(x) = 1$ при $x \in J_-$ и $\eta(x) = \det A$ при $x \in J_+$. Обозначим $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$.

Так как $\langle \varphi(x, \lambda), \Phi(x, \lambda) \rangle = \eta(x)$, то

$$\varphi(x, \lambda) = P_{11}(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \lambda) + P_{12}(x, \lambda) \tilde{\varphi}'(x, \lambda), \quad \Phi(x, \lambda) = P_{11}(x, \lambda) \tilde{\Phi}(x, \lambda) + P_{12}(x, \lambda) \tilde{\Phi}'(x, \lambda). \quad (5)$$

Используя оценки из [5], получаем, что при $x \geq 0$, $\rho \in G_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$:

$$P_{jk}(x, \lambda) - \delta_{jk} = O(\rho^{-1}), \quad j \leq k; \quad P_{21}(x, \lambda) = O(1). \quad (6)$$

Пусть $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$. Тогда ввиду (4) и (2) заключаем, что при каждом фиксированном x функции $P_{jk}(x, \lambda)$ являются целыми по λ . Учитывая (6), получаем $P_{11}(x, \lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x, \lambda) \equiv 0$. Подставляя это



в (5), выводим $\varphi(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda)$, $\Phi(x, \lambda) \equiv \tilde{\Phi}(x, \lambda)$ при всех x и λ и, следовательно, $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$. Теорема 1 доказана. \square

Перейдем теперь к построению решения обратной задачи. Будем говорить, что $\mathcal{L} \in V$, если $q(x) \in W$. Обратную задачу будем решать в классе V .

Выберем пару $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{q}(x), \tilde{h})$ так, что $\widehat{M}(\lambda) = O(\rho^{-2})$ (например, можно брать $\tilde{q}(x) = 0$, $\tilde{h} = 0$). Обозначим

$$D(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\eta(x)} \frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu}, \quad r(x, \lambda, \mu) = D(x, \lambda, \mu) \widehat{M}(\mu).$$

При фиксированном $x \in J_{\pm}$, $\lambda = \rho^2$, $\mu = \theta^2$, $0 \leq \text{Im} \rho \leq C$, $0 \leq \text{Im} \theta \leq C$ имеют место следующие оценки (см. [5]):

$$|D(x, \lambda, \mu)| \leq \frac{C}{|\rho \mp \theta| + 1}, \quad |\varphi(x, \lambda)| \leq C, \quad \pm \text{Re} \rho \text{Re} \theta \geq 0.$$

Функции \tilde{r} и \tilde{D} определим по тем же формулам, но с $\tilde{\varphi}$ вместо φ . Возьмем $H > 0$ так, чтобы $\text{Im} \rho_k < H$, $\text{Im} \tilde{\rho}_k < H$ при всех $\rho_k \in \Lambda$, $\tilde{\rho}_k \in \tilde{\Lambda}$. Пусть $\gamma = \{\lambda = u + iv : u = (2H)^{-2}v^2 - H^2\}$ — образ множества $\text{Im} \rho = H$ при отображении $\lambda = \rho^2$. Обозначим $J_{\gamma} = \{\lambda : \lambda \notin \gamma \cup \text{int} \gamma\}$.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \mu) \varphi(x, \mu) d\mu, \quad (7)$$

$$r(x, \lambda, \mu) - \tilde{r}(x, \lambda, \mu) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \xi) r(x, \xi, \mu) d\xi = 0, \quad (8)$$

$$\tilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \widehat{M}(\mu) \varphi(x, \mu) d\mu, \quad \lambda \in J_{\gamma}. \quad (9)$$

Доказательство. Возьмем положительные числа $r_N = ((N + \chi)\pi/a)^2$ так, чтобы окружности $\theta_N := \{\lambda : |\lambda| = r_N\}$ лежали в G_{δ} при достаточно малом $\delta > 0$. Обозначим $\theta_{N,0} = \{\lambda : |\lambda| \leq r_N\}$, $\gamma_N = (\gamma \cap \theta_{N,0}) \cup \{\lambda : |\lambda| = r_N, \lambda \in \text{int} \gamma\}$ (с обходом против часовой стрелки). Согласно интегральной формуле Коши имеем:

$$P_{1k}(x, \lambda) = \delta_{1k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{P_{1k}(x, \mu)}{\lambda - \mu} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_N} \frac{P_{1k}(x, \mu) - \delta_{1k}}{\lambda - \mu} d\mu, \quad \lambda \notin \text{int} \gamma_N.$$

Используя (6), при $N \rightarrow \infty$ получаем

$$P_{1k}(x, \lambda) = \delta_{1k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{1k}(x, \mu)}{\lambda - \mu} d\mu, \quad \lambda \in J_{\gamma}. \quad (10)$$

Здесь (и везде в дальнейшем, где это необходимо) интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\int_{\gamma} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R}.$$

В силу (5) и (10)

$$\varphi(x, \lambda) = \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{\varphi}(x, \lambda) P_{11}(x, \mu) + \tilde{\varphi}'(x, \lambda) P_{12}(x, \mu)}{\lambda - \mu} d\mu, \quad \lambda \in J_{\gamma}.$$

Отсюда, учитывая (4) и (2), вытекает (7), так как слагаемые с $\varphi_2(x, \mu)$ равны нулю в силу теоремы Коши.

Аналогичным образом получаются (8) и (9). Теорема 2 доказана. \square

На соотношение (7) можно смотреть, как на уравнение относительно $\varphi(x, \lambda)$ для любого фиксированного x . Уравнение (7) называется *основным уравнением* обратной задачи.



Рассмотрим банахово пространство $C(\gamma)$ непрерывных ограниченных функций $z(\lambda)$, $\lambda \in \gamma$, с нормой $\|z\| = \sup_{\lambda \in \gamma} |z(\lambda)|$.

Теорема 3. При каждом фиксированном $x \geq 0$ основное уравнение (7) имеет единственное решение $\varphi(x, \lambda) \in C(\gamma)$.

Доказательство. При фиксированном $x \geq 0$ рассмотрим следующие линейные ограниченные операторы в $C(\gamma)$:

$$\tilde{A}z(\lambda) = z(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \mu) z(\mu) d\mu, \quad Az(\lambda) = z(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} r(x, \lambda, \mu) z(\mu) d\mu.$$

Тогда

$$\tilde{A}Az(\lambda) = z(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(r(x, \lambda, \mu) - \tilde{r}(x, \lambda, \mu) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \xi) r(x, \xi, \mu) d\xi \right) z(\mu) d\mu.$$

В силу (8) это дает $\tilde{A}Az(\lambda) = z(\lambda)$, $z(\lambda) \in C(\gamma)$. Меняя местами \mathcal{L} и $\tilde{\mathcal{L}}$, получаем аналогично $A\tilde{A}z(\lambda) = z(\lambda)$. Таким образом, $\tilde{A}A = A\tilde{A} = E$, где E — единичный оператор. Следовательно, оператор \tilde{A} имеет ограниченный обратный, и основное уравнение (7) однозначно разрешимо при каждом $x \geq 0$. Теорема 3 доказана. \square

Таким образом, получем следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм 1. Пусть задана функция $M(\lambda)$.

1. Выбираем $\tilde{\mathcal{L}} \in V$.

2. Находим $\varphi(x, \lambda)$ из основного уравнения (7).

3. Строим $q(x)$ и h по формулам $q(x) = \lambda + \frac{\varphi''(x, \lambda)}{\varphi(x, \lambda)} - \frac{\nu_0}{(x-a)^2}$, $h = \varphi'(0, \lambda)$.

4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Здесь мы приведем необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Для упрощения выкладок будем предполагать, что краевая задача $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{q}(x), \tilde{h})$ выбрана так, что

$$\widehat{M}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4}\right). \tag{11}$$

Обозначим

$$\varepsilon_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} \tilde{\varphi}(x, \mu) \varphi(x, \mu) \widehat{M}(\mu) d\mu, \quad \varepsilon(x) = -2\varepsilon'_0(x). \tag{12}$$

Теорема 4. Справедливы соотношения

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \varepsilon(x), \tag{13}$$

$$h = \tilde{h} - \varepsilon_0(x). \tag{14}$$

Доказательство. Дифференцируя (7) дважды по x , используя (12) и соотношение

$$\frac{d}{dx} \frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} = \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \mu),$$

получаем

$$\tilde{\varphi}'(x, \lambda) - \varepsilon_0(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi'(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \mu) \varphi'(x, \mu) d\mu, \tag{15}$$

$$\tilde{\varphi}''(x, \lambda) = \varphi''(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \mu) \varphi''(x, \mu) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} 2\tilde{\varphi}(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \mu) \widehat{M}(\mu) \varphi'(x, \mu) d\mu +$$



$$+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} (\tilde{\varphi}(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \mu))' \widehat{M}(\mu) \varphi(x, \mu) d\mu. \quad (16)$$

Заменяем в (16) вторые производные из уравнения (1), а затем заменяем $\varphi(x, \lambda)$, используя (7), получаем (13). Положив $x = 0$ в (15), получаем (14). \square

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Через \mathbf{W} обозначим множества функций $M(\lambda)$ таких, что: а) $M(\lambda)$ аналитична в Π_+ , за исключением не более чем счетного множества полюсов Λ' и непрерывна в $\Pi \setminus \Lambda$; б) при $|\lambda| \rightarrow \infty$ имеет место (3).

Теорема 5. Для того чтобы функция $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ была функцией Вейля для некоторой пары $\mathcal{L} \in V$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) (асимптотика) существует $\tilde{\mathcal{L}} \in V$ такое, что выполняется (11);

2) (условие P) при каждом фиксированном $x \geq 0$ уравнение (7) имеет единственное решение $\varphi(x, \lambda) \in C(\gamma)$;

3) $\varepsilon(x) \in W$, где функция $\varepsilon(x)$ определяется формулой (12).

При этих условиях $q(x)$ и h строятся по формулам (13), (14).

Необходимость теоремы 5 доказана выше. Докажем теперь достаточность. Пусть дана функция $M(\lambda) \in \mathbf{W}$, удовлетворяющая условиям теоремы 5 и пусть $\varphi(x, \lambda)$ — решение основного уравнения (7). Тогда (7) дает аналитическое продолжение для $\varphi(x, \lambda)$ во всю λ -плоскость, причем при каждом $x \geq 0$ функция $\varphi(x, \lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$. Можно показать, что функции $\varphi^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, абсолютно непрерывны на компактах при $|x - a| \geq \varepsilon$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ и

$$|\varphi^{(\nu)}(x, \lambda)| \leq C|\rho|^\nu \exp(|\tau|x), \quad \lambda \in \gamma. \quad (17)$$

Построим функцию $\Phi(x, \lambda)$ из соотношений (9), а также $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(x), h)$ по формулам (13)–(14). Ясно, что $\mathcal{L} \in V$.

Лемма 1. Справедливы соотношения

$$\ell\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda), \quad \ell\Phi(x, \lambda) = \lambda\Phi(x, \lambda).$$

Доказательство. Дифференцируя (7) дважды по x , получаем (15) и (16). Из (16), (7) и (13) вытекает

$$\tilde{\ell}\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \ell\varphi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \mu) \ell\varphi(x, \mu) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle \widehat{M}(\mu) \varphi(x, \mu) d\mu. \quad (18)$$

Используя (9), выводим аналогично

$$\tilde{\Phi}'(x, \lambda) - \varepsilon_0(x) \tilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi'(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \widehat{M}(\mu) \varphi'(x, \mu) d\mu, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}\tilde{\Phi}(x, \lambda) &= \ell\Phi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \widehat{M}(\mu) \ell\varphi(x, \mu) d\mu + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\eta(x)} \int_{\gamma} \langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle \widehat{M}(\mu) \varphi(x, \mu) d\mu. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (18) следует, что

$$\lambda \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \ell\varphi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \mu) \ell\varphi(x, \mu) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - \mu) \tilde{r}(x, \lambda, \mu) \varphi(x, \mu) d\mu.$$

Учитывая (7), находим, что при фиксированном $x \geq 0$

$$\eta(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \lambda, \mu) \eta(x, \mu) d\mu = 0, \quad \lambda \in \gamma, \quad (21)$$



где $\eta(x, \lambda) = \ell\varphi(x, \lambda) - \lambda\varphi(x, \lambda)$. Согласно (17) при фиксированном $x \geq 0$ имеем:

$$|\eta(x, \lambda)| \leq C|\rho|^2, \quad \lambda \in \gamma. \quad (22)$$

Используя найденную оценку (22) и (21) приходим к оценке $|\eta(x, \lambda)| \leq C$ для $\lambda \in \gamma$. В силу условия Р теоремы 5 однородное уравнение (21) имеет только нулевое решение $\eta(x, \lambda) \equiv 0$. Следовательно,

$$\ell\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda).$$

Отсюда с учетом (20) и (9) получаем $\ell\Phi(x, \lambda) = \lambda\Phi(x, \lambda)$. □

Продолжим доказательство теоремы 5. Полагая $x = 0$ в (7), (15) и используя (14), получаем

$$\varphi(0, \lambda) = \tilde{\varphi}(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = \tilde{\varphi}'(0, \lambda) - \varepsilon_0(0)\tilde{\varphi}(0, \lambda) = \tilde{h} + h - \tilde{h} = h. \quad (23)$$

Используя (9) и (19), вычисляем

$$\Phi(0, \lambda) = \tilde{\Phi}(0, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu, \quad \Phi'(0, \lambda) = \tilde{\Phi}'(0, \lambda) - \tilde{\Phi}(0, \lambda)\varepsilon_0(0) + \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu. \quad (24)$$

Следовательно,

$$U(\Phi) = \Phi'(0, \lambda) - h\Phi(0, \lambda) = \tilde{\Phi}'(0, \lambda) - (\varepsilon_0(0) + h)\tilde{\Phi}(0, \lambda) = \tilde{\Phi}'(0, \lambda) - \tilde{h}\tilde{\Phi}(0, \lambda) = \tilde{U}(\tilde{\Phi}) = 1.$$

Зафиксируем $\lambda \in J_{\gamma}$. Из (9), (23) с учетом оценок $|\tilde{\varphi}^{(m)}(x, \mu)| \leq C|\theta|^m |\exp(-i\theta x)|$, $\mu = \theta^2$, $x \geq 0$, $m = 0, 1$, $|\tilde{\Phi}^{(m)}(x, \lambda)| \leq C_{\delta}|\rho|^{m-1} |\exp(i\rho x)|$, $x \geq 0$, $\rho \in G_{\delta}$, получаем что верно $\Phi(x, \lambda) = O(\exp(i\rho x + 2Hx))$, $x \rightarrow \infty$. Отсюда и из того, что $U(\Phi) = 1$, следует, что $\Phi(x, \lambda)$ — решение Вейля. Далее, из (24) вытекает

$$\Phi(0, \lambda) = \widetilde{M}(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu.$$

Согласно интегральной формуле Коши имеем:

$$\widehat{M}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta_N} \frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu, \quad \lambda \notin \text{int } \gamma_N.$$

Тогда при $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\widehat{M}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu, \quad \lambda \in J_{\gamma}.$$

Следовательно, $\Phi(0, \lambda) = \widetilde{M}(\lambda) + \widehat{M}(\lambda) = M(\lambda)$, т. е. $M(\lambda)$ является функцией Вейля для \mathcal{L} .

Теорема 5 доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 330 с.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 239 с.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 1984. 384 с.
4. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory // Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 303 p.
5. Юрко В. А. О восстановлении сингулярных несамо сопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 645–659.
6. Fedoseev A. E. Inverse problems for differential equations on the half-line having a singularity in an interior point // Tamkang J. of Math. 2011. Vol. 42, № 3. P. 343–354.

МЕХАНИКА

УДК 532.5:536.25

О ЛОКАЛЬНЫХ ЭФФЕКТАХ СЛАБЫХ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

И. А. Ермолаев, С. В. Отпущенников

Саратовский государственный университет
Email: pers@info.sgu.ru

Методами численного моделирования исследуются особенности естественной термогравитационной конвекции малой интенсивности, возникающей в условиях микроускорений. Изучается влияние тепловых граничных условий на локальные особенности температурных полей. Показано, что величина максимума температурного расслоения не монотонно зависит от интенсивности теплоотдачи на границе области. Предложен алгоритм коррекции граничных условий для вихря скорости на твердых непроницаемых стенках.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных элементов, естественная термогравитационная конвекция.

Local Effects of the Weak Thermogravitational Convective Flows

I. A. Ermolaev, S. V. Otpushchennikov

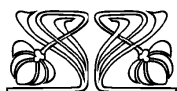
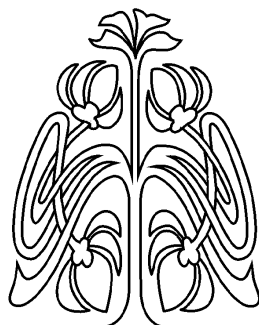
The features of the natural low intensity thermo-gravitational convection occurring in micro-acceleration condition have been investigated numerically. The effect of thermal boundary conditions on the local characteristics of temperature field has also been studied. It was shown that the value of maximum temperature stratification depends monotonically on the intensity of heat transfer at the system boundaries. The correction algorithm has been proposed for the vorticity boundary conditions on the solid impermeable walls.

Key words: numerical simulation, finite element method, natural thermogravitational convection.

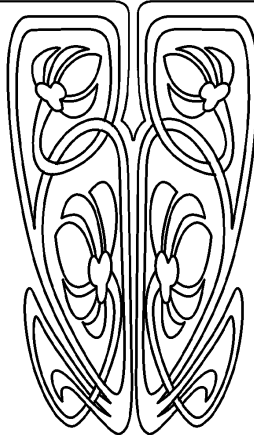
ВВЕДЕНИЕ

При увеличении интенсивности естественная конвекция в неравномерно нагретой области претерпевает ряд качественных переходов между различными режимами теплообмена. Наиболее известен переход к турбулентной конвекции. Между тем, переход от режима теплопроводности к развитой стационарной конвекции также обладает рядом важных особенностей, связанных с локальными характеристиками теплообмена и температурных полей. Именно в этой области параметров возникает эффект максимума температурного расслоения [1–3], заключающийся в образовании локальных зон перегрева и переохлаждения, обусловленных неэффективностью конвективного перемешивания.

Эффекты слабой конвекции актуальны, прежде всего, в условиях микроускорений, характерных для орбитальных космических аппаратов [4, 5]. Исследования этих эффектов важны при решении проблемы получения качественных полупроводниковых материалов в космических условиях [6], анализе гравитационно-чувствительных систем и процессов [7–9], разработке систем термостабилизации радиоэлектронной и иной термочувствительной аппаратуры, работающей в условиях ослабленной силы тяжести и др.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Работы, посвященные численному исследованию локальных особенностей слабой термоконвекции, представлены в обзоре [5]. Кроме того, в [10] выявлены зависимости величины локального перегрева (переохлаждения) от интенсивности конвективного течения и отношения длин сторон прямоугольной полости для одно-, двух- и трехвихревых стационарных движений, даны оценки границ режимов конвекции. В [11] получены зависимости локальных эффектов от свойств жидкости, даны оценки влияния числа Прандтля на границы режимов конвекции.

На особенности протекания конвекции существенно влияют тепловые граничные условия. При моделировании эти условия постулируют тепловой поток и поле температуры на границах области, идеализируя тем самым теплообмен в стенках и во внешней среде. В настоящей работе изучается влияние граничных условий для температуры на локальные эффекты слабой конвекции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривалось плоское конвективное течение вязкой, термически сжимаемой жидкости, для которой справедливо приближение Буссинеска. Жидкость заполняла двухмерную замкнутую прямоугольную область шириной L , высотой H с твердыми и непроницаемыми стенками. Для описания течения и теплообмена использовалась декартова система координат, начало которой совпадало с левым нижним углом области. Ось x была направлена горизонтально, ось y — вертикально, сила тяжести направлена вертикально вниз. В начальный момент времени поле температур считалось однородным, жидкость находилась в гидростатическом равновесии.

При решении задачи использовались нестационарные двухмерные уравнения Буссинеска [12]. В качестве масштабов расстояния, времени, скорости и температуры были выбраны H , H^2/ν , ν/H , $q_0 H/\lambda$. Безразмерные переменные были равны соответственно $X = x/H$, $Y = y/H$, $\tau = \nu t/H^2$, $U = uH/\nu$, $V = vH/\nu$, $\theta = \lambda\sigma/(q_0 H)$. Здесь x , y — координаты, τ — время, ν — коэффициент кинематической вязкости, u , v — составляющие скорости в проекции на оси x , y соответственно, $\sigma = T - T_0$, T_0 — начальная температура жидкости, λ — коэффициент теплопроводности, q_0 — плотность теплового потока. Безразмерные уравнения Буссинеска в переменных «вихрь скорости – функция тока – температура» записывались следующим образом:

$$\frac{\delta\omega}{\delta\tau} + \frac{\delta\psi}{\delta Y} \frac{\delta\omega}{\delta X} - \frac{\delta\psi}{\delta X} \frac{\delta\omega}{\delta Y} = \Delta\omega - Gr_y \frac{\delta\theta}{\delta X}, \quad (1)$$

$$\Delta\psi = \omega, \quad (2)$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta\tau} + \frac{\delta\psi}{\delta Y} \frac{\delta\theta}{\delta X} - \frac{\delta\psi}{\delta X} \frac{\delta\theta}{\delta Y} = \frac{1}{Pr} \Delta\theta, \quad (3)$$

где ω , ψ — вихрь скорости, функция тока соответственно, $Gr_y = \frac{g_y \beta q_0 H^4}{\lambda \nu^2}$ — число Грасгофа ($Gr_x = 0$), $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля, g_y — составляющая ускорения силы тяжести в проекции на ось y ($g_x = 0$), β — температурный коэффициент объемного расширения, χ — коэффициент температуропроводности.

Граничные условия для системы (1)–(3) имели следующий вид. На боковых границах во всех расчетах были заданы условия «прилипания» для функции тока и условия «адиабатической изоляции» для температуры:

$$X = 0: \quad \psi(0, Y, \tau) = \frac{\delta\psi(0, Y, \tau)}{\delta X} = \frac{\delta\theta(0, Y, \tau)}{\delta X}, \quad X = L: \quad \psi(L, Y, \tau) = \frac{\delta\psi(L, Y, \tau)}{\delta X} = \frac{\delta\theta(L, Y, \tau)}{\delta X},$$

на горизонтальных границах — условия «прилипания» для функции тока:

$$Y = 0: \quad \psi(X, 0, \tau) = \frac{\delta\psi(X, 0, \tau)}{\delta Y}.$$

Граничные условия для температуры варьировались

$$Y = H: \quad \psi(X, H, \tau) = \frac{\delta\psi(X, H, \tau)}{\delta Y}.$$



В начальный момент времени $\omega(X, Y, 0) = \psi(X, Y, 0) = \theta(X, Y, 0) = 0$. Задача решалась методом конечных элементов (МКЭ) Галеркина [13]. Температура, вихрь скорости и функция тока аппроксимировались линейной комбинацией не зависящих от времени функций формы на линейных треугольных конечных элементах. Для временной аппроксимации использовалась неявная двухслойная схема.

Применение процедуры МКЭ Галеркина для решения системы (1)–(3) (ортогонализация невязки относительно базисных функций, определенных локально — на конечных элементах) приводит к системе из трех матричных уравнений вида

$$\frac{\delta}{\delta t}[C](\Phi) + [K]\{\Phi\} + \{F\} = 0,$$

где $[C]$ — матрица демпфирования, $[K]$ — матрица жесткости, $\{\Phi\}$ — вектор узловых значений, $\{F\}$ — вектор нагрузки. Элементы матриц $[C]$, $[K]$ и вектора $\{F\}$:

для вихря скорости:

$$c_{ij} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{S^e} N_i N_j dS, \quad k_{ij} = \int_{S^e} \left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_e N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)_e N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} - \nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS,$$

$$f_i = - \int_{S^e} N_i \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_e dS + \frac{1}{\Delta\tau} \int_{S^e} N_i \omega_e^{n-1} dS;$$

для функции тока:

$$c_{ij} = 0, \quad k_{ij} = - \int_{S^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS, \quad f_i = \int_{S^e} N_i \omega_e dS;$$

для температуры:

$$c_{ij} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{S^e} N_i N_j dS, \quad k_{ij} = \int_{S^e} \left(N_i N_j + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_e N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)_e N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS,$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{S^e} N_i \theta_e^{n-1} dS.$$

Здесь c_{ij} — элемент матрицы демпфирования, $\Delta\tau$ — шаг по времени, N_i, N_j — функции формы, S^e — площадь конечного элемента, e — индекс конечного элемента, k_{ij} — элемент матрицы жесткости, f_i — элемент вектора нагрузки, n — индекс шага по времени. Величины с нижним индексом e усредняются по каждому конечному элементу, величины с верхним индексом $n - 1$ относятся к предыдущему временному шагу. Матрицы $[C]$ и $[K]$, а также вектор $\{F\}$ формируются суммированием по всем конечным элементам. При решении системы алгебраических уравнений применялся метод Гаусса для ленточных матриц.

Расчеты проводились по конечно-элементной программе, реализующей данный алгоритм [14]. Стационарные решения были получены методом установления. Критерием установления являлось неравенство

$$|\theta_m^{k+1} - \theta_m^k| + |\omega_m^{k+1} - \omega_m^k| + |\psi_m^{k+1} - \psi_m^k| < \text{eps},$$

где $\theta_m, \omega_m, \psi_m$ — экстремальные значения температуры, вихря скорости и функции тока. Индекс k — номер шага по времени, величина eps изменялась в интервале 10^{-5} – 10^{-6} . Шаг по времени 10^{-3} . Расчеты проводились на равномерных сетках.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВИХРЯ СКОРОСТИ

При решении уравнений гидрогазодинамики в переменных «вихрь скорости – функция тока» граничные условия для вихря скорости на твердых непроницаемых границах не могут быть заданы в явном виде и требуют приближенного вычисления тем или иным способом. Чаще всего используются аппроксимационные формулы разного порядка точности, полученные путем разложения в ряд функции тока вблизи границы [15].

Однако использование приближенных граничных условий данного вида приводит к снижению устойчивости, ограничениям на временной шаг и замедлением сходимости. Кроме того, эффективность той или иной аппроксимационной формулы может меняться в зависимости от особенностей



конкретной задачи. Одним из способов повышения устойчивости является метод нижней релаксации [16]. Однако введение релаксационного параметра, строго говоря, возможно лишь для стационарных задач. Для нестационарного режима использование релаксации приводит к дополнительной невязке в граничных условиях «прилипания». Для ее устранения обычно вводится внутренний итерационный цикл на каждом временном шаге.

Для получения приближенных граничных значений вихря скорости может производиться также экстраполяция решения за границу области [17]. Другим распространенным подходом является использование различных итерационных процедур [18], сведение решения «линеаризованной» разностной схемы для основной задачи к решению задачи Дирихле с некоторыми интегральными граничными условиями [19] и др.

В [20] показано, что локального эквивалента граничного условия для ω , вообще говоря, не существует, а должно выполняться некоторое интегральное условие вида

$$\int_S \omega \eta dS = \int_L \left(b\eta - a \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) dL, \quad (4)$$

где η — функция, определенная на всей области S , такая, что $\Delta \eta = 0$, $\psi_L = a$, $(\partial \psi / \partial n)_L = b$. В задачах конвекции для замкнутых областей, где $\psi_L = (\partial \psi / \partial n)_L = 0$, выражение (4) упрощается

$$\int_S \omega \eta dS = 0. \quad (5)$$

Отметим, что аналогичное условие можно получить, воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса для уравнения (2)

$$\int_S \Delta \psi dS = \int_S \omega dS = \int_L \frac{\partial \psi}{\partial n} dL. \quad (6)$$

Выполнение условия «прилипания» приводит к условию, налагаемому на поле ω вида $\int_S \omega dS = \int_L \frac{\partial \psi}{\partial n} dL = 0$, что эквивалентно условию (5) при $\eta = 1$.

Условие (6) средствами МКЭ может быть использовано для корректировки поля вихря скорости на каждом временном шаге или каждой итерации. Пусть на некотором временном шаге или итерации условие (6) не выполняется:

$$\int_S \omega dS = \int_L \frac{\partial \psi}{\partial n} dL = \varepsilon, \quad (7)$$

где ε — «невязка поля ω ». Скорректируем поле ω так, чтобы $\int_S (\omega + \omega') dS = 0$, где ω' — поправка. Нетрудно заметить, что $\int_S \omega' dS = -\varepsilon$. Допуская, что величина ε равномерно распределена по области S , можно записать $\omega' = -\varepsilon/S$, где ε определяется выражением (7). При использовании МКЭ этот интеграл легко вычисляется как $\varepsilon = \int_S \omega dS = \sum_{e=1}^E \omega_e S_e$, где E — число конечных элементов в области S , e — индекс элемента, S — площадь элемента. Таким образом, поправка к полю вихря скорости на каждом временном шаге или итерации имеет вид

$$\omega' = -\frac{1}{S} \sum_{e=1}^E \omega_e S_e, \quad (8)$$

Уравнения (1)–(3) решались последовательно, каждый временной шаг начинался с вычисления поля температуры (3), затем определялись граничные условия для вихря скорости по той или иной аппроксимационной формуле, например формуле Вудса [15], и решалось уравнение (1). Далее поле вихря скорости корректировалось согласно (8) и определялось поле функции тока (2).

Алгоритм тестировался на классической задаче о тепловой конвекции в квадратной области, подогреваемой сбоку [21]. Сравнение результатов с МКР и МКЭ по интегральному потоку тепла показало наибольшие отличия в 2% от МКЭ и 5.6% от МКР для $Gr = 10^3$ и 4% от МКЭ и 4.5% от МКР для $Gr = 10^4$.



3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численные расчеты проводились для жидкости, характеризуемой числом Прандтля $Pr = 1$, что ближе всего соответствует свойствам воздуха. Исследовались одновихревые и двухвихревые течения в двумерных прямоугольных полостях с различным относительным размером L/H .

Теплоперенос при числах Грасгофа менее 10^3 можно назвать теплопроводным [4]. Конвективное течение в этом случае почти не влияет на теплообмен в полости, температурные поля практически соответствуют режиму теплопроводности. Изотермы параллельны горизонтальным стенкам, небольшие искажения заметны лишь вблизи нагреваемых, либо охлаждаемых границ. С ростом интенсивности выталкивающих сил усиливается температурное расслоение, растет горизонтальная составляющая теплового потока, что приводит к повышению либо к понижению температуры в некоторой локальной области, в сравнении с режимом теплопроводности. Образуются зоны «перегрева» и «переохлаждения» при росте среднего теплового потока через слой.

