



# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

## ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОРГРАФОВ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ МИНИМАЛЬНОГО ВЕРШИННОГО 1-РАСШИРЕНИЯ

М. Б. Абросимов<sup>1</sup>, О. В. Моденова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, mic@rambler.ru

<sup>2</sup>Аспирантка кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, oginiel@rambler.ru

Граф  $G^*$  называется вершинным 1-расширением графа  $G$ , если граф  $G$  можно вложить в каждый граф, получающийся из графа  $G^*$  удалением любой его вершины вместе с инцидентными ребрами. Вершинное 1-расширение  $G^*$  графа  $G$  называется минимальным, если граф  $G^*$  имеет на одну вершину больше, чем граф  $G$ , а среди всех вершинных 1-расширений графа  $G$  с тем же числом вершин граф  $G^*$  имеет минимальное число ребер. Рассматривается задача описания ориентированных графов, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет заданное число дополнительных дуг. Дается решение, когда число дополнительных дуг равно одному или двум.

*Ключевые слова:* минимальное расширение, точное расширение, отказоустойчивая реализация, граф.

### ВВЕДЕНИЕ

*Ориентированным графом* (далее — просто *орграфом*) называется пара  $\vec{G} = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное непустое множество, называемое множеством вершин, а  $\alpha^*$  — отношение на множестве вершин  $V$ , называемое отношением смежности. Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется *неориентированным графом* (или просто *неографом*). Далее используются основные понятия преимущественно в соответствии с работой [1].

*Симметризацией* орграфа  $\vec{G} = (V, \alpha)$  называется неограф  $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \setminus \Delta)$ , то есть симметризация орграфа получается заменой дуг ребрами и удалением петель.

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным вершинным  $k$ -расширением* (МВ- $k$ P)  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$ , если выполняются следующие условия:

- 1) граф  $G^*$  является вершинным  $k$ -расширением  $G$ , то есть граф  $G$  вложим в каждый подграф графа  $G^*$ , получающийся удалением любых его  $k$  вершин;
- 2) граф  $G^*$  содержит  $n + k$  вершин, то есть  $|V^*| = |V| + k$ ;
- 3)  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *точным вершинным  $k$ -расширением* (ТВ- $k$ P)  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$ , если граф  $G$  изоморфен каждому подграфу графа  $G^*$ , получающемуся из графа  $G^*$  путем удаления любых его  $k$  вершин и всех связанных с ними дуг (ребер).

В данной работе мы будем рассматривать в основном случай, когда  $k = 1$ .

Понятие минимального вершинного  $k$ -расширения введено на основе оптимальной  $k$ -отказоустойчивой реализации, которое было предложено Хейзом (J. P. Hayes) в работе [2]. Оказалось, что задача является вычислительно сложной [3]. Исследования данной проблемы развивались в двух направлениях. Основное направление — поиск минимальных расширений для интересных классов графов: цепей, циклов, деревьев. Второе — описание графов, минимальные расширения которых имеют заданное число дополнительных дуг или ребер. В работе [4] исследовалась задача описания неографов с заданным числом дополнительных ребер. Были получены следующие результаты (теоремы 1–5).

**Теорема 1.** *Минимальное вершинное  $k$ -расширение, причем единственное с точностью до изоморфизма, вполне несвязного  $n$ -вершинного графа  $O_n$  есть вполне несвязный  $(n + k)$ -вершинный граф  $O_{n+k}$ . Никакие другие графы не могут иметь минимальных вершинных  $k$ -расширений с нулевым числом дополнительных ребер.*

**Теорема 2.** *Графы со степенным множеством  $\{1, 0\}$  и только они имеют минимальное вершинное 1-расширение, которое отличается на одно дополнительное ребро, причем это расширение единственно с точностью до изоморфизма.*



**Теорема 3.** Среди связных графов только цепи имеют минимальное вершинное 1-расширение, которое отличается на два дополнительных ребра, причем это расширение единственно с точностью до изоморфизма.

**Теорема 4.** Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида  $P_n \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$  при  $n > 1$  имеют минимальное вершинное 1-расширение, которое отличается на два дополнительных ребра, причем это расширение имеет вид  $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$ , и оно единственно с точностью до изоморфизма.

**Теорема 5.** Связные графы, имеющие минимальные вершинные 1-расширения с тремя дополнительными ребрами, могут иметь только следующий вид:

- 1) полный граф  $K_3$ ;
- 2) графы с вектором степеней вида  $(3, \dots, 3, 2, 2, 2)$ , имеющие точное вершинное 1-расширение;
- 3) графы с вектором степеней  $(3, 3, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$  особого вида.

Тема данной работы связана с изучением аналогичного вопроса для ориентированных графов.

В работе [5] показана связь между МВ-1Р неориентированных графов и ориентированных.

**Лемма.** Пусть орграф  $G^*$  есть минимальное вершинное  $k$ -расширение орграфа  $G$ . Тогда симметризация орграфа  $G^*$  является вершинным  $k$ -расширением симметризации орграфа  $G$ .

**Следствие.** Число дополнительных дуг минимального вершинного  $k$ -расширения орграфа  $G$  — не менее числа дополнительных ребер минимального вершинного  $k$ -расширения симметризации орграфа  $G$ .

Очевидно, что для орграфов теорема 1 тоже выполняется.

**Теорема 6.** Минимальное вершинное  $k$ -расширение, причем единственное с точностью до изоморфизма, вполне несвязного  $n$ -вершинного орграфа  $O_n$  есть вполне несвязный  $(n+k)$ -вершинный орграф  $O_{n+k}$ . Никакие другие орграфы не могут иметь минимальных вершинных  $k$ -расширений с нулевым числом дополнительных дуг.

## 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ДУГА В МВ-1Р

Учитывая следствие из леммы, получаем, что орграфы, имеющие одну дополнительную дугу в МВ-1Р, могут быть получены из графов теорем 1 и 2 с помощью ориентации дуг, а также добавления петель и изолированных вершин.

**Теорема 7.** Среди орграфов без петель орграфы, полученные объединением  $n$  2-вершинных цепей с  $t$  изолированными вершинами, где  $t > 0$ , и только они имеют минимальные вершинные 1-расширения с одной дополнительной дугой, причем эти расширения единственны с точностью до изоморфизма.

**Доказательство.** По условиям теоремы рассматриваем только орграфы без петель. С учетом следствия из леммы получаем, что только ориентации графов из теоремы 2 (рис. 1) могут иметь МВ-1Р с одной дополнительной дугой.

У таких графов есть только одна неизоморфная ориентация.

И МВ-1Р неорграфов такого вида имеет единственную ориентацию, которая, очевидно, будет МВ-1Р ориентации неорграфа, причем с одной дополнительной дугой.

Покажем единственность.

Вершины, инцидентной двум дугам, в МВ-1Р такого графа быть не может, так как при удалении такой вершины будут удалены 2 дуги, а при построении расширения была добавлена только одна. Отсюда — МВ-1Р, построенное по предложенной схеме (рис. 2), является единственным с точностью до изоморфизма.

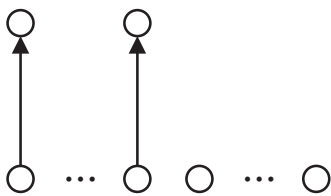


Рис. 1. Ориентация графов из теоремы 2

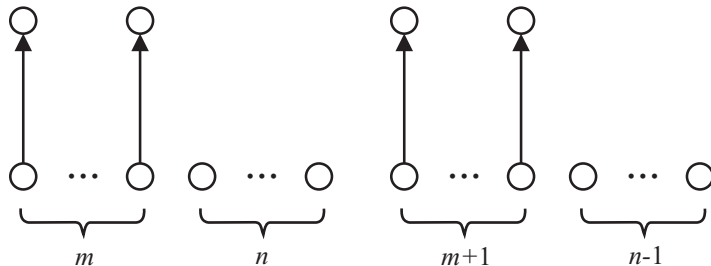


Рис. 2. Орграфы из теоремы 7 и их МВ-1Р

**Теорема 8.** Среди орграфов с петлями орграфы, полученные объединением  $n$  вершин с петлями ( $n > 0$ ) и  $t$  изолированными вершинами ( $t \geq 0$ ), и только они, имеют минимальное вершинное



1-расширение с одной дополнительной дугой, причем это расширение единственно с точностью до изоморфизма.

**Доказательство.** Учитывая следствие леммы, рассмотрим графы из теорем 1 и 2.

1. В графах из теоремы 1 нет ребер. Тогда ориентация таких графов — вполне несвязные орграфы, для которых уже доказано, что они имеют МВ-1Р с нулевым числом дополнительных дуг.

В теореме рассматриваются графы с петлями. Тогда рассмотрим орграфы, получающиеся из вполне несвязных добавлением петель к нескольким (не обязательно всем) вершинам (рис. 3), т.е. получим орграфы, состоящие из  $n$  вершин с петлями ( $n > 0$ ) и  $m$  изолированных вершин ( $m \geq 0$ ).



Рис. 3. Добавление петель к вершинам графов из теоремы 1

Очевидно, что если добавить ещё одну вершину, а затем провести петлю в любой изолированной вершине, то получим МВ-1Р, отличающееся на одну дополнительную дугу.

Также очевидно, что это расширение единственно с точностью до изоморфизма, так как есть только два варианта добавления дуги — петля и соединение двух вершин. Первый вариант соответствует предложенной схеме. Второй вариант не подходит, так как число петель в МВ-1Р тогда останется таким же, что и в исходном орграфе.

2. Теперь рассмотрим графы из теоремы 2. Уже доказано, что если просто ориентировать такие графы, то их МВ-1Р отличается на одну дополнительную дугу (рис. 4). Но это графы без петель, а в данной теореме рассматриваются графы с петлями. Тогда рассмотрим добавление ненулевого количества петель к такому графу.

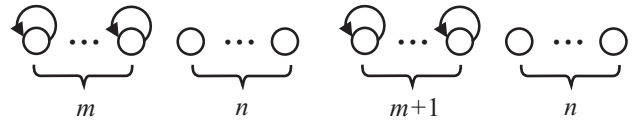


Рис. 4. Орграфы из теоремы 8 и их МВ-1Р

Тогда в МВ-1Р должно быть больше на одну петлю и на одну 2-вершинную цепь. Очевидно, что с помощью одной дополнительной дуги такое расширение построить нельзя.

**Следствие.** Орграфы, полученные объединением  $n$  вершин с петлями ( $n > 0$ ) с  $m$  изолированными вершинами ( $m \geq 0$ ), имеют минимальные вершинные  $k$ -расширения с  $k$  дополнительными дугами, причем эти расширения единственны с точностью до изоморфизма.

## 2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДУГИ В МВ-1Р

**Теорема 9.** Среди связных орграфов только гамильтоновы цепи имеют минимальное вершинное 1-расширение, которое отличается на две дополнительные дуги, причем это расширение единственно с точностью до изоморфизма для цепей с количеством вершин больше двух. Для 2-вершинной цепи существует два неизоморфных МВ-1Р: циклическая и транзитивная тройки.

**Доказательство.** Так как мы рассматриваем только связные графы, то с учетом следствия из леммы необходимо рассмотреть только ориентации графов из теоремы 3, то есть ориентации цепей.

Очевидно, что у гамильтоновой цепи МВ-1Р будет гамильтонов цикл. Причем если в цепи 3 и более вершин, то расширение единственно, если  $n = 2$ , то легко проверить, что существует два неизоморфных МВ-1Р — циклическая и транзитивная тройки.

Теперь нужно показать, что никакие другие ориентации цепей не имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами. Допустим обратное, что существует некая цепь, негамильтоновая, МВ-1Р которой имеет две дополнительные дуги. Очевидно, что симметризация такого расширения должна быть циклом.

Как минимум, одна из вершин такой цепи будет стоком или источником. Предположим, что эта вершина — источник, обозначим ее  $v_i$  (рис. 5).

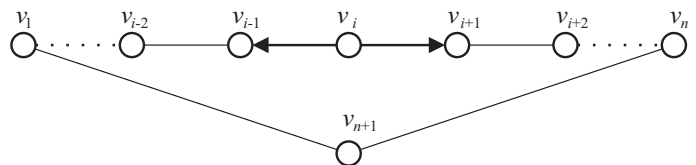


Рис. 5. Пример цепи с вершиной-источником

Рассмотрим два варианта удаления вершин — удаление вершины  $v_{i-1}$  и  $v_{i-2}$ . Если  $v_i$  — источник, то в первом случае получаем, что один конец цепи имеет полустепени  $(1,0)$ , а во втором получаем, что второй конец цепи имеет полустепени  $(0,1)$ .

Теперь при удалении  $v_{i-2}$  запишем цепь, начиная с конца с полустепенями  $(0,1)$ :  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2} \dots$



При удалении  $v_{i+2}$  тоже запишем цепь, начиная с конца с полустепенью  $(0,1)$ :  $v_{i+1}, v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots$ . Сравнивая эти 2 цепи (рис. 6), получим, что  $v_{i-1}$  и  $v_{i+1}$  должны иметь одинаковые степени.

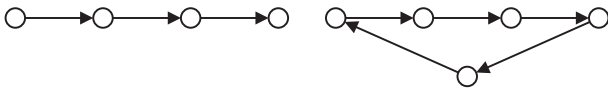


Рис. 6. 4-вершинная гамильтонова цепь и ее MB-IP

Тогда у цепи, получающейся удалением  $v_i$ , будут одинаковые полустепени концов. Получили противоречие. Следовательно, среди ориентаций цепей только гамильтоновы цепи имеют MB-IP с двумя дополнительными дугами. □

**Теорема 10.** Среди несвязных орграфов без изолированных вершин и без петель при  $n > 2$  только орграфы вида  $P_n \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$ , где графы  $C_{n+1}$  являются контурами, а граф  $P_n$  — гамильтоновой цепью, имеют минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на две дополнительные дуги, причем это расширение имеет вид  $C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$ , где  $C_{n+1}$  — контуры, и оно единственно с точностью до изоморфизма. При  $n = 2$  существует два орграфа (объединение 2-вершинной цепи и транзитивных троек, объединение 2-вершинной цепи и циклических троек), MB-IP которых отличаются на две дополнительные дуги.

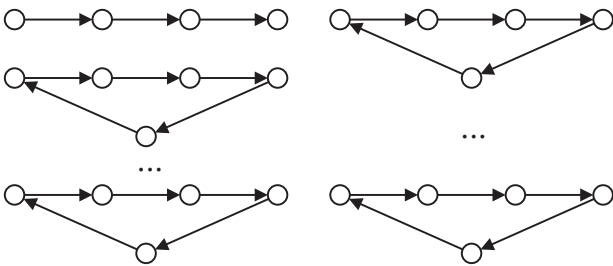


Рис. 7. Пример орграфа из теоремы 10 и его расширение

**Доказательство.** Учитывая следствие из леммы и условия теоремы, что рассматриваем несвязные орграфы без петель и изолированных вершин, будем проверять только ориентации графов из теоремы 4 (рис. 7). Выше доказано, что только гамильтоновы цепи имеют MB-IP с двумя дополнительными дугами. Отсюда очевидным образом получается утверждение теоремы. □

**Теорема 11.** Среди несвязных орграфов с изолированными вершинами и без петель MB-IP с двумя дополнительными дугами имеют только орграфы вида:

- 1) объединение гамильтоновых  $n$ -вершинных цепей ( $n > 1$ ) с любым количеством изолированных вершин. При  $n > 2$  MB-IP единственно с точностью до изоморфизма, при  $n = 2$  существует два неизоморфных MB-IP;
- 2) объединение 3-вершинной негамильтоновой цепи и  $t$  изолированных вершин, где  $t \geq 2$  (MB-IP — объединение двух изоморфных цепей и  $t-2$  изолированных вершин, единственно с точностью до изоморфизма);
- 3) объединение орграфов вида  $P_n \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$  при  $n > 2$ , где графы  $C_{n+1}$  являются контурами, а граф  $P_n$  — гамильтоновой цепью, с изолированными вершинами (MB-IP единственно с точностью до изоморфизма);
- 4) объединение 2-вершинной цепи с транзитивными или циклическими тройками и любым количеством изолированных вершин (расширение будет единственным с точностью до изоморфизма).

**Доказательство.** Учитывая следствие из леммы, рассмотрим графы из теорем 1–4.

В графах теоремы 1 нет ребер, а графы из теоремы 2 допускают единственную ориентацию, которая имеет MB-IP, отличающееся на 1 дополнительную дугу.

Случай 1 очевидным образом получается из теоремы 9.

Случай 2. По теореме 9 негамильтоновы цепи не имеют MB-IP с двумя дополнительными дугами.

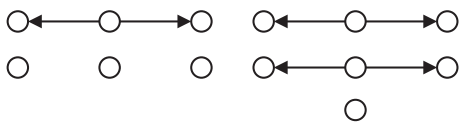


Рис. 8. 3-вершинная цепь, объединенная с изолированными вершинами, и ее MB-IP

Однако если объединить 3-вершинную негамильтонову цепь и, как минимум 2, изолированные вершины, то можно построить MB-IP с двумя дополнительными дугами: нужно добавленную вершину соединить с двумя изолированными так, чтобы получилась точно такая же цепь (рис. 8).

Случай 3 и 4 очевидным образом получаются из теоремы 10. □

**Следствие.** Объединение  $n$ -вершинных негамильтоновых цепей с  $n - 1$  изолированными вершинами имеет вершинные 1-расширения с  $n - 1$  дополнительными дугами.

**Теорема 12.** Среди несвязных орграфов с изолированными вершинами и с петлями только орграфы следующего вида имеют минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными дугами:



1) объединение  $n$  ( $n > 0$ ) 2-вершинных цепей с петлями в источниках с  $m$  ( $m \geq 0$ ) 2-вершинными цепями, с  $p$  ( $p \geq 0$ ) вершинами с петлями и  $r$  ( $r > 0$ ) изолированными вершинами;

2) объединение  $n$  ( $n > 0$ ) 2-вершинных цепей с петлями в стоках с  $m$  ( $m \geq 0$ ) 2-вершинными цепями, с  $p$  ( $p \geq 0$ ) вершинами с петлями и  $r$  ( $r > 0$ ) изолированными вершинами;

3) объединение  $n$  ( $n > 0$ ) 2-вершинных цепей с петлями на концах с  $m$  ( $m > 0$ ) вершинами с петлями и  $p$  ( $p \geq 0$ ) изолированными вершинами;

4) объединение  $n$  ( $n > 0$ ) 2-вершинных цепей с  $m$  ( $m > 0$ ) вершинами с петлями и  $p$  ( $p > 0$ ) изолированными вершинами.

**Доказательство.** С учетом леммы рассмотрим только ориентации графов из теорем 1–4. Графы из теоремы 1 являются вполне несвязными, и добавление петель приведет к орграфам, МВ-1Р которых отличаются на 1 дополнительную дугу. А ориентации графов из теорем 3 и 4 уже имеют 2 дополнительные дуги в МВ-1Р, и, очевидно, добавление хотя бы одной петли к таким графам приведет к тому, что в МВ-1Р будет, как минимум, 3 дополнительные дуги.

Поэтому будем использовать только результаты теоремы 2. Выше доказано, что ориентации таких графов единственны и имеют МВ-1Р, отличающиеся на 1 дополнительную дугу.

Рассмотрим различные варианты добавления петель к таким графам (рис. 9–13).

1. Добавление петель к изолированным вершинам (см. рис. 9, а). В таком орграфе  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,  $p \geq 0$ .

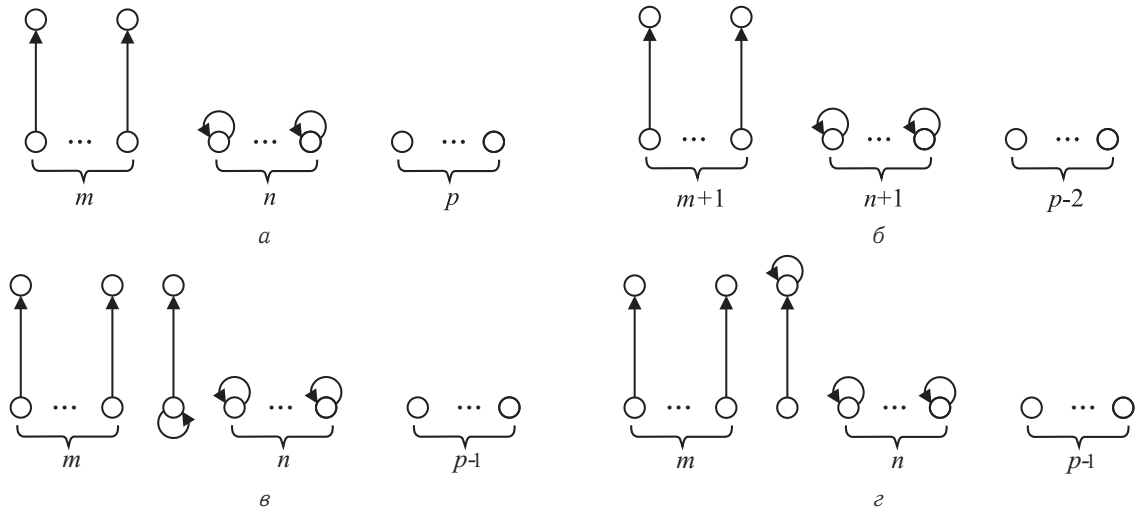


Рис. 9. Орграф (а) и 3 его неизоморфных МВ-1Р (б–г)

Очевидно, что в МВ-1Р должно быть: а) больше на одну 2-вершинную цепь; б) больше на одну петлю. Для этого как раз требуется 2 дополнительные дуги. Причем можно построить 3 неизоморфных орграфа, обладающих такими свойствами.

Легко убедиться, что приведенные орграфы являются МВ-1Р, отличающимися на 2 дополнительные дуги. Следует отметить, что число изолированных вершин в исходном орграфе обязательно должно быть больше 0. Если в таком орграфе не будет изолированных вершин, то получается, что каждая вершина инцидентна, как минимум, 1 дуге. В МВ-1Р такого графа, отличающегося на 2 дополнительные дуги, обязательно будут такие же вершины, инцидентные 1 дуге. А следовательно, удаляя смежные вершины, мы будем получать изолированные вершины. Очевидно, что такой граф не будет МВ-1Р.

Если  $p = 1$ , то у орграфа только 2 неизоморфных расширения, если  $p > 1$ , то 3 (см. рис. 9, б–г).

2. Добавление петель к вершинам цепей.

Рассмотрим случай, когда петли добавлены к источникам некоторых цепей (см. рис. 10). В этом случае считаем, что  $m > 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $r > 0$ .