Развитие теплообмена с увеличением интенсивности выталкивающих сил для одновихревого течения при $L/H = 1.5$ показано на рис. 1. Относительный размер $L/H = 1.5$ соответствует максимальному температурному расслоению для прямоугольной области [10]. Здесь на нижней границе была задана теплового потока $\partial\theta(X, 0, \tau)/\partial Y = 1$, на верхней границе — постоянная температура $\theta(X, H, \tau) = 0$. При таких граничных условиях существует ненулевая составляющая градиента температуры вдоль нижней границы (рис. 1, б), что дополнительно обеспечивает движение.

До $Gr = 1.25 \cdot 10^3$ (рис. 1, кривая 2) распределение температуры по нагреваемой нижней границе линейно, в нижнем углу возникает зона локального перегрева, составляющая примерно $1/3$ ширины полости.

С увеличением интенсивности конвекции усиливается горизонтальное температурное расслоение, длина зоны перегрева уменьшается, максимум температуры растет, достигая наибольшего значения при $Gr \approx 2 \cdot 10^3$ (рис. 1, кривая 4). С дальнейшим ростом числа Грасгофа уменьшаются как размер зоны перегрева, так и величина максимума температуры (рис. 1, кривые 4–6). Можно отметить, что при $Gr \approx 2.5 \cdot 10^3$ и более температура всех точек границы изменяется с ростом критерия Gr по одному закону (линейно). При $Gr \approx 3 \cdot 10^3$ величина перегрева становится равной нулю, кривая 6 соответствует режиму развитой стационарной конвекции.

Эффекту локального перегрева в полости, подогреваемой снизу, соответствует эффект локального переохлаждения в полости при оттоке тепла сверху. На рис. 2 показаны распределения температуры при двухвихревом конвективном течение в полости с $L/H = 2.5$ при оттоке тепла с верхней границе $\partial\theta(X, H, \tau)/\partial Y = -1$ и изотермической нижней стенкой $\theta(X, 0, \tau) = 0$.

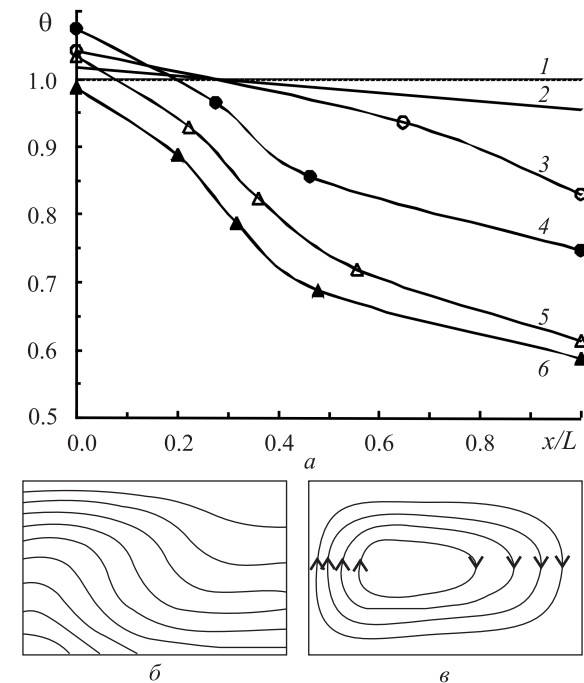


Рис. 1. Развитие теплообмена: а — распределения температуры по нагреваемой стенке: 1 — режим теплопроводности, 2–6 — $Gr = 1.25 \cdot 10^3, 1.5 \cdot 10^3, 2.0 \cdot 10^3, 2.5 \cdot 10^3, 3.0 \cdot 10^3$; б — изотермы поля температур и в линии тока для $Gr = 2.5 \cdot 10^3$

Здесь также существует ненулевой температурный градиент вдоль верхней границы. Аналогично результатам на рис. 1 с увеличением числа Gr следует рост величины и уменьшение размеров участков переохлаждения (рис. 2, кривые 1–3) в углах верхней границы. Затем следует снижение как величины, так и длин участков переохлаждения (рис. 2, кривые 3–5). При $Gr \approx 2.25 \cdot 10^3$ температура всех точек верхней границы изменяется с ростом Gr линейно, кривая 6 соответствует режиму развитой конвекции.



Наиболее интересными представляются результаты исследования влияния более общих тепловых граничных условий (условий Ньютона). Эти условия соответствуют некоторому произвольному термосопротивлению границ. Так, на верхней стенке было задано общее условие теплоотдачи $\partial\theta(X, H, \tau)/\partial Y = b\theta$, где $b = 0.1, 1, 10, 100$ — безразмерный коэффициент, на нижней границе — плотность теплового потока $\partial\theta(X, 0, \tau)/\partial Y = 1$, величина $L/H = 1$. При $b = 100$ верхнюю стенку можно считать изотермической, что соответствует бесконечной теплопроводности границ. Случай $b = 0.1$ соответствует практически теплоизолированной границе. Течение одновихревое.

Здесь также образуется зона перегрева (на нагреваемой стенке) и переохлаждения (на охлаждаемой стенке), температуры которых соответственно выше и ниже экстремальных температур режима теплопроводности. Однако в этой задаче зона переохлаждения сохраняется во всем исследуемом диапазоне чисел Грасгофа (рис. 3, а). Следует отметить также, что величина переохлаждения, определяемая как $\theta_m/\theta_{m,0}$, где θ_m — минимум температуры при текущем значении критерия Gr , $\theta_{m,0}$ — минимум температуры при $Gr = 0$, заметно больше величин перегрева на рис. 1 и рис. 2.

Изменения параметра b , имеющего физический смысл величины, обратной безразмерному термосопротивлению границы, существенно влияют на градиент температуры вблизи верхней стенки. Градиент температуры на вертикальных границах с ростом числа b также увеличивается, температурное расслоение по горизонтали более выражено при низких значениях этого коэффициента.

Зависимость $\theta_m/\theta_{m,0}$ от параметра b немонотонна и имеет экстремум при $b = 10$ (рис. 3, б). Это значение обеспечивает относительный минимум температуры $\theta_m/\theta_{m,0} = 0.585$. Данное сочетание тепловых граничных условий моделирует, фактически, многослойную систему, связанную тепловым взаимодействием, где b — параметр взаимодействия. Очевидно, это взаимодействие нелинейно, чем и объясняется существование экстремума на рис. 3, б.

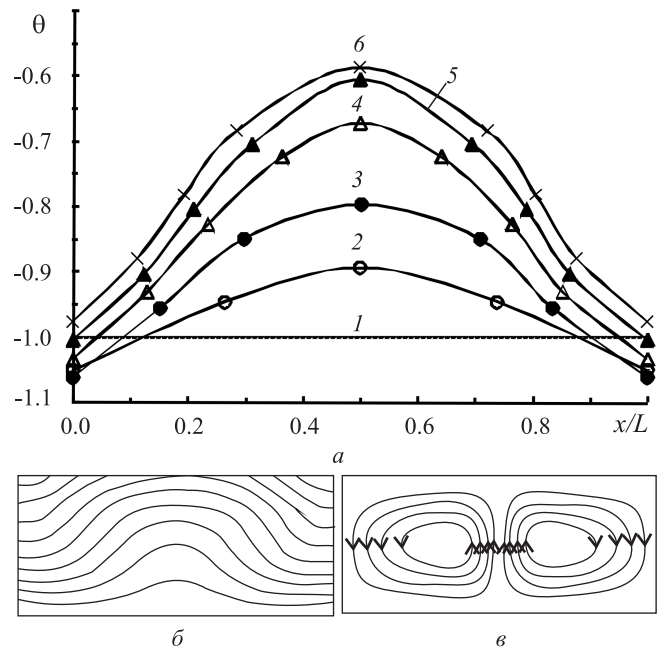


Рис. 2. Развитие теплообмена: а — распределения температуры по охлаждаемой верхней; 1 — режим теплопроводности, 2–6 — $Gr = 1.5 \cdot 10^3, 1.75 \cdot 10^3, 2.0 \cdot 10^3, 2.25 \cdot 10^3, 2.5 \cdot 10^3, L/H = 2.5$; б — изотермы поля температур, в — линии тока для $Gr = 2.5 \cdot 10^3$

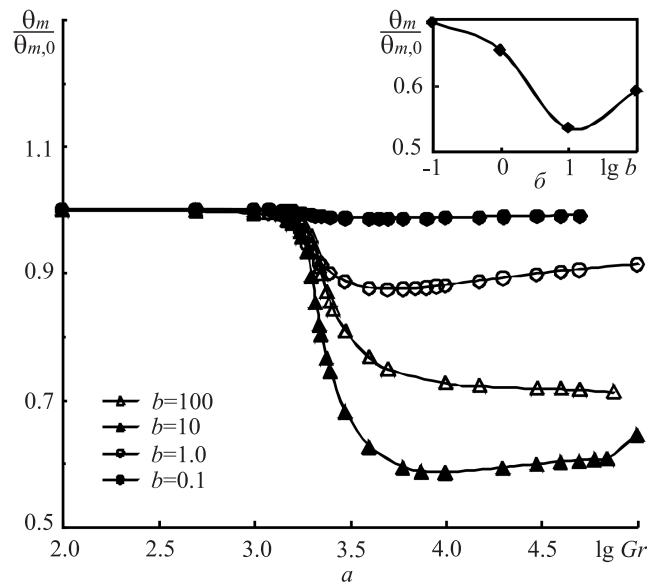


Рис. 3. Развитие теплообмена: а — изменения относительного минимума температуры с ростом числа Gr при $b = 0.1, 1, 10, 100$; б — зависимость величины переохлаждения от коэффициента теплоотдачи при $Gr = 10^4$



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изменения величины относительного температурного расслоения с ростом интенсивности конвективного течения качественно различны для границ с заданной температурой, тепловым потоком (оттоком) и общим условием теплоотдачи. На границе с заданным тепловым потоком (оттоком) температурное расслоение проходит через максимум, затем снижается до нуля, далее изменяясь линейно. На стенке с общим условием теплоотдачи зона переохлаждения (перегрева) сохраняется во всем исследуемом диапазоне чисел Грасгофа. Зависимость $\theta_m/\theta_{m,0}$ от параметра b не монотонна и имеет экстремум при $b = 10$.

Библиографический список

1. Полежаев В. И. Нестационарная ламинарная тепловая конвекция в замкнутой области при заданном потоке тепла // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 4. С. 109–117.
2. Авдуревский В. С., Полежаев В. И. Некоторые особенности естественной конвекции жидкостей и газов // Избранные проблемы прикладной механики. М. : ВИНТИ, 1974. С. 11–20.
3. Полежаев В. И. Эффект максимума температурного расслоения и его приложения // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 4. С. 783–786.
4. Полежаев В. И., Белло М. С., Везуб Н. А., Дубовик К. Г., Лебедев А. П., Никитин С. А., Павловский Д. С., Федюшкин А. И. Конвективные процессы в невесомости. М. : Наука, 1991. 240 с.
5. Полежаев В. И. Конвекция и процессы тепло- и массообмена в условиях космического полета // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 67–88.
6. Zemskov V. S., Raikhman M. R., Shalimov V. P., Goncharov V. A. Peculiarities of inhomogeneities and heat/mass transfer during directional crystallization under low and normal gravity conditions // Single crystal growth and heat & mass transfer : proceedings of First Intern. Conf. Obninsk, 2003. Vol. 2. P. 717–726.
7. Полежаев В. И. Режимы микроускорений, гравитационная чувствительность и методы анализа технологических экспериментов в условиях невесомости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 5. С. 22–36.
8. Асеево Х., Ермаков М. К., Зыков С. Г., Комаров М. М., Либман Е., Никитин С. А., Полежаев В. И., Рябуха С. Б., Сазонов В. В., Стажков В. М. Микроускорения на орбитальной станции «Мир» и оперативный анализ гравитационной чувствительности конвективных процессов тепло-массопереноса // Космические исследования. 1999. Т. 37, № 1. С. 86–101.
9. Сазонов В. В., Юферев В. С. Тепловая конвекция, вызванная квазистатической компонентой поля микроускорений орбитальной станции «Мир» // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 3. С. 39–45.
10. Ермолаев И. А., Жбанов А. И., Отпущенников С. В. Исследование режимов малоинтенсивной конвекции в прямоугольной полости с тепловым потоком на границе // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 3. С. 3–11.
11. Ермолаев И. А., Жбанов А. И., Кошелев В. С., Отпущенников С. В. Исследование влияния числа Прандтля на локальные свойства малоинтенсивной конвекции в подогреваемой снизу прямоугольной области // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 4. С. 589–593.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1972. 392 с.
13. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М. : Мир, 1986. 288 с.
14. Ермолаев И. А., Жбанов А. И., Кошелев В. С. Решение двумерной нестационарной задачи тепло- и массопереноса методом конечных элементов // Вопросы прикладной физики. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 8. С. 60.
15. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск : Изд-во Иркутск. ун-та, 1990. 225 с.
16. Тарунин Е. Л. О выборе аппроксимационной формулы для вихря скорости на твердой границе при решении задач динамики вязкой жидкости // Численные методы механики сплошной среды. 1978. Т. 9, № 7. С. 97–111.
17. Полежаев В. И., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье–Стокса в переменных «вихрь, функция тока» // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 2. С. 301–304.
18. Вабищевич П. Н. Разностные схемы для задач гидродинамики в переменных «функция тока – вихрь скорости» // Докл. АН. 1996. Т. 346, № 4. С. 442–444.
19. Бабенко К. И., Введенский Н. Д. О численном решении краевой задачи для уравнений Навье–Стокса // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1972. Т. 12, № 5. С. 1343–1349.
20. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости : в 2 т. Т. 1 / пер. с англ. М. : Мир, 1991. 504 с.
21. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Везуб Н. А., Глушко Г. С., Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Никитин С. А., Простомолотов А. И., Федосеев А. И., Черкасов С. Г. Математическое моделирование конвективного тепло- и массообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М. : Наука, 1987. 271 с.



УДК 539.32

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРАФЕНОВЫХ ЛИСТОВ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРОВ

О. Е. Глухова, И. В. Кириллова, Е. Л. Коссович, А. А. Фадеев

Саратовский государственный университет
E-mail: kossovichel@info.sgu.ru

Исследовались механические свойства графеновых листов макроразмеров. Для всех рассмотренных нанобъектов были определены модули Юнга. Для этой цели графеновые листы были подвержены деформации в двух взаимно перпендикулярных направлениях, определяемых строением атомной решетки материала, а именно в направлениях зигзаг и кресло. Показано, что имеет место размерный эффект для классического модуля Юнга графенового листа. Также было обнаружено, что при больших линейных размерах последнего его упругие свойства становятся близкими к изотропным, а значение модуля Юнга приближается к значению 1.1 ТПа.

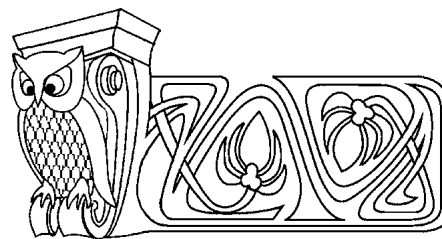
Ключевые слова: модуль Юнга, квантово-химический метод Харрисона, изотропия, ортотропия, атомная решетка, направление зигзаг, направление кресло.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что графен обладает рядом уникальных свойств, среди которых наибольший интерес на данный момент представляют легкость, упругость и прочность, обусловленные однородностью его атомной решетки. Данные свойства позволяют использовать графен как составляющую часть многих композитных материалов [1–5], что чрезвычайно важно при его применении в аэрокосмической отрасли.

Несмотря на широкое распространение различных специализированных методов исследования наноструктур, в настоящее время исследование применимости графена как элемента различных конструкций зачастую сопряжено с его моделированием в рамках теории сплошной среды, что, в свою очередь, требует точного знания его механических свойств. В настоящее время в литературе графен представляется и как изотропный, и как ортотропный материал. При этом обе модели равноценно принимаются авторами. Ведутся жаркие споры о том, какая из этих моделей наиболее применима в тех или иных случаях. Теоретические и экспериментальные исследования проводятся с точки зрения уже принятой нами модели материальных свойств графена и для нее определяются основополагающие механические параметры. К примеру, для изотропной модели это коэффициент Пуассона и модуль Юнга. В качестве примера использования изотропной теории структуры графена можно привести следующие работы: в [6–7] авторы определяют величины для модуля Юнга и коэффициента Пуассона исходя из классического и модифицированного методов Бреннера молекулярной динамики [8, 9]. Метод *ab initio*, использованный авторами в [10], дает несколько другие величины для модуля Юнга. Наконец, было установлено, что в рамках классической изотропной теории сплошной среды модуль Юнга графена равен 1.1 ТПа [5] для случая больших размеров листа.

Теория ортотропии (как частного случая анизотропии) графена появилась при изучении формы гексагональных элементов атомной структуры материала. В данном случае материальных параметров становится значительно больше и в основном они определяются исходя из размерной теории свойств графена, которая заключается в том, что его свойства меняются в зависимости от линейных размеров конкретного образца. Моделирование графеновых пластин как ортотропных уже было приведено (см., например, [11–14]). Определение упругих параметров для ортотропного графена — более трудоемкое занятие по сравнению с нахождением констант для изотропной модели, поэтому работ с экспериментальными исследованиями на данную тему на данный момент сравнительно мало. Среди



Mechanical Properties Study for Graphene Sheets of Various Size

O. E. Glukhova, I. V. Kirillova, E. L. Kossovich, A. A. Fadeev

We studied mechanical properties of large graphene sheets. The Young's modulus was found for each of the considered nanoparticles and sheets. To this end, the deformation was applied in two orthogonal directions — zigzag and armchair directions of the graphene atomic framework. It was established that there exist a size effect on the Young's modulus of graphene. Also, it was found that the mechanical properties of graphene become close to isotropic ones when the linear dimensions of the latter are large enough for it to be considered as a macro-particle. Also, under these conditions, the Young's modulus becomes close to 1.1 TPa.

Key words: Young's modulus, Harrison's quantum-chemical method, isotropy, orthotropy, atomic framework, zigzag direction, armchair direction.



подобных работ можно выделить статью [15], в которой показано, что различие между направлениями деформирования графенового листа значительное и превышает величину 1.1 ТПа в полтора раза и выше. Также за последние несколько лет появились работы, опровергающие ортотропную теорию графена при малых деформациях последнего. Например, в статье [16] показано, что при экспериментальном молекулярно-механическом моделировании растяжения графеновых листов модули Юнга и коэффициенты Пуассона в зигзагообразном и кресельном направлениях одинаковы или незначительно различаются (что, может быть, вызвано лишь погрешностями численного эксперимента). Авторы [16], применяя теорию балок к связям между атомами углерода в гексагоне атомной решетки графена, а также численным методом при помощи конечноэлементного пакета ANSYS, показали, что в продольном и поперечном направлениях графен имеет одинаковые модули Юнга (полученные при помощи аналитических выкладок равны 1.04 ТПа, а при помощи численного решения методом конечных элементов — 1.14 и 1.09 ТПа).

Таким образом, целью данной работы является попытка определить, насколько верна та или иная теория механических свойств графенового листа. Впервые для определения величины упругой деформации графена будет использован квантово-химический метод Харрисона, который зарекомендовал себя как наиболее точный метод расчета энергии атомной структуры наночастиц. Сложность использования этого метода заключается в необходимости затрат большого числа вычислительных ресурсов компьютера, а также в трудоемкости и затрате большого количества времени. По этой причине в большинстве случаев применяются молекулярно-механические методы, которые оказываются менее затратными по вычислительным и временным ресурсам, однако при этом погрешность расчета общей энергии системы значительно превышает таковую для квантовых методов.

КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРАФЕНА

С целью определения правильности той или иной теории для свойств графенового листа при его сравнительно больших линейных размерах мы провели квантово-механическое *ab initio* исследование поведения различных квадратных листов графена, по результатам были найдены их механические свойства. В качестве расчетного метода применялся квантовый метод Харрисона [17]. Способ нахождения модулей Юнга был продемонстрирован в работе [18] и успешно применен для определения таких констант для углеродных нанотрубок различных диаметров и длин. Метод зарекомендовал себя как достаточно точный и дающий результаты, чрезвычайно близкие к экспериментальным. Ниже приведена таблица со сравнительными характеристиками линейных размеров исследованных графеновых листов, а также найденными механическими свойствами.

Сравнительные характеристики исследованных листов графена

Длина, Å	Ширина, Å	Модуль Юнга, ТПа, направление зигзаг	Модуль Юнга, ТПа, направление кресло
11.462	7.206	0.736	0.890
11.405	17.086	0.778	0.709
11.411	14.599	0.804	0.747
11.426	12.135	0.780	0.758
11.444	9.672	0.783	0.784
15.696	17.075	0.855	0.894
15.713	14.604	0.849	0.828
15.731	12.141	0.823	0.892
15.762	9.673	0.847	0.815
15.805	7.201	0.812	0.792
20.008	14.60	0.895	0.794
20.035	17.04	0.921	0.841
20.036	12.14	0.892	0.773
20.088	9.668	0.809	0.737
20.130	7.203	0.831	0.721
24.317	17.067	0.848	0.830



Окончание таблицы

Длина, Å	Ширина, Å	Модуль Юнга, ТПа, направление зигзаг	Модуль Юнга, ТПа, направление кресло
24.329	14.611	0.845	0.808
24.364	12.134	0.820	0.802
24.390	9.673	0.884	0.813
24.492	7.203	0.921	0.785
28.608	17.068	0.924	0.822
28.642	14.593	0.913	0.801
28.690	9.673	0.988	0.811
28.708	12.116	0.937	0.861
28.804	7.204	0.967	0.825
54.030	49.861	0.931	0.923
71.229	71.268	0.993	0.986

Из результатов, приведенных в таблице, можно сделать вывод, что при увеличении размеров графеновых листов значения модулей Юнга, вычисленных при деформировании в двух перпендикулярных направлениях зигзаг и кресло, увеличиваются и приближаются к величине 1.1 ТПа. Также их значения становятся близкими друг к другу, что означает, что имеет место размерный эффект, который заключается в том, что чем больше линейные размеры рассматриваемого образца графена, тем его механические свойства становятся ближе к изотропным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы были получены следующие результаты:

- 1) Модули Юнга графеновых листов имеют незначительную зависимость от размеров последних;
- 2) Видно, что значения вышеуказанной константы зависят не только от размеров листов, но также от соотношения сторон. В случае, когда соотношение сторон приближается к значению 1:1, величины модулей Юнга по обоим направлениям становятся практически одинаковыми;
- 3) При увеличении длин сторон для квадратных графеновых листов модули Юнга увеличиваются, сохраняя свои свойства, и приближаются к значению 1.0 ТПа.

Таким образом, можно заключить, что теория изотропии графена при макроразмерах образцов была подтверждена данным исследованием. Учитывая тот факт, что в нашем исследовании уже при размерах образца 72Å , модуль Юнга увеличивается до значения $E = 1.0$ ТПа, можно сделать вывод о том, что величина $E = 1.1$ ТПа [5] является точным значением для модуля упругости в образцах больших линейных размеров.

Таким образом, при синтезе как однослойного, так и многослойного графена, который в настоящий момент уже успешно проводится в лабораторных условиях [19] в рамках теории Кирхгофа изгиба тонких пластин, целесообразно использовать вышеуказанное значение модуля Юнга.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (XLI очередь мероприятия 1.2.1, технические науки, номер заявки в информационной компьютеризированной системе 2012-1.2.1-12-000-2013-064).

Библиографический список

1. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. 1921. Vol. 221. P. 163–198.
2. Cowie J. M. G Polymers : Chemistry and Physics of Modern Materials. N. Y. : Blackie Academic, 1991. 436 p.
3. Geim A. K. Graphene : status and prospects // Science. 2009. Vol. 324. P. 5934.
4. Jiang J. -W., Wang J. -S., Li B. Young's modulus of graphene : a molecular dynamics study // Phys. Rev. Ser. B. 2009. Vol. 80. P. 113–405.
5. Lee C., Wei X., Kysar J. W, Hone J. Measurement of the Elastic Properties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene // Science. 2008. Vol. 321. P. 385.
6. Reddy C. D., Rajendran S., Liew K. M. Equilibrium configuration and continuum elastic properties of finite sized graphene // Nanotechnology. 2006. Vol. 17. P. 864–870.



7. Arroyo M., Belytschko T. Finite crystal elasticity of carbon nanotubes based on the exponential Cauchy–Born rule // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 69. P. 115415.
8. Brenner D. W. Empirical Potential for Hydrocarbons for Use in Simulating the Chemical Vapor Deposition of Diamond Films // Phys. Rev. Ser. B. 1990. Vol. 42. P. 9458–9471.
9. Brenner D. W., Shenderova O. A., Harrison J. A., Stuart S. J., Ni B., Sinnott S. B. A second-generation reactive empirical bond order (REBO) potential energy expression for hydrocarbons // J. Phys. : Condens. Matter. 2002. Vol. 14. P. 783–802.
10. Kudin K. N., Scuseria G. E. and Yakobson B. I. C2F, BN and C nanoshell elasticity from ab initio computations // Phys. Rev. Ser. B. 2001. Vol. 64. P. 235406.
11. Shimpi R. P., Patel H. G. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis // Intern. J. Solids and Structures. 2006. Vol. 43, iss. 22–23. P. 6783–6799.
12. Tsiatas G. C., Yiotis A. J. A microstructure-dependent orthotropic plate model based on a modified couple stress theory // Recent Developments in Boundary Element Methods : A Volume to Honour Professor John T. Katsikadelis / ed. E. J. Sapountzakis. Southampton : WIT Press, 2010. P. 295–308.
13. Setoodeh A. R., Malekzadeh P., Vosoughi A. R. Nonlinear free vibration of orthotropic graphene sheets using nonlocal Mindlin plate theory // Proc. Mech. Part C : J. Mechanical Engineering Science. 2012. Vol. 226. P. 1896–1906.
14. Narendar S., Gopalakrishnan S. Scale effects on buckling analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal two-variable refined plate theory // Acta Mech. 2012. Vol. 223. P. 395–413.
15. Wang Q. Effective in-plane stiffness and bending rigidity of armchair and zigzag carbon nanotubes // Intern. J. Solid Struct. 2004. Vol. 41. P. 5451–5461.
16. Shokrieh M. M., Rafiee R. Prediction of Young's modulus of graphene sheets and carbon nanotubes using nanoscale continuum mechanics approach // Materials and Design. 2010. Vol. 31. P. 790–795.
17. Глухова О. Е., Терентьев О. А. Теоретическое исследование электронных и механических свойств C-N однослойных нанотрубок // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2007. Т. 10, № 4. С. 85–89.
18. Глухова О. Е. Жесткость Y-образных углеродных нанотрубок при деформации растяжения/сжатия // Нано- и микросистемная техника. 2009. № 1. С. 19–22.
19. Das S., Seelaboyina R., Verma V., Lahiri I., Hwang J. Y., Benerjee R., Choi W. Synthesis and characterization of self-organized multilayered graphene-carbon nanotube hybrid films // J. Mater. Chem. 2011. Vol. 21. P. 7289–7295.

УДК 539.37

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ГРАФЕНОВЫХ НАНОСТРУКТУР

О. Е. Глухова, И. В. Кириллова, М. М. Слепченков, В. В. Шунаев

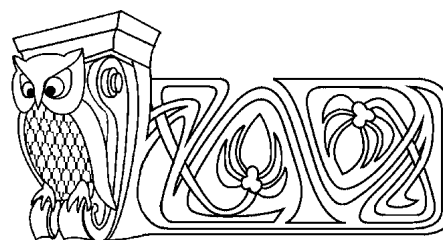
Саратовский государственный университет
E-mail: glukova@info.sgu.ru

В данной работе представлены результаты теоретического исследования свойств деформированных графеновых структур. Исследованы механические свойства бислойных графеновых нанолент с помощью метода молекулярной динамики. Для оценки механических свойств бислойного графена мы применяли нагрузку в виде осевого сжатия. В результате исследования установлено, что бислойный графен становится волнообразным по мере увеличения величины сжатия. Число полуволн, возникающих на поверхности структуры, зависит от размера графенового листа.

Ключевые слова: графен, локальные напряжения, осевое сжатие, молекулярная динамика, кривизна.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из самых перспективных на сегодняшний день материалов для наноэлектроники является графен. С открытием графена началось интенсивное развитие новой науки — графеники. Благодаря своей двумерной структуре атомарной толщины, атомы углерода в которой упакованы в гекса-



Theoretical Investigation of the Deformed Graphene Nanostructures

O. E. Glukhova, I. V. Kirillova, M. M. Slepchenkov, V. V. Shunaev

The results of the theoretical investigations of properties of the deformed graphene structures are presented in this work. We investigated mechanical properties of the bi-layer graphene structures by means of the molecular dynamics method. To evaluate mechanical properties of graphene we applied a compression load to graphene. As a result of the investigations it was found that graphene became a wave-like with the increase of the compression. The number of half-wave, generated on the graphene surface depends on the size of graphene.

Key words: graphene, local stress, axial compression, molecular dynamics, curvature.



гональную кристаллическую решетку, графен имеет широкий спектр применения. В частности, на графеновой основе уже конструируются такие устройства, как нанотранзисторы, спиновые фильтры, суперконденсаторы, элементы памяти. В связи с этим для успешной реализации подобных устройств к графену как основному структурному компоненту последних предъявляются повышенные требования относительно его характеристик. В первую очередь, графеновому материалу необходимо выдерживать все требуемые к изделию эксплуатационные нагрузки. Следовательно, графен должен обладать повышенной механической прочностью.

Одним из эффективных способов оценки прочностных характеристик материала является испытание на внешнюю нагрузку в виде деформации различного рода: растяжение, сжатие, изгиб. В настоящее время изучению деформации графеновых нанолент посвящено множество работ. Среди видов деформирующей нагрузки часто используются растяжение и сжатие графенового слоя. Подвергая атомную структуру графена внешнему воздействию, можно оценить прочностные свойства материала, а также посмотреть, как меняется его электронная структура. Полученные результаты способствуют расширению границ областей применения графеновых наноструктур.

Для исследования процессов деформации графена существует ряд теоретических и экспериментальных методов. Исследование сдвига фооновых частот — эффективный способ оценки степени напряжения, передающегося материалу при наложении деформации вдоль выбранной оси. Методы рамановской спектроскопии признаны успешными для наблюдения фоонов широкого диапазона графитовых материалов, включая графен, при осевом сжатии или гидростатическом давлении. В экспериментах по сжатию/растяжению исследуются как образцы взвешенного графенового листа, так и листа на подложке. В работе [1] графеновые образцы подвергались циклической осевой деформации (растяжение–сжатие) с помощью использования полимерных кантилеверов. В результате проведенных исследований было обнаружено, что критическое напряжение для искривленного графена зависит от размера образца и его геометрических параметров относительно оси деформации. По мнению авторов работы [1] такое поведение графеновой структуры при нагрузке обусловлено классическим случаем продольного изгиба Эйлера. В то же время авторы отмечают значимость подложки при проведении эксперимента. В упомянутой работе в качестве подложки использовались полимерные слои. В результате исследования установлено, что жесткость при изгибе графенового образца, осажденного на подложке, возрастает на 6 порядков величины.

В работе [2] стабильность гексагональной структуры графеновых нанолент armchair, подвергнутых осевому сжатию, теоретически исследуется с помощью атомистического моделирования. В качестве метода исследования используется классический молекулярно-динамический метод, основывающийся на потенциале Бреннера. Первоначально координаты всех атомов составляли плоскую поверхность ячеистой решетки, а начальные скорости атомов были получены из распределения Максвелла–Больцмана при данной температуре. Скорость сжатия, проводимого в данной работе, составляла 1.6 м/с. Краевые атомы фиксировались на каждом этапе сжатия. К краям структуры были приложены граничные условия и условия опирания. В ходе исследований, проводимых в работе [2], обнаружено, что после многих этапов сжатия графеновая нанолента начинала искажаться, а форма деформированной ленты определяется ее размером.

Наряду с изучением линейных упругих свойств графеновых структур (модуль Юнга и коэффициент Пуассона), активно ведутся работы по исследованию поведения графена при нелинейной упругой деформации. В частности, в работе [3] исследовалась нелинейная упругая деформация графеновых нанолент при квазистатическом осевом растяжении, принимая во внимание краевую структуру графена. Изучение осуществлялось с помощью атомистического моделирования и модели сплошной среды. Установлена взаимосвязь таких аспектов графеновых структур, как механическая реакция и их электронные свойства в контексте поиска путей управления электронной структурой материала. Анализируя влияние деформации растяжения на электронную структуру графена, авторы работы [3] в рамках линейной теории упругости и метода сильной связи выявили, что растяжение графенового листа на 20% и более индуцирует появление энергетической щели в электронном спектре.

Обнаружено, что бислойный графен обладает высокими прочностными свойствами. На основе молекулярно-динамического моделирования с использованием метода Бреннера авторы работы [4] установили, что модуль Юнга биграфена равен 0.8 ТПа. Также в этой работе выявлена зависимость



модуля упругости биграфена от температуры. При низкой температуре (порядка 20 К) модуль Юнга биграфена оказывается на 14% меньше, чем при комнатной температуре. Особое внимание уделено влиянию межслойного sp^3 связывания на прочностные свойства бислойного графена. В работе [5] проводится молекулярно-динамическое исследование биграфена, между отдельными атомами которого существуют sp^3 -связи. Взаимодействие между атомами описывалось методом, основывающемся на потенциале REBO, хорошо зарекомендовавшим себя при изучении механических свойств углеродных структур. В результате расчетов было установлено, что модуль Юнга биграфена с sp^3 -связыванием составляет 0.907 ТПа, а прочности на растяжение и разрыв структуры такого типа составляют 86.55 ТПа и 0.135 ТПа соответственно.

Целью данной работы является исследование механических свойств бислойного графена с помощью метода молекулярной динамики, основанном на методе атом-атомных потенциалов с оригинальной параметризацией весовых коэффициентов энергетической функции для углеродных наноструктур.

1. МЕТОД АТОМ-АТОМНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАФЕНОВЫХ СТРУКТУР

Полная энергия графеновой структуры определяется моделью валентного силового поля с учетом взаимодействия для несвязанных атомов:

$$E = \sum K_r(r - r_0)^2 + \sum K_\theta(\theta - \theta_0)^2 + \sum \frac{K_a}{r^{12}} + \frac{K_b}{r^6}. \quad (1)$$

В формуле (1) K_r , K_θ , K_a , K_b — весовые коэффициенты, соответствующие каждому слагаемому, первое из которых отвечает за изменение длин связи в графите ($r_0 = 1.42 \text{ \AA}$), второе — за изменение углов между связями по отношению к углу между связями в графите ($\theta_0 = 120^\circ$), третье — за взаимодействие Ван-дер-Ваальса.

Весовые коэффициенты есть суть решения минимаксной задачи:

$$\min \max S(A), S(A) = \sum_{i=1}^n |r_i - r_i^0|, \quad (2)$$

где $A = \{K_r, K_\theta, K_a, K_b\}$ — вектор варьируемых параметров, $\{r_i\}$ — множество длин связей углерод-углерод, $\{r_i^0\}$ — множество известных значений, рассчитанных или экспериментально полученных. Глобальный минимум для каждого набора находился с помощью построения целевой функции и смещения соответственно ее профилю базиса. Множество $\{r_i\}$ находилось минимизацией полной энергии (1) графенового листа по координатам всех атомов.

Чтобы решить минимаксную задачу, потребовались большие затраты ресурсов компьютеров, поскольку, чтобы достичь глобального минимума энергии (1) для одного набора параметров, необходимо было выполнить несколько тысяч итераций, каждая из которых соответствовала поиску минимума около базисной точки.

В результате решения минимаксной задачи (2) получены следующие значения весовых коэффициентов: $K_r = 3.25 \cdot 10^2 \text{ Дж/м}^2$, $K_\theta = 4.4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/рад}^2$, $K_a = 4.0 \cdot 10^{-39} \text{ Дж/м}^{12}$, $K_b = 1.5 \cdot 10^{-80} \text{ Дж/м}^6$.

В нашем исследовании расчет энергии вычислялся молекулярно-динамическим методом в реальном времени. Через каждую фемтосекунду, принятую за квант времени, вычисляется сила, действующая на каждый атом. Например, если Δx — сдвиг по оси X , то из разницы энергий и вычисляется проекция силы на ось X :

$$F_x = \frac{(E(x - \Delta x) - E(x + \Delta x))}{2 \cdot \Delta x}. \quad (3)$$

Изменение конфигурации объекта на данном шаге определяется в результате решения уравнений Ньютона. На следующем шаге процесс повторяется.

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФЕНОВЫХ НАНОСТРУКТУР

С целью изучения механических свойств биграфена мы применили деформацию осевого сжатия к бислойным графеновым нанолентам. Объектами исследования были наноленты zigzag. Симулирование осевого сжатия осуществлялось с помощью молекулярно-динамического метода. Равномерное сжатие шло вдоль направления продольной оси. Скорость равномерного сжатия 20 м/с.



Модель биграфена, подвергнутого осевому сжатию, представляла собой 2 наноленты, каждая из которых состояла из 646 атомов углерода и имела длину 65 Å, а ширину 19.8 Å. Расстояние между слоями графена составляло 3.4 Å. На начальном этапе сжатия графеновая структура сохраняла плоскую конфигурацию. Однако при сжатии на 0.4% наблюдался фазовый переход: структура из плоской становилась волнообразной. Последующее сжатие привело к формированию двух полуволн. Далее, атомная структура бислойного графена снова перестаривалась: с двух полуволн он вышел на одну дугу. При сжатии структуры до 98% исходной длины картина формирования полуволны принимала явный вид. Дальнейшее сжатие не изменило атомной структуры биграфена. Следовательно, конфигурация с одной полуволной является устойчивой модой искривленного биграфена.

Для установления закономерности поведения бислойных графеновых структур под действием осевого сжатия была проведена серия численных экспериментов для нанолент различной протяженности. Нарастивался зигзагоподобный край структуры, а ширина оставалась неизменной. Структура наращивалась последовательно увеличением числа гексагонов на один. Фазовый переход для нанолент различной длины происходил при сжатии структуры на 0.4–0.5%. При этом осевое сжатие до 98% приводило также к образованию нескольких полуволн, однако полуволны были не всегда одинаковыми по амплитуде и длине. Картина нескольких одинаковых полуволн возникала только при определенной исходной длине. Такие значения длин биграфена нами были установлены. Были получены наноленты с тремя и четырьмя идентичными полуволнами, симметрично расположенными вдоль оси сжатия.

Из данных, приведенных в таблице, видно, что бислойные графеновые наноленты с тремя и четырьмя полуволнами характеризуются приблизительно одинаковой амплитудой полуволн и их длиной.

Геометрические характеристики искривленных графеновых нанолент zigzag, сжатых до 98% от своей первоначальной длины

Количество полуволн	Количество атомов в структуре	Длина наноленты, Å	Длина полуволны, Å	Амплитуда полуволны, Å	Количество гексагонов в полуволне	Ширина наноленты, Å
2	1100	65	32.32	3.1	13	19.88
3	2780	165.18	55.06	5.48	20	
4	3340	198.7	49.8	5.55	20	

На рис. 1 и 2 (а, б) показаны подвергнутые осевому сжатию до 98% бислойные наноленты с длинами из таблицы и карты распределения локальных напряжений по атомам структуры.

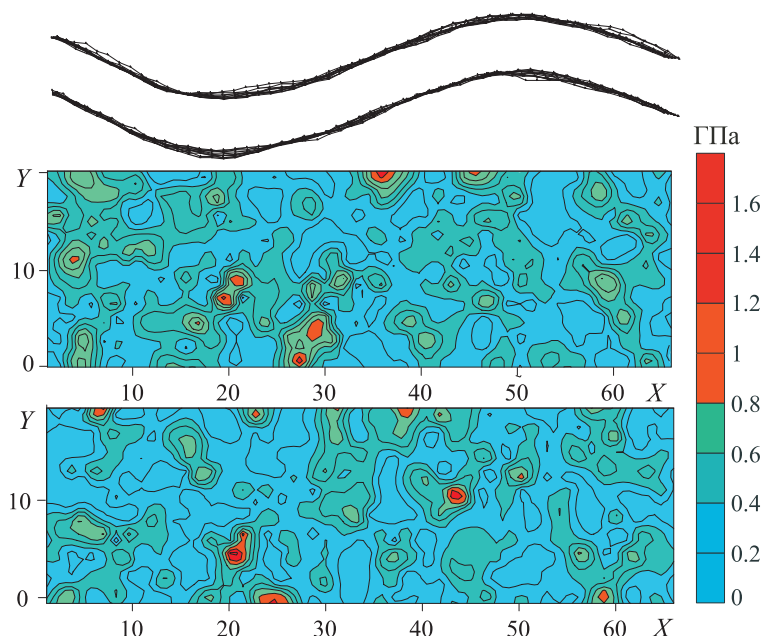


Рис. 1. Карта распределения локальных напряжений для наноленты zigzag при количестве полуволн, образующихся на поверхности, равном двум

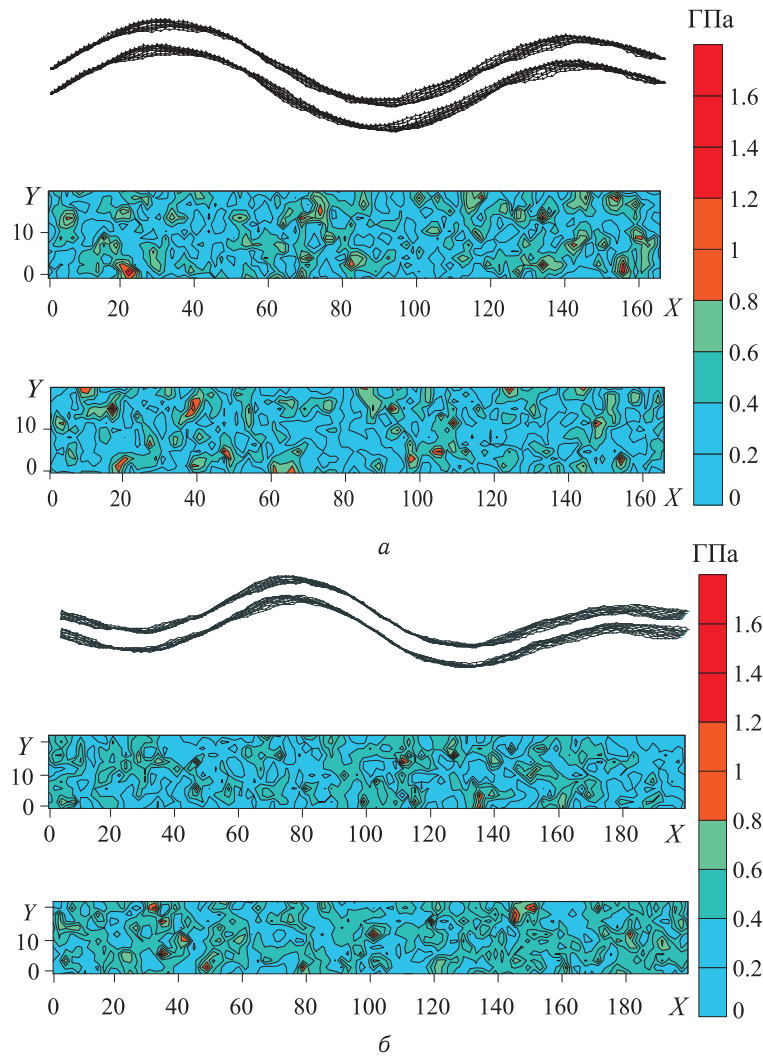


Рис. 2. Карта распределения локальных напряжений для наноленты zigzag при количестве полуволн, образующихся на поверхности, равном трем (а) и четырем (б)

В качестве двух координат были взяты координаты X , Y атомов, а третья ось демонстрирует напряжение на атомах. Таким образом, искривленная лента как бы спроецирована на плоскость XY , что позволяет наглядно видеть наиболее напряженные участки. Наибольшее напряжение ~ 1.6 – 1.7 ГПа наблюдается вблизи края zigzag. Возникающие отдельные небольшие островки повышенного напряжения обусловлены исключительно математическими особенностями моделирования во времени процесса сжатия. По мере сжатия происходит перестройка атомной сетки, но полностью сетка не успевает релаксировать, поскольку процесс сжатия динамический. Из-за этого в атомном каркасе на каждом шаге сжатия присутствуют флуктуации напряжения, но все они меньше 1.8 ГПа и не приводят к появлению дефектов.

ВЫВОДЫ

В ходе теоретического исследования установлено, что бислойные графеновые наноленты zigzag теряют свою устойчивость уже при сжатии на 0.2 – 0.4% и трансформируются в несколько полуволн при сжатии на 2% . Устойчивым состоянием искривленного бислойного графена является конфигурация атомной структуры с одной полуволной, на которую бислойный графен выходил при сжатии на 7 – 10% . Количество полуволн на промежуточном этапе определяется исключительно длиной ленты. Длина полуволн и их амплитуда определяются топологией атомной сетки.



Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (XLI очередь мероприятия 1.2.1, технические науки, номер заявки в информационной компьютеризированной системе 2012-1.2.1-12-000-2013-064).

Библиографический список

1. Frank O., Tsoukleri G., Parthenios J., Papagelis K., Riaz I., Jalil R., Novoselov K. S. Compression Behavior of Single-Layer Graphenes // ACS Nano. 2010. Vol. 4. P. 3131–3138.
2. Neek-Amal M., Peeters F. M. Graphene nano ribbons subjected to axial stress // Phys. Rev. Ser. B. 2010. Vol. 82, iss. 8. P. 085432–085437.
3. Lu Q., Gao W., Huang R. Atomistic simulation and continuum modeling of graphene nanoribbons under uniaxial tension // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2011. Vol. 19, № 5. P. 054006–054022.
4. Neek-Amal M., Peeters F. M. Nanoindentation of a circular sheet of bilayer graphene // Phys. Rev. Ser. B. 2010. Vol. 81, iss. 23. P. 235421–235426.
5. Zhang Y. Y., Wang C. M., Cheng Y., Xiang Y. Mechanical properties of bilayer graphene sheets coupled by sp³ bonding // Carbon. 2011. Vol. 49, iss. 13. P. 4511–4517.

УДК 539.374

ТОЧНО СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ИНВАРИАНТЫ СВЯЗАННОГО МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛЯ

В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*

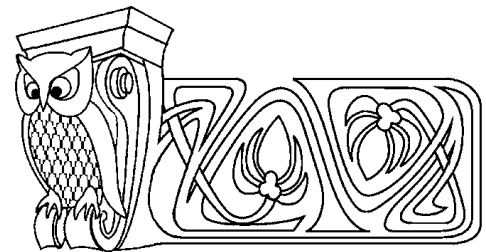
Московский городской университет управления Правительства Москвы

E-mail: vlad_koval@mail.ru

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

E-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Теория микрополярной термоупругости рассматривается как ковариантная физическая теория поля. Получены 4-ковариантные уравнения нелинейного гиперболического микрополярного термоупругого континуума с «нежестким» репером локальных поворотов. Исследования по чисто упругому микрополярному континууму восходят к известной работе Э. Коссера и Ф. Коссера 1909 г. Задается естественная плотность термоупругого действия (естественная плотность лагранжиана), вариационный интегральный функционал и сформулирован соответствующий принцип наименьшего термоупругого действия. Наряду с дифференциальными уравнениями поля, дается вывод определяющих уравнений микрополярного термоупругого континуума, выступающих при теоретико-полевым подходе просто как *сокращенные обозначения* для канонических полевых производных. Теоретико-полевая концепция позволяет также сформулировать *связанные* уравнения гиперболической микрополярной термоупругости с уравнением транспорта тепла гиперболического аналитического типа. В случае плоского 4-пространства–времени вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия используются для построения ряда канонических тензоров и законов сохранения связанного микрополярного термоупругого поля. В настоящей статье с помощью вариационных симметрий, соответствующих трансляциям и вращениям плоского 4-пространства–времени определены компоненты канонического тензора энергии–импульса и углового импульса; сформулированы законы сохранения полной энергии, канонического импульса и канонического углового импульса поля. Канонический угловой импульс поля в качестве составляющей включает момент рефе-



On Precisely Conserved Quantities of Coupled Micropolar Thermoelastic Field

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

The paper is devoted to the 4-covariant formulation in four-dimensional space–time of dynamics of non-linear hyperbolic micropolar thermoelastic continuum. Theory of micropolar continuum are due to E. Cosserat and F. Cosserat and their study of 1909. The complement microdeformations and microrotations of an element are described by a non-rigid trihedron (the case of deformable micropolar directors). Hyperbolic micropolar type-II thermoelastic continuum is considered as a physical field theory with the action density taking account of wave nature of heat transport (the second sound phenomenon in solids) according to the Green&Naghdi type-II model. The principle of the least action for a micropolar thermoelastic field is formulated. The canonical Euler–Lagrange field equations are derived from the principle of least action. These equations include a hyperbolic heat transport equation. Currents corresponding 4-translations and 4-rotations of the four-dimensional space–time are obtained. The 4-covariant representations are rewritten in three-dimensional forms as usual for continuum mechanics. The currents are required in order to formulate conservation laws particularly the conservation of energy. The latter may be represented as path- or surface-independent integrals known from the continuum mechanics and often used in applied problems. Regular explicit covariant formulae for the field current are obtained provided the symmetry



рещионального градиента температурного смещения с множителем пропорциональности, равным плотности энтропии. Установлены соответствующие точно сохраняющиеся инварианты, ассоциированные с полем, в том числе полные канонический импульс и канонический угловой импульс поля.

Ключевые слова: термоупругость, микрополяриность, поле, действие, ковариантность, закон сохранения, тензор энергии–импульса, тензор углового импульса.

group of the variational action functional is known. Explicit covariant formulae for the canonical energy-momentum and angular momentum tensors are also given. Precisely conserved quantities (among them the total canonical angular momentum) for a micropolar thermoelastic field are discussed.

Key words: thermoelasticity, micropolar continuum, field, action, covariance, conservation law, energy–momentum tensor, angular momentum tensor.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Под термином «термоупругость» обычно понимается весьма широкий спектр явлений, таких как теплопроводность, термические напряжения, связанные термоупругие деформации, затухание тепловых и упругих импульсов в твердых телах, и наиболее интересное с прикладной точки зрения явление — гиперболические тепловые волны «второго звука» в деформируемых твердых телах. Эксперименты, проведенные в разные годы различными научными школами, подтверждают вывод о том, что тепло при определенных условиях может распространяться как незатухающая гиперболическая волна «второго звука». Например, надежно подтверждается экспериментально существование волн «второго звука» в висмуте (Bi) при температуре около 3 К. С чисто теоретической точки зрения гиперболическую термоупругость следует рассматривать как одну из важнейших составляющих современной термомеханики и, поскольку некоторые из математических моделей термоупругости допускают теоретико-полевую формулировку, — классической теории поля.

В настоящее время все больший интерес привлекают модели теплопроводности твердых деформируемых тел с микроструктурой и, в частности, с дополнительными степенями свободы, проявляющимися, например, как совместные локальные вращения элементов, составляющих тело. Возможная волновая природа транспорта тепла также представляет собой актуальную проблему и является предметом многочисленных исследований. Волновая (и в этом смысле гиперболическая) трактовка процессов распространения тепла требует привлечения принципов и формализма теории поля [1]. Понятие о физическом поле в отчетливой форме встречается в научных работах Дж. К. Максвелла и с тех пор теория поля развивается как одно из важнейших направлений теоретической и математической физики. Различные физические теории поля часто облекались в своеобразный математический формализм. Так, Максвелл сформулировал уравнения электромагнитного поля в терминах теории кватернионов.

Многие разделы современной теоретической физики и механики (механика сплошных сред, теория упругости, гидродинамика, гиперболическая термоупругость, электродинамика сплошных сред, общая и частная теория относительности) излагаются на языке и в рамках формализма теории поля. Исторически теория поля строилась как логическое продолжение механики континуума. Решающим преимуществом теоретико-полевого подхода в механике и физике является возможность вывода *ковариантных* дифференциальных уравнений поля из единственного вариационного принципа, который обычно называется принципом наименьшего действия (или принципом Гамильтона–Остроградского). Таким образом, математически физическое поле описывается с помощью интегрального функционала действия, из которого потом можно извлечь стандартными методами физически приемлемые дифференциальные уравнения поля, сохраняющиеся величины и токи, включая энергию, импульс и угловой импульс.

Стандартные теории поля (см., например, [2]) развиваются на базе трехмерного евклидова пространства и независимого абсолютного времени. Более общая задача состоит в том, чтобы выработать ковариантную формулировку всех классических физических теорий на основе пространственно-временного многообразия Минковского (или искривленного риманова пространства–времени). Лагранжианы всех наиболее важных физических теорий поля таковы, что соответствующие функционалы действия (взяты в пределах ограниченных, но в остальном неспецифицированных, областей пространства–времени) инвариантны при определенных непрерывных изменениях полевых переменных и пространственно-временных координат. Такие изменения в каждом отдельном случае, как правило, образуют группу геометрических преобразований, которая называется группой инва-



риантности поля или вариационной симметрией поля. С вариационными симметриями поля тесно связаны инварианты группы симметрий поля и симметрии дифференциальных уравнений поля.

Теория континуума с дополнительными (помимо трансляционных) ротационными степенями свободы и моментными напряжениями была создана в 1909 г. Э. Коссера и Ф. Коссера [3]. Исторически теоретико-полевой метод оказался весьма важным и эффективным инструментом вывода уравнений микрополярного упругого континуума, поскольку обеспечивал возможность отхода от традиционного пути представления внутренних напряжений симметричным тензором напряжений Коши. Указанный подход, благодаря своим очевидным преимуществам, использовался, например, в статье [4]. В этой статье принцип наименьшего действия был положен в основу математической модели континуума с микроструктурой, определяемой «нежестким» репером локальных поворотов, вывода дифференциальных уравнений микрополярного поля в форме соответствующих функционалу действия уравнений Эйлера–Лагранжа и определяющих уравнений, а также построения полевых скаляров и тензоров, таких как энергия, импульс и угловой импульс.

В публикациях [5–10] методами теории поля в рамках схемы «конечных» деформаций и локальных поворотов формулируется связанная модель микрополярного термоупругого континуума с «жестким» трехгранником, ассоциированным с элементом.

В настоящей работе в рамках теоретико-полевого подхода получены дифференциальные уравнения связанного микрополярного термоупругого поля как уравнения Эйлера–Лагранжа для интегрального функционала термоупругого действия и необходимые определяющие уравнения. При этом репер локальных поворотов микрополярного континуума, образованный тремя единичными директорами, предполагается «нежестким». Теория вариационных функционалов, инвариантных относительно групп преобразований пространственно-временных координат и физических полей, восходящая к одной из самых ярких работ по математической физике XX столетия [11], применяется для вывода канонического тензора энергии–импульса и канонического углового импульса поля. Сформулированы законы сохранения энергии, канонического импульса и канонического углового импульса. Устанавливается, что канонический угловой импульс поля включает в качестве составляющей момент референциального градиента температурного смещения с множителем пропорциональности, равным плотности энтропии. Указаны соответствующие точно сохраняющиеся инварианты поля, в том числе полный канонический угловой импульс поля.

В статье используются терминология и обозначения, принятые в монографиях [1, 6]. Компактность изложения также достигается интенсивным использованием результатов, включенных в упомянутые монографии.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Наиболее фундаментальное положение теории поля состоит в том, что физическое поле математически описывается интегральным функционалом действия Im :

$$\text{Im} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (1)$$

где \mathcal{L} — плотность действия (лагранжиан); φ^k — упорядоченный набор физических полевых величин, число которых предполагается конечным; X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — пространственно-временные координаты; $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); $d^4 X$ — «естественный» элемент объема пространства–времени. Область интегрирования 4-пространства в (1), в пределах которой изменяются пространственно-временные координаты X^1, X^2, X^3, X^4 , неспецифицирована и в принципе, как принято в теоретико-полевого подходе, в этом не нуждается.

Под символом $d^4 X$ в (1) мы понимаем неинвариантный «естественный» пространственно-временной элемент объема, представляющий собой произведение дифференциалов пространственно-временных координат: $d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$.

Как это принято в современном вариационном исчислении, через ∂_β в представлении действия (1)



и далее обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β :

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\text{exp}l} + \sum_{s \geq 0} (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)},$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, $\partial_\beta^{\text{exp}l}$ — оператор частного дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β .

Математическое описание физического поля основывается на вариационном принципе, который по соображениям исторического характера называется в современной научной литературе вариационным принципом Гамильтона–Остроградского (или принципом наименьшего действия). Этот принцип утверждает, что действительное поле реализуется в пространстве–времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k : $\delta \text{Im} = 0$. Здесь не подвергаются варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования.

Из принципа наименьшего действия получаются дифференциальные уравнения поля в форме классических уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots$$

есть важнейший дифференциальный оператор математической физики — оператор Эйлера.

Принцип наименьшего действия Гамильтона–Остроградского, являющийся фундаментальным для теории поля, указывает на тесную связь физических теорий поля с дифференциальной геометрией искривленных пространств Римана, вариационным исчислением, теорией групп преобразований, вариационных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального соотношения:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \tag{3}$$

где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$ — 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля (2).

Вектор J^β — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньше порядка уравнений поля. В теории поля вектор J^β обычно называется вектором тока. Теория Нетер [11] позволяет эффективно вычислять вектор тока J^β , если известна геометрическая группа преобразований, относительно которой функционал действия инвариантен.

На основании (3) нетрудно заключить, что поток контравариантного 4-вектора J^β через любую поверхность, замкнутую в пространстве–времени, равен нулю

$$\oint_{\partial} J^\beta d\Sigma_\beta = 0, \tag{4}$$

где через $d\Sigma_\beta$ обозначается ориентированный элемент замкнутой поверхности ∂ , ограничивающей область 4-пространства–времени. В случае плоского пространства–времени из каждого соотношения (4) может быть получен инвариант существующего в неограниченной среде поля, не изменяющий своего значения с течением времени, т.е. точно сохраняющийся; говоря конкретнее, интеграл по неограниченному 3-пространству:

$$\int J^4 d^3 X \tag{5}$$

не зависит от времени и поэтому является точно сохраняющимся инвариантом поля.



3. МИКРОПОЛЯРНЫЙ КОНТИНУУМ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

В микрополярных теориях «конечная» деформация тела, представляемая геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

положения \mathbf{X} отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место \mathbf{x} , сопровождается дополнительной деформацией, описываемой искажениями геометрии системы трех директоров \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом: $\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{d}_\alpha(\mathbf{X}, t)$.

Движение репера \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) характеризуется его возможной деформацией (сдвиги трехгранника и удлинения его ребер) и «жестким» поворотом. Таким образом, каждый элемент континуума обладает большим, по сравнению с тремя трансляционными, числом степеней свободы. С дополнительными степенями свободы, которыми наделяется микроэлемент, связаны и дополнительная инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие. Ясно, что связывание с материальной точкой трехгранника \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) наделяет сплошную среду полярностью. В настоящее время такого рода континуумы принято называть также микрополярными.

В оригинальной работе Э. Коссера и Ф. Коссера [2] движение репера \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) предполагалось «жестким», следовательно, помимо трех трансляционных степеней свободы, микроэлемент континуума Коссера обладает лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы.

Возможность только «жесткой» трансформации репера \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) в процессе деформации континуума можно выразить уравнениями

$$g_{ij} d_\alpha^i d_\alpha^j = \delta_{ab} \quad (\alpha, b = 1, 2, 3),$$

которые, очевидно, имеют смысл дополнительных ограничений кинематического типа, навязываемых полевым переменным d_α^k ($k = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, 3$). Здесь g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, δ_{ab} — символ Кронекера.

Переменные \mathbf{X} и \mathbf{x} выступают как соответственно лагранжева и эйлерова переменные, если пользоваться стандартной терминологией механики континуума. С этими переменными связаны метрики $g_{\alpha\beta}$, g_{ij} . Референциальная и пространственная системы отсчета предполагаются инерциальными. В качестве основной термической переменной примем температурное смещение ϑ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ .

В качестве определяющих переменных гиперболической микрополярной термоупругости с «нежестким» репером локальных поворотов примем¹: градиент деформации $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}$; директоры \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) и их референциальные градиенты $\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{d}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$); референциальный градиент температурного смещения $\nabla_{\mathbf{R}} \vartheta$ и скорость температурного смещения $\dot{\vartheta}$.

В лагранжевых X^α ($\alpha = 1, 2, 3$) и эйлеровых координатах x^j ($j = 1, 2, 3$) естественная плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\alpha, x^j, d_\alpha^j, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_\alpha^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha \vartheta) \quad (6)$$

представляет собой разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_{\mathbf{R}}(X^\alpha) g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_{\mathbf{R}}(X^\alpha) g_{ij} \overset{ab}{\mathcal{J}} d_\alpha^i d_\alpha^j - \psi(X^\alpha, x^j, d_\alpha^j, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (7)$$

Здесь, как принято в механике континуума, точкой над символом обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α , $\rho_{\mathbf{R}}$ — референциальная плотность, $\overset{ab}{\mathcal{J}}$ — тензор инерции микрополярного поля.