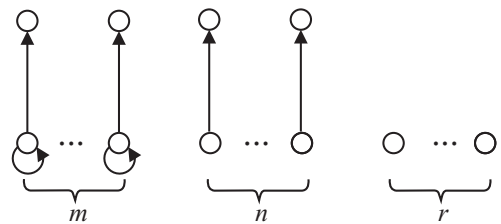


Рис. 10. Орграф из пункта 2) доказательства теоремы 12



Легко видеть, что МВ-1Р такого орграфа можно построить следующим образом: добавить новую вершину, соединить ее с одной из изолированных, и в источник получившейся цепи добавить петлю. И такое МВ-1Р отличается как раз на 2 дополнительные дуги.

Данное семейство орграфов можно расширить ещё. Если добавить петли к некоторым изолированным вершинам (но не более  $r - 1$ ), то МВ-1Р такого орграфа будет строиться аналогичным образом (см. рис. 11, а, б). Здесь  $m > 0, n \geq 0, p \geq 0, r > 0$ .

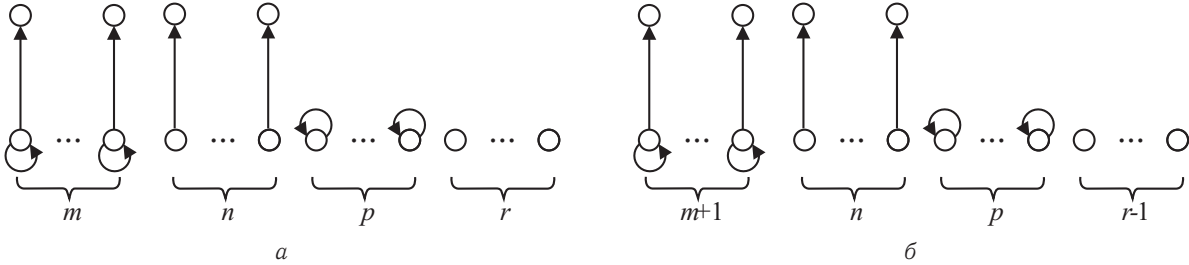


Рис. 11. Орграф с петлями в изолированных вершинах и источниках (а) и его МВ-1Р (б)

Аналогично доказывается для случая, когда петли добавляются не к источникам, а к стокам орграфа.

Рассмотрим случай, когда у одних цепей петли в источниках, а у других — в стоках. Тогда в МВ-1Р должно быть больше на одну цепь с петлей в источнике и на одну цепь с петлей в стоке. Либо в МВ-1Р должна быть цепь с петлей и в стоке, и в источнике. И по условиям теоремы можно добавить только две дуги. Очевидно, что для построения новой цепи (цепей) в исходном графе должны быть вершины в петлях, не входящие ни в какую цепь. Тогда в МВ-1Р вершин с петлями, не входящими ни в какую цепь, будет на одну или на две больше (в зависимости от выбранного варианта построения расширения). Тогда, удаляя вершину с петлей из какой-либо цепи исходного графа, получим, что все 2-вершинные цепи вкладываются, а вершин с петлями, не входящих в цепи, не хватает. Следовательно, такие графы не имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами.

Рассмотрим последний случай, когда к 2-вершинным цепям добавляются петли и в источник, и в сток (у одной и той же цепи). Очевидно, что в таком орграфе должны быть вершины с петлями, не входящие в состав цепей, потому что по условию в МВ-1Р должно быть две дополнительные дуги (см. рис. 12, а, б). Здесь  $m > 0, n > 0, p \geq 0$ .

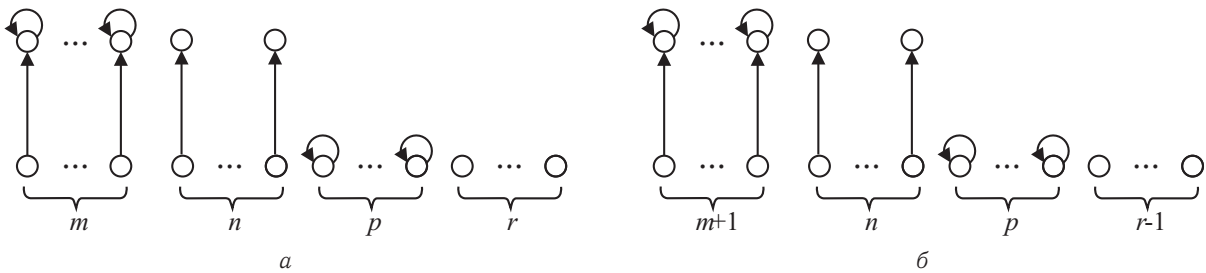


Рис. 12. Орграф с петлями в изолированных вершинах и стоках (а) и его МВ-1Р (б)

Заметим, что такие орграфы не могут содержать 2-вершинных цепей без петель, что доказывается аналогично предыдущему случаю. Легко видеть, что МВ-1Р таких орграфов (см. рис. 13, а) можно построить с помощью двух дополнительных дуг по схеме, приведенной на рис. 13, б.

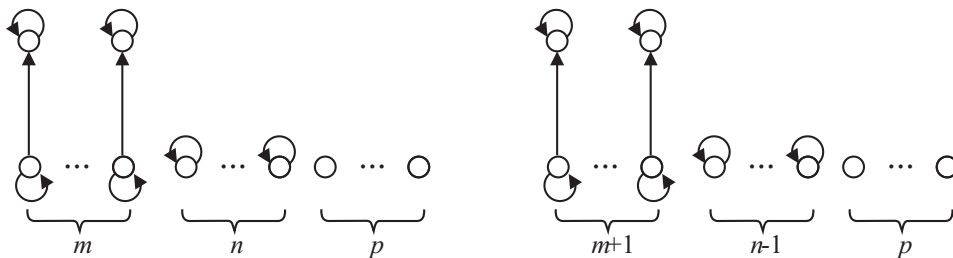


Рис. 13. Орграф из пункта 3) теоремы 12 (а) и его МВ-1Р (б)



### Библиографический список

1. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
2. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. C.25, № 9. P. 875–884.
3. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
4. Абросимов М. Б. Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 111–120.
5. Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. Т. 23, № 2. С. 93–102. DOI: 10.4213/dm1144.

## Characterization of Graphs with a Small Number of Additional Arcs in a Minimal 1-vertex Extension

M. B. Abrosimov, O. V. Modenova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, mic@rambler.ru, oginiel@rambler.ru

A graph  $G^*$  is a  $k$ -vertex extension of a graph  $G$  if every graph obtained from  $G^*$  by removing any  $k$  vertices contains  $G$ .  $k$ -vertex extension of a graph  $G$  with  $n + k$  vertices is called minimal if among all  $k$ -vertex extensions of  $G$  with  $n + k$  vertices it has the minimal possible number of arcs. We study directed graphs, whose minimal vertex 1-extensions have a specific number of additional arcs. A solution is given when the number of additional arcs equals one or two.

*Key words:* minimal vertex extension, exact extension, fault tolerance, graph theory.

### References

1. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustoichivosti* [Graph models of fault tolerance]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, 192 p. (in Russian).
2. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system. *IEEE Trans. Comput.*, 1976, vol. C.25, no. 9, pp. 875–884.
3. Abrosimov M. B. On the Complexity of Some Problems Related to Graph Extensions. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5, pp. 619–625.
4. Abrosimov M. B. Characterization of graphs with a given number of additional edges in a minimal 1-vertex extension. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika* [Applied Discrete Mathematics], 2012, no. 1, pp. 111–120 (in Russian).
5. Abrosimov M. B. Minimal vertex extensions of directed stars. *Diskr. Mat.*, 2011, vol. 23, no. 2, pp. 93–102 (in Russian). DOI: 10.4213/dm1144.

УДК 629.78

## К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕАКТИВНОГО СНАРЯДА ЗАЛПОВОГО ОГНЯ

Д. К. Андрейченко<sup>1</sup>, К. П. Андрейченко<sup>2</sup>, В. В. Кононов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, зав. кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, AndreichenkoDK@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет, kp\_andreichenko@renet.ru

<sup>3</sup>Ассистент кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, valentin.kononov@gmail.com

Проведено исследование влияния продольного ускорения на устойчивость дискретно-континуальной модели однокачественной системы угловой стабилизации с запаздывающим аргументом упругого вращающегося стержня. Развита методика построения областей асимптотической устойчивости и анализа импульсных переходных функций рассматриваемой комбинированной динамической системы, уравнения движения которой могут быть проанализированы лишь на основе численных методов либо методов асимптотического интегрирования. Определены критические значения продольного ускорения.

*Ключевые слова:* комбинированные динамические системы, системы стабилизации.



## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] сформирована комбинированная динамическая модель реактивного снаряда в виде вращающегося вдоль продольной оси упруговязкого стержня, на концах которого закреплены абсолютно жесткие тела реактивного двигателя и головной части снаряда. При этом удалось развить известные методы [2] теории газореактивных систем стабилизации упругодеформируемых конструкций применительно к реактивным снарядам залпового огня. Применительно к снарядам с дальностью стрельбы до 200 км и более весьма актуальными становятся исследование влияния продольного ускорения на области асимптотической устойчивости системы стабилизации, а также определение критических значений продольного ускорения. Но данная математическая модель может быть проанализирована лишь на основе численных методов [3] либо на основе методов асимптотического интегрирования [4].

## 1. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

После приведения к безразмерным переменным и параметрам [1] в пренебрежении величинами высшего порядка малости модельные уравнения автономной системы стабилизации упругодеформируемого реактивного снаряда залпового огня принимает вид

$$\begin{aligned} \tau_0 \dot{\varphi} + \varphi &= -\tau_0(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2), & m_1 \ddot{w}_0 + b\varphi_1 &= N_1 + P_1, \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 &= L_1 - \xi_1 N_1, & J_2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) &= L_2 + \xi_2 N_2, \\ m_2[\ddot{w}_0 + \ddot{w}_1 - (1 + \xi_1 + \xi_2)\ddot{\varphi}_1] &= N_2 - ne^{i(\Omega t - \theta)}\varphi(t - \tau) - m_2 a_z \varphi_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u} + (1 - i\gamma\Omega)u'''' + \gamma\dot{u}'''' + a_z[(m_2 + 1 - z)u'' - u'] &= -\ddot{w}_0 + (z + \xi_1)\ddot{\varphi}_1, \\ u(0, t) = 0, & u'(0, t) = 0, & u(1, t) = w_1(t), & u'(1, t) = -\varphi_2(t), \\ N_1 &= -(1 - i\gamma\Omega)u''''(0, t) - \gamma\dot{u}''''(0, t), & N_2 &= (1 - i\gamma\Omega)u''''(1, t) + \gamma\dot{u}''''(1, t), \\ L_1 &= -(1 - i\gamma\Omega)u''(0, t) - \gamma\dot{u}''(0, t), & L_2 &= (1 - i\gamma\Omega)u''(1, t) + \gamma\dot{u}''(1, t), \\ \varphi(0) = \varphi_i(0) = \dot{\varphi}_i(0) &= 0, & i &= 1, 2, \\ w_0(0) = w_1(0) = \dot{w}_0(0) = \dot{w}_1(0) &= 0, & u(z, 0) = \dot{u}(z, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -\beta(t) + i\alpha(t), & u(z, t) &= x(z, t) + iy(z, t), & w_j(t) &= x_j(t) + iy_j(t), & \varphi_j(t) &= -\beta_j(t) + i\alpha_j(t), \\ N_j(t) &= N_{x_j}(t) + iN_{y_j}(t), & L_j(t) &= -L_{y_j}(t) + iL_{x_j}(t), & j &= 1, 2, & P_1(t) &= P_{x_1}(t) + iP_{y_1}(t), \end{aligned} \quad (3)$$

$z$  — индивидуальная пространственная координата;  $\alpha_0, \beta_0$  — углы, определяющие направление пуска, вращающегося с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг продольной оси снаряда;  $\alpha_1, \beta_1$  и  $\alpha_2, \beta_2$  — углы Эйлера–Крылова отклонения оси  $z_1$  от  $z_0$  и оси  $z_2$  от  $z_1$ ;  $\alpha, \beta$  — углы, задающие положение вектора кинетического момента ротора гироскопа;  $(x_0, y_0, z_0)$  — координаты точки  $O_1$  в системе  $O_0x_0y_0z_0$ ;  $(x, y, z)$  — координаты точек срединной линии стержня;  $(x_1, y_1, 1)$  — координаты конечной точки  $O_\ell$  срединной линии;  $N_{x_j}, N_{y_j}$  и  $L_{x_j}, L_{y_j}$  ( $j = 1, 2$ ) — соответственно силы и моменты сил реакций стержня, действующие на тела 1 и 2;  $P_{x_1}, P_{y_1}$  — поперечные возмущающие силы;  $\tau_0$  — постоянная времени гироскопа;  $\theta$  — угол опережения установки газореактивных исполнительных двигателей относительно осей выходных сигналов гироскопического датчика угловых перемещений;  $\tau$  — время запаздывания газореактивных исполнительных двигателей;  $n$  — коэффициент обратной связи;  $a_z$  — безразмерное продольное ускорение;  $m_j, J_j$  ( $j = 1, 2$ ) — соответственно масса и экваториальный момент инерции абсолютно жестких тел 1 и 2;  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial z$ ; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени  $t$ . Уравнения (1) образуют комбинированную [5] динамическую систему (КДС), содержащую обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, граничные условия, условия связи и начальные условия. При  $a_z < 1$  уравнения (2) переходят в аналогичные уравнения из [1]. Набор величин  $\mathbf{x}(t) = (P_{x_1}(t), P_{y_1}(t))^T$  рассматривается как входная вектор-функция, а набор величин  $\mathbf{y}(t) = (\alpha_1(t), \beta_1(t), x_0(t), y_0(t))^T$  представляет собой выходную вектор-функцию КДС. Поскольку система уравнений (2) линейна, в ней выполняется одностороннее





интегральное преобразование Лапласа  $\tilde{f}(\lambda) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$  и далее исключается величина  $\tilde{\varphi}(\lambda)$  (символ « $\sim$ » над изображением Лапласа далее опущен). Поскольку аналог краевая задачи (2) в изображениях Лапласа линейным образом зависит от величин  $\lambda^2 w_0(\lambda)$ ,  $w_1(\lambda)$ ,  $\lambda^2 \varphi_1(\lambda)$ ,  $\varphi_2(\lambda)$ , то

$$N_k(\lambda) = [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][N_k^{(1)}(\lambda)\lambda^2 w_0(\lambda) + N_k^{(2)}(\lambda)w_1(\lambda) + N_k^{(3)}(\lambda)\lambda^2 \varphi_1(\lambda) + N_k^{(4)}(\lambda)\varphi_2(\lambda)], \quad (4)$$

$$L_k(\lambda) = [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][L_k^{(1)}(\lambda)\lambda^2 w_0(\lambda) + L_k^{(2)}(\lambda)w_1(\lambda) + L_k^{(3)}(\lambda)\lambda^2 \varphi_1(\lambda) + L_k^{(4)}(\lambda)\varphi_2(\lambda)], \quad k = 1, 2.$$

Входящие в выражения (4) функции  $N_k^{(j)}(\lambda)$ ,  $L_k^{(j)}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , являются решением следующих вспомогательных линейных краевых задач:

$$\begin{aligned} \lambda^2 u(z, \lambda) + [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]u''''(z, \lambda) + a_z[(m_2 + 1 - z)u''(z, \lambda) - u'(z, \lambda)] &= -\delta_j^1 + \delta_j^3(z + \xi_1), \\ u(0, \lambda) = 0, \quad u'(0, \lambda) = 0, \quad u(1, \lambda) = \delta_j^2, \quad u'(1, \lambda) = -\delta_j^4, \\ N_1^{(j)}(\lambda) = -u''''(0, \lambda), \quad N_2^{(j)}(\lambda) = u''''(1, \lambda), \quad L_1^{(j)}(\lambda) = -u''(0, \lambda) \\ L_2^{(j)}(\lambda) = u''(1, \lambda), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \delta_j^\nu - \text{символ Кронекера.} \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично [1] из (1) в изображениях Лапласа и (4) следуют выражения для передаточных функций системы стабилизации по угловой ошибке  $\varphi_1$  и поперечному смещению  $w_0$

$$\Pi(\lambda) = \frac{\Delta_{\varphi_1}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \Pi^0(\lambda) = \frac{\Delta_{w_0}(\lambda)}{\lambda \Delta(\lambda)}, \quad \varphi_1(\lambda) = \Pi(\lambda)P_1(\lambda), \quad w_0(\lambda) = \Pi^0(\lambda)P_1(\lambda),$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \psi_{11}(\lambda) & \psi_{12}(\lambda) & \lambda\psi_{13}(\lambda) & \psi_{14}(\lambda) \\ \psi_{21}(\lambda) & \psi_{22}(\lambda) & \psi_{23}(\lambda) & \psi_{24}(\lambda) \\ \psi_{31}(\lambda) & \psi_{32}(\lambda) & \lambda\psi_{33}(\lambda) & \psi_{34}(\lambda) \\ \psi_{41}(\lambda) & \psi_{42}(\lambda) & \lambda\psi_{43}(\lambda) & \psi_{44}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\varphi_1}(\lambda) = -\det[\psi_{\nu j}(\lambda)], \quad \nu = 1, 3, 4, \quad j = 1, 2, 4,$$

$$\Delta_{w_0}(\lambda) = -\det[\psi_{\nu j}(\lambda)], \quad \nu = 1, 3, 4, \quad j = 2, 3, 4;$$

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(1)}(\lambda) - L_1^{(1)}(\lambda)], & \psi_{12}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(2)}(\lambda) - L_1^{(2)}(\lambda)], \\ \psi_{13}(\lambda) &= \lambda[J_1 + (1 + \gamma(\lambda - i\Omega))(\xi_1 N_1^{(3)}(\lambda) - L_1^{(3)}(\lambda))], & \psi_{14}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(4)}(\lambda) - L_1^{(4)}(\lambda)], \\ \psi_{21}(\lambda) &= m_1 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(1)}(\lambda), & \psi_{22}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(2)}(\lambda), \\ \psi_{23}(\lambda) &= b - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]\lambda^2 N_1^{(3)}(\lambda), & \psi_{24}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(4)}(\lambda), \\ \psi_{31}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(1)}(\lambda) + L_2^{(1)}(\lambda)], & \psi_{32}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(2)}(\lambda) + L_2^{(2)}(\lambda)], \\ \psi_{33}(\lambda) &= \lambda[J_2 - (1 + \gamma(\lambda - i\Omega))(\xi_2 N_2^{(3)}(\lambda) + L_2^{(3)}(\lambda))], \\ \psi_{34}(\lambda) &= J_2 \lambda^2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(4)}(\lambda) + L_2^{(4)}(\lambda)], \\ \psi_{41}(\lambda) &= (1 + \tau_0 \lambda)(m_2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(1)}(\lambda)), \\ \psi_{42}(\lambda) &= (1 + \tau_0 \lambda)(m_2 \lambda^2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(2)}(\lambda)), \\ \psi_{43}(\lambda) &= -m_2(1 + \xi_1 + \xi_2)\lambda(1 + \tau_0 \lambda) - n\tau_0 e^{-i\theta - \tau(\lambda - i\Omega)} - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]\lambda N_2^{(3)}(\lambda)(1 + \tau_0 \lambda), \\ \psi_{44}(\lambda) &= m_2 a_z(1 + \tau_0 \lambda) - n\tau_0 e^{-i\theta - \tau(\lambda - i\Omega)} - (1 + \tau_0 \lambda)[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(4)}(\lambda). \end{aligned}$$

Компоненты изображений Лапласа входной  $\mathbf{x}(\lambda) = (P_{x_1}(\lambda), P_{y_1}(\lambda))^T$  и выходной  $\mathbf{y}(\lambda) = (\alpha_1(\lambda), \beta_1(\lambda), x_0(\lambda), y_0(\lambda))^T$  вектор-функций связаны следующим образом:

$$\begin{bmatrix} -\beta_1(\lambda) \\ \alpha_1(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(\lambda) & \Pi_{12}(\lambda) \\ \Pi_{21}(\lambda) & \Pi_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_1}(\lambda) \\ P_{y_1}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0(\lambda) \\ y_0(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^0(\lambda) & \Pi_{12}^0(\lambda) \\ \Pi_{21}^0(\lambda) & \Pi_{22}^0(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_1}(\lambda) \\ P_{y_1}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Pi_{11}(\lambda) &= \Pi_{22}(\lambda) = [\Pi(\lambda) + \overline{\Pi(\bar{\lambda})}]/2 = Q_1(\lambda)/D(\lambda), \\ \Pi_{12}(\lambda) &= -\Pi_{21}(\lambda) = i[\Pi(\lambda) - \overline{\Pi(\bar{\lambda})}]/2 = Q_2(\lambda)/D(\lambda), \\ \Pi_{11}^0(\lambda) &= \Pi_{22}^0(\lambda) = [\Pi^0(\lambda) + \overline{\Pi^0(\bar{\lambda})}]/2 = Q_1^0(\lambda)/\lambda D(\lambda), \\ \Pi_{12}^0(\lambda) &= -\Pi_{21}^0(\lambda) = i[\Pi^0(\lambda) - \overline{\Pi^0(\bar{\lambda})}]/2 = Q_2^0(\lambda)/\lambda D(\lambda), \end{aligned}$$



причем характеристический и возмущающие квазимногочлены суть

$$\begin{aligned}
 D(\lambda) &= \Delta(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})}, & Q_1(\lambda) &= \left[ \Delta_{\varphi_1}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} + \overline{\Delta_{\varphi_1}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda) \right] / 2, \\
 Q_2(\lambda) &= i \left[ \Delta_{\varphi_1}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} - \overline{\Delta_{\varphi_1}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda) \right] / 2, & Q_1^0(\lambda) &= \left[ \Delta_{w_0}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} + \overline{\Delta_{w_0}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda) \right] / 2, \\
 Q_2^0(\lambda) &= i \left[ \Delta_{w_0}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} - \overline{\Delta_{w_0}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda) \right] / 2, \\
 D(\bar{\lambda}) &= \overline{D(\lambda)}, & Q_\nu(\bar{\lambda}) &= \overline{Q_\nu(\lambda)}, & Q_\nu^0(\bar{\lambda}) &= \overline{Q_\nu^0(\lambda)}, & \nu &= 1, 2.
 \end{aligned}$$

## 2. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

При умеренных и средних значениях  $|\lambda|$  выполнялось численное решение краевой задачи (5) на основе проекционного метода Галеркина в предположении

$$u(z, \lambda) \approx \sum_{k=0}^{N+4} u_k T_k(2z - 1), \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (6)$$

Здесь  $T_k(z) = \cos(k \arccos z)$  — ортогональные полиномы Чебышева 1-го рода. Краевая задача (5) сводилась к дискретному аналогу — системе линейных уравнений относительно Фурье-коэффициентов  $u_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_u + 4$ . Выражения для вспомогательных функций  $N_k^{(j)}(\lambda), L_k^{(j)}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , не имеют особенностей в конечной подобласти правой комплексной полуплоскости ( $\lambda$ ), если там нет нулей определителя дискретного аналога (5), что достаточно просто проверяется на основе принципа аргумента. Во всех рассмотренных ниже случаях вспомогательные функции  $N_k^{(j)}(\lambda), L_k^{(j)}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , не имели особенностей в правой комплексной полуплоскости ( $\lambda$ ). Приближенное вычисление вспомогательных функций  $N_1^{(j)}(\lambda), N_2^{(j)}(\lambda), L_1^{(j)}(\lambda), L_2^{(j)}(\lambda)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , при  $|\lambda| > 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq -\sigma_0$ ,  $0 < \sigma_0 < \infty$ , удобно выполнять на основе асимптотического интегрирования вспомогательных линейных краевых задач (5) по методу Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [4]. Частные решения однородного уравнения (5) представляются в виде  $e^{\pm kV(z, \pm k)}$ ,  $e^{\pm ikV(z, \pm ik)}$ , где  $k = k(\lambda) = [-\lambda^2 / (1 + \gamma(\lambda - i\Omega))]^{1/4}$ , и используется асимптотическое разложение:

$$V(z, k) = V_0(z) + k^{-1}V_1(z) + k^{-2}V_2(z) + k^{-3}V_3(z) + \dots$$

В результате при  $|\lambda| > 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq -\sigma_0$ ,  $0 < \sigma_0 < \infty$  функции  $N_k^{(j)}(\lambda), L_k^{(j)}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , являются аналитическими функциями  $\lambda$ , причем

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-14} D(\lambda) &= (m_1 m_2 \tau_0 J_1 J_2)^2, & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-47/4} Q_1(\lambda) &= \sqrt{2} \xi_1 \gamma^{1/4} m_1 \tau_0 J_1 (m_2 J_2)^2, \\
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-13} Q_1^0(\lambda) &= \tau_0 m_1 (m_2 J_1 J_2)^2, & \operatorname{Re} \lambda &> -\infty,
 \end{aligned}$$

а обобщенные степени возмущающих квазимногочленов  $Q_2(\lambda)$  и  $Q_2^0(\lambda)$  характеризуются величинами, меньшими 47/4 и 13 соответственно.