¹Ниже через $\nabla_{\mathbf{R}}$ обозначается отсчетный оператор Гамильтона.



Заметим, что согласно (7) термическое поле не обладает инерцией, поскольку не дает никакого вклада в кинетическую часть действия. Обратим также внимание на то обстоятельство, что в декартовых эйлеровых координатах «естественная» плотность лагранжиана (7) не должна зависеть явно от эйлеровых переменных x^j в силу принципа Галилеевой инвариантности (речь идет об инвариантности «естественной» плотности лагранжиана относительно трансляций в пространстве мест \mathbf{x}). По аналогии можно полагать, что «естественная» плотность лагранжиана явно не зависит и от температурного смещения ϑ .

Вариационный интеграл микрополярного термоупругого действия на основании (6) имеет наиболее общую форму, приводимую ниже:

$$\text{Im} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta) dX^1 dX^2 dX^3 dt \quad (8)$$

$$(\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3).$$

Соответствующие вариационному интегралу (8) уравнения поля распадаются на следующие три группы:

$$\partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3),$$

$$\partial_\alpha \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{M}}_{:j}^\alpha + \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{A}}_j - (\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{Q}}_j)^\cdot = 0 \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

$$\partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

В рамках Лагранжева полевого формализма определяющие уравнения выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся в целях сокращения записи дифференциальных уравнений поля (9):

$$P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_a^j}, \quad S_j^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{M}}_{:j}^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_a^j)},$$

$$\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j}, \quad s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta}, \quad j_R^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}.$$

В данных выше определяющих уравнениях приняты следующие обозначения: P_j — линейный обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; $\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{Q}}_j$ — обобщенные импульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы; S_j^α — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа; $\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{M}}_{:j}^\alpha$ — тензоры экстранапряжений; $\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{A}}_j$ — обобщенные моменты, сопряженные локальным вращениям триэдра \mathbf{d} ($\mathbf{a} = 1, 2, 3$); s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии); j_R^α — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Уравнение, располагающееся в нижней строке (9), представляет собой уравнение баланса энтропии. Если лагранжиан не содержит явных вхождений температурного смещения, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости GNII (см. [6]).

4. ТРАНСЛЯЦИИ ВДОЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОБРАЗУЮЩИХ ПЛОСКОГО 4-ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ. КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ–ИМПУЛЬСА

Тензор энергии–импульса в классической теории поля, методами которой могут быть исследованы важнейшие разделы современной механики и физики (включая и микромеханику континуума), объединяет плотности и потоки энергии и импульса поля в единый математический объект. В случае плоского пространства–времени теория Нетер инвариантных вариационных функционалов [11] весьма эффективна в плане быстрого определения тензора энергии–импульса и соответствующего закона сохранения. Заметим также, что тензор, отличающийся лишь знаком от канонического тензора



энергии–импульса, в механике деформируемого твердого тела обычно называется тензором напряжений Эшелби.

Далее будет рассматриваться лишь тот случай, когда «естественная» плотность лагранжиана \mathcal{L} явно не зависит от пространственно-временных координат X^β , т. е. $\partial_\alpha^{\text{exp} l} \mathcal{L} = 0$.

Зафиксируем отсчетный 4-индекс α и рассмотрим однопараметрическую группу трансляций пространства–времени вдоль прямолинейной α -оси:

$$\tilde{X}^\beta = X^\beta + \varepsilon \delta_\alpha^\beta.$$

Такого рода преобразования включают также сдвиги временной координаты, которая соответствует индексу 4.

Функционал действия любой 4-области пространственно-временного многообразия абсолютно инвариантен относительно группы трансляций пространства–времени, если «естественная» плотность лагранжиана явно не зависит от координат X^β , следовательно, для координатного направления α 4-вектор тока определяется как $J_{(\alpha)}^\beta = T_{\alpha}^{\beta \cdot}$ (см., например, [6]), где

$$T_{\alpha}^{\beta \cdot} = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad (10)$$

образуя тензор второго ранга. Компоненты канонического 4-тензора $T_{\alpha}^{\beta \cdot}$ имеют размерность плотности энергии (на единицу «естественного» элемента объема пространственно-временного многообразия).

Канонический закон сохранения, соответствующий группе трансляций пространства–времени, есть

$$\partial_\beta T_{\alpha}^{\beta \cdot} = 0. \quad (11)$$

Заметим, что приведенная выше классическая схема построения канонического тензора энергии–импульса поля существенно опирается на то, что в пространственно-временном многообразии имеются «прямолинейные» оси, и она не может быть просто обобщена до сохраняющегося тензора в искривленном пространстве–времени.

Опираясь на формулу (10), определим компоненты канонического тензора энергии–импульса микрополярного термоупругого поля, лагранжиан которого задан согласно (7). Всего имеются следующие четыре группы соотношений:

$$T_{\lambda}^{\mu \cdot} = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{\cdot l}^{\mu \cdot} (\partial_\lambda x^l) + \overset{\text{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot l}^{\mu \cdot} (\partial_\lambda d^l) - j_{\text{R}}^{\mu \cdot} (\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3), \quad (12)$$

$$T_{\cdot 4}^{\mu \cdot} = S_{\cdot l}^{\mu \cdot} \dot{x}^l + \overset{\text{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot l}^{\mu \cdot} \dot{d}^l - j_{\text{R}}^{\mu \cdot} \dot{\vartheta} \quad (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3), \quad (13)$$

$$T_{\lambda}^{\cdot 4} = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d^l) \overset{\text{a}}{\mathcal{Q}}_l - s (\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4), \quad (14)$$

$$T_{\cdot 4}^{\cdot 4} = \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{d}^l \overset{\text{a}}{\mathcal{Q}}_l - s \dot{\vartheta} \quad (\lambda, \mu = 4). \quad (15)$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии–импульса микрополярного термоупругого поля позволяют быстро найти гамильтониан поля \mathcal{H} , вектор псевдоимпульса поля \mathcal{P}_λ , вектор Умова–Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P_{\lambda}^{\mu \cdot}$.

Так, компонента (15) тензора энергии–импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{d}^l \overset{\text{a}}{\mathcal{Q}}_l + s \dot{\vartheta} - \mathcal{L}.$$

Компоненты (14) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле

$$\mathcal{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d^l) \overset{\text{a}}{\mathcal{Q}}_l - s (\partial_\lambda \vartheta).$$

Из компонент (13) формируется контравариантный вектор Умова–Пойнтинга:

$$\Gamma^\mu = S_{\cdot l}^{\mu \cdot} \dot{x}^l + \overset{\text{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot l}^{\mu \cdot} \dot{d}^l - j_{\text{R}}^{\mu \cdot} \dot{\vartheta}.$$



Компоненты (12) тензора энергии–импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность сразу же определить тензор напряжений Эшелби:

$$-P_{\cdot\lambda}^{\mu\cdot} = \mathcal{L}\delta_{\lambda}^{\mu} + S_{\cdot l}^{\mu\cdot}(\partial_{\lambda}x^l) + \overset{a}{M}_{\cdot l}^{\mu\cdot}(\partial_{\lambda}d^l) - j_{\text{R}}^{\mu}(\partial_{\lambda}\vartheta).$$

Заметим, что интеграл по неограниченному 3-пространству $\int \mathcal{P}_{\lambda}d^3X$ ($\lambda = 1, 2, 3$), представляющий собой полный ковариантный канонический импульс поля, не зависит от времени и является точно сохраняющимся инвариантом поля. Приведем последнюю формулу в развернутом виде

$$- \int ((\partial_{\lambda}x^l)P_l + (\partial_{\lambda}d^l)\overset{a}{Q}_l + s(\partial_{\lambda}\vartheta))d^3X \quad (\lambda = 1, 2, 3),$$

Заключая, приведем два содержащихся в (11) канонических уравнения баланса энергии и псевдо-импульса гиперболического микрополярного термоупругого поля:

$$-\dot{\mathcal{H}} + \partial_{\mu}\Gamma^{\mu} = 0, \quad -\dot{\mathcal{P}}_{\lambda} + \partial_{\mu}P_{\cdot\lambda}^{\mu\cdot} = 0.$$

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВОРОТА ПЛОСКОГО 4-ПРОСТРАНСТВА–ВРЕМЕНИ. КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР УГЛОВОГО ИМПУЛЬСА

Произвольное бесконечно малое вращение евклидова 4-пространства–времени можно задать линейными преобразованиями:

$$\tilde{X}_{\beta} = X_{\beta} + \Omega_{\beta\sigma}X^{\sigma} \quad (\sigma, \beta = 1, 2, 3, 4),$$

где $\Omega_{\beta\sigma} = -\Omega_{\sigma\beta}$ есть антисимметричный 4-тензор второго ранга, компоненты которого выступают как тензорные параметры группы инфинитезимальных вращений.

Двенадцать компонент $\Omega_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) связаны соотношениями $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$, следовательно, среди них имеется лишь шесть независимых. В качестве независимых возьмем такие компоненты $\Omega_{\beta\alpha}$, для которых $\beta < \alpha$.

Вариации пространственно-временных координат вычисляются, очевидно, в виде $\delta X_{\beta} = \Omega_{\beta\sigma}X^{\sigma}$ или

$$\delta X_{\beta} = \sum_{\gamma < \sigma} \delta_{\beta}^{\gamma} X^{\sigma} \Omega_{\gamma\sigma} + \sum_{\gamma > \sigma} \delta_{\beta}^{\gamma} X^{\sigma} \Omega_{\gamma\sigma} = \sum_{\gamma < \alpha} \Omega_{\gamma\alpha} (\delta_{\beta}^{\gamma} X^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha} X^{\gamma}).$$

Здесь суммирование производится по всем парам индексов $\gamma, \alpha: \gamma < \alpha$.

Будем считать, что преобразование вращения действует лишь на пространственно-временные координаты (которые мы рассматриваем как переменные, связанные с отсчетной конфигурацией) и *не действует* на физические поля φ^k , координатное представление которых осуществляется в эйлеровой системе координат. Поэтому можно заключить, что $\delta\varphi^k = 0$.

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора тока J^{β} в виде

$$J^{\beta(\gamma\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^s)} [(\partial_{\sigma}\varphi^s)g^{\sigma\alpha}X^{\gamma} - (\partial_{\sigma}\varphi^s)g^{\sigma\gamma}X^{\alpha}] + \mathcal{L}g^{\beta\sigma}(X^{\alpha}\delta_{\sigma}^{\gamma} - X^{\gamma}\delta_{\sigma}^{\alpha}).$$

Определим далее 4-тензор третьего ранга $M_{\cdot\lambda\mu}^{\beta\cdot\cdot}$ формулой

$$M_{\cdot\lambda\mu}^{\beta\cdot\cdot} = g_{\gamma\lambda}g_{\alpha\mu}J^{\beta(\gamma\alpha)} \quad (\gamma, \alpha, \lambda, \mu, \beta = 1, 2, 3, 4) \quad (16)$$

или в развернутом виде

$$M_{\cdot\lambda\mu}^{\beta\cdot\cdot} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^s)} [(\partial_{\mu}\varphi^s)X_{\lambda} - (\partial_{\lambda}\varphi^s)X_{\mu}] + \mathcal{L}(X_{\mu}\delta_{\lambda}^{\beta} - X_{\lambda}\delta_{\mu}^{\beta}).$$

Тензор $M_{\cdot\lambda\mu}^{\beta\cdot\cdot}$ называется тензором момента количества движения (или тензором углового импульса) поля. Он антисимметричен по нижним индексам λ, μ . Заметим, что каноническое определение тензора момента количества движения (16) указывает также и на его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 2-ковариантное.



Следует отметить, что тензор момента количества движения поля (16) выражается через тензор энергии–импульса (10) поля по формуле

$$M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} = T_{\gamma}^{\beta\cdot} X_{\alpha} - T_{\alpha}^{\beta\cdot} X_{\gamma}.$$

Соответствующий группе вращений пространства–времени закон сохранения есть $\partial_{\beta} M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} = 0$.

Интеграл (5), величина которого не зависит от времени, в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\int M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} d^3 X.$$

Поскольку $T_{\alpha}^4 = \mathcal{P}_{\alpha}$, где \mathcal{P}_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) — канонический импульс (псевдоимпульс), то антисимметричный тензор полного момента канонического импульса микрополярного термоупругого поля

$$\mathcal{S}_{\alpha\gamma} = \int (X_{\alpha} \mathcal{P}_{\gamma} - X_{\gamma} \mathcal{P}_{\alpha}) d^3 X \quad (\alpha, \gamma = 1, 2, 3)$$

будет точно сохраняющимся инвариантом поля, т. е. $\dot{\mathcal{S}}_{\alpha\gamma} = 0$.

Интересно также отметить, что чисто термическая часть тензора $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}$ представляется интегралом по неограниченному 3-пространству:

$$\int s(X_{\alpha} \partial_{\gamma} - X_{\gamma} \partial_{\alpha}) \vartheta d^3 X \quad (\alpha, \gamma = 1, 2, 3).$$

Таким образом, несохраняющаяся термическая часть полного канонического углового импульса поля есть полный момент референциального градиента температурного смещения с множителем пропорциональности, равным плотности энтропии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00184-а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

Библиографический список

1. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
2. Truesdell C., Toupin R. A. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics. Vol. III/1 / ed. S. Flugge. Berlin; Göttingen; Heidelberg : Springer, 1960. P. 226–793.
3. Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
4. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-Stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17, № 5. P. 85–112.
5. Ковалев В. А., Мельников А. Д., Радаев Ю. Н. О гиперболических уравнениях связанного микрополярного термоупругого поля // Математическая физика и ее приложения : материалы Второй междунар. конф. / под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воловича и д-ра физ.-мат. наук, проф. Ю. Н. Радаева. Самара : Книга, 2010. С. 156–164.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии–импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 58–77.
8. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О некоторых новых направлениях развития полевых теорий механики сплошных сред // V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела : тез. докл. Всерос. конф., 31 мая – 5 июня, 2011 г., Астрахань, Россия. Астрахань : Изд-во АГТУ, 2011. С. 26–28.
9. Радаев Ю. Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела // Современные проблемы механики : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию Л. А. Галина. М., 2012. С. 75–76.
10. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Теоретико-полевые формулировки и модели нелинейной гиперболической микрополярной термоупругости // XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар им. акад. Е. В. Золотова (4–10 сентября 2012 г., Владивосток) : сб. докл. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 137–142.
11. Noether E. Invariante Variationsprobleme // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1918. H. 2. S. 235–257; Немец Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М. : Физматгиз, 1959. С. 611–630.



УДК 539.3

О СОГЛАСОВАННОМ КОНТАКТЕ ШТАМПОВ И ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ, ИМЕЮЩИХ СЛОЖНЫЙ ПРОФИЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

А. В. Манжиров*, С. П. Курдина**, С. Кухарский***

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

E-mail: manzh@ipmnet.ru

**Московский государственный университет приборостроения и информатики

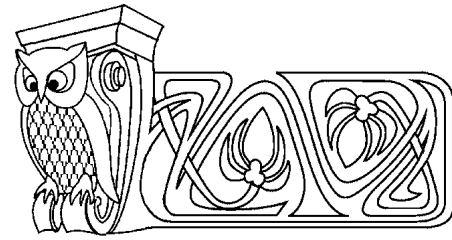
E-mail: svetlana-ka@yandex.ru

***Институт фундаментальных технологических исследований ПАН, Варшава

E-mail: skuchar@ippt.gov.pl

В работе исследуется контактное взаимодействие системы жестких штампов и вязкоупругого основания с тонким покрытием в случае, когда поверхности штампов и покрытия согласованы. Такая задача может возникнуть, например, когда штампы устанавливаются на основание до полного отверждения покрытия. При этом формы оснований штампов могут описываться быстро осциллирующими функциями. Дан вывод системы разрешающих смешанных интегральных уравнений, для решения которой развит обобщенный проекционный метод. Сделаны выводы качественного характера.

Ключевые слова: множественный контакт, сложный профиль поверхности, система интегральных уравнений.



The Conformal Contact Between Punches and Coated Solids with Complicated Surface Profile

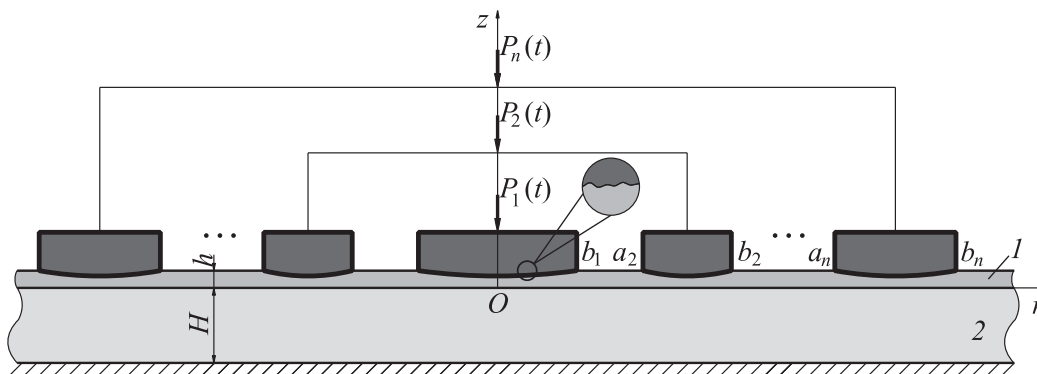
A. V. Manzhirov, S. P. Kurdina, S. Kucharski

The contact interaction between system of rigid punches and viscoelastic foundations with thin coatings for the cases in which the punches and coating surfaces are conformal (mutually repeating) is studied. Such problems can arise, for example, when the punch immerses into a solidifying coating before its complete solidification. The shapes of punches surfaces could be described by a fast oscillating functions. Basic system of mixed integral equation is obtained. The solution of this system is constructed by using the generalized projection method. Qualitative conclusions are discussed.

Key words: multiple contact, complicated surface profile, integral equation system.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На подстилающем недеформируемом основании лежит вязкоупругий слой толщины H , изготовленный в момент времени τ_2 , с тонким вязкоупругим покрытием, изготовленным в момент времени τ_1 (рисунок). Жесткость покрытия не превышает жесткости нижнего слоя. На такое основание начиная с момента времени $\tau_0 \geq \max\{\tau_1, \tau_2\}$ действуют n осесимметричных кольцевых штампов с силами $P_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), оси которых проходят через точку O . Ширина каждого штампа значительно больше толщины покрытия, т.е. $b_i - a_i \gg h(r)$, где a_i, b_i — внутренний и внешний радиусы i -го штампа ($i = 1, 2, \dots, n$), а $h(r)$ — переменная толщина верхнего слоя. Считается, что форма покрытия и формы оснований штампов одинаковые до начала загрузки, т.е. при $t < \tau_0$.



Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани основания, вызванные нагрузкой

$$p(r, t) = \begin{cases} -q_i(r, t), & r \in [a_i, b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$



и перемещения жестких штампов, получим систему интегральных уравнений контактной задачи [1–3]:

$$k_\nu(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \frac{q_i(r, t)h(r)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j \frac{q_j(r, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta_i(t), \quad r \in [a_i, b_i], \quad (1)$$

$$\mathbf{F}_i f(r, t) = \int_{a_i}^{b_i} k_{\text{as}}\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right) f(\rho, t) \rho d\rho \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь $E_1(t - \tau_2)$ — модуль упругомгновенной деформации верхнего слоя, k_ν — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем (при гладком контакте $k_\nu = 1 - \nu_1^2$, в случае идеального контакта $k_\nu = (1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)/(1 - \nu_1)$, ν_1 — коэффициент Пуассона верхнего слоя), ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя; $\delta_i(t)$ — осадки штампов, \mathbf{I} — тождественный оператор, \mathbf{V}_k ($k = 1, 2$) — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(k)}(t, \tau)$, \mathbf{F}_j — интегральные операторы с известным ядром осесимметричной контактной задачи $k_{\text{as}}(r/H, \rho/H)$, имеющим вид [3, 4]

$$k_{\text{as}}(r, \rho) = \int_0^\infty L(u) J_0(ru) J_0(\rho u) du,$$

где $J_0(u)$ — функции Бесселя первого рода нулевого порядка, а функция $L(u)$ определяется в зависимости от условий соединения нижнего слоя и подстилающего недеформируемого основания.

Введя функции толщины покрытия $h_i(r)$ под каждым штампом, совпадающие с функцией $h(r)$ в соответствующих диапазонах, т.е. $h_i(r) \equiv h(r)$ ($r \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$), перепишем уравнение (1) в виде

$$k_\nu(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \frac{q_i(r, t)h_i(r)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j \frac{q_j(r, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta_i(t), \quad r \in [a_i, b_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Дополнительные условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями:

$$P_i(t) = 2\pi \int_{a_i}^{b_i} q_i(\rho, t) \rho d\rho \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Сделав в (2) и (3) замену переменных по формулам

$$(r^*)^2 = \frac{r^2 - a_i^2}{b_i^2 - a_i^2}, \quad (\rho^*)^2 = \frac{\rho^2 - a_i^2}{b_i^2 - a_i^2}, \quad r, \rho \in [a_i, b_i], \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0},$$

$$\lambda = \frac{H}{b_1 - a_1}, \quad \eta_j = \frac{a_j}{b_1 - a_1}, \quad \zeta_j^2 = \frac{b_j^2 - a_j^2}{(b_1 - a_1)^2}, \quad \delta_i^*(t^*) = \frac{\delta_i(t)\zeta_i}{b_1 - a_1},$$

$$q_i^*(r^*, t^*) = \frac{2q_i(r, t)(1 - \nu_2^2)\zeta_i}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P_i^*(t^*) = \frac{P_i(t)(1 - \nu_2^2)\zeta_i}{\pi E_2(t - \tau_2)(b_i^2 - a_i^2)}, \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_1(t - \tau_1)},$$

$$m_i(r^*) = \frac{k_\nu}{1 - \nu_2^2} \frac{h(r)}{2(b_1 - a_1)}, \quad \mathbf{F}_{ij}^* f(r^*, t^*) = \int_0^1 k_{ij}(r^*, \rho^*) f(\rho^*, t^*) \rho^* d\rho^*,$$

$$k_{ij}(r^*, \rho^*) = \frac{\zeta_i \zeta_j}{\lambda} k_{\text{as}} \left[\frac{\sqrt{(r^*)^2 \zeta_i^2 + \eta_i^2}}{\lambda}, \frac{\sqrt{(\rho^*)^2 \zeta_j^2 + \eta_j^2}}{\lambda} \right] = \frac{\zeta_i \zeta_j}{\lambda} k_{\text{as}} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right),$$

$$\mathbf{V}_k^* f(r^*, t^*) = \int_1^{t^*} K_k(t^*, \tau^*) f(r^*, \tau^*) d\tau^*, \quad K_2(t^*, \tau^*) = K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0,$$

$$K_1(t^*, \tau^*) = \frac{E_1(t - \tau_1)E_2(\tau - \tau_2)}{E_1(\tau - \tau_1)E_2(t - \tau_2)} K^{(1)}(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \tau_0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений:

$$c(t)m_i(r)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)q_i(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} q_j(r, t) = \delta_i(t), \quad r \in [0, 1] \quad (4)$$



с дополнительными условиями:

$$\int_0^1 q_i(\rho, t) \rho d\rho = P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Ядро $k_{as}(r/H, \rho/h)$ является симметричным положительно определенным ядром Фредгольма [5].

2. ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Принимая, что

$$\mathbf{q}(r, t) = \begin{pmatrix} q_1(r, t) \\ q_2(r, t) \\ \vdots \\ q_n(r, t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \\ \vdots \\ \delta_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}(r, \rho) = \begin{pmatrix} k_{11}(r, \rho) & k_{12}(r, \rho) & \cdots & k_{1n}(r, \rho) \\ k_{21}(r, \rho) & k_{22}(r, \rho) & \cdots & k_{2n}(r, \rho) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(r, \rho) & k_{n2}(r, \rho) & \cdots & k_{nn}(r, \rho) \end{pmatrix},$$

и вводя диагональную матрицу

$$\mathbf{D}(r) = \begin{pmatrix} m_1(r) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2(r) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n(r) \end{pmatrix} = \text{diag}_n \{m_1(r), m_2(r), \dots, m_n(r)\}, \quad (6)$$

систему уравнений (4) с дополнительными условиями (5) можно записать в виде операторного уравнения осесимметричных контактных задач:

$$c(t)\mathbf{D}(r)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathcal{G}\mathbf{q}(r, t) = \boldsymbol{\delta}(t) - \mathbf{g}(r), \quad r \in [0, 1], \quad (7)$$

$$\int_0^1 \mathbf{q}(\rho, t) \rho d\rho = \mathbf{P}(t), \quad (8)$$

где $\mathcal{G}\mathbf{f}(r) = \int_0^1 \mathbf{k}(r, \rho)\mathbf{f}(\rho)\rho d\rho$. Так как $\mathbf{M}(r)$ — симметричная положительно определенная матрица ($m_i(r) > 0$), то ее можно представить в виде $\mathbf{D}(r) = \mathbf{N}(r)\mathbf{N}(r)$, где в качестве $\mathbf{N}(r)$ можно взять матрицу

$$\mathbf{N}(r) = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1(r)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2(r)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{m_n(r)} \end{pmatrix} = \text{diag}_n \{\sqrt{m_1(r)}, \sqrt{m_2(r)}, \dots, \sqrt{m_n(r)}\}.$$

В дальнейшем будем обозначать эту матрицу как $\mathbf{D}^{1/2}(r)$. Тогда домножим слева уравнение (7) на $\mathbf{D}^{-1/2}(r) = (\mathbf{D}^{1/2}(r))^{-1}$:

$$c(t)\mathbf{D}^{1/2}(r)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathcal{G}\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\boldsymbol{\delta}(t), \quad r \in [0, 1].$$



Введем обозначения

$$\mathbf{Q}(r, t) = \mathbf{D}^{1/2}(r)\mathbf{q}(r, t) = \begin{pmatrix} \frac{q_1(r, t)}{\sqrt{m_1(r)}} \\ \frac{q_2(r, t)}{\sqrt{m_2(r)}} \\ \vdots \\ \frac{q_n(r, t)}{\sqrt{m_n(r)}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(r, \rho) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{k}(r, \rho)\mathbf{D}^{-1/2}(\rho) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{k_{11}(r, \rho)}{\sqrt{m_1(r)m_1(\rho)}} & \frac{k_{12}(r, \rho)}{\sqrt{m_1(r)m_2(\rho)}} & \dots & \frac{k_{1n}(r, \rho)}{\sqrt{m_1(r)m_n(\rho)}} \\ \frac{k_{21}(r, \rho)}{\sqrt{m_2(r)m_1(\rho)}} & \frac{k_{22}(r, \rho)}{\sqrt{m_2(r)m_2(\rho)}} & \dots & \frac{k_{2n}(r, \rho)}{\sqrt{m_2(r)m_n(\rho)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{k_{n1}(r, \rho)}{\sqrt{m_n(r)m_1(\rho)}} & \frac{k_{n2}(r, \rho)}{\sqrt{m_n(r)m_2(\rho)}} & \dots & \frac{k_{nn}(r, \rho)}{\sqrt{m_n(r)m_n(\rho)}} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

получим

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathcal{F}\mathbf{Q}(r, t) = \mathbf{\Delta}(r, t), \quad r \in [0, 1], \quad (10)$$

$$\int_0^1 \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{q}(\rho, t)\rho d\rho = \mathbf{P}(t), \quad (11)$$

где $\mathbf{\Delta}(r, t) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{\delta}(t)$, $\mathcal{F}\mathbf{f}(r) = \int_0^1 \mathbf{K}(r, \rho)\mathbf{f}(\rho)\rho d\rho$.

Таким образом, будем исследовать операторное уравнение (10) с дополнительным условием (11), $\mathbf{Q}(r, t)$, $\mathbf{\Delta}(r, t)$ — непрерывные по t в $L_2(\Omega, V)$ вектор-функции, $\mathbf{P}(t)$ — непрерывная по t вектор-функция (здесь $L_2(\Omega, V)$ — гильбертово пространство вектор-функций, интегрируемых с квадратом в круге Ω единичного радиуса и зависящих только от радиальной координаты). Можно показать, что вполне непрерывный оператор \mathcal{F} является самосопряженным (так как $\mathbf{K}(r, \rho) = \mathbf{K}^T(\rho, r)$) и положительно определенным оператором из $L_2(\Omega, V)$ в $L_2(\Omega, V)$.

3. ВАРИАНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКИ

Рассмотрим варианты постановки контактной задачи о системе штампов, возникающие в осесимметричном случае. Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из двух типов условий: осадку или вдавливающую силу. Отсюда следует, что в осесимметричной задаче о системе штампов возможны только три варианта постановки:

- на всех штампах заданы кинематические условия;
- на всех штампах заданы квазистатические условия;
- на части штампов заданы кинематические, а на части — квазистатические условия.

Первые два случая относятся к задачам с одной группой штампов, последний — с двумя группами.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ ГРУППЫ ШТАМПОВ

Для решения задачи необходимо в первую очередь построить функциональный базис гильбертова пространства $L_2(\Omega, V)$, для чего требуется рассмотреть последовательность вектор-функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots$), составляющую базис пространства $L_2(\Omega, V)$ (см. [1, 6]). При этом необходимо, чтобы в структуру всех базисных функций входили функции из матрицы $\mathbf{D}^{-1/2}(r)$ или в структуру каждой i -й группы функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) входила функция $\sqrt{m_i(r)}$. Это позволит учесть ее особенности (осцилляции, разрывность и пр.) уже на этапе формирования базиса, что даст возможность принимать во внимание при расчетах сложные формы подошв штампов. В этом



случае система базисных функций сможет быть построена по следующему правилу [7]:

$$\int_0^1 [\mathbf{p}_m^{(i)}(\rho)]^T \mathbf{p}_k^{(j)}(\rho) \rho d\rho = \delta_{mk} \delta_{ij}, \quad \mathbf{p}_m^{(i)}(r) = \mathbf{D}^{-1/2}(r) \mathbf{p}_m^{*(i)}(r), \quad \mathbf{p}_m^{*(i)}(r) = p_m^{*(i)}(r) \mathbf{1}^i,$$

$$p_m^{*(i)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{m-1,i} \Delta_{m,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{m-1,i} & J_{m,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{m,i} & J_{m+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J_{m-1,i} & J_{m,i} & \cdots & J_{2m-2,i} & J_{2m-1,i} \\ 1 & r^2 & \cdots & r^{2m-2} & r^{2m} \end{vmatrix}, \quad J_{k,i} = \int_0^1 \frac{\rho^{2k+1}}{m_i(\rho)} d\rho, \quad (12)$$

$$\Delta_{-1,i} = 1, \quad \Delta_{m,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{m,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{m+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{m,i} & J_{m+1,i} & \cdots & J_{2m,i} \end{vmatrix}, \quad m, k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots$) составляет базис $L_2(\Omega, V)$.