## 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОМБИНИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Из теорем об устойчивости КДС [5] следует, что система стабилизации будет устойчива при выполнении условия

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega) = 7\pi$$

и неустойчива — в других случаях. Для управляемых КДС характеристический квазимногочлен является функцией не только комплексного параметра  $\lambda$ , но и параметров обратных связей

$$D(\lambda, \theta, n) = \Delta(\lambda, \theta, n) \overline{\Delta(\bar{\lambda}, \theta, n)}.$$

Аналогично [1] параметрические уравнения возможных границ области устойчивости на плоскости параметров  $(\theta, n)$  принимают вид

$$\operatorname{Re} \Delta(i\omega, \theta, n) = 0, \quad \operatorname{Im} \Delta(i\omega, \theta, n) = 0, \quad \operatorname{Re} \Delta(-i\omega, \theta, n) = 0, \quad \operatorname{Im} \Delta(-i\omega, \theta, n) = 0, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$



Рассмотрим модель системы стабилизации с параметрами  $\tau_0 = 7$ ,  $\gamma = 0.06$ ,  $m_1 = 0.06$ ,  $m_2 = 0.1$ ,  $J_1 = 0.015$ ,  $J_2 = 0.02$ ,  $\xi_1 = 0.03$ ,  $\xi_2 = 0.05$ ,  $\tau = 0.07$ ,  $p_{y_1} = 0.01$ ,  $p_0 = 0.01$  при  $\Omega = 5$ ,  $b = 0.02$  и  $\Omega = 9$ ,  $b = 0.0648$  для значений коэффициента внутреннего трения  $\gamma = 0.06$  и  $\gamma = 0.01$ .

На рис. 1 представлены границы областей устойчивости для значений перегрузки  $a_z = 0, 2, 5, 10$  и  $\gamma = 0.06$ . При увеличении значения перегрузки  $a_z$  область устойчивости постепенно смещается вправо на плоскости параметров  $(\theta, n)$ .

Аналогичные результаты для границ областей устойчивости для значений коэффициента внутреннего трения  $\gamma = 0.01$  представлены на рис. 2.

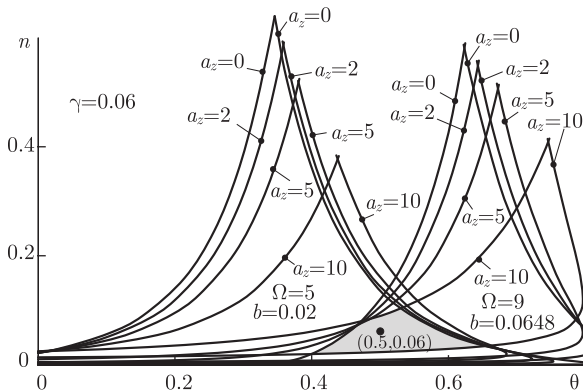


Рис. 1. Область устойчивости модели при  $\gamma = 0.06$

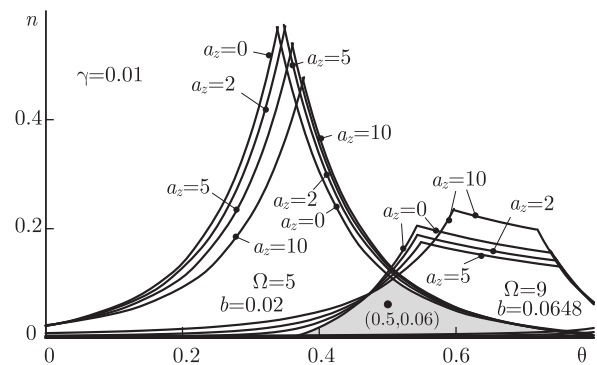


Рис. 2. Область устойчивости модели при  $\gamma = 0.01$

Как видно, изменение коэффициента внутреннего трения  $\gamma$  при возрастании угловой скорости вращения снаряда  $\Omega$  значительно сокращает области устойчивости. Для реактивных снарядов залпового огня представляет интерес увеличение массы  $m_2$  головной части снаряда.

На рис. 3, а, б для системы стабилизации с параметрами  $\tau_0 = 7$ ,  $m_1 = 0.06$ ,  $J_1 = 0.015$ ,  $\xi_1 = 0.03$ ,  $\xi_2 = 0.05$ ,  $\tau = 0.07$  при  $\Omega = 5, 7, 8, 9$  и  $b = 0.02(\Omega/5)^2$  для значений коэффициента внутреннего трения  $\gamma = 0.06$  и  $\gamma = 0.01$  приведены графики критических перегрузок  $a_z$  в зависимости от массы головной части снаряда  $m_2$  (при пропорциональном изменении момента инерции головной части снаряда  $J_2 = 0.2m_2$ ). Критические значения перегрузок  $a_z$ , при которых происходит потеря устойчивости системы стабилизации, находились методом бисекции с оптимизацией интервала поиска. Как следует из представленных на рис. 3 результатов, увеличение массы  $m_2$  головной части снаряда приводит к значительному ограничению на величину угловой скорости  $\Omega$  вращения снаряда.

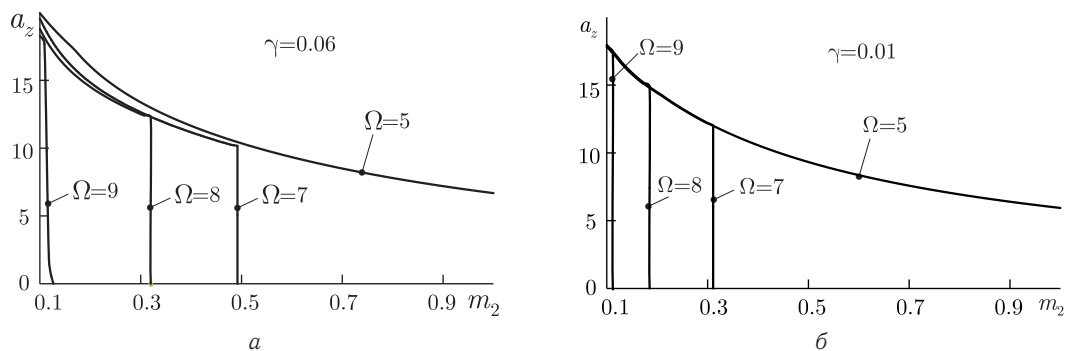


Рис. 3. Значения критических перегрузок модели при  $\gamma = 0.06$  (а) и  $\gamma = 0.01$  (б)

### Библиографический список

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории автономных системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 141–156.
2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 6. С. 150–163.



3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М. : Мир, 1988. 352 с.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М. : Мир, 1972. 274 с.
5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

## On Stability Theory of Autonomous Angular Stabilization System for Combined Dynamical Systems

D. K. Andreichenko<sup>1</sup>, K. P. Andreichenko<sup>2</sup>, V. V. Kononov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, AndreichenkoDK@info.sgu.ru, valentin.kononov@gmail.com

<sup>2</sup>Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Polytechnicheskaya st., 77, kp\_andreichenko@renet.ru

Studied the effect on the stability of the longitudinal acceleration discretely-continuum model of single-channel angular stabilization system with of delayed argument. Methods of construction asymptotic stability areas and analysis of impulse transition functions are developed. The critical values of the longitudinal acceleration are defined.

*Key words:* combined dynamical systems, stabilization systems.

### References

1. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of autonomous angular stabilization systems of missiles for salvo firing. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2009, vol. 48, no. 3, pp. 465–480. DOI: 10.1134/S1064230709030137.
2. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of stabilization of satellites having elastic rods. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2004, vol. 43, no. 6, pp. 973–986.
3. Fletcher K. *Chislennye metody na osnove metoda Galjorkina* [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow, Mir, 1988, 352 p.
4. Cole J. D. *Perturbation methods in applied mathematics*. Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1968, 260 p. (Rus. ed.: Cole J. *Metody vozmushhenij v prikladnoj matematike*. Moscow, Mir, 1972, 274 p.)
5. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2000, vol. 39, no. 3, pp. 383–398.

УДК 519.95

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ АВТОМАТА ФРАГМЕНТАМИ ПОВЕДЕНИЯ

С. А. Богомолов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Саратовский государственный социально-экономический университет, Alexbogomolov@ya.ru

Изучается задача идентификации структуры автомата конечным фрагментом его поведения. Под поведением автомата понимается множество различных о.-д. функций, реализуемых в автомате, а под конечным фрагментом поведения — следы о.-д. функций и автоматов. Ведено понятие идентифицирующего следа для автомата, «неизбыточного» относительно его реализации. Предложен подход, позволяющий в множестве следов, идентифицирующих автомат, выделить и описать конечное множество «неизбыточных» следов, содержащих только необходимую информацию для идентификации автомата.

*Ключевые слова:* автомат, эксперимент с автоматом, подэксперимент эксперимента, след о.-д. функции и автомата, идентифицирующий след автомата, операция редукции следа, избыточный идентифицирующий след автомата.

### ВВЕДЕНИЕ

Обширный класс как фундаментальных, так и прикладных проблем анализа дискретных систем допускает их естественное сведение к проблемам идентификации. Л. Льюинг [1] отмечал: «Формирование моделей на основе результатов наблюдений и исследование их свойств — вот по существу основное содержание науки». Модели могут быть более или менее формализованными, но все они



обладают главной особенностью, что связывает наблюдения в некоторую общую картину. Решение задачи построения математических моделей динамических систем по данным наблюдений их поведения составляют предмет теории идентификации. Таким образом, идентификация — это один из основных способов формирования математических моделей, в котором используется регистрация экспериментальных данных, представленных в виде входных и выходных сигналов, и модель формируется в результате обработки соответствующих данных. В настоящей работе термин идентификация используется только применительно к уровню математических моделей, для которых в качестве модельной структуры выбрана модель конечного автомата. Тогда под идентификацией понимают процедуру построения оптимальной, в определенном смысле, структуры дискретного автомата по результатам подачи входных воздействий и наблюдения соответствующих выходных реакций.

В работах [2, 3] предложен конструктивный подход, в рамках которого в множестве автоматов, реализующих заданный конечный фрагмент вход-выходного поведения, выделено конечное множество «неизбыточных» автоматов, содержащих только необходимую информацию для реализации данного поведения. Основной результат состоит в решении задачи анализа, а именно — описание свойств и структуры конечных фрагментов поведения (следов автоматов), идентифицирующих автомат как «неизбыточный» — неприводимый, относительно их реализации. Анализ полученных результатов [2, 3] показывает, что при исследовании проблемы идентификации структуры автоматов необходимо изучение следующих вопросов.

1. Какова предельная (граничная) информация, при которой указанное идентифицирующее поведение того или иного вида существует и без которой идентификация невозможна.

2. Какова структура указанного описания поведения и свойств автомата, что обязательно должно присутствовать в описании, а что является издержками алгоритма получения описаний.

Эти вопросы являются не только актуальными, но и их решение определяет эффективность того или иного способа задания конечных автоматов с функциональной точки зрения как абстрактной модели алгоритмов переработки дискретной информации.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ, НЕОХОДИМЫЕ ДЛЯ ИЗЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Под автоматом понимается конечный полностью определенный детерминированный автомат Мили [4] с фиксированными конечными входным и выходным алфавитами. Пусть  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$  — автомат, у которого  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  — конечные множества состояний, входной и выходной алфавиты соответственно;  $\delta$  и  $\lambda$  — функции переходов и выходов, отображающие множество  $S \times X$  в  $S$  и  $Y$ . Обозначим через  $X^*(Y^*)$  множество всех непустых слов конечной длины в алфавите  $X(Y)$ . Функции  $\delta$  и  $\lambda$  естественным образом [4] распространяются на множество  $S \times X^*$  со значениями в  $S$  и  $Y^*$  соответственно. Множество всех автоматов с фиксированными входным  $X$  и выходным  $Y$  алфавитами обозначим через  $K(U)$ , где  $U = (X \times Y)$ . Обозначим через  $U^*$  множество всех пар слов  $(\alpha, \beta)$  таких, что  $\alpha \in X^*$ ,  $\beta \in Y^*$  и длины слов  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают. Пару слов одинаковой длины  $(\alpha, \beta) = (x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_r)$  назовем вход-выходным словом, допустимым автоматом  $A$  в состоянии  $s$ , если  $\lambda(s, x_1 \dots x_r) = y_1 \dots y_r$ . Множество вход-выходных слов, допустимых в состоянии  $s$  автоматом  $A$ , очевидно, является функциональным отношением, которое обозначим через  $\varphi_s$  и назовем автоматным отображением, реализуемым состоянием  $s$  автомата  $A$ . Конечное множество вход-выходных слов  $R \subset U^*$  назовем экспериментом, допустимым в состоянии  $s \in S_A$  автоматом  $A$ , если всякое слово из  $R$  есть вход-выходное слово, допустимое в состоянии  $s$  автоматом  $A$ . Если  $R$  содержит единственное слово из  $U^*$ , то  $R$  — простой эксперимент, в противном случае  $R$  — кратный эксперимент. Множество  $R(\alpha, \beta)$  всех тех и только тех слов  $(\alpha', \beta')$ , для которых  $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') \in R$ , назовем подэкспериментом эксперимента  $R$  по слову  $(\alpha, \beta)$  [3]. Обозначим через  $[R]$  множество всех собственных префиксов вход-выходных слов эксперимента  $R$ , а через  $B(R)$  множество всех непустых подэкспериментов эксперимента  $R$  по словам из  $[R]$ , тогда  $B(W) = \bigcup_{R \in W} B(R)$ .

Эксперименты  $R_1$  и  $R_2$  назовем совместимыми, если для любых  $(\alpha_1, \beta_1)$  и  $(\alpha_2, \beta_2)$ , являющихся префиксами некоторых вход-выходных слов из  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, из равенства  $\alpha_1 = \alpha_2$  следует, что  $\beta_1 = \beta_2$ .

В качестве поведения [4] автомата будем рассматривать множество всех попарно различных



ограниченно-детерминированных функций (о.-д. функций), в нем реализуемых. Через  $\Omega(U)$  обозначим множество всех о.-д. функций, отображающих  $X^*$  в  $Y^*$ . Пусть  $f$  — о.-д. функция из  $\Omega(U)$ . Произвольное множество  $R \in U^*$  назовем следом о.-д. функции  $f$ , если для любого  $(\alpha, \beta) \in R$  имеет место  $f(\alpha) = \beta$ . След  $R$  о.-д. функции  $f$  назовем собственным, если существует  $(\alpha, \beta) \in U^*$  такое, что  $f(\alpha) = \beta$ , но  $(\alpha, \beta) \notin R$ . След  $R$  о.-д. функции  $f$  назовем конечным, если  $R$  содержит конечное множество слов из  $U^*$ . При изложении материала под следом будем понимать только конечный след. След  $R$  о.-д. функции  $f$  — простой, если он содержит единственное слово из  $U^*$ , и кратный — в противном случае. Пусть  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  — конечная система о.-д. функций из  $\Omega(U)$  и  $W = (R_1, \dots, R_k)$  — конечная совокупность конечных подмножеств из  $U^*$ . Множество  $W = (R_1, \dots, R_k)$  назовем следом системы о.-д. функций  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ , если для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$  существует  $j \in \{1, \dots, k\}$  такое, что  $R_i$  есть след о.-д. функции  $f_j$ .

Пусть  $A \in K(U)$ . Через  $F(A) = \{f_1, \dots, f_n\}$  обозначим множество всех попарно различных о.-д. функций, реализуемых в автомате  $A$ , образующих полное поведение автомата. Следом  $W = (R_1, \dots, R_k)$  автомата  $A$  назовем произвольный конечный след системы  $F(A)$ . След  $W = (R_1, \dots, R_n)$  автомата  $A$  — простой, если для любого  $j \in \{1, \dots, n\}$   $R_j$  содержит единственное слово из  $U^*$ . Простой след автомата представляет конечное множество вход-выходных слов, допустимых (возможно, различными состояниями) автомата, полученных в результате проведения экспериментов или же априорно заданных в качестве условий функционирования синтезируемого автомата. След автомата  $W = (R_1, \dots, R_n)$  назовем кратным (структурированным), если существует  $j \in \{1, \dots, n\}$  такое, что  $R_j$  есть кратный след некоторой о.-д. функции из  $F(A)$ . Кратные следы возникают при введении дополнительной информации для множества вход-выходных слов, реализуемых идентифицируемым автоматом, а именно указанием о допустимости некоторыми состояниями автомата определенных подмножеств из исходного множества вход-выходных слов. Таким образом, след автомата представляет собой конечное множество экспериментов конечной длины, допустимых с данным автоматом. В работе [2] описаны структура и свойства следов автомата, идентифицирующих заданный автомат как неприводимый относительно реализации указанных следов.

В настоящей работе рассмотрены вопросы оптимизации структуры и сложности следов автомата, идентифицирующих его как неприводимый (относительно реализации), а именно поиску и описанию свойств «неизбыточных» следов автомата, содержащих лишь информацию, необходимую для идентификации и наиболее простых по структуре.

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЮЩИХ СЛЕДОВ АВТОМАТА

Пусть  $A$  — приведенный автомат из  $K(U)$ . Через  $C(A) = \{W_A\}$  обозначим множество следов автомата  $A$ , идентифицирующих автомат  $A$  как неприводимый в классе  $K(W_A)$ . Элементы множества  $C(A)$  представляют собой конечное множество кратных экспериментов  $W = (R_1, \dots, R_k)$ , допустимых в автомате  $A$  таких, что  $A$  является единственным неприводимым автоматом в классе  $K(W)$ . В дальнейшем под  $B(W)$  будем понимать множество всех попарно различных подэкспериментов экспериментов из  $W$ , включая и эксперименты  $R_1, \dots, R_k$ . На множестве следов  $C(A)$  рассмотрим следующие отношения.

Пусть  $R_1, R_2$  — эксперименты, допустимые некоторым автоматом из  $K(U)$ , тогда  $R_1 \supseteq R_2$ , если любое вход-выходное слово из  $R_1$  принадлежит множеству  $R_2$ . Эксперимент  $R_2$  покрывает  $R_1$  ( $R_1 \leq R_2$ ), если существует эксперимент  $R' \in B(R_2)$  такой, что любое вход-выходное слово из  $R_1$  является префиксом (возможно, несобственным) некоторого вход-выходного слова из  $R'$ . Пусть  $W_1, W_2$  — следы из  $C(A)$ . След  $W_2$  покрывает след  $W_1$  ( $W_1 \leq W_2$ ), если для любого эксперимента  $R \in W_1$  существует эксперимент  $R' \in B(W_1)$  такой, что  $R \leq R'$ . Отношение покрытия « $\leq$ » на множестве следов  $C(A)$  удовлетворяет условиям транзитивности и рефлексивности, но в общем случае не является антисимметричным и, таким образом, определяет в  $C(A)$  некоторый частичный предпорядок. След  $W = (R_1, \dots, R_k)$  из  $C(A)$  назовем приведенным, если для любого  $i \in \{1, \dots, k\}$  эксперимент  $R_i$  не покрывается никаким экспериментом  $R_j \in W$ , если  $i \neq j$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Множество всех приведенных следов из  $C(A)$  бесконечно и содержит, вообще говоря, следы с «избыточной» информацией относительно однозначного задания автомата  $A$ . Это обусловлено следующим: с каждым следом  $W$  из  $C(A)$  множество  $C(A)$  содержит след  $WUW'$ , где  $W'$  — множество экспериментов, допустимых



в  $A$ ; бесконечное множество систем экспериментов, покрывающих  $W$ , так как если  $W \in C(A)$  — множество экспериментов, допустимых в  $A$ , то  $W' \in C(A)$ . След  $W \in C(A)$  назовем тупиковым в  $C(A)$ , если для любого следа  $W' \in C(A)$  такого, что  $W \geq W'$ , справедливо  $W = W'$ .

Приведем основные свойства тупиковых следов из  $C(A)$ : 1) тупиковые следы множества  $C(A)$  не покрывают никакие следы из  $C(A)$ ; из теоремы 2 [3] следует; 2) что любой тупиковый след множества  $C(A)$  содержит  $n$  экспериментов, если  $A$  имеет  $n$  состояний; 3) если  $W = (R_1, \dots, R_n)$  — тупиковый из  $C(A)$ , где  $|S_A| = n$ , то для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$  — эксперимент  $R_i$  допустим в  $A$  состоянием  $s_i \in S_A$ , но не допустим в  $A$  никаким состоянием  $s_j \in S_A$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , отличным от  $s_i$ ; для всякого  $x \in X$  и некоторого  $y \in Y$  существует  $j \in \{1, \dots, n\}$ , зависящее от  $x$ , такое, что подэксперимент  $R_i(x, y)$  совместим с  $R_j$  и не совместим с  $R_1, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, R_n$ .

**Утверждение.** Для любого вход-выходного алфавита  $U = X \times Y$ ,  $|X| \geq 2$ ,  $|Y| \geq 2$  множество  $K(U)$  содержит автоматы  $A_1$  и  $A_2$ , такие, что множество тупиковых следов: а) в  $C(A_1)$  — счетное; б) в  $C(A_2)$  — конечное.

**Доказательство.** Не ограничивая общности, полагаем, что  $X = Y = \{0, 1\}$ .

Рассмотрим автомат  $A_1 = \{S_1 = \{s_1^1, s_2^1\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}, \delta_1, \lambda_1\}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_1(s_1^1, 0) &= s_1^1, & \delta_1(s_1^1, 1) &= s_1^1, & \delta(s_2^1, 0) &= s_2^1, & \delta(s_2^1, 1) &= s_2^1, \\ \lambda(s_1^1, 0) &= 0, & \lambda(s_1^1, 1) &= 1, & \lambda(s_2^1, 0) &= 0, & \lambda(s_2^1, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество следов  $W^{(n)} = \{R_1^{(n)}, R_2^{(n)}\}$  автомата  $A_1$ , где  $R_1^{(n)}$  и  $R_2^{(n)}$  определяются следующим образом:

$$R_1^{(n)} = \{(0, 0)^{n-1}(1, 1); (1, 1)(0, 0)^n(1, 1)\}, \quad R_2^{(n)} = \{(1, 0)(1, 0); (0, 0)^n(1, 0); (0, 0)^{n-2}(1, 0)\},$$

где  $(x, y)^k$  — слово, содержащее  $k$  символов  $(x, y) \in U$ . Любой след данного множества для любого  $n \geq 3$  удовлетворяет условию теоремы 2 [3] и, следовательно,  $W^{(n)} \in C(A_1)$ . Кроме того, для любого  $n \geq 3$  след  $W^{(n)}$  — тупиковый элемент из  $C(A_1)$  и, следовательно, в  $C(A_1)$  содержится счетное множество тупиковых следов автомата  $A_1$ .

Рассмотрим автомат  $A_2 = \{S_1 = \{s_1^2, s_2^2\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}, \delta_2, \lambda_2\}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_2(s_1^2, 0) &= s_1^2, & \delta_2(s_1^2, 1) &= s_2^2, & \delta_2(s_2^2, 0) &= s_2^2, & \delta_2(s_2^2, 1) &= s_1^2, \\ \lambda(s_1^2, 0) &= 0, & \lambda(s_1^2, 1) &= 1, & \lambda(s_2^2, 0) &= 1, & \lambda(s_2^2, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Из второго свойства тупиковых следов множества  $C(A_2)$  содержат ровно два эксперимента. Пусть  $W_2 = (R_1, R_2)$  — произвольный тупиковый элемент множества  $C(A_2)$ . Рассмотрим подэксперименты  $R_i(x, y)$ , где  $i \in \{1, 2\}$ ,  $x \in X, y \in Y$ . Для того чтобы подэксперимент  $R_i(x, y)$  эксперимента  $R_i$  из  $W_2$  удовлетворял третьему свойству тупиковых элементов  $C(A_2)$  и теореме 2 из [3], достаточно, чтобы этот подэксперимент был не пуст и содержал любой символ  $(x', y') \in U$  такой, что  $(x, y)(x', y') \in R_i$ . Тогда любой эксперимент  $R'_i$ , полученный в результате «продолжения» эксперимента  $R_i$  длины  $r \geq 3$ , будет покрывать след  $W_2$ , в котором для любых  $i \in \{1, 2\}$ ,  $x \in X$  и некоторого  $y \in Y$  подэксперимент  $R_i(x, y)$  есть буква алфавита  $U$ . Следовательно, длина всех вход-выходных слов следа  $W_2$  равна двум, а число экспериментов, имеющих фиксированную длину и конечный вход-выходной алфавит  $U$ , конечно, что означает конечность тупиковых следов множества  $C(A_2)$ . Утверждение доказано.

Из этого утверждения следует, что существуют автоматы, множества тупиковых следов, их идентифицирующих, содержат «избыточную» информацию относительно идентификации автомата в рамках выбранного подхода. В этой связи предполагается рассматривать «неизбыточные» тупиковые следы автомата, идентифицирующие его с использованием некоторого преобразования экспериментов — операции редукции следа.

Пусть  $R = \{\alpha, \beta\}$  — простой эксперимент, допустимый некоторым автоматом из  $K(U)$  длины не менее трех, а  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  — префиксы (возможно, несобственные) слова  $\alpha, \beta$ , причем  $\alpha_1, \beta_1$  — префикс  $\alpha_2, \beta_2$ . Таким образом, эксперимент  $R$  можно представить в виде  $R = (\alpha_1, \beta_1)R(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_2, \beta_2)R(\alpha_2, \beta_2)$ .

**Определение 1.** Полагаем, что эксперимент  $R'(\alpha_1, \beta_1)R(\alpha_2, \beta_2)$  получен из эксперимента  $R$  путем применения операции редукции  $\tau$  (сокращения) эксперимента:  $\tau : R'(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow R(\alpha_2, \beta_2)$ , если



в эксперименте  $R$  подэксперимент  $R(\alpha_1, \beta_1)$  заменен на подэксперимент  $R(\alpha_2, \beta_2)$ , подэксперимент эксперимента  $R(\alpha_1, \beta_1)$ .

Заметим, что эксперимент, полученный в результате применения операции сокращения в общем случае, может не допускаться автоматом, допускающим эксперимент  $R$ , к которому эта операция была применима. Префиксы  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$  эксперимента  $R$ , определяющие заменяемый и замещающий подэксперименты назовем параметрами операции редукции эксперимента. В зависимости от выбора параметров при применении операции редукции следа к простому эксперименту  $R$  возможны следующие ситуации:

1. Пусть  $(\alpha_1, \beta_1) = l_U$ , где  $l_U$  — пустое слово в  $U^*$ . Тогда  $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha, \beta)$  и  $\tau(R) = l_U$ , так как  $R(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha, \beta)$ ,  $R(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha, \beta)$ .

2. Пусть  $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) \neq l_U$ . Тогда  $\tau(R) = R$  — тождественное (тривиальное) преобразование.

3. Пусть  $(\alpha_1, \beta_1) \neq l_U$  и является собственным префиксом  $(\alpha, \beta)$ , а  $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha, \beta)$ . Тогда  $(\alpha_2, \beta_2) = l_U$  и  $(R) = (\alpha_1, \beta_1)$ , так как  $R(\alpha_1, \beta_1)$  заменяется на  $l_U$ .

4. Пусть  $(\alpha_1, \beta_1) = l_U, (\alpha_2, \beta_2) \neq l_U$  — собственный префикс  $(\alpha, \beta)$ . Тогда  $R(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha, \beta)$  и  $\tau(R) = R(\alpha_2, \beta_2)$  — суффикс слова  $(\alpha, \beta)$ .

5. Пусть  $(\alpha_1, \beta_1) \neq l_U, (\alpha_2, \beta_2) \neq l_U$  — собственные префиксы  $(\alpha, \beta)$ , причем  $(\alpha_2, \beta_2)$  — префикс  $(\alpha_1, \beta_1)$ . Тогда  $\tau(R) = (\alpha_1, \beta_1)R(\alpha_2, \beta_2)$ .

В общем случае результат применения операции редукции следа к простому эксперименту  $R$  означает «сжатие» эксперимента  $R$  за счет удаления некоторых его внутренних частей.

**Определение 2.** Эксперимент  $R'$  назовем *сокращенным (редуцируемым)  $\tau$ -подэкспериментом эксперимента  $R$* , если существует последовательность экспериментов  $R = R_1, \dots, R_t = R'$  такая, что для любого  $i \in \{2, \dots, t\}$  эксперимент  $R_i$  получен из эксперимента  $R_{i-1}$  путем применения операции редукции эксперимента.

Для распространения операций редукции следа на кратные эксперименты рассмотрим эти эксперименты как следы о.-д. функций, реализуемых в заданных автоматах. Пусть  $R$  — кратный эксперимент, содержащий простые эксперименты  $R_1, \dots, R_t$  ( $t \geq 2$ ). Через  $T(R)$  обозначим множество всех непустых подмножеств множества  $\{R_1, \dots, R_t\}$ . Очевидно, что  $R \in T(R)$ , а также любой элемент  $R \in T(R)$  есть кратный эксперимент, если  $|R| \geq 2$  или простой, если  $R = R_i (1 \leq i \leq t)$ . Пусть  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$  — префиксы всех вход-выходных слов (простых экспериментов, входящих в некоторый эксперимент  $R \in T(R)$ ), причем  $(\alpha_1, \beta_1)$  — префикс  $(\alpha_2, \beta_2)$ .

**Определение 3.** Полагаем, что эксперимент  $R'$  получен из эксперимента  $R$  путем применения операции редукции следа:  $R(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow R(\alpha_2, \beta_2)$ , если эксперимент  $R'$  может быть построен из эксперимента  $R$  следующим образом:  $R'$  содержит все простые эксперименты  $R$ , не входящие в  $R'$ , где  $R \in T(R)$ , а всякий простой эксперимент  $R'' \in R$  заменяется экспериментом  $R$ , полученным применением операции редукции следа:  $R''(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow R''(\alpha_2, \beta_2)$ .

В общем случае операция редукции следа при распространении ее на кратные эксперименты является частичной. Кроме того, для кратных экспериментов операция редукции следа определяется тремя параметрами:  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$  и экспериментом  $R \in T(R)$ . В зависимости от выбора этих параметров результат применения операции редукции следа к кратному эксперименту является простым или кратным экспериментом или же множеством вход-выходных слов, в котором существуют несовместимые вход-выходные слова.

**Определение 4.** Эксперимент  $R'$  назовем  *$\tau$ -подэкспериментом эксперимента  $R$* , если существует последовательность множеств вход-выходных слов  $R = R_1, \dots, R_t = R'$  такая, что для любого  $i \in \{2, \dots, t\}$  множество  $R_i$  есть результат применения операции редукции следа к множеству  $R_{i-1}$ .

**Определение 5.** Множество экспериментов  $W'$  назовем  *$\tau$  подмножеством* множества экспериментов  $W$ , если любой эксперимент  $R' \in W'$  является  $\tau$ -подэкспериментом некоторого эксперимента  $R \in B(W)$ . Множество экспериментов  $W'$  — *нетривиальное  $\tau$ -подмножество  $W$* , если существует  $R' \in W'$ , являющийся  $\tau$ -подэкспериментом эксперимента  $R \in W$ , отличный от  $R$  и пустого слова.

**Определение 6.** След  $W$  из  $C(A)$  назовем  *$\tau$ -неприводимым в  $C(A)$* , если любой его нетривиальный  $\tau$ -подэксперимент не принадлежит  $C(A)$ .





Целью дальнейшего исследования будет изучение тупиковых  $\tau$ -неприводимых следов из  $C(A)$ , с использованием следов, идентифицирующих состояния неприводимых автоматов. При этом будут использоваться следующие понятия и результаты теории экспериментов с автоматами [4].

След  $W$ , идентифицирующий автомат  $A$  из  $K(U)$ , идентифицирует состояние  $s \in S_A$  автомата  $A$  экспериментом  $R_s$  множества  $B(W)$  такой, что  $R_s \subset \varphi_s(A)$  и для любого  $s' \neq s, s' \in S_A, R_s \not\subset \varphi_{s'}(A)$ . Если  $A$  — приведенный автомат с множеством состояний  $S_A = \{s_1, \dots, s_n\}$  и  $W = \{R_1, \dots, R_n\}$  — тупиковый след из  $C(A)$ , то для любых  $i, j$  из  $\{1, \dots, n\}$  таких, что  $i \neq j$  в множестве  $B(W)$  существуют эксперименты  $R_i$  и  $R_j$ , идентифицирующие состояния  $s_i$  и  $s_j$  соответственно, а следовательно, не совместимы между собой. Кроме того, для любых  $i \in \{1, \dots, n\}, x \in X$  и некоторого  $y \in Y$  существует  $i \in \{1, \dots, n\}$  (зависящее от  $x$  и  $i$ ) такое, что  $R_i(x, y)$  есть идентификатор состояния  $s_j$ , а следовательно, не совместимый с экспериментами  $R = R_1, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, \dots, R_n$ .

Рассмотрим некоторые, наиболее важные, частные случаи следов, идентифицирующих состояния неприводимых автоматов. Слово  $\alpha \in X^*$  назовем диагностическим [4] для автомата  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$  с множеством состояний  $s = \{s_1, \dots, s_n\}$ , если для любых  $i, j$  из  $\{1, \dots, n\}$  таких, что  $i \neq j$  следует,  $\lambda(S_i, \alpha) = \lambda(S_j, \alpha)$ . При этом множество простых экспериментов  $(\alpha, \lambda(s_1, \alpha), \dots, \alpha, \lambda(s_n, \alpha))$ , допустимых в автомате  $A$  состояниями  $s_1, \dots, s_n$  соответственно, состоит из попарно несовместимых экспериментов, идентифицирующих состояния  $s_1, \dots, s_n$  соответственно. В [4] предложен метод построения и способ представления всех минимальных диагностических слов (если они есть) по заданному автомату  $A$ , используя понятия дерева преемников и диагностического дерева  $Z(A)$ . Пусть  $\alpha \in X^*$  — слово, которому соответствует путь в  $Z(A)$  [4] из начального состояния в финальное. Применяя операцию  $\tau$ , можно всегда получить  $\tau$ -подслово слова  $\alpha$ , соответствующее простому пути, ведущему в то же финальное состояние. Следовательно, для любого диагностического слова  $\alpha \in X^*$  существует  $\tau$ -подслово  $\alpha'$ , являющееся минимальным диагностическим словом. В то же время любое  $\tau$ -подслово минимального диагностического слова, отличного от него, не является диагностическим словом, хотя может и являться простым начальным идентификатором. Следовательно, множество всех  $\tau$ -неприводимых диагностических слов совпадает с множеством минимальных диагностических слов заданного автомата и конечно. Слово  $\alpha \in X^*$  назовем контрольным для состояния  $s_i \in S_A$  [4], если для любого  $j \in \{1, \dots, n\}$  из  $\lambda(S_i, \alpha) = \lambda(S_j, \alpha)$  следует  $s_i = s_j$ . Если  $\alpha \in X^*$  — контрольное слово состояния  $s_i$ , то эксперимент  $(\alpha, \lambda(S_i, \alpha))$  — начальный идентификатор состояния  $s_i$ . В [4] приведена верхняя оценка длины контрольного слова, равная  $l = (\varphi/12)n^2$ , где  $n = |S_A|$ . Если в источнике  $Z(A)$  в качестве финальных выбрать состояния, соответствующие  $M$ -группам, содержащим хотя бы одно простое  $\Sigma$ -множество, то  $Z(A)$  будет представлять множество всех контрольных слов. Аналогично, множество всех  $\tau$ -неприводимых контрольных слов конечно в силу конечности множества всех простых путей в  $Z(A)$ , ведущих в конечное множество финальных состояний.

В то же время существуют автоматы, не имеющие ни диагностических, ни контрольных слов. В этом случае в таких автоматах для всякого состояния существуют кратные эксперименты [4], которые состоят из слов, представимых в  $Z(A)$  при соответствующем выборе финальных состояний. Слово  $\alpha \in X^*$  назовем различающим состояние  $s \in S_A$  в автомате  $A$ , если существует непустое подмножество состояний  $s_{i_1}, \dots, s_{i_r}$  автомата  $A$  ( $r \leq n - 1$ ), не содержащее  $s$  такое, что для любого  $j \in \{1, \dots, n\}$   $\lambda(S_{i_j}, \alpha) \neq \lambda(S, \alpha)$ . Множество состояний  $s_{i_1}, \dots, s_{i_r}$ , указанное в приведенном определении, назовем различимым множеством состояния  $s$  по слову  $\alpha$ . Различающее слово  $\alpha \in X^*$  состояния  $s$  в  $A$  назовем максимальным, если для любого  $\alpha' \in X^*$  такого, что  $\alpha$  — префикс  $\alpha'$ , различимые множества состояния  $s$  по словам  $\alpha$  и  $\alpha'$  совпадают.

**Определение 7.** Максимально различающее слово  $\alpha \in X^*$  состояния  $s$  назовем  $\tau$ -неприводимым, если любое его  $\tau$ -подслово, отличное от  $\alpha$ , не является максимально различающим для состояния  $s$ .

Очевидно, что множество  $\tau$ -неприводимых максимально различающих слов состояния  $s_i \in S_A$  ( $1 \leq i \leq n$ ) конечно, так как им соответствует в источнике  $Z(A)$  конечное множество простых (не проходящих через циклы диаграммы переходов) путей. Максимальная длина таких слов не превосходит оценки длины минимального диагностического слова.

**Теорема.** Для всякого приведенного автомата  $A$  из  $K(U)$  множество неприводимых следов, идентифицирующих автомат  $A$ , конечно.

**Доказательство.** Для всякого состояния любого приведенного автомата множество всех  $\tau$ -неприводимых максимально различающих слов конечно. Следовательно, любой элемент  $\tau$ -неприводимого тупикового эксперимента автомата может быть построен лишь конечным числом способов, так как



он содержит конечное подмножество экспериментов, соответствующих  $\tau$ -неприводимым максимально различающим словам. Так как число таких элементов в  $\tau$ -неприводимом тупиковом эксперименте из  $C(A)$  конечно, то и всех идентифицирующих следов для заданного автомата  $A$  также конечно.

Таким образом, если в качестве «не избыточных» следов из  $C(A)$  рассматривать  $\tau$ -неприводимые тупиковые следы из  $C(A)$ , то в  $C(A)$  существует конечное множество таких следов.

### Библиографический список

1. Льюинг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя : пер. с англ. М. : Наука, 1991. 432 с.
2. Богомолов С. А. О синтезе автоматов по конечному множеству экспериментов // ДАН СССР. 1985. Т. 281, № 1. С. 20–22.
3. Богомолов С. А. О восстановлении автомата по экспериментам // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 1. С. 135–146.
4. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М. : Наука, 1966. 272 с.
5. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Элементы теории автоматов. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 216 с.
6. Мур Э. Ф. Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы / под ред. К. Э. Шеннона, Дж. Маккарти. М. : Изд-во иностр. лит., 1956. С. 179–210.

## Identification of a State Machine Structure with Finites Fragment of Behavior

S. A. Bogomolov

Saratov State Socio-Economic University, Russia, 410003, Saratov, Radishcheva st., 89, Alexbogomolov@ya.ru

Identification of a state machine structure with finite fragments of behavior is discussed. The state machine behavior is a set of various finite-sequential (f.-s.) functions realized in a state machine, and under a finite fragment of behavior we mean traces of f.-s. functions and state machines. The concept of an identifying trace for a state machine irredundant over its realization is introduced. The approach is suggested that enables to separate and describe in the set of traces identifying a state machine the finite set of irredundant traces consisting of only essential information for identification of a state machine.

*Key words:* state machine, experiments with a state machine, subexperiment of experiment, trace of f.-s. function and state machine, identifying trace of state machine, operation of trace reduction, irredundant identifying trace of state machine.

### References

1. Ljung L. *System Identification : Theory for the User*. University of Linköping Sweden, 1987. 432 p.
2. Bogomolov S. A. On the synthesis of automata from a finite set experiments. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1985, vol. 281, no. 1, pp. 20–22.
3. Bogomolov S. A. Reconstruction of an automaton from experiments. *Discrete Mathematics and Applications*, 1991, vol. 1, no 2, pp. 117–128.
4. Gill A. *Introduction to the Theory of Finite-state Machines*. McGraw-Hill, 1962. 272 pp.
5. Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S. *Elementy teorii avtomatov* [Topics of Automata Theory]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978. 216 pp. (in Russian).
6. Moor E. F. *Speculative experiments with sequential machines*. In Automata Studies, eds. C. E. Shannon, J. McCarthy. Princeton, Princeton Univ. Press, 1956, pp. 129–153.

УДК 519.872

## СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ, БЛОКИРОВКАМИ И КЛАСТЕРАМИ

Ю. И. Митрофанов<sup>1</sup>, В. И. Долгов<sup>2</sup>, Е. С. Рогачко<sup>3</sup>, Е. П. Станкевич<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Доктор технических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, MitrophanovYul@info.sgu.ru

<sup>2</sup> Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, www@vidolgov.ru

<sup>3</sup> Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, RogachkoES@info.sgu.ru

<sup>4</sup> Старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, StankevichElena@mail.ru



Исследуется два типа сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований — сети с блокировками и сети с кластерами. Получено стационарное распределение в мультипликативной форме для сетей с блокировками переходов в состоянии, в которых число требований в системах превышает заданные ограничения. Для сетей обслуживания с непересекающимися кластерами систем решается задача анализа и находится стационарное распределение в мультипликативной форме. Приводятся примеры анализа сети с блокировками и сети с кластерами.

*Ключевые слова:* сети массового обслуживания, групповые переходы требований, блокировки, кластеры, анализ сетей массового обслуживания.

## ВВЕДЕНИЕ

Сети массового обслуживания с блокировками относятся к классу сетей, в которых переходы требований между системами зависят от ограничений, наложенных на значения некоторых параметров сетей. Часто в таких сетях ограничивается число мест для ожидания в очередях систем обслуживания, входящих в состав сетей. В сетях с такими ограничениями при отсутствии в некоторой системе свободных мест для ожидания в очереди поступление требований в эту систему из других систем и внешнего источника требований прекращается. Обзор различных способов блокировки и методов вычисления стационарного распределения в мультипликативной форме сетей массового обслуживания с блокировками дан в [1].

Возможность блокировки переходов требований в сетях существенно затрудняет анализ сетей этого класса точными методами. Поэтому значительное внимание уделяется развитию и разработке приближенных методов анализа [2–6], включающих, в частности, весьма эффективные методы анализа, основанные на использовании методов декомпозиции и агрегирования.

Значительный интерес в теоретическом и прикладном отношении представляет класс сетей массового обслуживания, в которых системы массового обслуживания разделены на группы — кластеры. Достаточно полное представление о задачах, возникающих при анализе таких сетей, и методах их решения, дают, например, работы [7–9].

В настоящее время в качестве математических моделей коммуникационных и вычислительных систем и сетей широко используются сети массового обслуживания с групповыми переходами требований и групповым обслуживанием. Особую важность в этом отношении представляет класс сетей массового обслуживания, стационарное распределение которых имеет мультипликативную форму, так как стационарные характеристики сетей этого класса могут быть вычислены достаточно просто. Теория и методы анализа сетей обслуживания этого класса интенсивно развиваются последние два десятилетия. Опубликованные в работах [10, 11] результаты о мультипликативной форме стационарного распределения и предложенный в [10] метод анализа неоднородных сетей массового обслуживания с непрерывным и дискретным временем, групповыми переходами и групповым обслуживанием требований получили дальнейшее развитие в [12, 13]. Значительное внимание в работах [12, 13] уделяется рассмотрению способов блокировки переходов групп требований в сетях и методов анализа сетей обслуживания с блокировками и кластерами.