4.1. Заданные осадки штампов (решение уравнения с известной правой частью)

Пусть система штампов представляет группу с заданными осадками штампов $\delta(t)$. Тогда требуется найти контактные давления $\mathbf{q}(r, t)$ под каждым из штампов и вдавливающие усилия $\mathbf{P}(t)$.

Решение уравнения (10) следует искать в виде ряда по собственным функциям оператора \mathcal{F} , который является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2(\Omega, V)$ в $L_2(\Omega, V)$. Система его собственных вектор-функций составляет базис пространства $L_2(\Omega, V)$ [8]. Спектральная задача для оператора \mathcal{F} может быть записана в форме

$$\mathcal{F} \varphi_\ell(r) = \gamma_\ell \varphi_\ell(r),$$

$$\varphi_\ell(r) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \psi_\ell^{(ik)} \mathbf{p}_k^{(i)}(r), \quad \ell = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\mathbf{K}(r, \rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km} \mathbf{p}_k^{(i)}(r) [\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)]^T, \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

Представив искомую вектор-функцию $\mathbf{Q}(r, t)$ и $\Delta(r, t)$ в виде разложения по собственным вектор-функциям $\varphi_k^{(i)}(r)$ ($i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, 3, \dots$) в $L_2(\Omega, V)$, т. е.

$$\mathbf{Q}(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t) \varphi_k(r), \quad \Delta(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^{(k)}(t) \varphi_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \delta_k^{(i)} \delta_i(t) \right) \varphi_k(r), \quad (14)$$

и подставив эти представления в (10), получим

$$c(t) (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t) \varphi_k(r) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathcal{F} \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t) \varphi_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^{(k)}(t) \varphi_k(r).$$

Здесь считается, что коэффициенты разложения $\delta_k^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, 3, \dots$) нам известны. Точнее мы их получаем по известным теперь собственным функциям $\varphi_k(r)$. Учитывая представления из спектральной задачи (13), можно получить

$$z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$



где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k^0(t, \tau) = [c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)]/[c(t) + \gamma_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(r, t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (9), (13)–(15):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(r, t) &= \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{Q}(r, t), & \mathbf{Q}(r, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t)\varphi_k(r), \\ z^{(k)}(t) &= (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, & \varphi_k(r) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} \mathbf{p}_\ell^{(i)}(r), & k &= 1, 2, 3, \dots, \\ \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} &= \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}, & i &= 1, 2, \dots, n, & k &= 0, 1, 2, \dots, & \ell &= 1, 2, 3, \dots, \\ K_{ij}^{km} &= \int_0^1 \int_0^1 [\mathbf{p}_k^{(i)}(r)]^T \mathbf{K}(r, \rho) \mathbf{p}_m^{(j)}(\rho) r \rho dr d\rho, & i, j &= 1, 2, \dots, n, & k, m &= 0, 1, 2, \dots, \\ \Delta^{(k)}(t) &= \int_0^1 [\Delta(\rho, t)]^T \varphi_k(\rho) \rho d\rho, & k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

При этом исходные базисные функции следует строить по формулам (12).

Отметим, что в силу формул (12) и (16)

$$\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{D}^{-1}(r) \sum_{i=1}^n \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{p}_\ell^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} z^{(k)}(t) \right]$$

или

$$q_i(r, t) = \frac{1}{m_i(r)} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} z^{(k)}(t) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Видно, что в решении в явном виде выделены функции $m_i(r)$, которые связаны с функциями профиля подошв штампов, а в квадратных скобках стоит сумма гладких функций (многочленов). Это позволяет производить расчеты для случаев, когда форма подошв штампов задается быстро осциллирующими функциями.

Для получения вектора вдавливающих усилий $\mathbf{P}(t)$ необходимо воспользоваться уже полученной вектор-функцией $\mathbf{q}(r, t)$, подставив ее в уравнение (11):

$$\mathbf{P}(t) = \int_0^1 \mathbf{q}(\rho, t) \rho d\rho.$$

4.2. Заданные вдавливающие усилия (решение уравнения с неизвестной правой частью и дополнительным условием)

Пусть система штампов представляет группу с заданными вдавливающими силами $\mathbf{P}(t)$. Тогда требуются найти контактные давления $\mathbf{q}(r, t)$ под каждым из штампов и осадки штампов $\delta(t)$.

В этом случае пространство $L_2(\Omega, V)$ необходимо представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(\Omega, V) = L_2^{(0)}(\Omega, V) \oplus L_2^{(1)}(\Omega, V)$, где $L_2^{(0)}(\Omega, V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\mathbf{p}_0^{(i)}(r)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, 3, \dots$). Подынтегральная функция и правая часть уравнения (10) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}(\Omega, V)$ и $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ соответственно, т. е.

$$\mathbf{Q}(r, t) = \mathbf{Q}_0(r, t) + \mathbf{Q}_1(r, t), \quad \Delta(r, t) = \Delta_0(r, t) + \Delta_1(r, t), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{Q}_0(r, t) = \sum_{i=1}^n z_i^{(0)}(t) \mathbf{p}_0^{(i)}(r), \quad \Delta_0(r, t) = \sum_{i=1}^n \Delta_i(t) \mathbf{p}_0^{(i)}(r), \quad \Delta_i(t) = \sqrt{J_{0,i}} \delta_i(t). \quad (18)$$



Заметим, что в представлении для $\mathbf{Q}(r, t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(r, t)$, функция разложения которого определяется дополнительным условием (11):

$$z_i^{(0)}(t) = \frac{P_i(t)}{\sqrt{J_{0,i}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

а слагаемое $\mathbf{Q}_1(r, t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $\Delta_0(r, t)$, а функция $\Delta_1(r, t) \equiv \mathbf{0}$.

Введем оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство $L_2(\Omega, V)$ в $L_2^{(0)}(\Omega, V)$:

$$\mathbf{P}_0 \phi(r, t) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 [\phi(\rho, t)]^T \mathbf{p}_0^{(i)}(\rho) \rho d\rho \mathbf{p}_0^{(i)}(r). \quad (20)$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ переводит пространство $L_2(\Omega, V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{P}_k \mathbf{Q}(r, t) = \mathbf{Q}_k(r, t), \quad \mathbf{P}_k \Delta(r, t) = \Delta_k(r, t), \quad k = 0, 1.$$

Поддействуем на уравнение (10) оператором ортогонального проектирования \mathbf{P}_1 . В результате получим уравнение для определения $\mathbf{Q}_1(r, t)$ с известной правой частью:

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}_1(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1 \mathcal{F} \mathbf{Q}_1(r, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1 \mathcal{F} \mathbf{Q}_0(r, t) = \tilde{\Delta}_1(r, t). \quad (21)$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1 \mathcal{F}$, который, как можно показать, является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(2)}(\Omega, V)$. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_1 \mathcal{F}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \mathcal{F} \varphi_\ell(r) &= \gamma_\ell \varphi_\ell(r), \\ \varphi_\ell(r) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \psi_\ell^{(ik)} \mathbf{p}_k^{(i)}(r), \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, \\ \mathbf{K}(r, \rho) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km} \mathbf{p}_k^{(i)}(r) [\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)]^T, \\ \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} &= \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k, \ell = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Представив искомую функцию $\mathbf{Q}_1(r, t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(r)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$, т. е.

$$\mathbf{Q}_1(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t) \varphi_k(r), \quad (23)$$

и подставив это представление в (21), получим уравнение для определения неизвестных функций разложения $z^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$):

$$z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (24)$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t, \tau) = [c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)] / [c(t) + \gamma_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(r, t)$ под штампами необходимо воспользоваться формулами (9), (17)–(19), (22)–(24):

$$\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{D}^{-1/2}(r) \mathbf{Q}(r, t), \quad \mathbf{Q}(r, t) = \sum_{i=1}^n z_i^{(0)}(t) \mathbf{p}_0^{(i)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t) \varphi_k(r),$$



$$\begin{aligned}
 z_i^{(0)}(t) &= \frac{P_i(t)}{\sqrt{J_{0,i}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
 z^{(k)}(t) &= (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \varphi_k(r) = \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} \mathbf{p}_\ell^{(i)}(r), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\
 \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} &= \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k, \ell = 1, 2, 3, \dots \\
 K_{ij}^{km} &= \int_0^1 \int_0^1 [\mathbf{p}_k^{(i)}(r)]^T \mathbf{K}(r, \rho) \mathbf{p}_m^{(j)}(\rho) r \rho dr d\rho, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots, \\
 \tilde{\Delta}^{(k)}(t) &= \int_0^1 [\tilde{\Delta}_1(\rho, t)]^T \varphi_k(\rho) \rho d\rho, \quad k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{25}$$

При этом исходные базисные функции следует строить по формулам (12).

Как и в случае с заданными осадками, в решении в явном виде выделены функции $m_i(r)$:

$$\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{D}^{-1}(r) \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{p}_0^{*(i)}(r) z_i^{(0)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{p}_\ell^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} z^{(k)}(t) \right]$$

или

$$q_i(r, t) = \frac{1}{m_i(r)} \left[p_0^{*(i)}(r) z_i^{(0)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} p_\ell^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} z^{(k)}(t) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Полностью определив контактные давления под штампами, можно найти и неизвестные осадки. Для этого подействуем оператором \mathbf{P}_0 на уравнение (10):

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1) \mathbf{Q}_0(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2) \mathbf{P}_0 \mathcal{F} \mathbf{Q}(r, t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{J_{0,i}} \delta_i(t) \mathbf{p}_0^{(i)}(r).$$

Подставив сюда представление для $\mathbf{Q}(r, t)$ и, в частности, для $\mathbf{Q}_0(r, t)$, получим непосредственное уравнение для определения осадок $\delta_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ ГРУПП ШТАМПОВ

Наконец, рассмотрим вариант, когда система штампов состоит из двух групп, на одной из которых заданы квазистатические (известны вдавливающие усилия), а на другой кинематические условия (известны осадки). Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_0 , а второй — от $n_0 + 1$ до n .

Пусть на части штампов заданы силы $P_\ell(t)$ ($\ell = 1, 2, \dots, n_0$), а на части осадки $\delta_p(t)$ ($p = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n$). Требуется найти контактные давления $q_i(r, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), осадки $\delta_\ell(t)$ ($\ell = 1, 2, \dots, n_0$) и вдавливающие усилия $P_p(t)$ ($p = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n$).

В этом случае пространство $L_2(\Omega, V)$ необходимо представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(\Omega, V) = L_2^{(0)}(\Omega, V) \oplus L_2^{(1)}(\Omega, V)$, где $L_2^{(0)}(\Omega, V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\mathbf{p}_0^{(\ell)}(r)\}$ ($\ell = 1, 2, \dots, n_0$), а $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_0^{(p)}(r), \mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ ($p = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, 3, \dots$). Подынтегральная функция и правая часть уравнения (10) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}(\Omega, V)$ и $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ соответственно, т. е.

$$\mathbf{Q}(r, t) = \mathbf{Q}_0(r, t) + \mathbf{Q}_1(r, t), \quad \Delta(r, t) = \Delta_0(r, t) + \Delta_1(r, t), \tag{26}$$

где

$$\mathbf{Q}_0(r, t) = \sum_{\ell=1}^{n_0} z_\ell^{(0)}(t) \mathbf{p}_0^{(\ell)}(r), \quad \Delta_0(r, t) = \sum_{\ell=1}^{n_0} \Delta_\ell(t) \mathbf{p}_0^{(\ell)}(r), \quad \Delta_\ell(t) = \sqrt{J_{0,\ell}} \delta_\ell(t). \tag{27}$$

Заметим, что в представлении для $\mathbf{Q}(r, t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(r, t)$, функция разложения которого определяется частью дополнительных условий из (11):

$$z_\ell^{(0)}(t) = \frac{P_\ell(t)}{\sqrt{J_{0,\ell}}}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n_0, \tag{28}$$



а слагаемое $\mathbf{Q}_1(r, t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $\Delta_0(r, t)$, а функция $\Delta_1(r, t)$ известна.

Введем оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство $L_2(\Omega, V)$ в $L_2^{(0)}(\Omega, V)$:

$$\mathbf{P}_0\phi(r, t) = \sum_{\ell=1}^{n_0} \int_0^1 [\phi(\rho, t)]^T \mathbf{p}_0^{(\ell)}(\rho) \rho d\rho \mathbf{p}_0^{(\ell)}(r). \quad (29)$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ переводит пространство $L_2(\Omega, V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{P}_i\mathbf{Q}(r, t) = \mathbf{Q}_i(r, t), \quad \mathbf{P}_i\Delta(r, t) = \Delta_i(r, t), \quad i = 0, 1.$$

Подействуем на уравнение (10) оператором ортогонального проектирования \mathbf{P}_1 . В результате получим уравнение для определения $\mathbf{Q}_1(r, t)$ с известной правой частью

$$c(t)\mathbf{Q}_1(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\mathcal{F}\mathbf{Q}_1(r, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\mathcal{F}\mathbf{Q}_0(r, t) + \Delta_1(r, t) = \tilde{\Delta}_1(r, t). \quad (30)$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1\mathcal{F}$, который, как можно показать, является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(2)}(\Omega, V)$. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_1\mathcal{F}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1\mathcal{F}\varphi_j(r) &= \gamma_\ell\varphi_j(r), \\ \varphi_j(r) &= \sum_{p=n_0+1}^n \psi_j^{(p0)} \mathbf{p}_0^{(p)}(r) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j^{(ik)} \mathbf{p}_k^{(i)}(r), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \\ \mathbf{K}(r, \rho) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km} \mathbf{p}_k^{(i)}(r) [\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)]^T, \\ \sum_{j=n_0+1}^n K_{ij}^{k0} \psi_\ell^{(j0)} + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} &= \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}, \\ i &= \begin{cases} n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n & \text{при } k = 0, \\ 1, 2, \dots, n & \text{при } k = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Представив искомую функцию $\mathbf{Q}_1(r, t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(r)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$, т. е.

$$\mathbf{Q}_1(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t) \varphi_k(r), \quad (32)$$

и подставив это представление в (30), получим уравнение для определения неизвестных функций разложения $z^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$):

$$z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (33)$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t, \tau) = [c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)] / [c(t) + \gamma_k]$ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$).

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(r, t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (9), (26)–(28), (31)–(33):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(r, t) &= \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{Q}(r, t), \quad \mathbf{Q}(r, t) = \sum_{i=1}^{n_0} z_i^{(0)}(t) \mathbf{p}_0^{(i)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t) \varphi_k(r), \\ z_i^{(0)}(t) &= \frac{P_i(t)}{\sqrt{J_{0,i}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n_0, \quad z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \varphi_k(r) &= \sum_{p=n_0+1}^n \psi_k^{(p0)} \mathbf{p}_0^{(p)}(r) + \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} \mathbf{p}_\ell^{(i)}(r), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$



$$\sum_{j=n_0+1}^n K_{ij}^{k0} \psi_\ell^{(j0)} + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)},$$

$$i = \begin{cases} n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n & \text{при } k = 0, \\ 1, 2, \dots, n & \text{при } k = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

$$\tilde{\Delta}^{(k)}(t) = \int_0^1 [\tilde{\Delta}_1(\rho, t)]^T \varphi_k(\rho) \rho d\rho, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

При этом исходные базисные функции следует строить по формулам (12). Отметим, что при $n_0 = 0$ (т.е. при известных осадках и неизвестных усилиях) полученные формулы совпадают с (16), а при $n_0 = n$ (т.е. при известных усилиях и неизвестных осадках) — с (25).

Отметим, что, как и в предыдущих двух вариантах, матрица $\mathbf{D}(r)$ выделена в решении явно:

$$\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{D}^{-1}(r) \left[\sum_{i=1}^{n_0} \mathbf{p}_0^{*(i)}(r) z_i^{(0)}(t) + \sum_{p=n_0+1}^n \mathbf{p}_0^{*(p)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(p0)} z^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{p}_\ell^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} z^{(k)}(t) \right]$$

или

$$q_i(r, t) = \frac{1}{m_i(r)} \left[p_0^{*(i)}(r) z_i^{(0)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} p_\ell^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} z^{(k)}(t) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n_0,$$

$$q_i(r, t) = \frac{1}{m_i(r)} \left[p_0^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i0)} z^{(k)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} p_\ell^{*(i)}(r) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(i\ell)} z^{(k)}(t) \right], \quad i = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n.$$

Полностью определив контактные давления под штампами можно найти и неизвестные осадки. Для этого подействуем оператором \mathbf{P}_0 на уравнение (10):

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}_0(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_0\mathcal{F}\mathbf{Q}(r, t) = \sum_{i=1}^{n_0} \sqrt{J_{0,i}} \delta_i(t) \mathbf{p}_0^{(i)}(r).$$

Подставив сюда представление для $\mathbf{Q}(r, t)$ и, в частности, для $\mathbf{Q}_0(r, t)$, получим непосредственное уравнение для определения $\delta_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n_0$).

ВЫВОДЫ

Поставлена и решена осесимметричная задача о конформном контакте между вязкоупругим стареющим основанием с покрытием и системой жестких штампов. Рассмотрены все варианты постановки задачи. Решения задач получены в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функции формы подошв штампов выделены явно, что позволяет проводить расчеты для тел с покрытиями, форма которых описывается быстро осциллирующими функциями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00991).

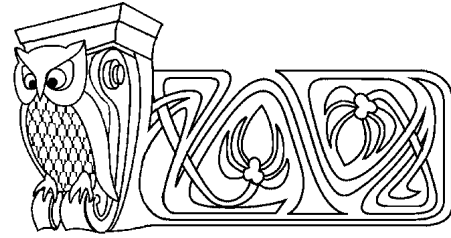
Библиографический список

1. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван : Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
2. Манжиров А. В. Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. М. : Физматлит, 2001. С. 549–565.
3. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. : Наука, 1983. 488 с.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М. : Наука, 1974. 456 с.
5. Гурса Э. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3, ч. II : Интегральные уравнения и вариационное исчисление. М.; Л. : ГТТИ, 1934. 318 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
7. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1976. 496 с.



УДК 531.3; 534.1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ С ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ В СОЕДИНЕНИИ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГОЙ ПРОКЛАДКОЙ



В. К. Манжосов, И. А. Новикова

Ульяновский государственный технический университет
E-mail: v.manjosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru

Рассмотрен процесс преобразования продольной волны деформации на границе разнородных стержней с упругой прокладкой. Изложена методика расчета процесса преобразования волны деформации линейной формы. Определены параметры волны, прошедшей через соединение стержней.

Ключевые слова: волна деформации, волновые уравнения, метод бегущих волн, преобразование волны деформации, стержневая система, сопряжение стержней с упругой прокладкой.

The Transformation of Longitudinal The Strain Wafe Having a Linear Form and Increasing Intensity in Conjugation of Rods with Elastic Gasket

V. K. Manzhosov, I. A. Novikova

The paper gives a review of transformation of longitudinal strain wave at the boundary of heterogeneous rods with elastic gasket. The article describes a technique for calculating the transformation of the strain wave of linear form. Parameters of the wave, which have passed through connection of rods are defined.

Key words: strain wave, wave equations, traveling wave method, transformation of the strain wave, rod system, conjugation of rods with elastic gasket.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прогнозирование поведения волны деформации на границе сопряжения стержней актуально при создании систем, обеспечивающих перенос энергии сформированных при ударе продольных волн к технологической среде [1, 2]. Если в стержневой системе имеются соединения разнородных участков, то на границе сопряжения возникают процессы, связанные с отражением и трансформацией волн [3–5].

В данной работе рассмотрена задача о преобразовании продольной волны деформации линейной формы с возрастающей интенсивностью в соединении разнородных стержней. Схема стержневой системы изображена на рис. 1. На границу $x = x_1$ со стороны стержня 1 падает прямая волна.

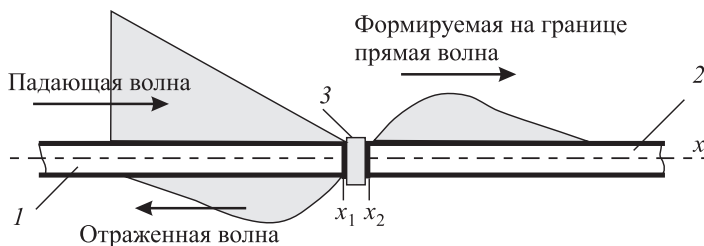


Рис. 1. Схема стержневой системы

Параметры падающей волны считаются известными. Между стержнями 1 и 2 размещена упругая прокладка 3. Требуется определить формируемую в сечении $x = x_2$ прямую волну, распространяющуюся в направлении оси x по стержню 2, и отраженную волну, формирующуюся в сечении $x = x_1$ и распространяющуюся по стержню 1 в другом направлении.

1. ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Движение сечений рассматриваемой динамической системы описывается волновыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — смещения сечений соответственно стержней 1 и 2; a_1 , a_2 — скорости распространения волн деформаций в стержнях; x — координата поперечного сечения; t — время.

Начальное состояние системы описывается равенствами при $t = 0$:

$$u_1(x, 0) = u(x), \quad u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = v(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2)$$



Граничные условия рассматриваемой динамической системы имеют вид для сопряженных сечений стержней при $x = x_1 = x_2 = 0$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x}, \quad E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -k[u_1(0, t) - u_2(0, t)], \quad (3)$$

для $x = -\infty$ $E_1 A_1 \frac{\partial u_1(-\infty, t)}{\partial x} = 0$, для $x = \infty$ $E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\infty, t)}{\partial x} = 0$,

где k — жесткость упругого элемента; E_1, E_2 — модули упругости материалов стержней; A_1, A_2 — площади поперечных сечений стержней.

По методу бегущих волн решения уравнений (1) предоставляются в виде

$$u_1(x, t) = f_1(a_1 t - x) + \varphi_1(a_1 t + x), \quad -\infty \leq x \leq 0,$$

$$u_2(x, t) = f_2(a_2 t - x) + \varphi_2(a_2 t + x), \quad 0 \leq x \leq \infty,$$

где $f_1(a_1 t - x), f_2(a_2 t - x)$ — функции, описывающие волны деформации, распространяющиеся слева направо (прямые волны); $\varphi_1(a_1 t + x), \varphi_2(a_2 t + x)$ — функции, описывающие волны деформации, распространяющиеся справа налево (обратные волны).

Так как стержень 2 полуограниченный и в начальный момент времен находится в состоянии покоя, то из начальных условий (2) можно принять, что $\varphi_2(a_2 t + x) = 0$. Тогда

$$u_1(x, t) = f_1(a_1 t - x) + \varphi_1(a_1 t + x), \quad u_2(x, t) = f_2(a_2 t - x). \quad (4)$$

Продифференцируем последние равенства по x :

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = -f_1'(a_1 t - x) + \varphi_1'(a_1 t + x), \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = -f_2'(a_2 t - x).$$

Для сечения $x = 0$

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = -f_1'(a_1 t - 0) + \varphi_1'(a_1 t + 0), \quad \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -f_2'(a_2 t - 0). \quad (5)$$

Используя (5) в первом граничном условии (3), получим

$$\varphi_1'(a_1 t + 0) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f_2'(a_2 t - 0) + f_1'(a_1 t - 0). \quad (6)$$

Рассмотрим второе граничное условие (3) с учетом (4) и (5) при $x = 0$:

$$E_2 A_2 f_2'(a_2 t - 0) = k[f_1(a_1 t - 0) + \varphi_1(a_1 t + 0) - f_2(a_2 t - 0)].$$

Дифференцируя по t , приходим к равенству

$$f_2''(a_2 t - 0) = \frac{k a_1}{E_2 A_2 a_2} \left[2f_1'(a_1 t - 0) - \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f_2'(a_2 t - 0) - \frac{a_2}{a_1} f_2'(a_2 t - 0) \right].$$

Данное уравнение преобразуем к виду

$$f_2''(a_2 t - 0) + \frac{k(r+1)}{E_2 A_2 r} f_2'(a_2 t - 0) = \frac{2k a_1}{E_2 A_2 a_2} f_1'(a_1 t - 0), \quad (7)$$

где $r = \frac{E_1 A_1}{a_1} \frac{a_2}{E_2 A_2}$ — отношение волнового сопротивления $\frac{E_1 A_1}{a_1}$ стержня 1 к волновому сопротивлению $\frac{E_2 A_2}{a_2}$ стержня 2.

Обозначим отношения $\frac{k(r+1)}{E_2 A_2 r} = \alpha$, $\frac{2k a_1}{E_2 A_2 a_2} = \beta$. Тогда из (7) для сечения $x = 0$

$$f_2''(a_2 t - 0) + \alpha f_2'(a_2 t - 0) = \beta f_1'(a_1 t - 0). \quad (8)$$



Введём переменную $\xi = a_2t - 0$. Решение дифференциального уравнения (8) представим как

$$f'_2(\xi) = V(\xi)Z(\xi), \tag{9}$$

$$V(\xi) = C_1 \exp(-\alpha\xi), \quad Z(\xi) = \int \frac{\beta f'_1(a_1t - 0)}{V(\xi)} d\xi + C_2, \tag{10}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решение (9) зависит от функции $f'_1(a_1t - 0)$, определяющей параметры волны деформации, падающей на границу сопряжения стержней от стержня 1.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ С ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

Рассмотрим процесс преобразования линейной волны $f'_1(a_1t - 0)$ и формирования в стержне 2 волны $f'_2(a_2t - 0)$. Предположим, что подходящая к упругому элементу волна деформации имеет треугольную форму с возрастающей интенсивностью. Схема стержневой системы изображена на рис. 2.

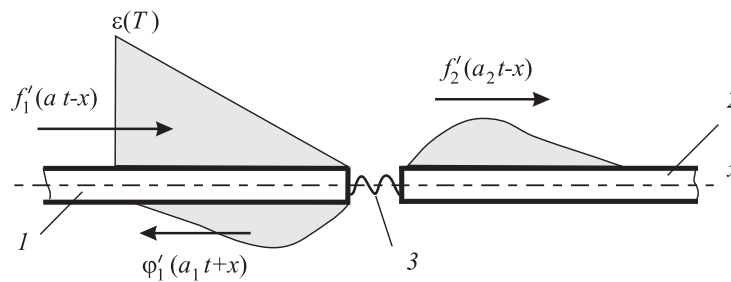


Рис. 2. Схема стержневой системы при падающей треугольной волне деформации с возрастающей интенсивностью: 1, 2 — стержни системы, 3 — упругий элемент

Функция $f'_1(a_1t - 0)$, определяющая параметры волны деформации, падающей на границу сопряжения стержней со стороны стержня 1, имеет вид

$$f'_1(a_1t - 0) = \begin{cases} \varepsilon(T) \frac{t}{T} = \varepsilon(T) \frac{a_2t}{a_2T} = \varepsilon(T) \frac{\xi}{a_2T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \tag{11}$$

где $\varepsilon(T)$ — значение функции $f'_1(a_1t - 0)$ при $t = T$, T — длительность действия падающей волны, t — время, $\xi = (a_2t - 0)$ — новая переменная.

Учитывая (11) в (10) при определении функции $Z(\xi)$, находим

$$Z(\xi) = \frac{\beta\varepsilon(T)}{C_1 a_2 T} \int \xi \exp(\alpha\xi) d\xi = \frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T C_1} \left[\frac{\exp(\alpha\xi)}{\alpha^2} (\alpha\xi - 1) \right] + C_2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Решение (9) с учётом (10) и найденного значения функции $Z(\xi)$ на интервале $0 \leq t \leq T$ примет вид

$$f'_2(\xi) = V(\xi)Z(\xi) = \frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T} \cdot \frac{1}{\alpha^2} (\alpha\xi - 1) + C \exp(-\alpha\xi), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{12}$$

Постоянную интегрирования C найдём из условия, что в начальный момент времени при $\xi = 0$ упругий элемент не деформирован и значение $f'_2(0) = 0$. Тогда имеем

$$0 = -\frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + C, \quad C = \frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T} \cdot \frac{1}{\alpha^2}.$$

Подставляя в (12), получим

$$f'_2(a_2t - 0) = \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 t - 1 + \exp(-\alpha a_2 t)), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{13}$$



Рассмотрим процесс формирования волны деформации $f'_2(\xi)$ после завершения действия падающей волны на интервале $t \geq T$, когда $f'_1(a_1t - 0) = 0$. Учитывая в (10) при определении функции $Z(\xi)$, что на интервале $t \geq T$ функция $f'_1(a_1t - 0) = 0$, находим

$$Z(\xi) = \int \frac{\beta f'_1(a_1t - 0)}{V(\xi)} d\xi + C_2 = C_2, \quad t \geq T,$$

а решение (9) на интервале $t \geq T$ представим как

$$f'_2(\xi) = C \exp(-\alpha\xi), \quad t \geq T. \quad (14)$$

Постоянную интегрирования C найдём из условия, что в момент времени $t = T$ значение функции $f'_2(\xi)$ определяется из (13) при $\xi = a_2T$:

$$f'_2(a_2T) = \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)).$$

Тогда из (14) при $\xi = a_2T$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) &= C \exp(-\alpha a_2 T), \\ C &= \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\exp(\alpha a_2 T)}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)). \end{aligned}$$

Подставив значение C в (14), получим

$$f'_2(a_2t - 0) = \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 (t - T)), \quad t \geq T.$$

Итак, если падающая волна $f'_1(a_1t - 0)$ имеет треугольную форму с ростом интенсивности, то формируемая в стержне 2 волна деформации $f'_2(a_2t - 0)$ имеет вид

$$f'_1(a_1t - 0) = \begin{cases} \varepsilon(T)t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & t \geq T. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{f'_2(a_2t - 0)}{\varepsilon(T)} = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 t - 1 + \exp(-\alpha a_2 t)), & 0 \leq t \leq T, \\ \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 (t - T)), & t \geq T. \end{cases}$$

Из (6) формируемая в сечении $x = 0$ обратная волна определяется как

$$\varphi'_1(a_1t + 0) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \cdot \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2} f'_2(a_2t - 0) + f'_1(a_1t - 0) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{a_2}{a_1} f'_2(a_2t - 0) + f'_1(a_1t - 0).$$

Для большей универсальности в применении целесообразно перейти к относительным величинам при определении падающей и формируемых волн. Так, относительное значение функции падающей прямой волны имеет вид

$$\tilde{f}'_1(a_1t - 0) = \frac{f'_1(a_1t - 0)}{\varepsilon(T)} = \begin{cases} \frac{t}{T}, & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ 0, & \frac{t}{T} \geq 1. \end{cases}$$

Относительное значение функции формируемой в сечении x прямой волны $\tilde{f}'_2(a_2t - 0) = f'_2(a_2t - 0)/\varepsilon(T)$ определится следующим образом:

$$\tilde{f}'_2(a_2t - 0) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 t - 1 + \exp(-\alpha a_2 t)), & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 T (t/T - 1)), & \frac{t}{T} \geq 1. \end{cases}$$



Относительное значение функции $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ найдем как

$$\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0) = \frac{\varphi'_1(a_1t + 0)}{\varepsilon(T)} = -\frac{1}{r} \frac{a_2}{a_1} \tilde{f}'_2(a_2t - 0) + \tilde{f}'_1(a_1t - 0). \quad (15)$$

При расчете значений $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ и $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ целесообразно учитывать, что

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2}, \quad \alpha a_2 t = \frac{k}{E_2 A_2} \cdot \frac{r+1}{r} a_2 t = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t},$$

$$\alpha a_2 T = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \cdot \frac{T}{\Delta T} = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}, \quad \frac{t}{T} = \frac{t}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}},$$

где Δl – единица длины стержня 2, $\tilde{k} = k \cdot \Delta l / (E_2 A_2)$ – отношение жесткости упругого элемента к продольной жесткости единицы длины стержня 2, $\Delta T = \Delta l / a_2$ – время прохождения волной деформации расстояния Δl во втором стержне, $\tilde{t} = t / \Delta T$ – отношение текущего времени t к ΔT , $\tilde{T} = T / \Delta T$ – отношение длительности падающей волны T к ΔT . С учетом представленных равенств имеем:

$$\tilde{f}'_1(a_1t - 0) = \begin{cases} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}}, & 0 \leq \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \leq 1, \\ 0, & \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \geq 1, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0) = -\frac{1}{r} \frac{a_2}{a_1} \tilde{f}'_2(a_2t - 0) + \tilde{f}'_1(a_1t - 0),$$

$$\frac{\tilde{f}'_2(a_2t - 0)}{\frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2}} = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} - \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}} \right), & 0 \leq \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \leq 1, \\ \left(1 - \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}\right)}{\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}} \right) \cdot \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T} \left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} - 1\right)\right), & \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

В таблице представлены результаты расчета падающей волны $f'_1(a_1t - 0)$ и формируемых в сечении x прямой $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ и обратной $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ волн.