Как правило, результаты теоретических исследований сетей массового обслуживания с непрерывным и дискретным временем, групповыми переходами и групповым обслуживанием существенно расширяют возможности разработки эффективных методов анализа сетей обслуживания этого класса; в качестве примера можно привести работы [14–16]. Как показано в [14], для сетей массового обслуживания с групповыми переходами и блокировками, обусловленными ограничениями на число требований в системах массового обслуживания, стационарное распределение в мультипликативной форме существует, если только отменять переход всей группы в случае невозможности хотя бы одного требования из группы осуществить требуемый переход и в соответствии с алгоритмом маршрутизации повторно определять системы обслуживания, в которые должны быть направлены требования данной группы. В работе [15] для сетей массового обслуживания с групповыми переходами и групповым обслуживанием вводится понятие структурной обратимости, использование которого упрощает вывод уравнений трафика. Методы агрегирования и декомпозиции, основанные на использовании теоремы Нортона для сетей массового обслуживания, могут применяться, как показано в работе [16], для широкого класса сетей массового обслуживания с групповыми переходами и мультипликативной формой стационарного распределения.



В данной статье рассматриваются замкнутые однородные сети массового обслуживания с непрерывным временем и групповыми переходами; приводятся описание, модель эволюции и мультипликативная форма стационарного распределения сетей. Исследуются сети этого класса двух типов — сети с блокировками и сети с кластерами, при этом используются результаты работ [13, 17]. Для сетей с блокировками переходов сети в состояния, в которых число требований в системах превышает заданные ограничения, получено стационарное распределение в мультипликативной форме. Для сети с непересекающимися кластерами решается задача управления потоками. Целью управления является обеспечение такого распределения требований между кластерами сети, при котором число требований в определенном кластере существенно не превосходило бы некоторого заданного числа. Управление реализуется посредством изменения интенсивностей обслуживания в других кластерах. Получено стационарное распределение в мультипликативной форме сетей обслуживания с кластерами.

## 1. СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЛОКИРОВКАМИ

Пусть замкнутая сеть массового обслуживания  $N^e$  с непрерывным временем и групповыми переходами содержит  $L$  систем массового обслуживания  $S_i, i = 1, \dots, L$ , и  $H$  требований одного класса. Предположим, что в сети  $N^e$  возможны блокировки переходов между системами групп требований. Переходы требований между системами определяются маршрутной матрицей  $\Theta = (\theta_{ij}), i, j = 1, \dots, L$ , где  $\theta_{ij}$  — вероятность того, что требование после обслуживания в системе  $S_i$  поступает в систему  $S_j$ ; при групповых переходах требований в сети реализована независимая маршрутизация требований. Система  $S_i, i = 1, \dots, L$ , включает  $H$  одинаковых обслуживающих приборов. Длительность обслуживания требований в системе  $S_i$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_i, 0 < \mu_i < 1, i = 1, \dots, L$  (данные ограничения на значения  $\mu_i$  не влияют на общность полученных результатов); производится одновременное обслуживание всех пребывающих в системе требований; случайное число требований, обслуживание которых завершается одновременно в системе  $S_i$ , имеет биномиальное распределение с параметром  $\mu_i$ . Состояние сети  $N^e$  определяется вектором  $s = (s_i), i = 1, \dots, L$ , где  $s_i$  — число требований, находящихся в системе  $S_i$ . Множество состояний сети обозначим через  $X$ . Изменение состояния сети происходит вследствие переходов между системами групп требований.

При переходе сети из состояния  $s$  в состояние  $s'$ , обусловленного тем, что  $d_i$  требований покинули систему  $S_i, d'_i$  требований поступили в систему  $S_i$  и  $b_i$  требований оставались в системе  $S_i, s = b + d$  и  $s' = b + d'$ , где  $b = (b_i), i = 1, \dots, L$ , — вектор оставшихся требований, а  $d = (d_i)$  и  $d' = (d'_i)$  — векторы, представляющие соответственно уходящие и поступающие требования. Векторы  $d$  и  $d'$  назовем векторами перемещений, а множество всех векторов перемещений обозначим как  $D$ . Интенсивность частного перехода сети между состояниями  $s$  и  $s'$  обозначим через  $q_{dd',b}$ . Алгоритм перехода сети  $N^e$  из состояния  $s$  в состояние  $s'$  более подробно описан в работе [17].

Обозначим через  $q_{ss'}, s, s' \in X$ , интенсивность перехода сети из состояния  $s$  в состояние  $s'$ , а через  $\pi = (\pi_s), s \in X$ , — стационарное распределение сети.

Интенсивность перехода из состояния  $s$  в состояние  $s'$  определяется выражением

$$q_{ss'} = \sum_{\{d, d', b: b+d=s, b+d'=s'\}} q_{dd',b}. \quad (1)$$

Так как распределение  $\pi$  является стационарным, для всех  $s, s' \in X$  удовлетворяются уравнения глобального равновесия:

$$\pi_s \sum_{s' \neq s} q_{ss'} = \sum_{s' \neq s} \pi_{s'} q_{s's}. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и меняя порядок суммирования, получим, что распределение  $\pi$  является стационарным, если для всех  $s, s' \in X$

$$\pi_s \sum_{\{d, b: b+d=s\}} \sum_{d' \neq d} q_{dd',b} = \sum_{\{d, b: b+d=s\}} \sum_{d' \neq d} \pi_{b+d'} q_{d'd,b}.$$

Эволюция сети  $N^e$  может быть описана эргодической цепью Маркова  $\hat{V}$  с непрерывным временем, конечным множеством состояний  $X$  и стационарным распределением  $\pi$ .



Пусть для фиксированного  $b$   $X_b$  является множеством состояний цепи Маркова  $\hat{\nu}$ , которому соответствует множество  $D_b \subset D$  векторов перемещений  $d \in D_b$ , и пусть  $X_{b,m}$ ,  $m = 1, \dots, h_b$ , — неприводимые множества в  $X_b$  по отношению к цепи Маркова  $\hat{\nu}$ . Назовем  $X_b$  локальным множеством состояний, а  $X_{b,m}$  — локальными подмножествами. Заметим, что состояние  $s$  может быть элементом различных локальных множеств  $X_b$ . Это делает возможным переходы из одного локального множества состояний в другое, так как в общем случае для  $b \neq b'$  имеем  $X_b \cap X_{b'} \neq \emptyset$ .

Для сети  $N^e$  интенсивности перехода  $q_{dd',b}$  могут быть представлены в виде произведения двух функций:

$$q_{dd',b} = u_{d,b+d} v_{dd',b}.$$

Здесь функция  $u_{(\cdot)}$  отображает характеристики обслуживания, т. е. дисциплины и интенсивности обслуживания в системах, а функция  $v_{(\cdot)}$  — характеристики маршрутизации, т. е. маршрутные вероятности и вероятности блокировки переходов требований между системами обслуживания; обе функции заданы с точностью до постоянного множителя. Функция  $u_{(\cdot)}$  может быть выражена через произвольные заданные функции  $\Psi_{(\cdot)}$  и  $\Phi_{(\cdot)}$  в следующем виде [13]:

$$u_{d,s} = \frac{\Psi_{s-d}}{\Phi_s}, \quad (3)$$

где функция  $\Phi_{(\cdot)}$  предполагается строго положительной на  $X$ , а функция  $\Psi_{(\cdot)}$  — неотрицательной. Функция, отображающая характеристики обслуживания, также может быть представлена в виде  $u_{d,s}^* = \Psi_{s-d} / \Phi_s \epsilon_d$ , где  $\epsilon_d = \prod_{i=1}^L d_i!$ . В этом случае  $v_{dd',b}^* = v_{dd',b} \epsilon_d$  и  $q_{dd',b} = u_{d,b+d}^* v_{dd',b}^*$ .

Предположим, что для любого фиксированного  $b$ , для которого  $X_b \neq \emptyset$ ,  $X_b = \bigcup_{m=1}^{h_b} X_{b,m}$  и  $m \in \{1, \dots, h_b\}$ , система уравнений

$$y_{d,b} \sum_{d' \neq d} v_{dd',b} = \sum_{d' \neq d} y_{d',b} v_{d'd,b}, \quad b+d \in X_{b,m}, \quad (4)$$

имеет единственное положительное решение  $\{y_{d,b} | b+d \in X_{b,m}\}$ , с точностью до постоянного множителя.

Определим на множестве  $X$  цепь Маркова  $\hat{\chi}$  с интенсивностями перехода  $w$ , которые удовлетворяют следующим соотношениям: для любых  $b$ ,  $m = 1, \dots, h_b$  и  $b+d, b+d' \in X_{b,m}$   $\frac{w_{dd',b}}{w_{d'd,b}} = \frac{y_{d',b}}{y_{d,b}}$ , иначе  $w_{dd',b} = 0$ .

Обозначим через  $\sigma = (\sigma_s)$ ,  $s \in X$ , стационарное распределение цепи  $\hat{\chi}$ , тогда [13]

$$\pi_s = G \Phi_s \sigma_s, \quad s \in X, \quad (5)$$

где  $G$  — нормализующая константа.

Предположим, что функция  $u_{(\cdot)}$  имеет мультипликативную форму, в которой каждый множитель  $u_{i,(\cdot)}$  связан с соответствующей системой массового обслуживания  $S_i$ , тогда

$$u_{d,s} = \prod_{i=1}^L u_{i,(d_i,s_i)} = \prod_{i=1}^L \frac{\Psi_{i,(s_i-d_i)}}{\Phi_{i,s_i}}.$$

Здесь функция  $u_{i,(\cdot)}$  отображает характеристики обслуживания в системе  $S_i$ , когда в системе производится обслуживание всей группы требований. Учитывая, что  $u_{i,(d_i,s_i)} = u_{i,(d_i,s_i)}^* d_i!$ , и

$$u_{i,(d_i,s_i)}^* = \binom{s_i}{d_i} \mu_i^{d_i} (1 - \mu_i)^{s_i - d_i},$$

функция  $u_{d,s}$  удовлетворяет (3), если положить

$$\Psi_{s-d} = \prod_{i=1}^L \frac{1}{(s_i - d_i)!} \left( \frac{1 - \mu_i}{\mu_i} \right)^{s_i - d_i},$$



$$\Phi_s = \prod_{i=1}^L \frac{1}{s_i!} \left( \frac{1}{\mu_i} \right)^{s_i}. \quad (6)$$

Предположим, что для сети  $N^e$  функция  $v_{dd',b}$  имеет вид

$$v_{dd',b} = v_{dd'} \kappa_{dd',b}, \quad (7)$$

где  $v_{(\cdot)}$  — маршрутные вероятности переходов между системами групп требований,  $\kappa_{(\cdot)}$  — функция блокировки [13].

Положим  $\kappa_{dd',b} = 1$  для всех  $d, d'$  и  $b$ , т. е. блокировок переходов групп требований в сети  $N^e$  не происходит, и пусть существует положительное решение  $y_d$  уравнений группового трафика:

$$y_d \sum_{d' \neq d} v_{dd'} = \sum_{d' \neq d} y_{d'} v_{d'd}. \quad (8)$$

Тогда для всех  $b$  таких, что  $b + d \in X$ , решением системы (4) является  $y_{d,b} = y_d$ . Если существует функция  $\Gamma_{(\cdot)}$  такая, что для всех  $b, m$  и всех  $b + d, b + d' \in X_{b,m}$

$$\frac{\Gamma_{b+d}}{\Gamma_{b+d'}} = \frac{y_{d,b}}{y_{d',b}}, \quad (9)$$

то  $\sigma_{(\cdot)}$  в выражении (5) определяется равенством [13]  $\sigma_s = \Gamma_s, s \in X$ .

При  $\kappa_{dd',b} = 1$  для всех  $d, d'$  и  $b$ , т. е. при отсутствии блокировок переходов групп требований, и независимой маршрутизации требований в сети  $N^e$  маршрутные вероятности переходов групп требований имеют вид

$$v_{dd'} = \sum_{d_{ij} \in A} \prod_{i=1}^L \binom{d_i}{d_{i1}, \dots, d_{iL}} \prod_{j=1}^L \theta_{ij}^{d_{ij}}, \quad (10)$$

где  $A = \left\{ d_{ij}, i, j = 1, \dots, L : d_{ij} \geq 0, d_{ij} = 0, \text{ если } \theta_{ij} = 0, \sum_{j=1}^L d_{ij} = d_i, \sum_{i=1}^L d_{ij} = d'_j \right\}$ ,  $d_{ij}$  представляет число требований, осуществляющих переход из системы  $S_i$  в систему  $S_j$ . Здесь учитываются все возможные переходы требований между системами обслуживания в сети.

Если существует положительное решение  $\omega_j, j = 1, \dots, L$ , маршрутных уравнений  $\omega_j = \sum_{i=1}^L \omega_i \theta_{ij}$ , то решением уравнений группового трафика (8) является

$$y_d = \prod_{i=1}^L \omega_i^{d_i}, \quad (11)$$

и функция  $\Gamma_{b+d} = \prod_{i=1}^L \omega_i^{b_i+d_i}$  удовлетворяет (9). Вероятности  $\sigma_{(\cdot)}$ , входящие в (5), тогда определяются выражением  $\sigma_s = \prod_{i=1}^L \omega_i^{s_i}, s \in X$ .

Теперь предположим, что для некоторых  $d, d'$  и  $b$  функция  $\kappa_{dd',b} \neq 1$ , т. е. в сети  $N^e$  возможны блокировки переходов групп требований.

Метод блокировки переходов в сети  $N^e$  включает действия по проверке условий возможности перехода сформированных групп требований между системами и действия по восстановлению состояния, в котором пребывала сеть до формирования групп требований. Как правило, в случае невыполнения условий перехода все требования, завершившие обслуживание в некоторых системах и готовые перейти в другие системы, возвращаются в свои исходные системы и начинают обслуживаться повторно.

Переход сети  $N^e$  из состояния  $s$  в состояние  $s'$  обусловлен тем, что из требований, завершивших обслуживание в некоторых системах и входящих в определенные вектором  $d$  группы, алгоритмом маршрутизации были сформированы представляющие компоненты вектора  $d'$  группы требований, поступивших в соответствующие системы. Поэтому реализация блокировки переходов групп требований в сети возможна или запрещением формирования векторов перемещений  $d$  некоторых типов,



или запрещением формирования для векторов перемещений  $d$  некоторых типов соответствующих векторов  $d'$ , или запрещением поступления требований, определенных векторами перемещений  $d'$  некоторых типов, в соответствующие системы обслуживания. В первом случае для запрещения формирования, например вектора перемещения  $\tilde{d}$ , очевидно, должна быть равна нулю интенсивность формирования  $\tilde{d}$  при пребывании сети в состоянии  $s$ . Во втором случае должны быть равны нулю соответствующие интенсивности  $q_{\tilde{d}d',b}$ , а в третьем случае должно быть запрещено поступление в соответствующие системы требований, определенных вектором  $d'$ , сформированным из вектора  $\tilde{d}$ . Например, если для заданного  $\tilde{d}$  положить  $q_{\tilde{d}d',b} = q_{d'\tilde{d},b} = 0$  для всех  $d, d', b$ , то определенным вектором  $\tilde{d}$  группам требований запрещается принимать участие в переходах. Если для заданного числа, например  $K$ , положить  $q_{dd',b} = 0$ , когда  $\sum_{i=1}^L d_i = K$  или  $\sum_{i=1}^L d'_i = K$ , то запрещаются переходы групп требований, когда общее число уходящих и/или поступающих требований равно  $K$ .

Рассмотрим случай, когда для каждой системы массового обслуживания задано максимальное число требований, которым разрешено находиться в системе, например, для системы  $S_i$  должно быть  $s_i \leq M_i$ ,  $1 \leq i \leq L$ ; при этом функция  $v_{dd',b}$  имеет вид (7), где  $\kappa_{dd',b} = \mathbf{1}(b + d' \leq M)$ . Здесь  $M = (M_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , а  $\mathbf{1}(A)$  обозначает индикатор события  $A$ , т. е.  $\mathbf{1}(A) = 1$ , если событие  $A$  происходит и  $\mathbf{1}(A) = 0$  в противном случае. Таким образом, проверка условия возможности перехода групп требований производится для всех систем, но в случае невыполнения этого условия хотя бы для одной системы обслуживания запрещаются переходы всех групп уходящих требований, требования возвращаются в свои исходные системы и начинают обслуживаться повторно.

При независимой маршрутизации требований в сети  $N^e$  с блокировками переходов требований маршрутные вероятности  $v_{(\cdot)}$  имеют вид (10).

Предположим, что групповая маршрутизация является обратимой, т. е. решение  $y_{(\cdot)}$  системы уравнений группового трафика (8) удовлетворяет равенству  $y_d v_{dd'} = y_{d'} v_{d'd}$ . Тогда

$$y_{d,b} = y_d \mathbf{1}(b + d \leq M) \quad (12)$$

является решением системы (4), и с функцией  $\Gamma_{(\cdot)}$ , удовлетворяющей равенству (9),  $\sigma_s$  в выражении (5) определяется равенством

$$\sigma_s = \Gamma_s, \quad s \leq M. \quad (13)$$

**Теорема 1.** Для сети  $N^e$  с блокировками стационарные вероятности состояний имеют вид

$$\pi_s = \prod_{i=1}^L \frac{1}{s_i!} \left( \frac{\omega_i}{\mu_i} \right)^{s_i} \mathbf{1}(s_i \leq M_i) \Big/ \sum_{\substack{s: s \in X \\ \& s \leq M}} \prod_{i=1}^L \frac{1}{s_i!} \left( \frac{\omega_i}{\mu_i} \right)^{s_i}, \quad s \in X.$$

**Доказательство.** Подставляя (11) в (12), имеем:

$$y_{d,b} = \prod_{i=1}^L \omega_i^{d_i} \mathbf{1}(b_i + d_i \leq M_i).$$

Учитывая, что  $s = b + d$  и  $s' = b + d'$ , получим:

$$\frac{y_{d,b}}{y_{d',b}} = \frac{\prod_{i=1}^L \omega_i^{d_i} \mathbf{1}(b_i + d_i \leq M_i)}{\prod_{i=1}^L \omega_i^{d'_i} \mathbf{1}(b_i + d'_i \leq M_i)} = \frac{\prod_{i=1}^L \omega_i^{s_i - b_i} \mathbf{1}(s_i \leq M_i)}{\prod_{i=1}^L \omega_i^{s'_i - b_i} \mathbf{1}(s'_i \leq M_i)} = \frac{\prod_{i=1}^L \omega_i^{s_i} \mathbf{1}(s_i \leq M_i)}{\prod_{i=1}^L \omega_i^{s'_i} \mathbf{1}(s'_i \leq M_i)}.$$

Тогда из отношения (9) следует, что

$$\Gamma_s = \prod_{i=1}^L \omega_i^{s_i} \mathbf{1}(s_i \leq M_i).$$

С учетом выражений (6), (13) и (5) получим:

$$\pi_s = G \prod_{i=1}^L \frac{1}{s_i!} \left( \frac{\omega_i}{\mu_i} \right)^{s_i} \mathbf{1}(s_i \leq M_i), \quad s \in X,$$

где

$$G = \left( \sum_{\substack{s: s \in X \\ \& s \leq M}} \prod_{i=1}^L \frac{1}{s_i!} \left( \frac{\omega_i}{\mu_i} \right)^{s_i} \right)^{-1}. \quad \square$$

## 2. СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КЛАСТЕРАМИ

Рассмотрим сеть массового обслуживания  $N^c$  с групповыми переходами требований. Сеть содержит  $L$  систем массового обслуживания  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , и  $H$  требований одного класса. Вероятности перехода требований между системами сети определяются маршрутной матрицей  $\Theta = (\theta_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ . Система  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , включает  $H$  одинаковых обслуживающих приборов. Системы обслуживания принадлежат одному из  $R$  непересекающихся кластеров (групп систем). С каждым из кластеров  $N_r^c$ ,  $r = 1, \dots, R$ , связано множество  $C_r$  номеров систем. Интенсивности обслуживания в системах одного кластера одинаковы и равны  $\hat{\mu}_r$ ,  $0 < \hat{\mu}_r < 1$ ,  $r = 1, \dots, R$  (данные ограничения на значения  $\hat{\mu}_r$  не влияют на общность полученных результатов). Длительность обслуживания требований в системе  $S_i$ ,  $i \in C_r$ , имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\hat{\mu}_r$ . Состояние сети  $N^c$  определяется вектором  $s = (s_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , где  $s_i$  — число требований, находящихся в системе  $S_i$ ;  $X$  — множество состояний сети.

Обозначим через  $n(s) = (n_r(s))$ ,  $r = 1, \dots, R$ , вектор числа требований, находящихся в кластерах; а через  $m(d) = (m_r(d))$  — вектор числа требований, уходящих из кластеров, т. е.

$$n_r(s) = \sum_{i \in C_r} s_i, \quad m_r(d) = \sum_{i \in C_r} d_i.$$

Вектор  $n(s)$  определяет способ распределения  $H$  требований между  $R$  кластерами при пребывании сети  $N^c$  в состоянии  $s$ . Пусть  $Q$  — общее число способов распределения  $H$  требований между  $R$  кластерами. Вектор  $n^{(q)} = (n_r^{(q)})$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $q \in \{1, \dots, Q\}$ , где  $n_r^{(q)}$  — число требований в кластере  $N_r^c$  при  $q$ -м способе распределения требований, назовем макросостоянием сети  $N^c$ ; число макросостояний сети  $N^c$  равно  $Q$ . Макросостоянию  $n^{(q)}$  соответствует множество состояний  $X_q$ , т. е.  $n(s) = n^{(q)}$  для всех  $s \in X_q$ . Очевидно,  $X = \bigcup_{q=1}^Q X_q$ .

Сеть  $N^c$  может рассматриваться как частный случай сети  $N^e$ , когда отсутствуют блокировки переходов групп требований, т. е.  $\kappa_{dd',b} = 1$  для всех  $d, d'$  и  $b$ , и  $\mu_i = \hat{\mu}_r$ ,  $i \in C_r$ ,  $r = 1, \dots, R$ . Таким образом, для сети  $N^c$  функция  $u_{d,s}^*$  может быть найдена из выражения, полученного для сети  $N^e$ :

$$u_{d,s}^* = \prod_{r=1}^R \prod_{i \in C_r} \binom{s_i}{d_i} \hat{\mu}_r^{m_r(d)} (1 - \hat{\mu}_r)^{n_r(s) - m_r(d)}.$$

Тогда функция  $u_{d,s}$  удовлетворяет (3), если положить

$$\Psi_{s-d} = \prod_{r=1}^R \prod_{i \in C_r} \frac{1}{(s_i - d_i)!} \left( \frac{1 - \hat{\mu}_r}{\hat{\mu}_r} \right)^{n_r(s) - m_r(d)}, \quad (14)$$

$$\Phi_s = \prod_{r=1}^R \prod_{i \in C_r} \frac{1}{s_i!} \left( \frac{1}{\hat{\mu}_r} \right)^{n_r(s)}. \quad (15)$$

**Теорема 2.** Для сети  $N^c$  стационарные вероятности состояний имеют вид

$$\pi_s = \frac{1}{G} \prod_{r=1}^R \left( \frac{1}{\hat{\mu}_r} \right)^{n_r(s)} \prod_{i \in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}, \quad s \in X, \quad (16)$$

где

$$G = \sum_{s \in X} \prod_{r=1}^R \left( \frac{1}{\hat{\mu}_r} \right)^{n_r(s)} \prod_{i \in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}.$$





**Доказательство.** Так как в сети  $N^c$  маршрутизация требований такая же, как и в сети  $N^e$ , без блокировок переходов групп требований, имеем  $\sigma_s = \prod_{i=1}^L \omega_i^{s_i}$ ,  $s \in X$ , или

$$\sigma_s = \prod_{r=1}^R \prod_{i \in C_r} \omega_i^{s_i}, \quad s \in X. \quad (17)$$

Подставляя (15) и (17) в (5), получим (16), где  $G$  — нормализующая константа.  $\square$

Математическое ожидание (м. о.) числа требований  $\bar{s}_i$  в системе  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , вычисляется по формуле

$$\bar{s}_i = \sum_{k=1}^H k \sum_{\substack{s: s \in X \\ \& s_i = k}} \pi_s.$$

Для кластера  $N_r^c$ ,  $r = 1, \dots, R$ , м. о. числа требований  $\bar{n}_r = \sum_{i \in C_r} \bar{s}_i$ .

Предположим, что требуется, чтобы число требований в кластере  $N_1^c$  существенно не превосходило некоторого фиксированного числа  $\hat{M}_1$ . Этого можно достичь замедлением обслуживания в других кластерах посредством использования множителя  $\alpha_r$  в кластере  $N_r^c$ ,  $r = 2, \dots, R$ , когда  $n_1(s) > \hat{M}_1$ ,  $s \in X$ . Таким образом, получим обслуживание в сети, учитывающее взаимную зависимость кластеров [13]. Тогда

$$u_{d,s} = \begin{cases} \frac{\Psi_{s-d}}{\Phi_s}, & n_1(s) \leq \hat{M}_1, \\ \frac{\Psi_{s-d}}{\Phi_s \prod_{r=2}^R \alpha_r}, & n_1(s) > \hat{M}_1, \end{cases}$$

функция  $\Psi_{s-d}$  определяется выражением (14), а функция  $\Phi_s$  имеет вид

$$\Phi_s = \left[ \prod_{r=2}^R \alpha_r - \left( \prod_{r=2}^R \alpha_r - 1 \right) \mathbf{1}(n_1(s) \leq \hat{M}_1) \right] \prod_{r=1}^R \prod_{i \in C_r} \frac{1}{s_i!} \left( \frac{1}{\hat{\mu}_r} \right)^{n_r(s)}. \quad (18)$$

**Теорема 3.** Для сети  $N^c$  с взаимозависимыми кластерами, если требуется, чтобы  $n_1(s) \leq \hat{M}_1$ , стационарные вероятности состояний имеют вид

$$\pi_s = \frac{1}{G} \left[ \prod_{r=2}^R \alpha_r - \left( \prod_{r=2}^R \alpha_r - 1 \right) \mathbf{1}(n_1(s) \leq \hat{M}_1) \right] \prod_{r=1}^R \left( \frac{1}{\hat{\mu}_r} \right)^{n_r(s)} \prod_{i \in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}, \quad s \in X,$$

где

$$G = \sum_{s \in X} \left[ \prod_{r=2}^R \alpha_r - \left( \prod_{r=2}^R \alpha_r - 1 \right) \mathbf{1}(n_1(s) \leq \hat{M}_1) \right] \prod_{r=1}^R \left( \frac{1}{\hat{\mu}_r} \right)^{n_r(s)} \prod_{i \in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}.$$

**Доказательство** проводится аналогично доказательству теоремы 2 при замене выражения (15) на (18).  $\square$

### 3. ПРИМЕРЫ

**Пример 1** (сеть с блокировками). Рассмотрим сеть массового обслуживания  $N^e$  с параметрами:  $L = 4$ ,  $H = 10$ ,  $\mu = (0, 4; 0, 3; 0, 1; 0, 2)$ ,

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Для сети  $N^e$  при различных значениях вектора  $M$  вычислим стационарные вероятности состояний сети и м. о. числа требований в системах  $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \bar{s}_4)$ . Для сети без блокировок,



т. е. когда  $M = (10, 10, 10, 10)$ ,  $\bar{s} = (0, 938; 1, 512; 5, 614; 1, 936)$ . Для сети с блокировками при векторе ограничений  $M = (6, 6, 6, 6)$  имеем  $\bar{s} = (1, 104; 1, 777; 4, 847; 2, 272)$ , при  $M = (5, 5, 5, 5)$   $\bar{s} = (1, 243; 1, 987; 4, 264; 2, 506)$ , а при  $M = (4, 4, 4, 4)$   $\bar{s} = (1, 495; 2, 259; 3, 592; 2, 654)$ . Из приведенных результатов видно, что при уменьшении значений компонент вектора  $M$  во всех случаях выполняется условие  $\bar{s} < M$ , что объясняется увеличением стационарных вероятностей пребывания сети  $N^e$  в состояниях, удовлетворяющих ограничению  $s \leq M$ , за счет блокировки переходов сети в такие состояния, когда  $s > M$ . Метод блокировки может использоваться для перераспределения требований между системами обслуживания в сети  $N^e$ . Например, чтобы уменьшить  $\bar{s}_3$ , которое в сети без блокировок существенно превосходит м. о. числа требований в остальных системах, наложим соответствующее ограничение: если  $M = (10, 10, 5, 10)$ , то  $\bar{s} = (1, 232; 1, 985; 4, 240; 2, 543)$ ; если  $M = (10, 10, 4, 10)$ , то  $\bar{s} = (1, 388; 2, 236; 3, 511; 2, 865)$ ; если  $M = (10, 10, 3, 10)$ , то  $\bar{s} = (1, 562; 2, 516; 2, 698; 3, 224)$ .

**Пример 2** (сеть с кластерами). Рассмотрим сеть массового обслуживания  $N^c$ , состоящую из  $R = 2$  кластеров  $N_1^c$  и  $N_2^c$ , с параметрами:  $L = 4$ ,  $H = 4$ ,  $C_1 = \{1, 2\}$ ,  $C_2 = \{3, 4\}$ ,  $\hat{\mu} = (0, 1; 0, 9)$ , матрица  $\Theta$  имеет вид (19).

Определим макросостояния сети:  $n^{(1)} = (2, 2)$ ,  $n^{(2)} = (3, 1)$ ,  $n^{(3)} = (1, 3)$ ,  $n^{(4)} = (4, 0)$ ,  $n^{(5)} = (0, 4)$ . По формуле  $\pi_{n^{(q)}} = \sum_{s \in X_q} \pi_s$ ,  $q = 1, \dots, 5$ , вычислим стационарные вероятности макросостояний:  $\pi_{n^{(1)}} = 0,060$ ,  $\pi_{n^{(2)}} = 0,315$ ,  $\pi_{n^{(3)}} = 0,005$ ,  $\pi_{n^{(4)}} = 0,619$ ,  $\pi_{n^{(5)}} = 0,001$ . Вычислим м. о. числа требований в системах сети  $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \bar{s}_4)$  и м. о. числа требований в кластерах  $\bar{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ :  $\bar{s} = (1, 607; 1, 942; 0, 267; 0, 184)$ ,  $\bar{n} = (3, 549; 0, 451)$ .

Далее рассмотрим сеть  $N'^c$ , которая отличается от сети  $N^c$  тем, что при выполнении условия  $n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1$ , где  $\hat{M}_1$  — заданное число требований в кластере  $N_1^c$ , в кластере  $N_2^c$  осуществляется изменение интенсивности обслуживания посредством использования множителя  $\alpha_2$ . Стационарные вероятности макросостояний сети  $N'^c$  при различных значениях  $\alpha_2$  и  $\hat{M}_1 = 2$  приведены в табл. 1. Также в табл. 1 приведена стационарная вероятность  $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$  пребывания сети  $N'^c$  в макросостояниях, удовлетворяющих условию  $n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1$ , например, при  $\hat{M}_1 = 1$   $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}} = \pi_{n^{(1)}} + \pi_{n^{(2)}} + \pi_{n^{(4)}}$ , при  $\hat{M}_1 = 2$   $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}} = \pi_{n^{(2)}} + \pi_{n^{(4)}}$ , при  $\hat{M}_1 = 3$   $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}} = \pi_{n^{(4)}}$ .

Таблица 1

Стационарные вероятности макросостояний сети  $N'^c$

$\alpha_2$	5	2	1	0,9	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01
$\hat{M}_1 = 2$									
$\pi_{n^{(1)}}$	0,013	0,031	0,060	0,066	0,113	0,238	0,379	0,536	0,804
$\pi_{n^{(2)}}$	0,332	0,326	0,315	0,313	0,296	0,250	0,198	0,141	0,042
$\pi_{n^{(3)}}$	0,001	0,003	0,005	0,006	0,010	0,020	0,032	0,045	0,068
$\pi_{n^{(4)}}$	0,654	0,640	0,620	0,615	0,581	0,491	0,390	0,276	0,083
$\pi_{n^{(5)}}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,003
$\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$	0,986	0,966	0,935	0,928	0,877	0,741	0,588	0,417	0,125
$\hat{M}_1 = 1$									
$\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$	0,999	0,997	0,995	0,994	0,990	0,974	0,950	0,904	0,654
$\hat{M}_1 = 3$									
$\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$	0,891	0,765	0,619	0,594	0,449	0,246	0,140	0,075	0,016

Из табл. 1 видно, что при всех значениях  $\hat{M}_1$  и  $\alpha_2 > 1$  при увеличении  $\alpha_2$  вероятность  $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$  возрастает, т. е. возрастает вероятность «неблагоприятных» состояний (например, при  $\hat{M}_1 = 2$  увеличиваются вероятности макросостояний  $n^{(2)}$  и  $n^{(4)}$ ), а при  $\alpha_2 < 1$  и уменьшении  $\alpha_2$  вероятность  $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$  уменьшается, т. е. уменьшается вероятность «неблагоприятных» состояний. Значению  $\alpha_2 = 1$  соответствуют результаты, полученные для сети  $N^c$ .

В табл. 2 приведены м. о. числа требований в системах и кластерах сети  $N'^c$  при  $\hat{M}_1 = 2$  и различных значениях  $\alpha_2 < 1$ .



Таблица 2

Математические ожидания числа требований в системах  
и кластерах сети  $N^{lc}$  при  $\hat{M}_1 = 2$

Математические ожидания	$\alpha_2$					
	0,9	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001
$\bar{s}'_1$	1,602	1,561	1,454	1,333	0,967	0,879
$\bar{s}'_2$	1,935	1,887	1,756	1,611	1,168	1,063
$\bar{s}'_3$	0,274	0,326	0,467	0,625	1,104	1,218
$\bar{s}'_4$	0,189	0,226	0,323	0,431	0,761	0,840
$\bar{n}'_1$	3,537	3,448	3,210	2,944	2,135	1,942
$\bar{n}'_2$	0,463	0,552	0,790	1,056	1,865	2,058

Из табл. 2 видно, что при уменьшении  $\alpha_2$  м. о. числа требований в системах и кластерах сети изменяются так, чтобы при некотором значении  $\alpha_2$  выполнялось условие  $\bar{n}'_1 \leq \hat{M}_1$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сети массового обслуживания с групповыми переходами требований широко применяются в качестве математических моделей вычислительных и информационных систем, вычислительных и коммуникационных сетей, производственных систем. Для моделирования систем с ограниченными ресурсами эффективно используются сети обслуживания с блокировками. Сети обслуживания с кластерами применяются при исследовании стохастических информационных систем, когда необходимо оценивать степень влияния на эволюцию системы ее отдельных подсистем, а также при анализе систем методами декомпозиции. Особую важность представляет класс сетей массового обслуживания, стационарное распределение которых имеет мультипликативную форму, так как в этом случае существенно упрощается вычисление стационарных характеристик исследуемых сетей. К данному классу относятся рассмотренные в этой работе сети обслуживания. Они могут найти практическое применение при исследовании сетевых стохастических систем, в моделях которых — сетях массового обслуживания — размеры поступающих в системы групп требований не превосходят числа обслуживающих приборов в системах. В противном случае можно применить один из способов блокировки переходов групп требований, тогда стационарные характеристики исследуемых сетей будут приближенными и их точность будет зависеть от значений вероятностей событий, связанных с блокировками переходов. Предположение об экспоненциальном распределении длительностей обслуживания требований при практическом использовании рассмотренных в статье сетей массового обслуживания в качестве моделей дискретных стохастических систем часто не является ограничивающим. Распределения длительностей обслуживания в общем случае могут быть произвольными, если при использовании этих распределений ошибки определения стационарных характеристик модельных сетей обслуживания не превышают допустимых значений.

## Библиографический список

1. Balsamo S., Nitto Persone V. A survey of product form queueing networks with blocking and their equivalences // Ann. Oper. Res. 1994. Vol. 48. P. 31–61.
2. Voxma O. J., Konheim A. G. Approximate analysis of exponential queueing systems with blocking // Acta Informatica. 1981. Vol. 15. P. 19–66.
3. Clo M. C. MVA for product-form cyclic queueing networks with blocking // Ann. Oper. Res. 1998. Vol. 79. P. 83–96.
4. Balsamo S., Clo M. C. A convolution algorithm for product-form queueing networks with blocking // Ann. Oper. Res. 1998. Vol. 79. P. 97–117.
5. Liu X., Buzacott J. A. A decomposition-related throughput property of tandem queueing networks with blocking // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 361–383.
6. Strelen J. C., Bark B., Becker J., Jonas V. Analysis of queueing networks with blocking using a new aggregation technique // Ann. Oper. Res. 1998. Vol. 79. P. 121–142.
7. Boucherie R. J., Dijk N. M. A generalization of Norton's theorem for queueing networks // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 251–289.
8. Dijk N. M., Sluis E. Simple product-form bounds for queueing networks with finite clusters // Ann. Oper. Res. 2002. Vol. 113. P. 175–195.
9. Boucherie R. J., Dijk N. M. Queueing networks :



- a fundamental approach. N.Y.; Heidelberg; London : Springer Science+Business Media, LLC, 2011. 823 p.
10. Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // *Queueing Systems*. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
  11. Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., Dijk N. M. Closed queueing networks with batch services // *Queueing Systems*. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
  12. Boucherie R. J., Dijk N. M. Spatial birth-death processes with multiple changes and applications to batch service networks and clustering processes // *Adv. Appl. Prob.* 1991. Vol. 22. P. 433–455.
  13. Boucherie R. J., Dijk N. M. Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // *Adv. Appl. Prob.* 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.
  14. Boucherie R. J. Batch routing queueing networks with jump-over blocking // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 1996. Vol. 10. P. 287–297.
  15. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // *Queueing Systems*. 1997. Vol. 25. P. 45–75.
  16. Bause F., Boucherie R. J., Buchholz P. Norton's theorem for batch routing queueing networks // *Stochastic Models*. 2001. Vol. 17. P. 39–60.
  17. Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П. Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 41–46.

## Queueing Networks with Batch Movements of Customers, Blocking and Clusters

Yu. I. Mitrophanov, V. I. Dolgov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, MitrophanovYul@info.sgu.ru, www@vidolgov.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

Two types queueing networks with batch movements of customers — networks with blocking and networks with clusters are investigated. Product form stationary distribution for networks with blocking of transitions in states, in which the number of customers in queueing systems exceeds given values, is derived. For queueing networks with disjoint clusters of systems the problem of analyzing is solved and the product form stationary distribution is found. Examples of analysis of the network with blocking and the network with clusters are presented.

*Key words:* queueing networks, batch movements of customers, blocking, clusters, analysis of queueing networks.

### References

1. Balsamo S., Nitto Persone V. A survey of product form queueing networks with blocking and their equivalences. *Ann. Oper. Res.*, 1994, vol. 48, pp. 31–61.
2. Boxma O. J., Konheim A. G. Approximate analysis of exponential queueing systems with blocking. *Acta Informatica*, 1981, vol. 15, pp. 19–66.
3. Clo M. C. MVA for product-form cyclic queueing networks with blocking. *Ann. Oper. Res.*, 1998, vol. 79, pp. 83–96.
4. Balsamo S., Clo M. C. A convolution algorithm for product-form queueing networks with blocking. *Ann. Oper. Res.*, 1998, vol. 79, pp. 97–117.
5. Liu X., Buzacott J. A. A decomposition-related throughput property of tandem queueing networks with blocking. *Queueing Systems*, 1993, vol. 13, pp. 361–383.
6. Strelen J. C., Bark B., Becker J., Jonas V. Analysis of queueing networks with blocking using a new aggregation technique. *Ann. Oper. Res.*, 1998, vol. 79, pp. 121–142.
7. Boucherie R. J., Dijk N. M. A generalization of Norton's theorem for queueing networks. *Queueing Systems*, 1993, vol. 13, pp. 251–289.
8. Dijk N. M., Sluis E. Simple product-form bounds for queueing networks with finite clusters. *Ann. Oper. Res.*, 2002, vol. 113, pp. 175–195.
9. Boucherie R. J., Dijk N. M. *Queueing networks: a fundamental approach*. New York, Heidelberg, London, Springer Science+Business Media, LLC, 2011, 823 p.
10. Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 71–88.
11. Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., Dijk N. M. Closed queueing networks with batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 59–70.
12. Boucherie R. J., Dijk N. M. Spatial birth-death processes with multiple changes and applications to batch service networks and clustering processes. *Adv. Appl. Prob.*, 1991, vol. 22, pp. 433–455.
13. Boucherie R. J., Dijk N. M. Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions. *Adv. Appl. Prob.*, 1991, vol. 23, no. 1, pp. 152–187.
14. Boucherie R. J. Batch routing queueing networks with jump-over blocking. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1996, vol. 10, pp. 287–297.
15. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing. *Queueing Systems*, 1997, vol. 25, pp. 45–75.



16. Bause F., Boucherie R. J., Buchholz P. Norton's theorem for batch routing queueing networks. *Stochastic Models*, 2001, vol. 17, pp. 39–60.
17. Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of heterogeneous queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 41–46 (in Russian).

УДК 519.713.2, 512.534

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ АВТОНОМНЫМИ ВХОДНЫМИ СИГНАЛАМИ

В. А. Молчанов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, v.molchanov@inbox.ru

Универсальные планарные автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категории автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами плоскостей. Основной результат работы показывает, что любой универсальный планарный автомат изоморфен многосортной алгебраической системе, канонически построенной из автономных входных сигналов исходного автомата.

*Ключевые слова:* автоматы, полугруппы, плоскости, многосортные алгебраические системы.

### ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматов является одним из основных разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации, естественно возникающие в многочисленных задачах теории управления, теории связи и многих других. В общем случае такое устройство может находиться в различных состояниях, которые изменяются под влиянием определенных внешних воздействий (входных сигналов) и, в свою очередь, сами воздействуют на внешнюю среду (с помощью выходных сигналов). Математической моделью такого устройства является многосортная алгебраическая система, называемая автоматом и представляющая собой алгебру  $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$  с тремя основными множествами  $X, S, Y$  и двумя бинарными операциями  $\delta : X \times S \rightarrow X$ ,  $\lambda : X \times S \rightarrow Y$ . При этом  $X$  называется множеством состояний автомата,  $S$  — множеством входных сигналов,  $Y$  — множеством выходных сигналов,  $\delta$  — функцией переходов и  $\lambda$  — выходной функцией автомата. Функция переходов  $\delta$  для каждого входного сигнала  $s \in S$  определяет состояние  $\delta(x, s)$ , в которое переходит автомат из состояния  $x \in X$  под действием сигнала  $s$ . Аналогично выходная функция  $\lambda$  для каждого входного сигнала  $s \in S$  определяет выходной сигнал  $\lambda(x, s)$ , который выдает автомат под действием сигнала  $s$ .

Таким образом, для каждого входного сигнала  $s \in S$  автомат  $\mathbf{A}$  определяет функцию переходов  $\delta_s : X \rightarrow X$  и выходную функцию  $\lambda_s : X \rightarrow Y$  по формулам:  $\delta_s(x) = \delta(x, s)$  и  $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$ . Для элементов  $s, t \in S$  последовательное действие функций переходов  $\delta_s, \delta_t$  так определяет ассоциативное умножение входных сигналов  $s \cdot t$ , что  $\delta_{s \cdot t} = \delta_s \delta_t$ . Поэтому обычно предполагается, что множество входных сигналов  $S$  является полугруппой, которая обозначается символом  $\text{Inp}(\mathbf{A})$  и при любых значениях  $x \in X$ ,  $s, t \in S$ , удовлетворяет условиям  $\delta(x, s \cdot t) = \delta(\delta(x, s), t)$ ,  $\lambda(x, s \cdot t) = \lambda(\delta(x, s), t)$ .

Входной сигнал  $a \in S$  автомата  $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$  называется автономным, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т.е. найдутся такое состояние автомата, обозначаемое  $a_1$ , и такой выходной сигнал автомата, обозначаемый  $a_2$ , что  $\delta(x, a) = a_1$ ,  $\lambda(x, a) = a_2$  для всех состояний автомата  $x \in X$ .

В зависимости от специфики рассматриваемых задач математической кибернетики устройство преобразования информации может моделироваться автоматом, у которого множества состояний  $X$  и выходных сигналов  $Y$  наделены дополнительной математической структурой (например, структурой линейного пространства, упорядоченного множества, топологического пространства и др.), которая сохраняется функциями переходов и выходными функциями этого автомата (см., например, [1]). Так, известные конкретные задачи математической кибернетики приводят к понятиям линейных, упорядоченных и топологических автоматов, которые изучались в работах [1–4]. При таком подходе один из



основных объектов математической кибернетики — автомат — представляет собой предмет научного интереса и актуальных исследований алгебраической теории автоматов, которая, с одной стороны, является важным разделом универсальной алгебры и, с другой стороны, имеет разнообразные приложения к комбинаторным исследованиям автоматов, связанным с их поведением, анализом и синтезом, к теории языков и алгоритмов и ко многим другим разделам математической кибернетики [1, 5].