$\tilde{T} = 1, \tilde{k} = 1, r = 1$				$\tilde{T} = 1, \tilde{k} = 2, r = 1$		$\tilde{T} = 1, \tilde{k} = 5, r = 1$	
\tilde{t}	\tilde{f}'_1	\tilde{f}'_2	$\tilde{\varphi}'_1$	\tilde{f}'_2	$\tilde{\varphi}'_1$	\tilde{f}'_2	$\tilde{\varphi}'_1$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,2	0,03516	0,16484	0,062332	0,137668	0,137668	0,086466
0,4	0,4	0,124664	0,275336	0,200474	0,199526	0,301832	0,098168
0,6	0,6	0,250597	0,349403	0,372679	0,227321	0,500248	0,099752
0,8	0,8	0,400948	0,399052	0,560191	0,239809	0,700034	0,099966
1	1	0,567668	0,432332	0,754579	0,245421	0,900005	0,099995
			-0,56766		-0,75457		-0,90000
1,2	0	0,380519	-0,38052	0,339054	-0,33905	0,121802	-0,1218
1,4	0	0,25507	-0,25507	0,152347	-0,15235	0,016484	-0,01648
1,6	0	0,170978	-0,17098	0,068454	-0,06845	0,002231	-0,00223
1,8	0	0,11461	-0,11461	0,030758	-0,03076		
2	0	0,076825	-0,07683	0,013821	-0,01382		
2,1	0	0,062899	-0,0629	0			

Диаграммы волн для $\tilde{k} = 1$ (относительная длительность падающей волны $\tilde{T} = 1$, отношение волновых сопротивлений $r = 1$, скорости распространения волн $a_1 = a_2$) приведены на рис. 3.

Значение формируемой в стержне 2 прямой волны сжатия $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ экспоненциально растет на интервале $0 \leq t \leq T$ и при $t = T$ достигает максимума. Максимальное значение $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ меньше 1. Отраженная волна $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ также изменяется по экспоненте и представляет волну растяжения.

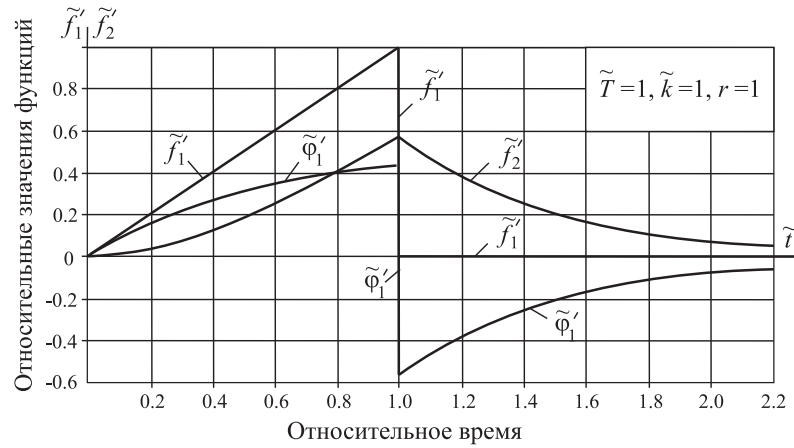


Рис. 3. Диаграммы падающей волны $f_1'(a_1t - 0)$ и формируемых на границе сопряжения прямой $f_2'(a_2t - 0)$ и обратной $\varphi_1'(a_1t + 0)$ волн при $\tilde{k} = 1$

При $\tilde{t} > 1$ падающая волна $f_1'(a_1t - 0) = 0$. Однако волна $f_2'(a_2t - 0)$ продолжает формироваться за счет потенциальной энергии, накопленной в упругом элементе. Волна $\varphi_1'(a_1t + 0)$ с этого момента — уже не отраженная доля падающей волны, а формируемая упругим элементом волна сжатия.

При $\tilde{t} \rightarrow \infty$ значение $f_2'(a_2t - 0) \rightarrow 0$. Длительность формируемых волн $f_2'(a_2t - 0)$ и $\varphi_1'(a_1t + 0)$ превышает длительность падающей волны.

На рис. 4 представлены диаграммы волн при жесткости $\tilde{k} = 5$.

С увеличением жесткости упругого элемента формируемая волна $f_2'(a_2t - 0)$ приближается по параметрам к падающей волне $f_1'(a_1t - 0)$. Увеличивается ее максимальное значение, сокращается длительность. Если жесткость упругого элемента \tilde{k} стремится к бесконечности, то слагаемое $\frac{r}{r+1} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k} \tilde{T}}$ в формуле (16) стремится к нулю, а функция $f_2'(a_2t - 0)$ стремится к значению

$$\frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} f_1'(a_1t - 0).$$

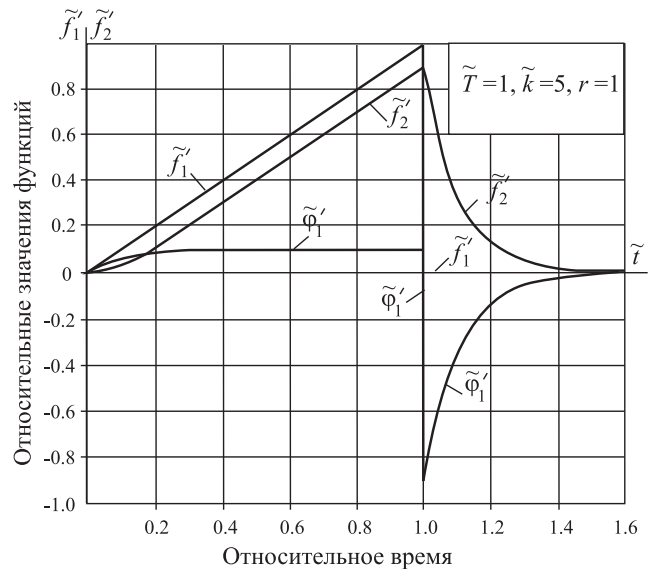


Рис. 4. Диаграммы падающей волны $f_1'(a_1t - 0)$ и формируемых на границе сопряжения прямой $f_2'(a_2t - 0)$ и обратной $\varphi_1'(a_1t + 0)$ волн при $\tilde{k} = 5$

ВЫВОДЫ

На границе сопряжения стержней при наличии упругого элемента падающая волна трансформируется даже при равных волновых сопротивлениях стержней. Значение формируемой волны в стержне 2 прямой волны $f_2'(a_2t - 0)$ экспоненциально растет на интервале $0 \leq t \leq T$ и при $t = T$ достигает максимального значения:

$$f_2'(a_2T) = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left(1 - \frac{r}{r+1} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}\right)}{\tilde{k} \tilde{T}} \right).$$

На интервале $0 \leq t \leq T$ формируемая в стержне 1 обратная волна $\varphi_1'(a_1t + 0) > 0$ представляет волну растяжения.

На интервале $t \geq T$ волна $f_1'(a_1t - 0) = 0$ и процесс формирования волны $f_2'(a_2t - 0)$ продолжается за счет потенциальной энергии упругого элемента, накопленной в нем на интервале $0 \leq t \leq T$. На



данном интервале формируемые прямая $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ и обратная $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ волны представляют волны сжатия.

С увеличением жесткости упругого элемента формируемая в стержне 2 волна деформации $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ приближается по форме к падающей волне, уменьшается ее длительность, увеличивается максимальное значение.

На интервале $0 \leq t \leq T$ с учетом, что $\tilde{f}'_1(a_1t - 0) = \tilde{t}/\tilde{T}$,

$$\tilde{f}'_2(a_2t - 0) = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left(\tilde{f}'_1(a_1t - 0) - \frac{r}{r+1} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k}\tilde{T}} \right), \quad 0 \leq \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \leq 1.$$

Если жесткость упругого элемента \tilde{k} стремится к бесконечности, то слагаемое $\frac{r}{r+1} \times \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k}\tilde{T}}$ стремится к нулю, а функция $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ стремится к значению $\frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \tilde{f}'_1(a_1t - 0)$.

Если стержни из одного материала ($a_1 = a_2$) и имеют равные волновые сопротивления ($r=1$), то при $\tilde{k} \rightarrow \infty$ функция $\tilde{f}'_2(a_2t - 0) \rightarrow \tilde{f}'_1(a_1t - 0)$.

Это означает, что при $\tilde{k} \rightarrow \infty$ формируемая в стержне 2 волна деформации $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ стремится воспроизвести падающую волну $\tilde{f}'_1(a_1t - 0)$.

Библиографический список

1. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Распространение волн деформаций в ударных системах. М., 1985. 354 с.
2. Дворников Л. Т., Жуков И. А. Продольный удар полукатеноидальным бойком. Новокузнецк, 2006. 80 с.
3. Манжосов В. К. Продольный удар. Ульяновск, 2006. 358 с.
4. Еремьянц В. Э., Невенчаный Ю. В., Писаренко Н. Г. Ударное нагружение оснащенных стержней. Фрунзе, 1987. 165 с.
5. Саруев Л. А., Слестин А. П., Авдеева А. И. Передача энергии по ставу штанг при продольном импульсном воздействии. Томск, 1995. 6 с. Деп. в ВИНТИ 29.11.95, № 3164-B95.

УДК 539.3+622.831

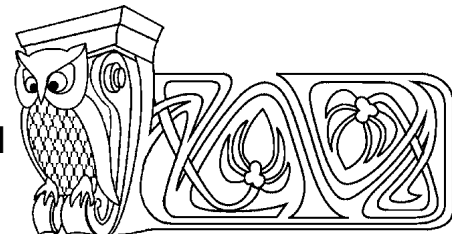
ГРАФОВЫЙ ПОДХОД ПРИ ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

А. А. Тырымов

Волгоградский государственный технический университет
E-mail: tyrymov2010@yandex.ru

Предлагается численный метод анализа упругой среды на основе дискретной модели в виде ориентированного графа. В процессе анализа на основе графового подхода тело рассечем на элементы и для каждого из них строим элементарную ячейку (подграф), являющуюся его моделью. Используя матрицы, представляющие структурные элементы графа, а также уравнения, описывающие разрезанное тело, можно получить уравнения связанного тела. Приведены числовые примеры.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория упругости, ориентированный граф, деформация, напряжения.



Graph Approach for Finite-Element Based Model of an Elastic Body Under Conditions of Axisymmetric Deformation

A. A. Tyrymov

A numerical method for analysis of the stress – strain state of elastic media based on a discrete model in form of directed graph is suggested. To analyze a deformable body using the graph approach, we partitione a solid body on elements and replace each element by its model in the form of an elementary cell. The matrices, presenting several structure elements of the graph, and the equations, describing the elementary cells, contribute to deriving the constitutive equations of the intact body. Numerical examples are presented.

Key words: mathematical simulation, elasticity, directed graph, strain, stress.

Из инженерной практики известно, что элементы многочисленных конструкций имеют форму тел вращения. Во многих случаях геометрия и система нагружения таковы, что исследование напряженного состояния трехмерных тел можно заменить решением соответствующей осесимметричной задачи. В настоящее время одним из самых эффективных и распространенных методов для решения задач механики сплошной среды является метод конечных элементов (МКЭ). Описанию этого метода,



который может быть построен на различных математических идеях, посвящено большое количество монографий. Для вывода основных соотношений МКЭ часто используются основанные на интегральных тождествах методы взвешенных невязок [1], с помощью которых выбором различных весовых функций с единых позиций можно рассмотреть многие, внешне несвязанные, методы (Галеркина, коллокаций, наименьших квадратов, моментов). МКЭ можно сформулировать на основе вариационных принципов минимума полной потенциальной или дополнительной энергии [2]. Одним из самых универсальных в практическом применении для различных сред является принцип виртуальной работы, выраженный в форме виртуальных перемещений. Используются и другие подходы к получению основных зависимостей МКЭ (прямой метод, метод энергетического баланса).

Определение напряженно-деформированного состояния в рамках теории упругости сводится к постановке задачи, включающей в себя помимо граничных условий: дифференциальные уравнения равновесия, которые в случае отсутствия объемных сил имеют вид $[R]^T\{\sigma\} = \{0\}$; геометрические уравнения (формулы Коши) $\{\varepsilon\} = [R]\{u\}$; физические соотношения (обобщенный закон Гука) $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$. Здесь приняты следующие обозначения: $[R]$ — матрица дифференциальных операторов, связывающая деформации $\{\varepsilon\}$ с перемещениями $\{u\}$, $[C]$ — матрица модулей упругости материала, $\{\sigma\}$ — вектор напряжений. Символ T здесь и далее указывает на операцию транспонирования.

Основополагающее значение при построении МКЭ заключается в специальном выборе системы базисных кусочно-определенных для полученных при дискретизации подобластей V_e функций N_i^e , каждая из которых имеет конечный носитель. Эти функции должны однозначно восстанавливать некоторую определяющую в данной конкретной задаче функцию в любой точке внутри элемента по дискретным значениям этой функции в узловых точках. Если используется МКЭ в варианте метода перемещений, то за основные неизвестные принимаются компоненты перемещений в узловых точках, расположение которых зависит от формы элемента и вида применяемых для аппроксимации полиномов. Используя определенный набор базисных функций N_i , перемещения в произвольной точке элемента представляют в виде $\{u^e\} = [N]\{d^e\}$, где $[N]$ — матрица базисных функций конечного элемента, компоненты N_i которой называют функциями формы, $\{d^e\}$ — вектор узловых перемещений элемента.

С помощью такой аппроксимации и геометрических, а также физических соотношений теории упругости деформации и напряжения в пределах элемента, выражаются через вектор узловых перемещений: $\{\varepsilon^e\} = [R][N]\{d^e\} = [B]\{d^e\}$, $\{\sigma^e\} = [C][B]\{d^e\}$. Здесь $[B] = [R][N]$ — матрица формы деформаций, связывающая деформации с узловыми перемещениями. Варьированием потенциальной энергии конечного элемента или воспользовавшись принципом виртуальной работы [2], устанавливается связь между вектором узловых перемещений и вектором узловых сил, к которому свелись внутренние напряжения $\{f^e\} = [K^e]\{u^e\}$, где $[K^e] = \int_{V_e} [B]^T[C][B] dv$ — симметричная матрица жесткости конечного элемента.

Следует отметить, что в процессе вывода физические соотношения и геометрические уравнения удовлетворены точно, а уравнения равновесия выполняются в интегральном смысле, т. е. для конечного элемента в целом. При исследовании осесимметричного или плоского деформированного состояния конструкция часто разбивается на четырехугольные конечные элементы. При этом для четырехугольного прямоугольного конечного элемента используются билинейные функции формы. Применение «квадратичных» функций формы может быть реализовано только на восьмиузловом прямоугольном элементе [1].

Предлагаемый в работе подход основан на сочетании дискретных и энергетических представлений при моделировании процесса деформирования упругих сред. Дискретная модель при этом строится как первичная модель исследования, а способ перехода от континуума к системе с конечным числом степеней свободы основан, прежде всего, на физических соображениях.

Ниже описан численный метод анализа полей деформаций и напряжений, в котором в качестве дискретных моделей, представляющих сплошное тело, используются ориентированные графы [3–6]. Исследование системы на основе графового подхода сводится к тому, что 1) среда рассекается на отдельные части, имеющие известное математическое описание (в рассматриваемом случае — закон Гука); 2) для каждой части строится подграф (элементарная ячейка, графовый элемент), являющийся ее моделью; 3) элементарные ячейки объединяют в граф — модель анализируемого тела, после чего



с помощью матриц, характеризующих структуру графа, и уравнений, описывающих элементарные ячейки, получают уравнения системы в целом.

Графовая модель упругой среды в осесимметричной постановке рассматривалась в статье [3], где деформации в пределах элемента предполагались постоянными, и в статье [4], где используется линейная аппроксимация деформаций, однако при определении коэффициентов было сделано несколько упрощающих допущений. В данной работе при выводе матрицы жесткости осесимметричного графового элемента никаких упрощающих положений нет.

Основой для построения графов, используемых в качестве моделей, служит объективный характер операций измерения выбранных независимых переменных. Целью любого измерения является установление зависимости между значением переменной и показаниями прибора. В то же время измерение связано с точками системы, между которыми оно осуществляется, и ориентацией измерителя. Эти свойства операции измерения можно представить направленным отрезком, соединяющим две точки системы, т. е. дугой графа.

Таким образом, дискретную модель тела в виде ориентированного графа можно интерпретировать как стилизованную сеть приборов, установленных на тело для измерения его деформированного состояния.

При построении графа в качестве исходных используем параллельные переменные, т. е. переменные, которые измеряются установкой прибора непосредственно на тело [7]. Используя соответствующий прибор, например линейку, тензодатчик, тензометр и т. д., можно осуществить измерение линейных и угловых разностей перемещений, деформаций, положений точек относительно фиксированной системы координат.

Способ конструирования графа тела связан с процессом измерения полного и независимого комплекта параллельных переменных, которые однозначно характеризуют деформированное состояние элементов, полученных в результате декомпозиции. Элементарной ячейкой будем называть подграф, соответствующий одному элементу, полученному при разбиении исходной области на отдельные мелкие части.

При построении конфигурации элементарной ячейки в осесимметричной постановке сечение тела плоскостью, проходящей через его ось, покрываем сеткой координатных линий $r = \text{const}$, $z = \text{const}$, между узлами которых устанавливаем гипотетические измерители. Полученную сеть измерителей преобразовываем в граф, представляя каждый из приборов дугой, а узлы, между которыми осуществлялось измерение, — вершинами графа. При этом вместо собственно измерителя будем ставить символ, отражающий природу измеряемой величины. Если вершины элемента обозначить A , B , C и D , то измерители необходимо установить так, чтобы измерять относительные перемещения точек A , B , C , D друг относительно друга (деформации δ_{rr} , δ_{rz} , δ_{zz} , δ_{zr}) и относительно глобальной системы координат (перемещения u_r^A , u_r^B , u_r^C , u_r^D). Поскольку одни и те же точки участвуют в разных группах измерений — относительно осей r и z , это учитывается при построении графа тем, что соответствующие точки представлены разными вершинами. Ориентацию дуг, как и ориентацию процесса измерения, задаем в соответствии с направлением осей координат.

Каждой параллельной переменной, использованной для конструирования графа, соответствует парная ей последовательная переменная [7]. Выбор связной пары переменных определяется тем, что произведение последовательной и параллельной переменных должно давать скаляр с размерностью мощности или работы. Поскольку при построении графа в качестве параллельных переменных выбраны разности перемещений узловых точек либо перемещения узлов в глобальной системе координат, то каждой дуге графа, отображающей одновременно связную пару, соответствует последовательная переменная с размерностью силы. Точки приложения сил к элементу определяются концевыми вершинами дуги, т. е. узлами элемента.

В соответствии с описанной последовательностью получаем элементарную ячейку прямоугольного элемента в осесимметричной постановке, которая состоит из двух компонент (рис. 1). Дуги элементарной ячейки вводят два вектора — вектор деформаций $\{\delta\}$ и вектор внутренних сил $\{f\}$:

$$\{\delta\}_e^T = \{\delta_{rr}^d, \delta_{zz}^l, u_r^C, u_r^D, \delta_{rr}^u, \delta_{zz}^r, u_r^A, u_r^B, \delta_{zr}^d, \delta_{rz}^l, \delta_{zr}^u, \delta_{rz}^r\}, \quad (1)$$

$$\{f\}_e^T = \{f_d^{rr}, f_l^{zz}, f_C^r, f_D^r, f_u^{rr}, f_r^{zz}, f_A^r, f_B^r, f_d^{zr}, f_l^{rz}, f_u^{zr}, f_r^{rz}\}, \quad (2)$$



где $\delta_{rr}^d, \delta_{zz}^l, \delta_{rr}^u, \delta_{zz}^r$ — нормальные деформации, $\delta_{zr}^d, \delta_{rz}^l, \delta_{zr}^u, \delta_{rz}^r$ — относительные перемещения, обусловленные поворотом сторон элемента, $u_r^A, u_r^B, u_r^C, u_r^D$ — перемещения точек, соответствующих вершинам в глобальной системе координат, $f_d^{rr}, f_l^{zz}, f_u^{rr}, f_r^{zz}$ — нормальные внутренние силы (обобщенные напряжения), $f_d^{zr}, f_l^{rz}, f_u^{zr}, f_r^{rz}$ — тангенциальные внутренние силы, $f_A^r, f_B^r, f_C^r, f_D^r$ — внутренние силы в глобальной системе координат.

Индексы (u, d, l, r) обозначают верхние (u), нижние (d), левые (l) и правые (r) дуги элементарной ячейки, а индекс e указывает на принадлежность переменных отдельному графовому элементу.

Описание элементарной ячейки, т. е. связь векторов $\{f\}_e$ и $\{\delta\}_e$, а также зависимость их от напряжений и деформаций моделируемого тела устанавливаем, принимая в качестве инварианта перехода к модели энергию деформации элемента среды:

$$\{f\}_e^T \{\delta\}_e = \int_{V^e} \{\sigma'\}^T \{\varepsilon\} dv, \quad (3)$$

где $\{\delta\}_e$ и $\{f\}_e$ определяются формулами (1), (2). В результате энергию элементарной ячейки можно представить, с одной стороны, в виде

$$\begin{aligned} \{f\}_e^T \{\delta\}_e = & f_d^{rr} \delta_{rr}^d + f_l^{zz} \delta_{zz}^l + f_C^r u_r^C + f_D^r u_r^D + f_u^{rr} \delta_{rr}^u + f_r^{zz} \delta_{zz}^r + \\ & + f_A^r u_r^A + f_B^r u_r^B + f_d^{zr} \delta_{zr}^d + f_l^{rz} \delta_{rz}^l + f_u^{zr} \delta_{zr}^u + f_r^{rz} \delta_{rz}^r, \end{aligned} \quad (4)$$

с другой стороны, энергия деформации элемента сплошной среды определяется формулой

$$\int_{V^e} \{\sigma'\}^T \{\varepsilon\} dv = \int_{V^e} (\sigma'^{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma'^{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma'^{\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma'^{rz} \gamma_{rz}) dv. \quad (5)$$

Используя дифференциальные зависимости Коши, выразим ковариантные компоненты тензора деформаций через перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r u_r, \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{2u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{z\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

В случае осесимметричной задачи $u_\varphi = 0$ компоненты u_r и u_z не зависят от φ , а потому $\varepsilon_{\varphi\varphi} = r u_r$, $\varepsilon_{r\varphi} = 0$, $\varepsilon_{z\varphi} = 0$. Закон Гука для изотропного тела запишем, используя тензор плотности напряжений $\{\sigma'\}$, компоненты которого имеют вид $\sigma'^{ij} = \sqrt{g} \sigma^{ij} = r \sigma^{ij}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma'^{rr} = (\lambda + 2\mu) r \varepsilon_{rr} + \lambda r \varepsilon_{zz} + \frac{\lambda}{r} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma'^{zz} = \lambda r \varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu) r \varepsilon_{zz} + \frac{\lambda}{r} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma'^{\varphi\varphi} = \frac{\lambda}{r} \varepsilon_{rr} + \frac{\lambda}{r} \varepsilon_{zz} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^3} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma'^{rz} = \mu r \gamma_{rz}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz} + \varepsilon_{zr}$, λ и μ — упругие постоянные Ламе, причем $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ — для случая плоской деформации, $\lambda = E\nu/(1-\nu^2)$ — для плоского напряженного состояния, $\mu = 0,5E/(1+\nu)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

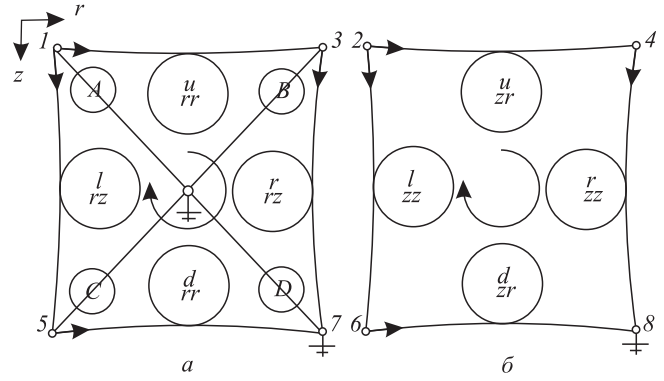


Рис. 1. Элементарная ячейка в осесимметричной постановке: а — компонента U_r , б — компонента U_z . Стрелками показано направление обхода контура, в кружках — верхний и нижний индексы переменных, представленных дугами ячейки



Если ввести векторы напряжений $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{'rr}, \sigma^{'zz}, \sigma^{'\varphi\varphi}, \sigma^{'rz}\}$ и деформаций $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \gamma_{rz}\}$, то уравнения (6) можно записать в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad (7)$$

где $[C]$ — матрица коэффициентов упругости.

Уравнения равновесия, записанные также с использованием тензорных плотностей, имеют вид [8]

$$\frac{\partial\sigma^{'rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma^{'rz}}{\partial z} - r\sigma^{'\varphi\varphi} = 0, \quad \frac{\partial\sigma^{'zz}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma^{'zr}}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

Для определения энергии деформации (5) необходимо проинтегрировать выражение

$$\sigma^{'rr}\varepsilon_{rr} + \sigma^{'zz}\varepsilon_{zz} + \sigma^{'\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma^{'rz}\gamma_{rz},$$

содержащее неизвестные деформации и напряжения. В связи с этим аппроксимируем неизвестные деформации в пределах элемента полиномами, линейными относительно переменных r и z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = a_0 + a_1 r + a_2 z, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = b_0 + b_1 r + b_2 z, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = c_0 + c_1 r + c_2 z, \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} = d_0 + d_1 r + d_2 z, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = c_0 + d_0 + (c_1 + d_1)r + (c_2 + d_2)z, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = r u_r. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что аппроксимирование деформаций, а не перемещений как в МКЭ, значительно сокращает размер матриц, используемых в дальнейших расчетах, а также исключает ряд проблем, возникающих при смещениях элементов как твердого тела. Выбирая локальную систему координат так, чтобы ось z совпадала с осью симметрии тела, а ось r проходила через центр элемента, в пределах элемента имеем $R_i \leq r \leq R_e$, $-0.5\Delta z \leq z \leq 0.5\Delta z$.

Выразим теперь неизвестные коэффициенты полиномов в (9) через деформации сторон элемента. С помощью интегрирования вдоль соответствующей стороны элемента получаем

$$\begin{aligned} \delta_{rr} = \int_{R_i}^{R_e} \frac{\partial u_r}{\partial r} dr = (a_0 + a_1 R_c + a_2 z)\Delta r, \quad \delta_{rz} = \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \frac{\partial u_r}{\partial z} dz = (c_0 + c_1 r)\Delta z, \\ \delta_{zz} = \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \frac{\partial u_z}{\partial z} dz = (b_0 + b_1 r)\Delta z, \quad \delta_{zr} = \int_{R_i}^{R_e} \frac{\partial u_z}{\partial r} dr = (d_0 + d_1 R_c + d_2 z)\Delta r, \end{aligned}$$

где $\Delta r = R_e - R_i$, $R_c = 0.5(R_i + R_e)$.

В результате имеем:

$$\begin{aligned} \delta_{rr}^u = (a_0 + a_1 R_c - 0.5a_2 \Delta z)\Delta r, \quad \delta_{rr}^d = (a_0 + a_1 R_c + 0.5\Delta z)\Delta r, \quad \delta_{rz}^l = (c_0 + c_1 R_i)\Delta z, \\ \delta_{rz}^r = (c_0 + c_1 R_e)\Delta z, \quad \delta_{zz}^l = (b_0 + b_1 R_i)\Delta z, \quad \delta_{zz}^r = (b_0 + b_1 R_e)\Delta z, \\ \delta_{zr}^u = (d_0 + d_1 R_c - 0.5d_2 \Delta z)\Delta r, \quad \delta_{zr}^d = (d_0 + d_1 R_c + 0.5d_2 \Delta z)\Delta r, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 R_c = \frac{\delta_{rr}^u + \delta_{rr}^d}{2\Delta r}, \quad b_0 + b_1 R_c = \frac{\delta_{zz}^l + \delta_{zz}^r}{2\Delta z}, \quad a_2 = \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z}, \quad d_2 = \frac{\delta_{zr}^d - \delta_{zr}^u}{\Delta r \Delta z}, \\ c_1 = \frac{\delta_{rz}^r - \delta_{rz}^l}{\Delta r \Delta z}, \quad b_1 = \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z}, \quad c_0 + c_1 R_c = \frac{\delta_{rz}^l + \delta_{rz}^r}{2\Delta z}, \quad d_0 + d_1 R_c = \frac{\delta_{zr}^u + \delta_{zr}^d}{2\Delta r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что

$$a_2 = c_1, \quad b_1 = d_2. \quad (11)$$

Это следует из контурного закона Кирхгофа [9], примененных к U_r и U_z компонентам элементарной ячейки:

$$\delta_{rz}^l + \delta_{rr}^d - \delta_{rz}^r - \delta_{rr}^u = 0, \quad \delta_{zz}^l + \delta_{zr}^d - \delta_{zz}^r - \delta_{zr}^u = 0$$



и соответствующих выражений из (10). Такой же результат следует из равенств

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r}, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}.$$

В (10) найдена только часть неизвестных коэффициентов из (9). Чтобы найти оставшиеся, воспользуемся формулами (6), (9) и, обеспечивая повышенную точность метода, удовлетворим в пределах элемента уравнениям равновесия (8).