В настоящей работе продолжают исследования этого направления: здесь изучаются алгебраические свойства так называемых планарных автоматов, т. е. автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой плоскости. Следуя [6] под плоскостью в работе понимается алгебраическая система вида  $\Pi = (X, L)$ , где  $X$  — непустое множество точек и  $L$  — семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам:  $(A_1)$  через любые две точки проходит одна и только одна прямая;  $(A_2)$  каждая прямая содержит, по крайней мере, три точки;  $(A_3)$  в множестве  $X$  есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость  $\Pi$  является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой  $l \in L$  и любой точки  $x \in X \setminus l$  существует такая единственная прямая  $l'$ , что  $x \in l'$  и  $l \cap l' = \emptyset$ .

Напомним, что точки плоскости, лежащие на одной ее прямой, называются коллинеарными. Гомоморфизмом плоскости  $\Pi = (X, L)$  в плоскость  $\Pi' = (X', L')$  называется отображение  $\varphi : X \rightarrow X'$ , которое коллинеарные точки плоскости  $\Pi$  отображает в коллинеарные точки плоскости  $\Pi'$ . Множество всех гомоморфизмов  $\Pi$  в  $\Pi'$  обозначается как  $\text{Hom}(\Pi, \Pi')$ . Гомоморфизм плоскости  $\Pi$  в себя называется эндоморфизмом этой плоскости. Множество всех эндоморфизмов плоскости  $\Pi$  с операцией композиции образует полугруппу  $\text{End}(\Pi)$ .

С алгебраической точки зрения плоскость  $\Pi = (X, L)$  представляет собой двухсортную алгебраическую систему  $\Pi = (X, L, \rho)$  с двумя базисными множествами  $X, L$  и бинарным отношением  $\rho \subset X \times L$ , которое для элементов  $x \in X, l \in L$  определяется по формуле  $(x, l) \in \rho \iff x \in l$  и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} (A'_1) \quad & (\forall x, y \in X) (x \neq y \implies (\exists l \in L) ((x, l) \in \rho \wedge (y, l) \in \rho)), \\ (A'_2) \quad & (\forall l \in L) (\exists x_1, x_2, x_3 \in X) \left( \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq 3} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (x_i, l) \in \rho \right), \\ (A'_3) \quad & (\exists x_1, x_2, x_3 \in X) (\forall l \in L) \neg \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (x_i, l) \in \rho \right). \end{aligned}$$

Изоморфизмом таких алгебраических систем  $\Pi = (X, L, \rho)$ ,  $\Pi' = (X', L', \rho')$  является упорядоченная пара  $\pi = (\varphi, \psi)$  биекций  $\varphi : X \rightarrow X'$ ,  $\psi : L \rightarrow L'$ , сохраняющая отношения этих систем, т. е. для любых  $x \in X, l \in L$  выполняется условие  $(x, l) \in \rho \iff (\varphi(x), \psi(l)) \in \rho'$ .

По определению [1] планарные автоматы являются структуризованными автоматами  $\mathbf{A} = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$  с множеством состояний  $X_1$  и множеством выходных сигналов  $X_2$ , наделенными структурами плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$  и  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ , полугруппой входных сигналов  $S$ , функцией переходов  $\delta : X_1 \times S \rightarrow X_1$  и выходной функцией  $\lambda : X_1 \times S \rightarrow X_2$ , для которых при каждом фиксированном  $s \in S$  преобразование  $\delta_s : X_1 \rightarrow X_1$  является эндоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  и отображение  $\lambda_s : X_1 \rightarrow X_2$  является гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ . Такие автоматы обозначаются символом  $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$ .

Изоморфизмом планарных автоматов  $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$ ,  $\mathbf{A}' = (\Pi'_1, S', \Pi'_2, \delta', \lambda')$  является упорядоченная тройка  $\theta = (\pi_1, \gamma, \pi_2)$  изоморфизмов плоскостей  $\pi_1 = (\varphi_1, \psi_1) : \Pi_1 \rightarrow \Pi'_1$ ,  $\pi_2 = (\varphi_2, \psi_2) : \Pi_2 \rightarrow \Pi'_2$  и полугрупп  $\gamma : S \rightarrow S'$ , сохраняющая функции переходов и выходные функции этих автоматов, т. е. для любых  $x \in X_1, s \in S$  выполняется условие

$$\varphi_1(\delta(x, s)) = \delta'(\varphi_1(x), \gamma(s)), \quad \varphi_2(\lambda(x, s)) = \lambda'(\varphi_1(x), \gamma(s)).$$

Главное внимание в наших исследованиях уделяется так называемым универсальным планарным автоматам, подавтоматами которых охватывают все гомоморфные образы рассматриваемых планарных автоматов. Такой универсальный автомат для любых плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  определяется как автомат  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2) = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$  с полугруппой входных сигналов  $S$ , состоящей из всех пар  $s = (\varphi, \psi)$



эндоморфизмов  $\varphi$  плоскости  $\Pi_1$  и гомоморфизмов  $\psi$  плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ , функцией переходов  $\delta(x, s) = \varphi(x)$  и выходной функцией  $\lambda(x, s) = \psi(x)$  (здесь  $x \in X_1$ ,  $s = (\varphi, \psi) \in S$ ). Напомним [1], что умножение таких входных сигналов  $s = (\varphi, \psi)$ ,  $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$  определяется по формуле  $s \cdot s_1 = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ .

В таком контексте алгебраическая теория планарных автоматов имеет непосредственное отношение к одному из основных разделов современной алгебры — обобщенной теории Галуа, начало которой было положено в исследованиях Э. Галуа и которая посвящается изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебр отображений, специальным образом связанных с исходными объектами. В нашем случае изучаемым математическим объектом является универсальный планарный автомат  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  и производной алгеброй отображений — его полугруппа входных сигналов  $S = \text{End}(\Pi_1) \times \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ . Следовательно, алгебраическая теория планарных автоматов тесным образом связана с общеизвестной задачей определяемости математических объектов их автоморфизмами и эндоморфизмами, которая сформулирована в числе прочих актуальных математических проблем в известной книге С.Улама [7].

Проводимые автором исследования планарных автоматов следуют сложившемуся традиционному набору вопросов обобщенной теории Галуа: принципиальное значение имеет задача о том, насколько хорошо производная алгебра отображений определяет исходный объект; затем исследуется, какими свойствами характеризуется такая производная алгебра отображений; наконец, с помощью полученных результатов изучаются взаимосвязи свойств исходного объекта и его производной алгебры отображений. Такие вопросы для групп автоморфизмов алгебраических систем, полугрупп эндоморфизмов графов, колец линейных преобразований векторных пространств и других алгебр преобразований весьма успешно решались Б. И. Плоткиным [1], Л. М. Глускиным [8] и другими авторами. Принципиальным отличием проводимого исследования планарных автоматов является положенное в его основу решение гораздо более сложной проблемы обобщенной теории Галуа о конкретной характеристике производных алгебр отображений [9], т. е. проблемы описания таких условий, при которых алгебра отображений равна производной алгебре изучаемого объекта. Примером такого рода задачи является известная и до сих пор не решенная проблема Д.Кенига [10] о группе автоморфизмов графа. В этом направлении отдельные продвижения были сделаны М. Краснером [11], Б. Йонсоном [10] и другими авторами для полугрупп эндоморфизмов релятивов и групп автоморфизмов универсальных алгебр.

Основной результат работы [12] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов. Решение задачи конкретной характеристики универсальных планарных автоматов приводится в работе [13]. Центральный результат настоящей работы описывает представление универсального планарного автомата в виде многосортной алгебраической системы, канонически построенной из автономных входных сигналов этого автомата. Эта конструкция является одним из основных инструментов доказательства относительно элементарной определимости рассматриваемых универсальных планарных автоматов в классе полугрупп, которая позволяет последовательно проанализировать взаимосвязь элементарных свойств универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных сигналов.

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Далее рассматривается универсальный планарный автомат  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$  и  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ . Для такого автомата естественно определяются следующие канонические отношения:

- 1) множество  $C$  всех автономных входных сигналов автомата  $\mathbf{A}$ ;
- 2) бинарное отношение  $\varepsilon_1$  на множестве  $C$ , которое состоит из таких упорядоченных пар  $(a, b)$  автономных входных сигналов  $a, b \in C$ , действия которых одинаково преобразуют состояния автомата  $\mathbf{A}$ , т. е. по определению  $(a, b) \in \varepsilon_1 \iff a_1 = b_1$ ;
- 3) бинарное отношение  $\varepsilon_2$  на множестве  $C$ , которое состоит из таких упорядоченных пар  $(a, b)$  автономных входных сигналов  $a, b \in C$ , при действии которых автоматом  $\mathbf{A}$  выдаются одинаковые выходные сигналы, т. е. по определению  $(a, b) \in \varepsilon_2 \iff a_2 = b_2$ ;
- 4) бинарное отношение  $\eta_i$  на множестве  $C^2$  ( $i = 1, 2$ ), которое состоит из таких упорядоченных пар  $(\alpha, \beta)$  элементов  $\alpha = (a, b)$  и  $\beta = (c, d)$  с автономными входными сигналами  $a, b, c, d \in C$ ,



при действии которых состояния автомата  $\mathbf{A}$  отображаются в коллинеарные точки  $a_i, b_i, c_i, d_i$  соответствующей плоскости  $\Pi_i$ , т. е. по определению

$$(\alpha, \beta) \in \eta_i \iff \text{точки } a_i, b_i, c_i, d_i \text{ коллинеарны в плоскости } \Pi_i.$$

**Лемма.** Для любых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ ,  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$  канонические отношения универсального планарного автомата  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1) для любого состояния (соответственно выходного сигнала)  $x$  автомата  $\mathbf{A}$  найдется такой автономный входной сигнал этого автомата, обозначаемый  $\tilde{x}$ , при действии которого все состояния автомата переходят в состояние  $x$  (соответственно отображаются в выходной сигнал  $x$ ), т. е. выполняется равенство  $\tilde{x}_1 = x$  (соответственно  $\tilde{x}_2 = x$ );
- 2) для каждого  $i = 1, 2$  отношение  $\varepsilon_i$  является эквивалентностью на множестве  $C$  и отображение  $\varphi_i : X_i \rightarrow C/\varepsilon_i$ , определяемое для элементов  $x \in X_i$  по формуле  $\varphi_i(x) = \varepsilon_i(\tilde{x})$ , является биекцией  $X_i$  на фактор-множество  $C/\varepsilon_i$ ;
- 3) для каждого  $i = 1, 2$  ограничение отношения  $\eta_i$  на множестве  $D_i = C^2 \setminus \varepsilon_i$  является эквивалентностью такой, что отображение  $\psi_i : L_i \rightarrow D_i/\eta_i$ , определяемое для элементов  $l \in L_i$  по формуле  $\psi_i(l) = \eta_i(\tilde{x}, \tilde{y})$  для произвольных различных точек  $x, y \in l$ , является биекцией  $L_i$  на фактор-множество  $D_i/\eta_i$ .

**Доказательство.** Из свойства  $(A_1)$  плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$  следует, что для любого состояния  $x$  и любого выходного сигнала  $y$  автомата  $\mathbf{A}$  постоянные отображения  $\varphi : X_1 \rightarrow \{x\}$  и  $\psi : X_2 \rightarrow \{y\}$  являются соответственно эндоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  и гомоморфизмом плоскости  $\Pi_2$  в плоскость  $\Pi_1$ . Тогда пара отображений  $a = (\varphi, \psi)$  является автономным входным сигналом автомата  $\mathbf{A}$ , для которого выполняются условия  $a_1 = x, a_2 = y$ . Следовательно, справедливо утверждение 1) леммы.

Справедливость утверждения 2) леммы очевидна.

Рассмотрим ограничение отношения  $\eta_1$  на множестве  $D_1 = C^2 \setminus \varepsilon_1$ . Тогда отношение  $\eta_1$  рефлексивно, так как для любых автономных входных сигналов  $a, b \in C, a \neq b(\varepsilon_1)$  точки  $a_1, b_1 \in X_1$  различны и, значит, по свойству  $(A_1)$  плоскости  $\Pi_1$  принадлежат некоторой прямой, т. е. выполняется  $((a, b), (a, b)) \in \eta_1$ . Из определения отношения  $\eta_1$  легко видеть, что это отношение симметрично. Для доказательства транзитивности рассмотрим автономные входные сигналы  $a, b, c, d, e, f \in C$ , удовлетворяющие условиям:  $((a, b), (c, d)) \in \eta_1, ((c, d), (e, f)) \in \eta_1$ . Тогда точки  $a_1, b_1, c_1, d_1 \in X_1$  принадлежат одной прямой  $l \in L_1$ , точки  $c_1, d_1, e_1, f_1 \in X_1$  принадлежат одной прямой  $l' \in L_1$  и выполняется условие  $c \neq d(\varepsilon_1)$ , т. е.  $c_1 \neq d_1$ . Значит, по свойству  $(A_1)$  плоскости  $\Pi_1$  прямые  $l, l'$  совпадают и все точки  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$  принадлежат одной и той же прямой  $l$ . Следовательно,  $((a, b), (e, f)) \in \eta_1$  и отношение  $\eta_1$  транзитивно. Таким образом,  $\eta_1$  является эквивалентностью на множестве  $D_1$ , которая определяет фактор-множество  $D_1/\eta_1$ . Для любой прямой  $l \in L_1$  по свойству  $(A_2)$  плоскости  $\Pi_1$  найдутся, по крайней мере, две такие различные точки  $x, y \in X_1$ , что  $x, y \in l$ . Как уже показано выше, в автомате  $\mathbf{A}$  найдутся такие автономные входные сигналы  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , что  $\tilde{x}_1 = x, \tilde{y}_1 = y$ . Так как  $x \neq y$ , то  $\tilde{x} \neq \tilde{y}(\varepsilon_1)$ , упорядоченная пара  $\alpha = (\tilde{x}, \tilde{y})$  принадлежит множеству  $D_1$  и определяет класс эквивалентности  $\eta_1(\alpha)$ . Положим по определению  $\psi_1(l) = \eta_1(\tilde{x}, \tilde{y})$  и покажем, что такое соответствие определяет биекцию  $\psi_1$  множества  $L_1$  на фактор-множество  $D_1/\eta_1$ . Так как для любых различных точек  $u, v \in l$  по свойству  $(A_1)$  плоскости  $\Pi_1$  автономные входные сигналы  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}$  определяют коллинеарные точки  $\tilde{x}_1 = x, \tilde{y}_1 = y, \tilde{u}_1 = u, \tilde{v}_1 = v$  плоскости  $\Pi_1$ , то выполняется  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv (\tilde{u}, \tilde{v})(\eta_1)$  и, значит, определение значения  $\psi_1(l)$  корректно. Далее, для любого класса эквивалентности  $\eta_1(a, b)$ , определяющегося упорядоченной парой  $(a, b) \in D_1$ , выполняется  $a, b \in C$  и  $a \neq b(\varepsilon_1)$ . Значит, точки  $a_1, b_1 \in X_1$  различны и по свойству  $(A_1)$  плоскости  $\Pi_1$  принадлежат некоторой прямой  $l \in L_1$ . Тогда по определению  $\psi_1(l) = \eta_1(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1) = \eta_1(a, b)$ , т. е.  $\psi_1$  отображает множество  $L_1$  на фактор-множество  $D_1/\eta_1$ . С другой стороны, для любых двух различных прямых  $l, l' \in L_1$  по свойствам  $(A_1), (A_2)$  плоскости  $\Pi_1$  найдутся такие попарно различные точки  $x, y, u, v \in X_1$ , что  $x, y \in l, u, v \in l'$ , и, по крайней мере, одна из точек  $u, v$  не лежит на прямой  $l$ . Тогда упорядоченные пары автономных входных сигналов  $\alpha = (\tilde{x}, \tilde{y}), \beta = (\tilde{u}, \tilde{v})$  удовлетворяют условиям  $\alpha, \beta \in D_1$  и  $\alpha \neq \beta(\eta_1)$ , поскольку точки  $\tilde{x}_1 = x, \tilde{y}_1 = y, \tilde{u}_1 = u, \tilde{v}_1 = v$  по свойству  $(A_1)$  плоскости  $\Pi_1$  не могут лежать на одной прямой этой плоскости. Так как по определению  $\psi_1(l) = \eta_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \eta_1(\alpha)$  и  $\psi_1(l') = \eta_1(\tilde{u}, \tilde{v}) = \eta_1(\beta)$ , то





$\psi_1(l) \neq \psi_1(l')$  и отображение  $\psi_1$  взаимно однозначно. Таким образом,  $\psi_1$  является биекцией множества  $L_1$  на фактор-множество  $D_1/\eta_1$ .

Аналогично доказывается, что отображение  $\psi_2$  также является биекцией множества  $L_2$  на фактор-множество  $D_2/\eta_2$ . Следовательно, справедливо утверждение 3) леммы. Лемма доказана.

### ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  — универсальный планарный автомат для некоторых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$  и  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ . С помощью канонических отношений этого автомата введем следующие понятия:

- 1) для каждого  $i = 1, 2$  определим двухсортную алгебраическую систему  $\bar{\Pi}_i = (\bar{X}_i, \bar{L}_i, \bar{\rho}_i)$  с базисными множествами  $\bar{X}_i = C/\varepsilon_i$ ,  $\bar{L}_i = D_i/\eta_i$  и бинарным отношением  $\bar{\rho}_i \subset \bar{X}_i \times \bar{L}_i$ , которое для элементов  $a, b, c \in C$ ,  $b \neq c(\varepsilon_i)$  задается по формуле

$$(\varepsilon_i(a), \eta_i(b, c)) \in \bar{\rho}_i \iff \text{точки } a_i, b_i, c_i \text{ коллинеарны в плоскости } \Pi_i;$$

- 2) определим два отображения  $\bar{\delta} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_1$ ,  $\bar{\lambda} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_2$ , которые для элементов  $a \in C, s \in S$  задаются по формулам

$$\bar{\delta}(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_1(a \cdot s), \quad \bar{\lambda}(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_2(a \cdot s).$$

**Теорема.** Пусть  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  — универсальный планарный автомат для некоторых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ ,  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для каждого  $i = 1, 2$  плоскость  $\Pi_i$  изоморфна алгебраической системе  $\bar{\Pi}_i = (\bar{X}_i, \bar{L}_i, \bar{\rho}_i)$ ;
- 2) автомат  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  изоморфен планарному автомату  $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\Pi}_1, S, \bar{\Pi}_2, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$  с плоскостью состояний  $\bar{\Pi}_1$ , полугруппой входных сигналов  $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ , плоскостью выходных сигналов  $\bar{\Pi}_2$ , функцией переходов  $\bar{\delta} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_1$  и выходной функцией  $\bar{\lambda} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_2$ .

**Доказательство.** Рассмотрим двухсортную алгебраическую систему  $\bar{\Pi}_1 = (\bar{X}_1, \bar{L}_1, \rho_1)$  с базисными множествами  $\bar{X}_1 = C/\varepsilon_1$ ,  $\bar{L}_1 = D_1/\eta_1$  и бинарным отношением  $\rho_1 \subset \bar{X}_1 \times \bar{L}_1$ , которое для элементов  $a, b, c \in C$ ,  $b \neq c(\varepsilon_1)$  определяется по формуле

$$(\varepsilon_1(a), \eta_1(b, c)) \in \bar{\rho}_1 \iff \text{точки } a_1, b_1, c_1 \text{ коллинеарны в плоскости } \Pi_1.$$

В силу п. 2) леммы отображение  $\varphi_1 : X_1 \rightarrow \bar{X}_1$ , определяющееся для элементов  $x \in X_1$  по формуле  $\varphi_1(x) = \varepsilon_1(\tilde{x})$ , является биекцией множества  $X_1$  на множество  $\bar{X}_1$ . В силу п. 3) леммы отображение  $\psi_1 : L_1 \rightarrow \bar{L}_1$ , определяемое для элементов  $l \in L_1$  по формуле  $\psi_1(l) = \eta_1(\tilde{x}, \tilde{y})$  для произвольных различных точек  $x, y \in l$ , является биекцией множества  $L_1$  на множество  $\bar{L}_1$ .

Пусть в плоскости  $\Pi_1$  точка  $x \in X_1$  лежит на прямой  $l \in L_1$ . По свойству  $(A_2)$  плоскости  $\Pi_1$  найдутся, по крайней мере, две такие различные точки  $y, z \in X_1$ , что  $y, z \in l$ . Как уже показано выше, в автомате  $\mathbf{A}$  найдутся такие автономные входные сигналы  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ , что  $\tilde{x}_1 = x, \tilde{y}_1 = y, \tilde{z}_1 = z$ . Тогда  $\varphi_1(x) = \varepsilon_1(\tilde{x})$ ,  $\psi_1(l) = \eta_1(\tilde{y}, \tilde{z})$  и по определению  $(\varphi_1(x), \psi_1(l)) \in \bar{\rho}_1$ , так как точки  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_1$ . С другой стороны, если для некоторых элементов  $x \in X_1, l \in L_1$  выполняется условие  $(\varphi_1(x), \psi_1(l)) \in \bar{\rho}_1$ , то  $\varphi_1(x) = \varepsilon_1(\tilde{x})$ ,  $\psi_1(l) = \eta_1(\tilde{y}, \tilde{z})$  для некоторых различных точек  $y, z \in l$  и  $(\varepsilon_1(\tilde{x}), \eta_1(\tilde{y}, \tilde{z})) \in \bar{\rho}_1$ . По определению отношения  $\bar{\rho}_1$  последнее условие означает, что точки  $\tilde{x}_1 = x, \tilde{y}_1 = y, \tilde{z}_1 = z$  лежат на одной прямой  $l'$  плоскости  $\Pi_1$ . Так как по свойству  $(A_1)$  плоскости  $\Pi_1$  пара различных точек  $y, z$  принадлежит единственной прямой этой плоскости, то  $l = l'$ , и, следовательно,  $x \in l$ . Таким образом,  $\pi_1 = (\varphi_1, \psi_1)$  является изоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  на двухсортную алгебраическую систему  $\bar{\Pi}_1$ .

Аналогично доказывается, что упорядоченная пара отображений  $\pi_2 = (\varphi_2, \psi_2)$  является изоморфизмом плоскости  $\Pi_2$  на двухсортную алгебраическую систему  $\bar{\Pi}_2$ . Следовательно, справедливо утверждение 1) теоремы.