В результате получим

$$(\lambda + 2\mu) \left(a_0 + 2a_1 r + a_2 z - \frac{u_r}{r} \right) + \mu r (c_2 + d_2) + \lambda b_1 r = 0, \quad (12)$$

$$\lambda a_2 r + (\lambda + 2\mu) b_2 r + \lambda (c_0 + c_1 r + c_2 z) + \mu [c_0 + d_0 + 2(c_1 + d_1) r + (c_2 + d_2) z] = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (12) следует

$$u_r = a_0 r + 2a_1 r^2 + a_2 r z + \frac{1}{\lambda + 2\mu} [\mu (c_2 + d_2) + \lambda b_1] r^2. \quad (14)$$

Кроме того, из (9) имеем

$$u_r = a_0 r + 0.5a_1 r^2 + a_2 r z + f(z), \quad (15)$$

где $f(z)$ — произвольная функция z .

Из равенства выражений (14) и (15) для u_r получим

$$f(z) = 1.5a_1 r^2 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} [\mu (c_2 + d_2) + \lambda b_1] r^2, \quad (16)$$

а это возможно, если $1.5(\lambda + 2\mu)a_1 + \mu(c_2 + d_2) + \lambda b_1 = 0$. Таким образом,

$$u_r = a_0 r + 0.5a_1 r^2 + a_2 r z. \quad (17)$$

Уравнение (13) будет выполнено при условиях

$$\begin{aligned} \lambda c_0 + \mu(c_0 + d_0) &= 0, \\ \lambda c_2 + \mu(c_2 + d_2) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\lambda a_2 + (\lambda + 2\mu)b_2 + \lambda c_1 + 2\mu(c_1 + d_1) = 0. \quad (19)$$

Из (11), (16) и (18) находим, что

$$c_2 = -\frac{\mu}{\mu + \lambda} d_2 = -\frac{\mu}{\mu + \lambda} b_1, \quad (20)$$

$$a_1 = -\frac{2\lambda}{3(\lambda + \mu)} b_1. \quad (21)$$

В работе [4] при анализе уравнения (12) член $a_2 z$ отбрасывается и принято дополнительное условие $u_r = (a_0 + a_1 R_c) r$, что не ведет к точному выполнению (12) в пределах элемента.

Найдем оставшиеся коэффициенты b_2 и d_1 . Из уравнения (19)

$$\lambda a_2 + (\lambda + 2\mu)b_2 + (\lambda + 2\mu)c_1 + 2\mu d_1 = 0 \quad (22)$$

с учетом (11) получаем

$$\lambda c_1 + (\lambda + 2\mu)b_2 + (\lambda + 2\mu)a_2 + 2\mu d_1 = 0. \quad (23)$$

Сложив (22) и (23), находим

$$2(\lambda + \mu)a_2 + 2(\lambda + 2\mu)b_2 + 2(\lambda + \mu)c_1 + 4\mu d_1 = 0. \quad (24)$$

Группируя в (24) коэффициенты, связанные с нормальными и тангенциальными составляющими, и приравнявая каждую группу к нулю, получим

$$b_2 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} a_2, \quad d_1 = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} c_1. \quad (25)$$



Используя (17), найдем перемещения вершин элемента $ABCD$:

$$\begin{aligned} u_r^A &= a_0 R_i + 0.5 a_1 R_i^2 - 0.5 a_2 R_i \Delta z, & u_r^B &= a_0 R_e + 0.5 a_1 R_e^2 - 0.5 a_2 R_e \Delta z, \\ u_r^C &= a_0 R_i + 0.5 a_1 R_i^2 + 0.5 a_2 R_i \Delta z, & u_r^D &= a_0 R_e + 0.5 a_1 R_e^2 + 0.5 a_2 R_e \Delta z, \end{aligned}$$

откуда получим

$$a_0 + 0.5 a_1 \left(R_c + \frac{\Delta r^2}{4 R_c} \right) = \frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4 R_c}.$$

Таким образом,

$$u_r = r \left[\frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4 R_c} + \frac{1}{2} a_1 \left(r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4 R_c} \right) + a_2 z \right].$$

Вводя в (9) для сокращения записи обозначения $a = a_0 + a_1 R_c$, $b = b_0 + b_1 R_c$, $c = c_0 + c_1 R_c$, $d = d_0 + d_1 R_c$, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= a + a_1 (r - R_c) + a_2 z, & \varepsilon_{zz} &= b + b_1 (r - R_c) + b_2 z, \\ \gamma_{rz} &= c + d + (c_1 + d_1) (r - R_c) + (c_2 + d_2) z, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= r u_r = r^2 \left[\frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4 R_c} + \frac{1}{2} a_1 \left(r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4 R_c} \right) + a_2 z \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где коэффициенты представлены в (10), (20), (21) и (25). В результате деформациям (26) можно придать вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\delta_{rr}^u + \delta_{rr}^d}{2 \Delta r} - \frac{2 \lambda}{3(\lambda + \mu)} \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) + \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z} z, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\delta_{zz}^l + \delta_{zz}^r}{2 \Delta z} + \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2 \mu} \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z} z, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\delta_{rz}^l + \delta_{rz}^r}{2 \Delta z} + \frac{\delta_{zr}^u + \delta_{zr}^d}{2 \Delta r} + \frac{\mu - \lambda}{2 \mu} \frac{\delta_{rz}^r - \delta_{rz}^l}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{zr}^d - \delta_{zr}^u}{\Delta r \Delta z} z, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= r^2 \left[\frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4 R_c} - \frac{\lambda}{3(\lambda + \mu)} \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z} \left(r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4 R_c} \right) + \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z} z \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнения (27) позволяют представить относительные деформации внутри прямоугольного элемента через абсолютные деформации его сторон

$$\{\varepsilon\} = [L] \{\delta\}, \quad (28)$$

где

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & 0 & 0 & l_{15} & l_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & l_{25} & l_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} & l_{36} & l_{37} & l_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{49} & l_{4,10} & l_{4,11} & l_{4,12} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы $[L]$ имеют такой вид

$$\begin{aligned} l_{11} &= 0.5 / \Delta r + z / (\Delta r \Delta z), & l_{12} &= -l_{16} = 2 k_b (r - R_c) / (3 \Delta r \Delta z), & l_{15} &= 0.5 / \Delta r - z / (\Delta r \Delta z), \\ l_{21} &= -l_{25} = -k_a z / (\Delta r \Delta z), & l_{22} &= 0.5 / \Delta z - (r - R_c) / (\Delta r \Delta z), & l_{26} &= 0.5 / \Delta z + (r - R_c) / (\Delta r \Delta z), \\ l_{31} &= -l_{35} = r^2 z / (\Delta r \Delta z), & l_{32} &= -l_{36} = k_b r^2 (r - R_c - 0.25 \Delta r^2 / R_c) / (\Delta r \Delta z), \\ l_{33} &= l_{34} = l_{37} = l_{38} = 0.25 r^2 / R_c, & l_{49} &= 0.5 / \Delta r + k_b z / (\Delta r \Delta z), & l_{4,11} &= 0.5 / \Delta r - k_b z / (\Delta r \Delta z), \\ l_{4,10} &= 0.5 / \Delta z - k_c (r - R_c) / (\Delta r \Delta z), & l_{4,12} &= 0.5 / \Delta z + k_c (r - R_c) / (\Delta r \Delta z), \end{aligned}$$

где $k_a = (\lambda + \mu) / (\lambda + 2 \mu)$, $k_b = \lambda / (\lambda + \mu)$, $k_c = 0.5(\mu - \lambda) / \mu$.

Подставив $\{\varepsilon\}$ из (28) в уравнение (3), получаем

$$\{f\}_e^T \{\delta\}_e = \int_{V^e} \{\sigma'\}_e^T [L] \{\delta\}_e dv = \left(\int_{V^e} \{\sigma'\}_e^T [L] dv \right) \{\delta\}_e.$$



Сократив последнее равенство на $\{\delta\}_e$ и осуществляя операцию транспонирования, имеем

$$\{f\}_e = \int_{V^e} [L]^T \{\sigma'\} dv,$$

а учитывая (7), получаем

$$\{f\}_e = \int_{V^e} [L]^T [C] [L] \{\delta\}_e dv.$$

В результате уравнение состояния элементарной ячейки приобретает вид

$$\{f\}_e = [K]_e \{\delta\}_e, \quad (29)$$

где

$$[K]_e = \int_{V^e} [L]^T [C] [L] dv \quad (30)$$

— матрица жесткости элементарной ячейки, элементы которой находятся в результате матричного умножения и последующего интегрирования. Уравнение (29) удобно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} f_n \\ f_t \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix}_e,$$

где связь между нормальными составляющими $\{f_n\}$, $\{\delta_n\}$, $[K_n]$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} f_d^{rr} \\ f_{zz}^l \\ f_C^r \\ f_D^r \\ f_u^{rr} \\ f_r^{zz} \\ f_A^r \\ f_B^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ & & & & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ & & & & & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ & & & & & & a_{77} & a_{78} \\ & & & & & & & a_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{rr}^d \\ \delta_{zz}^l \\ u_r^C \\ u_r^D \\ \delta_{rr}^u \\ \delta_{zz}^r \\ u_r^A \\ u_r^B \end{Bmatrix},$$

а связь между тангенциальными составляющими $\{f_t\}$, $\{\delta_t\}$, $[K]_t$ определяется следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} f_d^{zz} \\ f_l^{rz} \\ f_u^{zz} \\ f_r^{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ & & b_{33} & b_{34} \\ & & & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{zr}^d \\ \delta_{rz}^l \\ \delta_{zr}^u \\ \delta_{rz}^r \end{Bmatrix}.$$

Элементы симметричных матриц $[K_n]$ и $[K_t]$ таковы

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{55} = e_1 R_c \Delta z / \Delta r, & a_{12} &= a_{25} = 0.25 \lambda R_c + e_2 \Delta r, \\ a_{13} &= a_{14} = a_{17} = a_{18} = a_{35} = a_{45} = a_{57} = a_{58} = 0.125 \lambda \Delta z, & a_{15} &= e_3 R_c \Delta z / \Delta r, \\ a_{16} &= a_{56} = 0.25 \lambda R_c - e_2 \Delta r, & a_{22} &= e_4 R_c \Delta r / \Delta z - (\lambda + 2\mu) \Delta r^2 / (12 \Delta z) + e_5 \Delta r^3 / (R_c \Delta z), \\ a_{23} &= a_{24} = a_{27} = a_{28} = 0.125 \lambda \Delta r - e_6 \Delta r^2 / R_c, & a_{26} &= e_7 R_c \Delta r / \Delta z - e_5 \Delta r^3 / (R_c \Delta z), \\ a_{33} &= a_{34} = a_{37} = a_{38} = a_{44} = a_{47} = a_{48} = a_{77} = a_{78} = a_{88} = (\lambda + 2\mu) \Delta r \Delta z / (16 R_c), \\ a_{36} &= a_{46} = a_{67} = a_{68} = 0.125 \lambda \Delta r + e_6 \Delta r^2 / R_c, \\ a_{66} &= e_4 R_c \Delta r / \Delta z + (\lambda + 2\mu) \Delta r^2 / (12 \Delta z) + e_5 \Delta r^3 / (R_c \Delta z), \\ b_{11} &= b_{33} = 0.25 \mu (1 + e_8) R_c \Delta z / \Delta r, & b_{12} &= b_{23} = 0.25 \mu (R_c - e_9), \\ b_{13} &= 0.25 \mu (1 - e_8) R_c \Delta z / \Delta r, & b_{14} &= b_{34} = 0.25 \mu (R_c + e_9), \\ b_{22} &= 0.25 \mu [R_c (1 + e_{10}) - 2e_9] \Delta r / \Delta z, \end{aligned}$$



$$b_{24} = 0.25\mu(1 - e_{10})R_c\Delta r/\Delta z, \quad b_{44} = 0.25\mu[R_c(1 + e_{10}) + 2e_9]\Delta r/\Delta z,$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{4\lambda^2 + 22\lambda\mu + 21\mu^2}{12(\lambda + 2\mu)}, & e_2 &= \frac{\lambda(\mu - 3\lambda)}{72(\lambda + \mu)}, & e_3 &= \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + 3\mu^2}{12(\lambda + 2\mu)}, \\ e_4 &= \frac{27\lambda^3 + 136\lambda^2\mu + 180\lambda\mu^2 + 72\mu^3}{108(\lambda + \mu)^2}, & e_5 &= \frac{\lambda^2(3\lambda + 8\mu)}{432(\lambda + \mu)^2}, & e_6 &= \frac{\lambda(3\lambda + 7\mu)}{144(\lambda + \mu)}, \\ e_7 &= \frac{27\lambda^3 + 80\lambda^2\mu + 90\lambda\mu^2 + 36\mu^3}{108(\lambda + \mu)^2}, & e_8 &= \frac{\lambda^2}{3(\lambda + \mu)^2}, & e_9 &= \frac{\mu - \lambda}{12\mu}\Delta r, & e_{10} &= \frac{(\mu - \lambda)^2}{12\mu^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для четырехузлового элемента получена матрица жесткости при аппроксимации поля деформаций линейными полиномами. Стандартный МКЭ для этого требует применения элементов с восемью узлами. В результате при таком же уровне аппроксимации графовый метод использует систему уравнений, содержащую примерно в 3 раза меньше уравнений по сравнению с системой, полученной традиционным способом в МКЭ. Тело, представленное в виде отдельных элементов, и соответствующая ему совокупность элементарных ячеек описывается уравнением

$$\{f\} = [K]\{\delta\}, \tag{31}$$

где $\{f\}$ и $\{\delta\}$ — векторы внутренних сил и деформаций

$$\{f\}^T = \{f_{1e}^T, f_{2e}^T, \dots, f_{ne}^T\}, \quad \{\delta\}^T = \{\delta_{1e}^T, \delta_{2e}^T, \dots, \delta_{ne}^T\},$$

причем $\{f\}_{ie}^T$, $\{\delta\}_{ie}^T$ определяются (1), (2), а $[K]$ — глобальная несвязанная матрица жесткостей тела, представленного в дискретном виде

$$[K] = \text{diag} [K_{1e}, K_{2e}, \dots, K_{ne}],$$

где $[K]_{ie}$ определены в (30), а n — число ячеек, образующих граф.

Уравнение (31) связывает внутренние силы с деформациями элементов. В общем случае с помощью этого уравнения деформированное состояние определить нельзя, поскольку, как правило, заданными бывают внешние силы и перемещения. Теория графов обеспечивает возможность искусственного конструирования квадратных матриц преобразования, с помощью которых можно, исходя из уравнений, описывающих разрезанное на элементы тело, получить уравнение связного тела. Структурные элементы графа — разрезы, контуры, пути и хорды — могут быть заданы матрицами. Примеры этих матриц для элементарной ячейки (рис. 1) приведены в [4].

После преобразования с помощью квадратных матриц дополнений $[A_B]_S$ и маршрутов $[P_C]_S$ аналогично [4, 6] имеем

$$\{F\}_S = [A_B]_S\{f\}, \quad \{\Delta\}_S = [P_C]_S\{\delta\}, \tag{32}$$

где индексом S обозначены переменные глобальной системы координат графа.

Поскольку матрицы дополнений и маршрутов несингулярны, а также в силу равенств $[P_C]^T = [A_B]^{-1}$ и $[A_B]^T = [P_C]^{-1}$, получим

$$\{f\} = [A_B]_S^{-1}\{F\}_S = [P_C]_S^T\{F\}_S, \quad \{\delta\} = [P_C]_S^{-1}\{\Delta\}_S = [A_B]_S^T\{\Delta\}_S. \tag{33}$$

Тогда, используя (31), (32), (33), получаем уравнения, описывающие связное тело

$$\{F\}_S = [K]_S\{\Delta\}_S, \tag{34}$$

где $[K]_S = [A_B]_S[K][A_B]_S^T$ — глобальная матрица жесткости тела.

Использованный для вывода уравнения (34) подход, можно рассматривать как модифицированный метод конгруэнтных преобразований [2].

Для иллюстрации работы метода решим несколько тестовых задач.

Задача 1. Рассмотрим задачу изгиба круглой однородной пластины радиуса R , защемленной по контуру. Пластина нагружена равномерно распределенным внешним давлением $P/E = 0.001$. Сравнение результатов расчетов проводилось путем сопоставления решений, полученных на достаточно



редких сетках с использованием различных конечных элементов [10], элементарных ячеек графового метода, а также точного решения. В табл. 1 приведены значения прогиба в центре пластины толщины $h/R = 0.1$, выраженные в долях PR^4D^{-1} , где $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — цилиндрическая жесткость пластины. Значение коэффициента Пуассона принято равным 0.3. Использовались треугольные конечные элементы Морли с шестью степенями свободы [11], BCIZ (элемент Бейзли, Ченга, Айронса и Зенкевича) с девятью степенями свободы [12], элемент DKT (discrete Kirchhoff triangle) с девятью степенями свободы [13], гибридный метод напряжений HSM с девятью степенями свободы [10]. Эти треугольные элементы построены для тонких пластин, рассчитываемых по теории Кирхгофа. В расчетах графовым методом применялся как четырехугольный элемент, представленный в данной статье, так и треугольный элемент графовой модели в осесимметричной постановке [5].

Таблица 1

Элемент Морли	Элемент BCIZ	Элемент DTK	Элемент HSM	Треугольный элемент графового метода	Четырехугольный элемент графового метода	Точное решение по теории Кирхгофа	Точное решение по теории Тимошенко–Миндлина
0.01914	0.01643	0.01597	0.01541	0.01565	0.01628	0.01563	0.01634

Во всех случаях количество элементов, на которые разбивалась область, принято равным 96.

Задача 2. Рассматривается осесимметричная задача о напряженном состоянии в полном цилиндре под действием нормального давления, равномерно распределенного по внутренней боковой поверхности (задача Ламе). Аналитическое решение для вектора перемещения вдоль радиуса имеет вид

$$u_r = r_1^2(1 + \nu)E^{-1}p[(1 - 2\nu)r + r_2^2/r]/(r_2^2 - r_1^2),$$

где r_1, r_2 — внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно, p — равномерное внутреннее давление.

В расчетах принято: $r_1 = 3$ мм, $r_2 = 7$ мм, $p = 1$ МПа, $E = 100$ МПа, $\nu = 0.3$. На торцах в выделяемом для анализа фрагменте цилиндра требовалось условие $u_z = 0$. В табл. 2 приведено сравнение теоретических и расчетных результатов для перемещения u_r в зависимости от радиуса при различных сетках, покрывающих рассматриваемую область. Во второй и третьей строках табл. 2 даны расчетные значения, а также их процентное отношение к теоретическим для сетки 9×6 . Результаты в четвертой и пятой строках относятся к сеткам 90×6 и 90×60 соответственно.

Таблица 2

r , мм	3	4	5	6	7
u_r , мкм	51.29	40.51	34.52	30.91	28.67
$u_r/u_{r\text{теор}}$	100.000	99.8836	99.4679	99.9432	100.000
%	100.000	99.9947	99.9976	99.9978	100.000
%	100.000	99.9948	99.9978	99.9978	100.000

Задача 3. Рассмотрим осесимметричную задачу о напряженном состоянии сплошного изотропного цилиндра высотой $2h$ со свободной от напряжений боковой гофрированной поверхностью, который находится под действием осевых растягивающих усилий интенсивностью p (рис. 2). В безразмерных цилиндрических координатах, отнесенных к внешнему радиусу невозмущенного цилиндра, гофрированная поверхность описывается уравнением $r = 1 + \varepsilon \cos \pi z$.

Ввиду симметрии рассматривается четверть всей расчетной области. На осях симметрии должны выполняться следующие условия: $u_r = 0$ при $r = 0$, $u_z = 0$ при $z = 0$ (при соответствующих значениях другой переменной).

Числовые расчеты проведены для изотропного цилиндра высотой $2h = 4$ с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.33$ при $\varepsilon = 0.1$. На рис. 3 показано распределение напряжений по толщине цилиндра в сечении $z = 1$. Напряжениям σ_{rr}/p , σ_{zz}/p , $\sigma_{\varphi\varphi}/p$ соответствуют пунктирная, сплошная и штриховая линии.

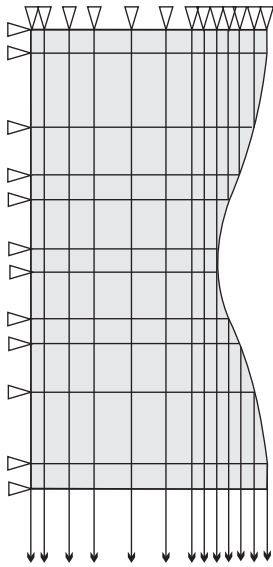


Рис. 2. Расчетная схема

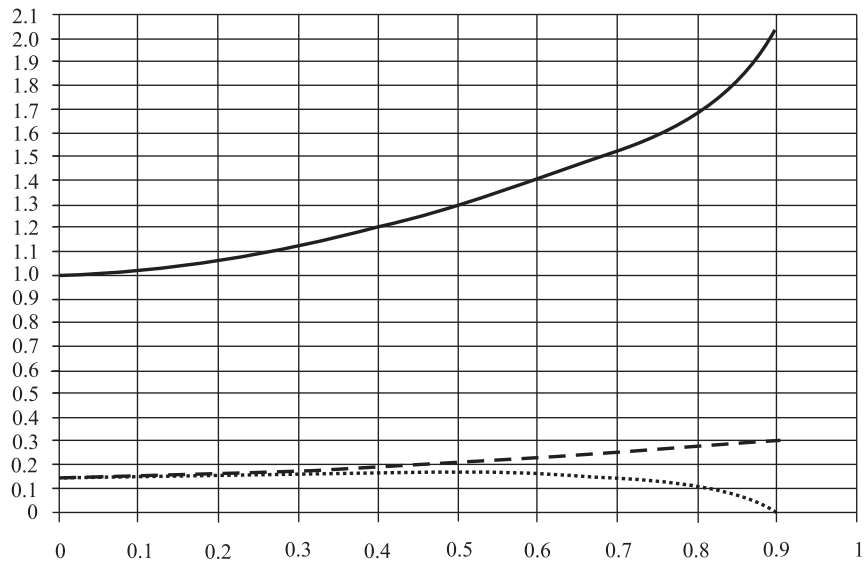


Рис. 3. Распределение напряжений при различных значениях r в сечении $z = 1$

Сравнение этих результатов с решением данной задачи полученным методом возмущения формы границы [14] дает хорошее совпадение.

Тестирование показывает весьма высокую точность результатов, получаемых на основе предлагаемого метода. Повышенная точность вычислений обеспечивается благодаря тому, что, с одной стороны, графовые закономерности реализуют выполнение условий равновесия и неразрывности деформаций для элемента в целом, а с другой стороны, уравнения равновесия выполняются локально по объему элемента.

Библиографический список

1. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М. : Мир, 1988. 352 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М. : Мир, 1984. 428 с.
3. Кузовков Е. Г., Тырымов А. А. Графовая модель упругой среды в осесимметричной постановке // Моделирование в механике : сб. науч. тр. Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1990. Т. 4 (21), № 6. С. 103–109.
4. Kuzovkov E. G. Axisymmetric Graph Model of an Elastic Solid // Strength of Materials. 1996. Vol. 28, № 6. P. 470–485.
5. Тырымов А. А. Треугольный элемент графовой модели для осесимметричной задачи теории упругости // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : тр. XVIII Межресп. конф., Кемерово, 1–3 июля 2003 г. / под ред. В. М. Фомина. Новосибирск : Нонпарель, 2003. С. 187–191.
6. Тырымов А. А. Сингулярный элемент графовой модели упругой среды в декартовой системе координат // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4, № 4. С. 125–136.
7. Trent H. Isomorphism between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems // J. of the Acoustical Soc. of America. 1955. Vol. 27, № 3. P. 500–527.
8. Крон Г. Исследование сложных систем по частям — диакоптика. М. : Наука, 1972. 542 с.
9. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М. : Мир, 1984. 454 с.
10. Белкин А. Е., Гаврюшин С. С. Расчет пластин методом конечных элементов. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 232 с.
11. Morley L. S. D. The constant-moment plate-bending element // J. Strain Anal. 1971. Vol. 6, № 1. P. 20–24.
12. Bazeley G. P., Cheung Y. K., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. Triangular elements in plate bending — conforming and non-conforming solutions // Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics. Ohio : Wright-Patterson Air Force Base, 1965. P. 547–576.
13. Batoz J. L., Bathe K. J., Ho L. W. A study of three-node triangular plate bending elements // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. 1980. Vol. 15. P. 1771–1812.
14. Немин Ю. Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. Киев : Наук. думка, 1989. 312 с.



УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПАТОЛОГИЙ ПОЧЕЧНОЙ АРТЕРИИ

О. А. Щучкина*, А. А. Голядкина*, А. В. Аристамбекова*,
Д. Ю. Потапов**

*Саратовский государственный университет

E-mail: nano-bio@sgu.ru

**Саратовский государственный медицинский университет

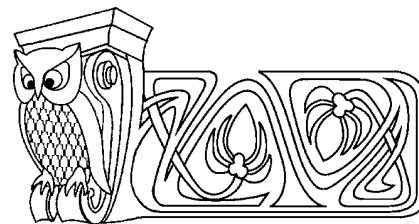
Проведено математическое моделирование на основе экспериментальных данных, полученных с помощью современных методов исследования (ультразвукового, ангиографии, спиральной компьютерной томографии с трехмерной реконструкцией). Создана анатомически точная компьютерная модель почечной артерии. Изучены основные принципы изменения кровотока с учетом напряженно-деформированного состояния стенок почечных артерий в норме, при патологии и гемостазе внутриорганных ветвей.

Ключевые слова: конечно-элементный анализ, почечная артерия, аневризма, стеноз, гемостаз, напряженно-деформированное состояние, гемодинамика.

ВВЕДЕНИЕ

Современные исследования в области биомеханики носят прикладной характер и направлены на выявление особенностей процессов, протекающих в биомеханических системах. Использование методов математического моделирования позволяет установить взаимосвязь между процессами, протекающими на микроуровне, и изменениями в механике органов и систем, возникающими в результате заболевания, на макроуровне, что, в свою очередь, помогает разработке диагностических, лечебных и фармацевтических технологий. В частности, результаты математического моделирования дают возможность оперирующему хирургу грамотно выбрать метод операционного вмешательства, избежать потенциальных ошибок во время операции, что приводит к существенному улучшению результатов лечения больных. Математическое моделирование биомеханических систем включает в себя несколько этапов: постановка медицинской задачи; проведение биомеханического анализа; разработка математической модели исследуемой системы или процесса; постановка корректной математической задачи; численное решение задачи; визуализация и анализ полученных результатов. При математическом моделировании широко применяется метод конечных элементов (МКЭ). На сегодняшний день опубликовано большое количество статей, в которых для описания процессов в мочевыводящей системе в норме при патологических состояниях и различного рода воздействиях используется МКЭ: моделирование процессов повреждения почек при их травме и определение свойств тканей почек [1–4]; моделирование оперативного вмешательства на почках (микроволновая хирургия, дистанционная литотрипсия) [5–9]; моделирование уродинамики мочеточника и мочевого пузыря [10–12]. К сожалению, отсутствуют публикации, посвященные математическому моделированию поведения почечных артерий (ПА, рис. 1).

В основе большинства заболеваний мочевыводящей системы лежит нарушение кровоснабжения почек, причинами которого наиболее часто являются стеноз и аневризмы стенки артерии. К нарушению кровоснабжения почек приводит также хирургический метод лечения онкоурологических заболеваний. На ранних стадиях проводят органосохраняющую



Numerical Analysis of Renal Artery Pathologies

O. A. Schuchkina, A. A. Goliadkina, A. V. Aristambekova,
D. Yu. Potapov

Mathematical modeling based on experimental data (ultrasonic imaging, angiography, 3D reconstruction via spiral computed tomography) was performed. Anatomically precise model of renal artery was created. Basic principles of blood flow dynamics with stress-strain state of artery walls were studied for normal, pathologic renal arteries and arteries with hemostasis of intraorganic branches.

Key words: finite element analysis, renal artery, aneurysm, stenosis, hemostasis, stress strain state, hemodynamics.

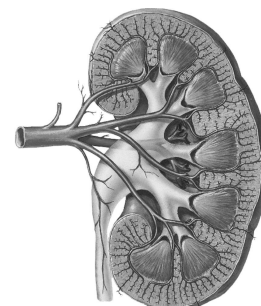


Рис. 1. Артериальная сеть почки

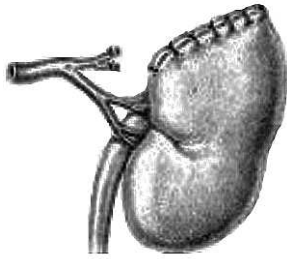


Рис. 2. Резекция почки

операцию (резекция), удаляют часть пораженного участка почки (рис. 2) и полное или частичное удаление одной и более внутриорганных ветвей почечной артерии (перевязка кровеносных сосудов — гемостаз).

Проведенное исследование позволило получить знания о кровотоке с учетом напряженно-деформированного состояния стенок почечных артерий в норме, при патологии и при гемостазе внутриорганных ветвей и дало возможность выявить особенности процессов, происходящих в данной биомеханической системе.

1. МЕТОДЫ

1.1. Построение моделей

Построение модели почечной артерии проводилось на основе данных спиральной компьютерной томографии (КТ) с трехмерной реконструкцией с использованием программного пакета MIMICS (рис. 3). Полученная модель была доработана в системе автоматизированного проектирования SolidWorks 2008 (SolidWorks corporation) путем сглаживания неровностей и восстановления участков сосудистого русла и тканей почки, которые не были распознаны средствами MIMICS (рис. 4, 5). Также были построены 3D модели ПА со стенозом, аневризмами (ложная и истинная) и модель ПА, имитирующая гемостаз одной или двух ветвей (рис. 6).

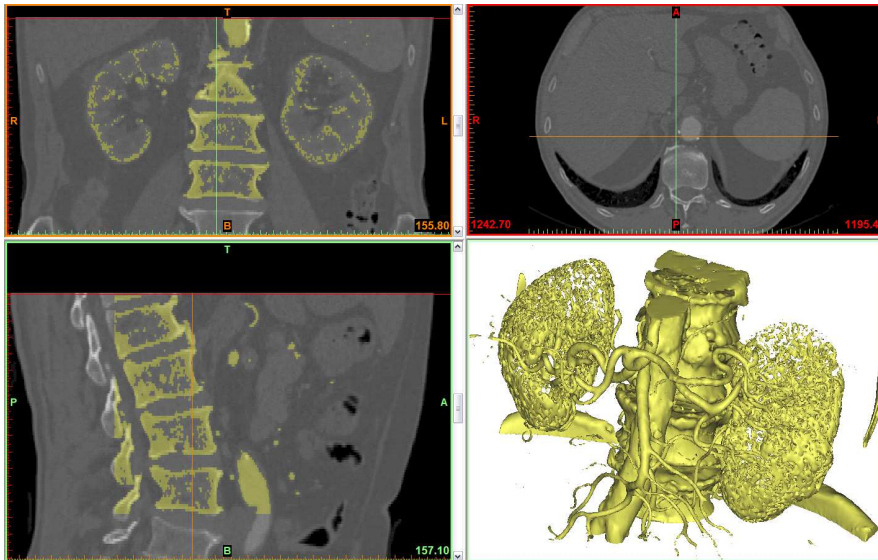


Рис. 3. Создание трехмерной геометрии почечной артерии по снимкам КТ

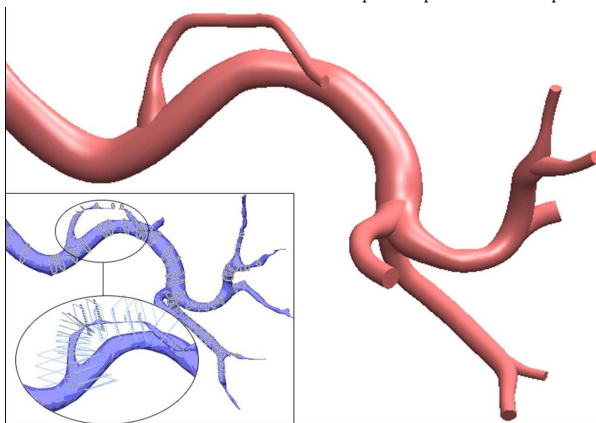


Рис. 4. Модель почечной артерии, доработанная в SolidWorks

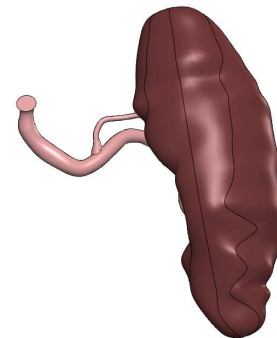


Рис. 5. Модель почечной артерии с почкой

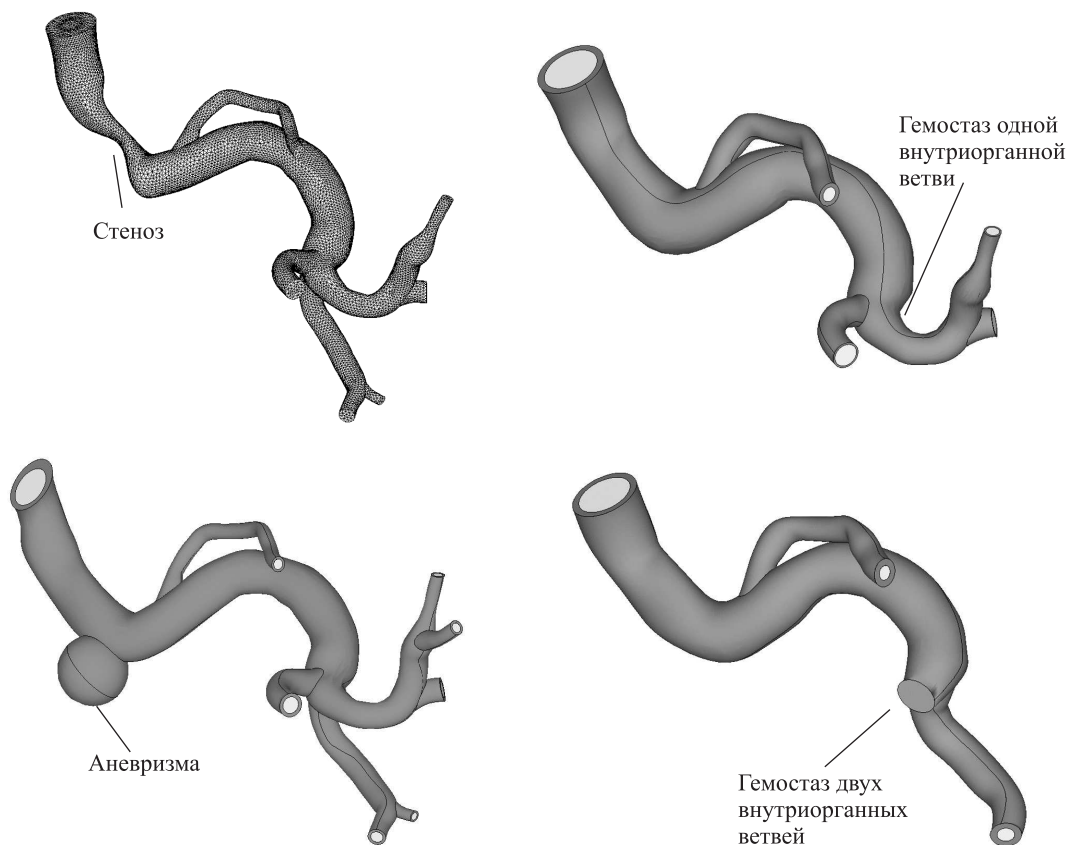


Рис. 6. Патологии почечной артерии

1.2. Численный эксперимент

Полученные модели были импортированы в ANSYS Multiphysics. Для последующих расчетов на данные объемы была наложена нерегулярная тетраэдрическая сетка с размером элементов 0.0005 м.

Кровь предполагалась однородной, несжимаемой и ньютоновской жидкостью, материал стенок — однородным, изотропным и идеально упругим. Движение стенки описывалось вторым законом Ньютона. Торцы сосуда жестко закреплены. На стенке артерии ставилось условие равенства скоростей частиц жидкости, прилегающих к стенке, и соответствующих частиц стенки (рис. 7). На входе в артерию задавалась функция скорости течения крови, изменяющаяся по физиологическому закону. На выходе задавалось постоянное давление. Механические характеристики крови и стенки артерии были взяты в виде $\rho_1 = 1050 \text{ кг/м}^3$ (плотность крови), $\eta = 0.0037 \text{ Па}\cdot\text{с}$ (вязкость крови), $\rho_2 = 1378 \text{ кг/м}^3$ (плотность тканей стенки ПА), $\nu = 0.4$ (коэффициент Пуассона), $E = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ (модуль Юнга здоровой ПА), $E = 0.5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ (модуль Юнга ПА с атеросклеротическим поражением) [13–14].

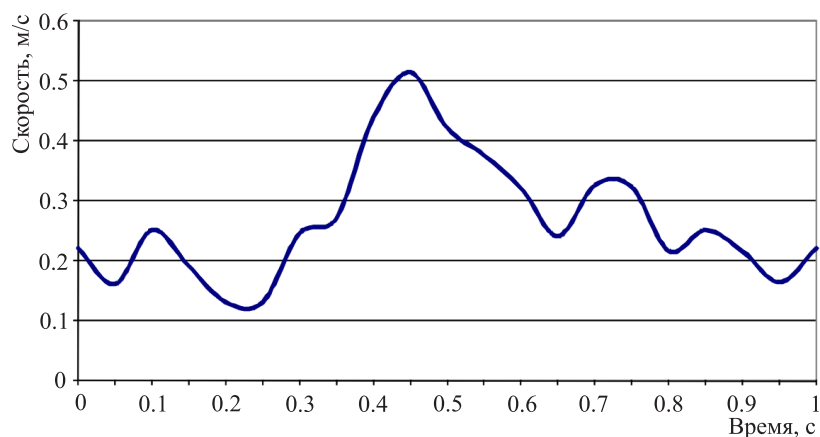


Рис. 7. График функции скорости течения крови



2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

По результатам численного эксперимента был проведен анализ данных изменения кровотока с учетом напряженно-деформированного состояния стенок ПА в зависимости от фазы сердечного цикла.

Были рассмотрены следующие задачи:

- 1) ПА в норме, без учета воздействия тканей почки;
- 2) ПА в норме, с учетом воздействия тканей почки;
- 3) гемостаз одной внутриорганный ветви ПА;
- 4) гемостаз двух внутриорганных ветвей ПА;
- 5) ПА с аневризмой стенки (ложная и истинная);
- 6) ПА со стенозом 45% и 60%.

В диастолической фазе сердечного цикла для ПА в норме при патологии и гемостазе ветвей значимых различий в данных, полученных по результатам численного анализа, не наблюдается.

Результаты, полученные в сердечный цикл систолы, представляют собой большой интерес, так как в эту фазу достигаются наибольшие значения всех параметров за счет максимальной скорости кровотока на входе в ПА. Рассмотрим более подробно каждую из задач.

При решении первой задачи максимальные значения вектора перемещения узлов (4.7 мм) достигаются в районе изгиба ПА. Наибольшие значения скорости потока, равные 1.8 м/с, наблюдаются на прямолинейных участках ПА в основном на выходах внутриорганных ветвей артерии. Места локализаций максимального и минимального значений давления и напряжений совпадают. Давление и напряжения достигают наибольших значений в первом сегменте основного русла ПА.

При решении второй задачи на узлах элементов, принадлежащих внешней стенке артерии, соприкасающейся с внутренними тканями почки (паренхимой), задавалось жесткое закрепление. Данное граничное условие физиологически корректно, так как в организме почка зафиксирована за счет связочного аппарата и поддерживающего эффекта околопочечной жировой клетчатки. Модули Юнга паренхимы и ПА примерно равны (2 МПа и 2.5 МПа соответственно). Внешняя оболочка почки — капсула, в 10 раз превосходит по модулю Юнга паренхиму [4].

В результате численного эксперимента максимальные значения вектора перемещения узлов (2.4 мм) смещаются в первый сегмент основного русла. Наибольшие значения скорости потока (2.85 м/с) наблюдаются во внутриорганных ветвях ПА. Распределение давления и напряжений аналогично первой задаче.

Сравнительный анализ результатов первой и второй задач позволил сделать вывод о целесообразности рассмотрения ПА с учетом воздействия тканей почки. Задачи с третьей по шестую были решены с учетом данного граничного условия.

Численный эксперимент ПА с гемостазом одной внутриорганный ветви показал снижение максимальных значений скорости и давления потока в 2 раза по сравнению со значениями ПА в норме. Для ПА с гемостазом двух внутриорганных ветвей значения скорости потока возрастают более чем в 3 раза от значений ПА в норме. Картины распределения напряжений для ПА с гемостазом одной или двух внутриорганных ветвей полностью совпадают с местами локализаций максимального и минимального значений ПА в норме.

Изучение поведения ПА с аневризмой (ложная и истинная) показало, что в зоне ампулы аневризмы наблюдается максимум давления и турбулентное течение с низкими значениями скоростей. Вектора перемещения узлов достигают максимальных значений в вершине ампулы аневризмы.

Для ПА со стенозом наблюдаются особенности распределения давления, зависящие от степени сужения русла сосуда. Максимальное давление достигается в зоне, предшествующей стенозу. При этом в ПА с 45% сужением значения в 2 раза меньше показателей ПА в норме, а для ПА с 60% сужением — превосходят в 5 раз. Дистальнее стеноза значения давления в обоих случаях уменьшились до 25 мм рт. ст. Наибольшие значения скорости в обоих случаях наблюдаются в центральной зоне патологического участка и достигают 7.2 м/с при 60% стенозе и 3.1 м/с — при 45% стенозе.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты математического моделирования дадут возможность оперирующему хирургу учесть особенности процессов, происходящих в системе кровообращения почки, позволят грамотно выбрать метод операционного вмешательства и избежать потенциальных ошибок во время операции, что приведет к существенному улучшению результатов лечения больных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-31264).

Библиографический список

1. *Snedeker J. G., Barbezat M., Niederer P., Schmidlin F. R., Farshad M.* Strain energy density as a rupture criterion for the kidney : impact tests on porcine organs, finite element simulation, and a baseline comparison between human and porcine tissues // *J. Biomech.* 2005. № 38. P. 993–1001.
2. *Snedeker J. G., Niederer P., Schmidlin F. R., Farshad M., Demetropoulos C. K., Lee J. B., Yang K. H.* Strain-rate dependent material properties of the porcine and human kidney capsule // *J. Biomech.* 2005. № 38. P. 1011–1021.
3. *Weinberg K., Ortiz M.* Shock wave induced damage in kidney tissue // *Computational Materials Science.* 2005. № 32. P. 588–593.
4. *Глыбочко В. П., Николенко В. Н., Понукалин А. Н., Потапов Д. Ю., Белова Ю. А.* Биомеханические свойства почки в эксперименте // *Научно-теоретический медицинский журн. Морфология.* 2010. № 4. С. 56–57.
5. *He X., McGee S., Coad J., Schmidlin F., Iaiizzo P. A., Swanlund D. J., Kluge S., Rudie E., Bischof J. C.* Investigation of the thermal and tissue injury behaviour in microwave thermal therapy using a porcine kidney model // *Intern. J. Hyperthermia.* 2004. № 20(6). P. 567–593.
6. *Meyer M., Velte H., Lindenborn H., Bangert A., Dahlhaus D., Albers P.* Radiofrequency ablation of renal tumors improved by preoperative ex-vivo computer simulation model // *J. Endourol.* 2007. № 21(8). P. 886–890.
7. *He X., Bischof J.* Analysis of thermal stress in cryosurgery of kidneys // *J. Biomech. Engin.* 2005. № 127(4). P. 656–661.
8. *Weinberg K., Ortiz M.* Kidney damage in extracorporeal shock wave lithotripsy: a numerical approach for different shock profiles // *Biomech. Model Mechanobiol.* 2009. № 8(4). P. 285–299.
9. *Afshari E., Najarian S., Simforoosh N.* Application of artificial tactile sensing approach in kidney-stone-removal laparoscopy // *Biomed. Mater. Engin.* 2010. № 20(5). P. 261–267.
10. *Vahidi B. A., Fatouraei N.* A numerical simulation of peristaltic motion in the ureter using fluid structure interactions // *Proc. Conf. IEEE Engin. Med. Biol. Soc. Lyon, France, 2007.* P. 1167–1171.
11. *Krywonos J., Fenwick J., Elkut F., Jenkinson I., Liu Y. H., Brunt J. N. H., Scott A., Malik Z., Eswar C., Ren X.J.* MRI image-based FE modelling of the pelvis system and bladder filling // *Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin.* 2010. № 13(6). P. 669–676.
12. *Keshtkar J.* Modeled current distribution inside the normal and malignant human urothelium using finite element analysis // *IEEE Trans. Biomed. Engin.* 2008. № 55 (2 Pt. 1). P. 733–738.
13. *Kamenskiy A., Pipinos I., Desyatova A., Salkovskiy Y., Kossovich L., Kirillova I., Bockeria L., Morozov K., Polyayev V., Lynch T., Dzenis Y.* Finite Element Model of the Patched Human Carotid // *Vascular and Endovascular Surgery.* 2009. Vol. 43, № 6. P. 533–541.
14. *Павлова О. Е., Грамакова А. А., Морозов К. М., Суслов И. И.* Гемодинамика и механическое поведение бифуркации сонной артерии с патологической извитостью // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2.* С. 66–73.

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.05

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕДУРЫ РЕКОНФИГУРИРОВАНИЯ В МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ

В. В. Гроль, В. А. Романкевич, С. М. Мораведж

Национальный технический университет Украины, Киев
E-mail: romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua

В работе рассматриваются вопросы, связанные с организацией оптимизированной по ряду критериев процедуры настройки (программирования) компонентов многопроцессорной системы с учетом компенсации возможных отказов исправными компонентами. Разработан алгоритм формирования подмножеств процессорных элементов и получены аналитические соотношения, позволяющие оптимизировать временные либо аппаратные затраты в таких системах.

Ключевые слова: многопроцессорные системы, реконфигурация, отказоустойчивость.

On Optimization of Reconfiguration Procedure in Multiprocessor Systems

V. V. Grol, V. A. Romankevich, S. M. Moravej

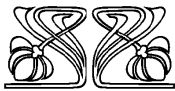
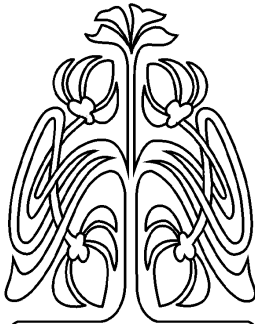
Some questions concerned to organization of programming procedure being optimized in accordance with a number of parameters for multiprocessor fault-tolerant system's components in consideration with compensation by properly functioned components of possible faults are reviewed in the paper. An algorithm to form a subsets of processor elements is developed and an anayitic expressions allow to reduce the time or hardware spendings in such systems are produced.

Key words: multiprocessor systems, reconfiguration, fault-tolerance.

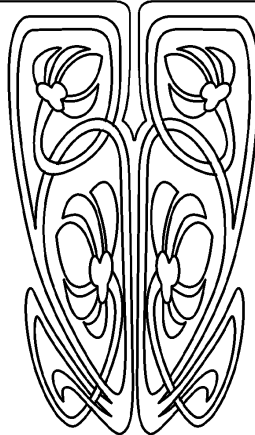
ВВЕДЕНИЕ

Отказоустойчивые реконфигурируемые многопроцессорные системы (ОМС) управления [1], о которых речь идет ниже, обладают рядом особенностей, среди которых взаимное тестирование и реконфигурирование при обнаружении отказов своих компонентов [2] с целью обеспечения выполнения всех функций управления объектом. Бывает так, что множество процессоров, которые могут «подхватить» задачи, решаемые вышедшим из строя процессором, предопределено чисто инженерными соображениями (число связей и источников внешней информации, объем избыточности по производительности и времени и др.). Однако часто в этом плане остается определенный выбор, что порождает свои задачи оптимизации.

Если обозначить число компонентов ОМС как N , то каждому из элементов можно поставить в соответствие некоторое подмножество из k элементов, $|k| = 1, 2, \dots, N - 1$. При этом возникает задача нахождения соответствующего подмножества для каждого элемента, т. е. задача разбиения N элементов на N подмножеств с учетом возможности вхождения каждого из элементов в несколько подмножеств. Достаточно легко можно показать, что с точки зрения оптимального использования памяти программ процессорных элементов предпочтительным вариантом представляется ситуация, когда каждый элемент входит в k подмножеств, т. е. каждый процессор может участвовать в компенсации отказов одного из k процессоров.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





1. АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОРОВ ПО ПОДМНОЖЕСТВАМ

В основу алгоритмов решения поставленной задачи может быть положен, например, учет топологии связей компонентов системы. Так, использование алгоритма распределения для систем со слабой связностью компонентов (топология «кольцо», «последовательная цепочка» и др.), будет оптимальным, если в каждое подмножество включать k «соседних» (ближайших по цепи) элементов. Пусть i — номер некоторого модуля (процессорного элемента), $i = 1, 2, \dots, N$. Предположим, что при этом справедливы условия:

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, \dots, N \quad \exists K_i, i \in K_i \mid K_i = k + 1 \\ \forall i = 1, 2, \dots, N \quad K_i = K_{im} \cup K_{ip}, K_{im} \cap K_{ip} = \emptyset \\ \forall i = 1, 2, \dots, N \quad [0 \leq |K_{im}| \leq (k + 1), 0 \leq |K_{ip}| \leq (k + 1)]. \end{cases} \quad (1)$$

В последних соотношениях K_i , K_{im} и K_{ip} — некоторые подмножества элементов, причем K_{im} и K_{ip} составляют искомое подмножество K_i . Эти два подмножества (K_{im} и K_{ip}) включают в совокупности $k + 1$ имен «соседних» (по кольцу) элементов, т. е.:

$$\begin{cases} K_{im} = \{(i - |K_{im}|), (i - |K_{im}| + 1), \dots, (i - 2), (i - 1)\} \\ K_{ip} = \{(i + 1), (i + 2), \dots, (i + |K_{ip}| - 1), (i + |K_{ip}|)\}. \end{cases} \quad (2)$$

Учитывая кольцевую топологию связей в ОМС, операции суммирования и вычитания в соотношениях (2) выполняются по модулю N . Алгоритм распределения достаточно прост и в обобщенном виде представлен ниже.

Очевидным представляется условие, чтобы числа $|K_{im}|$ и $|K_{ip}|$ отличались не больше, чем на единицу (при нечетном значении величины $k + 1$ наилучшим вариантом будет $|K_{im}| = |K_{ip}|$). Понятно также, что среди процессоров множества K_i не должно быть неисправных, для чего после выявления любого отказа нумерацию процессоров следует изменить.

Для альтернативного варианта топологии с большей степенью связности компонентов ОМС (например, связи типа «каждый с каждым») условие формирования подмножеств элементов, находящихся достаточно близко друг к другу, снимается. Таким образом, появляется возможность произвольного (случайного) выбора элементов ОМС при образовании подмножеств для выполнения процедур реконфигурации системы в случае возникновения неисправностей.

С учетом вышеизложенных соображений обобщенный алгоритм разбиения компонентов ОМС по подмножествам для ОМС с большой степенью связности элементов можно представить в виде следующей последовательности действий.

1. Для заданных значений N и k выделить N счетчиков $T_i, i = \overline{1, N}$, разрядность каждого из счетчиков равна $\lceil \log_2 k \rceil$ бит, и, кроме того, сформировать N одномерных массивов $A_i, i = \overline{1, N}$, для хранения k идентификаторов выбранных компонентов ОМС в каждом из этих массивов.

2. Выполнить начальную установку счетчиков $\forall i = 1, 2, \dots, N \ (\langle T_i \rangle = 0)$.

3. Установить счетчик компонентов $i = 1$.

4. Присвоить значение счетчику компонентов текущего подмножества $\langle K \rangle = k$.

5. Выбрать случайно величину $j, j \in \{1, 2, \dots, N\}, j \neq i$ учитывая, что при этом $\langle T_j \rangle$ имеет минимальное значение.

6. Проверить условие: $\langle T_j \rangle = k$? Да: перейти к п. 5. Нет: перейти к п. 7.

7. Присвоить: $\langle K \rangle = \langle K \rangle - 1$.

8. Записать значение j в массив A_i .

9. Проверить условие: $\langle K \rangle = 0$? Да: перейти к п. 10. Нет: перейти к п. 5.

10. Присвоить: $i = i + 1$.

11. Проверить условие $i > N$? Да: перейти к п. 12. Нет: перейти к п. 4.

12. Конец алгоритма.



Отметим, что кажущиеся нарушения требования п. 5 алгоритма о минимальности состояния, соответствующего выбранного счетчика T_i , связано с тем, что минимальное состояние $T_4 = 1$ не может являться основанием для включения компонента «четыре» в подмножество идентификаторов, хранящееся в массиве A_4 вследствие равенства индексов T_4 и A_4 . Очевидно, что некий компонент не может входить в подмножество других компонентов ОМС, выполняющих рабочие функции именно этого процессорного элемента системы в случае его (элемента) неисправности. В п.5 алгоритма указанное соображение отражено в виде условия $j \neq i$.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА ПАРАМЕТРА k

Применение одного из вариантов распределения компонентов реконфигурируемой ОМС на подмножества может быть использовано для формирования данных заполнения памяти программ процессорных элементов ОМС. Тот факт, что в случае отказа одного из элементов системы k других элементов начинают решать помимо собственной основной задачи еще и часть задачи отказавшего элемента, приводит к появлению возможности оптимального выбора параметра k в соответствие с некоторыми критериями. Одним из таких критериев может оказаться общее время выполнения любым из k компонентов как своей задачи, так и задачи по реконфигурированию системы. Допустим, что цикл решения собственной задачи любого процессорного элемента включает в себя два временных интервала, а именно интервал самотестирования t_{st} и интервал собственно решения задачи, т. е. выполнения основной системной функции t_{tk} . При вхождении системы в режим реконфигурирования к этим двум интервалам (тактам) добавляется еще три временных составляющих: такт t_{sb} решения части задачи отказавшего процессорного элемента, такт t_{cl} получения результатов выполнения тактов t_{sb} остальных $k-1$ «резервных» процессорных элементов и обработки этой информации, а также такт t_{out} — время выдачи управляющих сигналов (выходной информации) взамен сигналов отказавшего компонента ОМС.

Обозначим через α_{sb} некоторый коэффициент, определяющий степень ускорения (замедления) решения задачи отказавшего процессора k «резервными» элементами. Тогда можно записать, что $t_{sb} = (\alpha_{sb} \cdot t_{tk})/k$.

Для интервала сбора (объединения) результатов решения подзадач: $t_{cl} = \alpha_{cl} \cdot k \cdot t_{op}$, где: t_{op} — время обработки результатов решения дополнительной задачи одним из «резервных» процессорных элементов, α_{cl} — некоторый коэффициент, учитывающий эффективность (производительность) алгоритма сборки, $0 < \alpha_{cl} \leq 1$.

Если обозначить через α_{out} долю операций вывода при решении основной задачи, тогда $t_{out} = \alpha_{out} \cdot t_{tk}$, причем очевидно, что $0 < \alpha_{out} < 1$. Следовательно, время t_{cm} выполнения функций реконфигурирования каждым из k «резервных» компонентов ОМС можно найти следующим образом:

$$t_{cm} = t_{sb} + t_{cl} + t_{out} = \alpha_{sb} \cdot (t_{tk}/k) + \alpha_{cl} \cdot k \cdot t_{op} + \alpha_{out} \cdot t_{tk}.$$

Для определения оптимального значения k , при котором время решения задачи реконфигурации будет минимальным, найдем частную производную:

$$\frac{\delta t_{cm}}{\delta k} = -\alpha_{sb} \cdot \frac{t_{tk}}{k^2} + \alpha_{cl} \cdot t_{op},$$

приравняв к 0 которую, получаем:

$$k_{opt}(t) = \sqrt{\frac{\alpha_{sb} \cdot t_{tk}}{\alpha_{cl} \cdot t_{op}}}.$$

Другим критерием оптимального разбиения может быть объем памяти для хранения специализированного программного обеспечения в каждом из процессоров ОМС. Если обозначить память процессора как M_p , то распределение этой памяти на отдельные зоны можно записать в виде соотношения:

$$M_p = m_t \circ m_{tk} \circ M_{p1} \circ M_{p2} \circ \dots \circ M_{pk},$$



где \circ — символ операции конкатенации областей памяти, m_t — зона хранения программы самотестирования процессора, m_{tk} — зона памяти для хранения рабочей (системной) программы процессора, M_{pi} ($i = 1, 2, \dots, k$) — области хранения информации, используемой в режиме компенсации последствий отказов при появлении неисправного компонента в ОМС. При этом

$$\forall i = 1, 2, \dots, k \quad (M_{pi} = m_{st} \circ m_{col} \circ m_{out}),$$

причем m_{st} хранит программу решения соответствующей подзадачи отказавшего процессора, m_{col} — зона памяти для хранения подпрограммы сбора результатов выполнения k подзадач, m_{out} предназначена для хранения подпрограммы выдачи информации вместо отказавшего процессорного элемента системы.

Допустим, что $m_{st} = f(k) \cdot (m_{tk}/k)$, где $f(k)$ — некоторая нелинейная функция, определяемая особенностями процедуры разделения задачи, которую решает неисправный процессор, на k подзадач. Предположим, что $f(k) = \beta_{st}/k$, где β_{st} — некий коэффициент, определяемый эффективностью процедуры распараллеливания. Так как $0 < f(k) \leq 1$, то $0 < \beta_{st} \leq k$. Следовательно, $m_{st} = (\beta_{st} \cdot m_{tk})/k$. Обозначая через β_{col} коэффициент, определяемый эффективностью процедуры сборки результатов решения k задач, получаем

$$m_{col} = \beta_{col} \cdot k \cdot m_{st} = (\beta_{col} \cdot k \cdot \beta_{st} \cdot m_{st})/k^2 = (\beta_{col} \cdot \beta_{st} \cdot m_{tk})/k.$$

Тогда объем памяти программ m_{cm} каждого процессора ОМС (без учета объема памяти для хранения процедур самотестирования и решения собственных системных задач) определяется, следующим образом:

$$m_{cm} = k(m_{st} + m_{col} + m_{out}) = [(\beta_{st} \cdot m_{tk})/k] + \beta_{col} + \beta_{st} + m_{tk} + m_{out}.$$

Находим частную производную:

$$\frac{\delta m_{cm}}{\delta k} = -\frac{\beta_{st} \cdot m_{tk}}{k^2} + m_{out}$$

и, приравнявая ее к 0, получаем (не учитывая отрицательный корень):

$$k_{opt}(m) = \sqrt{\frac{\beta_{st} \cdot m_{tk}}{m_{out}}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в данной работе алгоритмы распределения процессорных элементов ОМС на подмножества, а также полученные аналитические соотношения для нахождения настроечных параметров, позволяют на этапе проектирования системы оптимизировать программно-алгоритмические средства, обеспечивающие эффективное выполнение процедур реконфигурирования ОМС в случае появления отказовых ситуаций. В частности, инженер-проектировщик системы получает возможность оптимизировать специализированные программные средства ОМС в соответствии с альтернативными критериями, а именно временными затратами на выполнение функций реконфигурирования либо объемом блоков памяти процессорных элементов для хранения рабочего и служебного программного обеспечения ОМС.

Библиографический список

1. Каляев И. А., Левин И. И., Семерников Е. А., Шмойлов В. И. Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры / под общ. ред. И. А. Каляева. Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2008. 320 с
2. Белявский В. Е., Валуйский В. Н., Романкевич А. М., Романкевич В. А. Самодиагностируемые многомодульные системы : некоторые оценки тестирования // Автоматика и телемеханика. 1999. № 8. С. 148–153.