В силу доказанного алгебраические системы  $\bar{\Pi}_i = (\bar{X}_i, \bar{L}_i, \bar{\rho}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) удовлетворяют условиям  $(A'_1) - (A'_3)$  и, значит, являются плоскостями. Следовательно, алгебраическая система  $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\Pi}_1, S, \bar{\Pi}_2, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$  является планарным автоматом. Покажем, что упорядоченная тройка



$\theta = (\pi_1, \Delta_S, \pi_2)$  с тождественным отображением  $\Delta_S : S \rightarrow S$  является изоморфизмом универсального планарного автомата  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  на планарный автомат  $\overline{\mathbf{A}}$ . Для этого достаточно показать, что компоненты упорядоченной тройки  $\theta$  сохраняют функции переходов и выходные функции этих автоматов, т. е. для любых  $x \in X_1, s \in S$  выполняется условие

$$\varphi_1(\delta(x, s)) = \overline{\delta}(\varphi_1(x), s), \quad \varphi_2(\lambda(x, s)) = \overline{\lambda}(\varphi_1(x), s).$$

Для любого состояния автомата  $x \in X_1$  значение  $\tilde{x}$  является автономным входным сигналом, под действием которого автомат переходит в состояние  $x$ , т. е. выполняется равенство  $\tilde{x}_1 = x$ . Легко видеть, что для любого входного сигнала  $s \in S$  произведение  $\tilde{x} \cdot s$  также является автономным входным сигналом автомата  $\mathbf{A}$ , под действием которого этот автомат переходит в состояние  $\delta(x, s)$  и выдает выходной сигнал  $\lambda(x, s)$ , т. е. выполняются равенства:  $(\tilde{x} \cdot s)_1 = \delta(x, s)$ ,  $(\tilde{x} \cdot s)_2 = \lambda(x, s)$ . Значит, по определению  $\overline{\delta}(x, s) = \tilde{x} \cdot s$  и выполняются равенства:

$$\varphi_1(\delta(x, s)) = \varepsilon_1(\overline{\delta}(x, s)) = \varepsilon_1(\tilde{x} \cdot s) = \overline{\delta}(\varepsilon_1(\tilde{x}), s) = \overline{\delta}(\varphi_1(x), s).$$

Аналогично по определению  $\overline{\lambda}(x, s) = \tilde{x} \cdot s$  и выполняются равенства:

$$\varphi_2(\lambda(x, s)) = \varepsilon_2(\overline{\lambda}(x, s)) = \varepsilon_2(\tilde{x} \cdot s) = \overline{\lambda}(\varepsilon_1(\tilde{x}), s) = \overline{\lambda}(\varphi_1(x), s).$$

Следовательно,  $\theta = (\pi_1, \Delta_S, \pi_2)$  является изоморфизмом универсального планарного автомата  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  на планарный автомат  $\overline{\mathbf{A}}$ . Теорема доказана.

Можно показать [14], что все рассмотренные выше канонические отношения универсального планарного автомата определяются в его полугруппе входных сигналов формулами элементарной теории полугрупп. Это позволяет доказать относительно элементарную определимость [15] рассматриваемых универсальных планарных автоматов в классе полугрупп и проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов планарных автоматов и элементарных теорий классов полугрупп, таких как проблема элементарной определимости универсальных планарных автоматов их полугруппами входных сигналов, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных планарных автоматов и др.

### Библиографический список

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.
2. Simovici Dan A. On the theory of reduction of semi-latticial automata // An. Sti. ale Univ. «Al. I. Cuza» Din Iasi. (Ser. Nouă). Sec. Ia. 1976. Vol. 22, № 1. P. 107–110.
3. Гечег Ф. О произведениях упорядоченных автоматов. I // Acta Sci. Math. 1963. Vol. 24, № 3–4. P. 244–250.
4. Гечег Ф. О произведениях упорядоченных автоматов. II // Acta Sci. Math. 1964. Vol. 25, № 1–2. P. 124–128.
5. Eilenberg S. Automata, languages and machines. Vol. B. N. Y.; San Francisco; London : Academic Press, 1976. 451 p.
6. Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980. 320 с.
7. Улам С. Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
8. Глускин Л. М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 841–870.
9. Jonson B. Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; N. Y. : Springer Verlag, 1972. 220 p.
10. König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig : Acad. Verlag M.B.H., 1936. 258 p.
11. Krasner M. Endothéorie de Galois abstraite // Semin. Dubriel, Dubriel-Jacotin, Lesieur et Piset. Fac. sci. Paris. 1968–1969(1970). Vol. 22, no 1. P. 6/01-6/19.
12. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.
13. Молчанов В. А. Конкретная характеристика универсальных планарных автоматов // Математика, механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 67–69.
14. Молчанов В. А. Об относительно элементарной определимости класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп // Алгебра и математическая логика : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения В. В. Морозова. Казань : Изд-во Казанского (Приволжского) федерального ун-та, 2011. С. 145–147.
15. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М. : Наука, 1980. 416 с.



## Representation of Universal Planar Automata by Autonomous Input Signals

V. A. Molchanov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, v.molchanov@inbox.ru

Universal planar automata are universally attracted objects in the category of automata, whose sets of states and output signals are endowed with structures of planes. The main result of the paper shows that any universal planar automaton is isomorphic to a many-sorted algebraic system canonically constructed from autonomous input signals of the automaton.

*Key words:* automata, semigroups, planes, many-sorted algebraic systems.

### References

- Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic structures in automata and databases theory*. Singapore, River Edge, NJ, World Scientific, 1992. (Russian ed.: Plotkin B. I., Gringlaz L. Ia., Gvaramiia A. A. *Elementy algebraicheskoi teorii avtomatov*. Moscow, Vysshaya shkola, 1994, 192 p.)
- Simovici Dan A. On the theory of reduction of semi-latticial automata. *An. Sti. ale Univ. «Al. I. Cuza» Din Iasi. (Ser. Nouă). Sec. Ia.*, 1976, vol. 22, no. 1, pp. 107–110.
- Gécseg F. O proizvodeniakh uporiadochennykh avtomatov. I [On products of ordered automata. I]. *Acta Sci. Math.*, 1963, vol. 24, no. 3–4, pp. 244–250 (in Russian).
- Gécseg F. O proizvodeniakh uporadachennykh avtomatov. II [On products of ordered automata. II]. *Acta Sci. Math.*, 1964, vol. 25, no. 1–2, pp. 124–128 (in Russian).
- Eilenberg S. *Automata, languages and machines*. Vol. B. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1976, 451 p.
- Introduction to finite geometries. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1976. (Russian ed.: Kartesi F. *Vvedenie v konechnye geometrii*. Moscow, Nauka, 1980, 320 p.)
- Ulam S. M. *A Collection of Mathematical Problems*. New Mexico, Los Alamos Scientific Laboratories, 1960. (Russian ed.: Ulam S. *Nereshennye matematicheskie zadachi*. Moscow, Nauka, 1964, 168 p.)
- Gluskin L. M. Polugruppy i kol'tsa endomorfizmov lineinykh prostranstv [Semigroups and rings of endomorphisms of linear spaces]. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1959, vol. 23, pp. 841–870 (in Russian).
- Jonson B. *Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1972, 220 p.
- Konig D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, Acad. Verlag M. B. H., 1936, 258 p.
- Krasner M. Endothéorie de Galois abstraite. *Semin. Dubriel, Dubriel-Jacotin, Lesieur et Pisot. Fac. sci. Paris*, 1968–1969(1970), vol. 22, no 1, pp. 6/01-6/19.
- Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols. *Semigroup Forum*, 2011, vol. 82, pp. 1–9.
- Molchanov V. A. Konkretnaia kharakteristika universal'nykh planarnykh avtomatov [On concrete characterization of universal planar automata]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2011, iss. 13, pp. 67–69 (in Russian).
- Molchanov V. A. On relatively elementary definability of the class of universal planar automata in the class of all semigroups. *Algebra i matematicheskaya logika : tez. dokl. Mezhdunar. konf., posviashch. 100-letiiu so dnia rozhdeniia V. V. Morozova* [Proc. of the international conference dedicated to 100-th anniversary of V. V. Morozov and youth school-conf. «Modern Problems of Algebra & Mathematical Logic»]. Kazan, 2011, pp. 145–147 (in Russian).
- Ershov Yu. L. *Problemy razreshimosti i konstruktivnye modeli* [Problems of decidability and constructive models]. Moscow, Nauka, 1980, 416 p. (in Russian).

УДК 519.83

## МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПО КАЧЕСТВЕННЫМ КРИТЕРИЯМ

В. В. Розен<sup>1</sup>, Д. С. Смирнова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, rozenvv@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Аспирантка кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, smirnova@ocean-kv.ru

Рассматриваются математические модели принятия решений по многим качественным критериям. Основная задача состоит в построении отношения предпочтения на множестве допустимых альтернатив и исследовании его математических свойств. Предложено два метода сужения паретовского оптимума: задание отношения частичного порядка на множестве критериев и выделение важнейших групп критериев.

*Ключевые слова:* модель многокритериальной оптимизации, отношение предпочтения, оптимальность по Парето, выигрывающая коалиция критериев.



## ВВЕДЕНИЕ

Первичная информация, относящаяся к данным многокритериальной задачи принятия решения (ЗПР), может быть представлена в виде таблицы, строки которой соответствуют изучаемым объектам, а столбцы — признакам, характеризующим эти объекты. В логике выделяют различные типы признаков в зависимости от того, какова структура соотношений между значениями признака. В первом приближении признаки объектов можно разделить на количественные и качественные. Разница между ними состоит в том, что значение количественного признака задается числом (которое является результатом измерения признака в некоторой числовой шкале), в то время как значения качественного признака связаны с естественным упорядочением по степени проявления этого признака. Необходимо отметить, что современная теория многокритериальной оптимизации, фактически, ограничивается количественными признаками, сводя тем самым качество к количеству и игнорируя при этом специфику качественных признаков. Между тем, именно качественные признаки характеризуют многие важные стороны изучаемых объектов и явлений; например, в экономике качественными признаками продукции являются такие признаки, как «удобство», «эргономичность», «эстетичность», «модность» и т. п.

Данная работа посвящена общим вопросам построения и исследования математических моделей многокритериальных ЗПР с качественными критериями. При построении математической модели задачи многокритериальной оптимизации необходимо задать *множество допустимых альтернатив* (в качестве которых в конкретных ЗПР выступают интересующие нас объекты, а также варианты действий, планы, программы и т. п.), и *критерии* для оценки этих альтернатив. Заметим, что критериями могут служить как естественные, так и искусственные признаки (показатели, свойства), а также различные их комбинации. Формально математическая модель задачи многокритериальной оптимизации может быть представлена в виде набора

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle, \quad (1)$$

где  $A$  — непустое множество допустимых альтернатив,  $(q_j)_{j \in J}$  критерии оценки этих альтернатив. Качественный критерий  $q_j$  (локальный критерий качества) характеризуется тем, что шкалой для его измерения служит некоторое линейно упорядоченное множество (цепь)  $\langle C_j, \leq^j \rangle$ ; формально  $q_j$  представляет собой отображение  $q_j : A \rightarrow C_j$ . Каждой альтернативе  $a \in A$  сопоставляется вектор  $q(a) = (q_j(a))_{j \in J}$ , называемый *векторной оценкой альтернативы  $a$*  и содержащий всю информацию об этой альтернативе; при этом в теоретическом анализе сравнение альтернатив заменяется сравнением их векторных оценок.

Иногда на отображение  $q : A \rightarrow \prod_{j \in J} C_j$  накладывают дополнительное условие:

$$(\forall j \in J) q_j(a_1) = q_j(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2. \quad (2)$$

Обозначим через  $K$  класс моделей многокритериальной оптимизации вида (1) с дополнительным условием (2).

Одной из важнейших задач многокритериальной оптимизации является построение отношения предпочтения на множестве альтернатив; решение этой задачи предполагает задание некоторого *решающего правила*. Наиболее известным решающим правилом является *Парето-предпочтение*  $\omega^{Par}$ , которое для модели (1) с качественными критериями принимает вид

$$a_1 \leq^{\omega^{Par}} a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J) q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2). \quad (3)$$

Парето-предпочтение является отношением порядка (или квазипорядка) на множестве альтернатив, и альтернативы, максимальные по этому отношению, называются *эффективными* или *оптимальными по Парето*, а множество этих альтернатив составляет *паретовский оптимум*. Ключевой принцип многокритериальной оптимизации может быть сформулирован в виде тезиса: *выбор оптимальной альтернативы должен производиться из паретовского оптимума* [1]. Этот принцип, фактически, дает необходимые условия оптимального решения в многокритериальной ЗПР. К сожалению, в типичных случаях паретовский оптимум оказывается достаточно «обширным», поэтому возникает



сложная — как в принципиальном, так и в техническом отношении — проблема его сужения (в идеале — до одного элемента). Основное содержание настоящей работы связано с разработкой методов сужения паретовского оптимума для задач многокритериальной оптимизации с качественными критериями.

Отметим, что любые две альтернативы, принадлежащие паретовскому оптимуму, являются несравнимыми по Парето, поэтому выбор одной из двух предъявленных Парето-оптимальных альтернатив всегда является компромиссом: улучшая один из критериев, мы обязательно ухудшаем, хотя бы один из других. В этом заключается сложность логического анализа проблемы сужения паретовского оптимума. Все методы, направленные на решение этой проблемы, основаны на некоторой дополнительной информации о соотношении локальных критериев между собой или о свойствах оптимального решения. Предлагаемый нами подход сужения паретовского оптимума схематически может быть представлен в следующем виде. На основе дополнительной информации об относительной важности локальных критериев строится некоторое отношение предпочтения  $\rho$  на множестве альтернатив, содержащее Парето-предпочтение  $\omega^{Par}$ ; это отношение позволяет сравнивать по предпочтению некоторые альтернативы, не сравнимые по Парето. Включение  $\rho \supseteq \omega^{Par}$  влечет обратное включение для множеств максимальных элементов относительно соответствующих предпочтений:  $M_\rho \subseteq M_{\omega^{Par}}$ , т. е. множество альтернатив, максимальных относительно предпочтения  $\rho$ , будет некоторым сужением паретовского оптимума. В работе рассмотрены два конкретных метода сужения паретовского оптимума; один из них основан на частичном упорядочении локальных критериев по их относительной важности, а другой — на выделении важнейших групп критериев.

## 1. ЧАСТИЧНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПО ВАЖНОСТИ

Предположим, имеется дополнительная информация об относительной важности локальных критериев в форме отношения строгого частичного порядка «<» на множестве  $J$ ; соотношение  $i < j$  означает, что критерий  $i$  является более важным, чем критерий  $j$ . Определим на множестве альтернатив модели (1) отношение предпочтения  $\omega$  формулой

$$a_1 \leq^\omega a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2)) \vee (\exists i < j)q_i(a_1) <^i q_i(a_2). \quad (4)$$

Всегда выполнено включение  $\omega \supseteq \omega^{Par}$ , которое влечет сужение паретовского оптимума. В работе [2] установлен следующий результат.

**Теорема 1.** Для того чтобы для любой модели  $G \in K$  отношение  $\omega$  являлось отношением порядка на множестве  $A$ , необходимо и достаточно чтобы упорядоченное множество  $(J, <)$  удовлетворяло условию обрыва убывающих цепей (условию ОУЦ).

Отметим два крайних случая этой конструкции: (а) отношение  $<$  является пустым; и (б) отношение «<» является линейным порядком. В случае (а) отношение предпочтения  $\omega$  совпадает с Парето-предпочтением, определенным формулой (3), а в случае (б) оно является лексикографическим упорядочением. В последнем случае паретовский оптимум сокращается до единственного элемента, который и считается оптимальным решением задачи многокритериальной оптимизации. Оба отмеченных случая являются крайними и на практике встречаются весьма редко. Типичным для практики является случай, когда имеется частичное упорядочение критериев по относительной важности.

Для моделей многокритериальной оптимизации класса  $K$ , в которых введено отношение предпочтения альтернатив  $\rho$ , важным является вопрос о внешней устойчивости множества максимальных элементов  $M_\rho$ . Напомним, что свойство внешней устойчивости подмножества  $M_\rho$  в модели  $G \in K$  задается формулой

$$(\forall a \in A)(\exists a^* \in M_\rho)a \lesssim^\rho a^*. \quad (5)$$

Отметим, что подмножество  $M_\rho$  всегда является внутренне устойчивым; при наличии свойства внешней устойчивости оно превращается в непустое единственное ядро отношения предпочтения  $\rho$ .

Дальнейшее содержание данного раздела связано с нахождением условий внешней устойчивости для моделей  $G \in K$ . Рассмотрим вначале модели, для которых отношением предпочтения альтернатив является Парето-предпочтение, или предпочтение по Слейтеру. Напомним, что последнее определено формулой

$$a_1 \leq^{Sl} a_2 \Leftrightarrow ((\forall j \in J)q_j(a_1) <^j q_j(a_2)) \vee (a_1 = a_2).$$



**Теорема 2.** Пусть множество критериев  $J$  конечно и все цепи  $(\langle C_j, \leq^j \rangle)_{j \in J}$  удовлетворяют условию максимальности. Тогда

- А) в любой модели  $G \in K$ , в которой отношением предпочтения альтернатив является Парето-предпочтение, множество Парето-оптимальных альтернатив будет внешне устойчивым;
- В) в любой модели  $G \in K$ , в которой отношением предпочтения альтернатив является предпочтение по Слейтеру, множество оптимальных по Слейтеру альтернатив будет внешне устойчивым.

**Лемма 1.** Если все цепи  $(\langle C_j, \leq^j \rangle)_{j \in J}$  удовлетворяют условию максимальности и множество  $J$  конечно, то прямое произведение  $\left\langle \prod_{j \in J} C_j, \leq \right\rangle$  удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (условию ОВЦ).

**Доказательство.** Положим  $|J| = n$ . Предположим, что  $\left\langle \prod_{j \in J} C_j, \leq \right\rangle$  не удовлетворяет условию ОВЦ. Тогда существует бесконечная последовательность элементов в  $\prod_{j \in J} C_j$  вида

$$(c_1^1, \dots, c_n^1) < (c_1^2, \dots, c_n^2) < \dots < (c_1^k, \dots, c_n^k) < \dots \quad (6)$$

Из первого неравенства в (6) получаем, что существуют элементы  $c_{j_1}^1 < c_{j_1}^2$ ; из второго неравенства существуют элементы  $c_{j_2}^2 < c_{j_2}^3$ ; из  $k$ -го неравенства существуют элементы  $c_{j_k}^k < c_{j_k}^{k+1}$  и т. д. Среди номеров  $j_1, \dots, j_k, \dots$  хотя бы один из них будет повторяться бесконечное число раз, так как множество  $J$  по предположению конечно, а последовательность (6) бесконечна. Пусть индекс  $j_s$  повторяется бесконечное число раз, тогда в цепи  $C_{j_s}$  получаем бесконечную возрастающую последовательность. Учитывая, что условие максимальности равносильно условию ОВЦ, приходим к противоречию, что завершает доказательство леммы 1.  $\square$

**Следствие 1.** В условиях теоремы 2 всякая модель  $G \in K$ , в которой отношением предпочтения альтернатив является Парето-предпочтение, удовлетворяет условию (ОВЦ).

Действительно, в силу инъективности отображения  $q$  (которая следует из (2)) и учитывая (3), получаем, что упорядоченное множество  $\langle A, \omega^{Par} \rangle$  изоморфно вкладывается в прямое произведение  $\left\langle \prod_{j \in J} C_j, \leq \right\rangle$ , поэтому доказанное в лемме 1 условие ОВЦ для прямого произведения влечет условие ОВЦ для упорядоченного множества  $\langle A, \omega^{Par} \rangle$ .

Докажем утверждение А) теоремы 2. Пусть  $G$  — любая модель класса  $K$ , в которой в качестве отношения предпочтения альтернатив выступает предпочтение по Парето. Обозначим через  $A^*$  множество альтернатив из  $A$  максимальных относительно порядка  $\leq^{Par}$  (т. е. Парето-оптимальных альтернатив). Условие внешней устойчивости множества  $A^*$  в такой модели согласно (5) состоит в выполнении следующей формулы:

$$(\forall a \in A)(\exists a^* \in A^*) a \leq^{Par} a^* \quad (7)$$

Покажем условие (7) для модели  $G$ . Зафиксируем  $a \in A$ . Возможны два случая: 1)  $a \in A^*$ , 2)  $a \notin A^*$ . В первом случае имеет место  $a \leq^{Par} a$  и (7) выполнено тривиальным образом. Во втором случае из определения максимального элемента получаем, что  $a <^{Par} a_1$  для некоторого  $a_1 \in A$ . Если  $a_1$  — максимальный элемент, то (7) выполнено; в противном случае из определения максимального элемента получаем, что  $a_1 <^{Par} a_2$  для некоторого  $a_2 \in A$  и т. д. В результате получаем последовательность

$$a <^{Par} a_1 <^{Par} a_2 <^{Par} \dots,$$

а так как по следствию 1 упорядоченное множество  $\langle A, \omega^{Par} \rangle$  удовлетворяет условию ОВЦ, то эта последовательность оборвется на конечном номере  $k$ , причем имеет место  $a \leq^{Par} a_k$  и  $a_k \in A^*$ , т. е. для модели  $G$  выполнено условие внешней устойчивости множества Парето-оптимальных альтернатив.

Докажем теперь утверждение В) теоремы 2. Пусть  $G$  — любая модель класса  $K$ , в которой в качестве отношения предпочтения альтернатив выступает предпочтение по Слейтеру. Обозначим



через  $A^+$  множество тех альтернатив из  $A$ , которые максимальны по Слейтеру. Условие внешней устойчивости множества  $A^+$  в такой модели состоит в выполнении следующей формулы:

$$(\forall a \in A)(\exists a^+ \in A^+) a \leq^{Sl} a^+. \quad (8)$$

Покажем (8) для модели  $G$ . Зафиксируем  $a \in A$ . Возможны два случая: 1)  $a \in A^+$ , 2)  $a \notin A^+$ . В первом случае имеет место  $a \leq^{Sl} a$  и (8) выполнено тривиальным образом. Во втором случае из определения максимального элемента получаем, что  $a <^{Sl} a_1$  для некоторого  $a_1 \in A$ . По уже доказанному утверждению А) для элемента  $a_1$  найдется оптимальный, по Парето, элемент  $a_2 \in A^*$  такой, что  $a_1 \leq^{Par} a_2$ . Из соотношений  $a <^{Sl} a_1$  и  $a_1 \leq^{Par} a_2$  следует  $a <^{Sl} a_2$ . Учитывая, что паретовский оптимум содержится в слейтеровском оптимуме (т. е.  $A^* \subseteq A^+$ ), получаем  $a_2 \in A^+$ , что заканчивает доказательство утверждения В) и теоремы 2.  $\square$

Рассмотрим теперь модели класса  $K$ , в которых множество критериев частично упорядочено по важности отношением строгого порядка «<», а отношение предпочтения на множестве альтернатив есть отношение  $\omega$ , определенное формулой (4).

**Теорема 3.** Пусть множество критериев  $J$  конечно. Для того чтобы для любой модели  $G \in K$  множество  $M_\omega$  максимальных элементов относительно порядка  $\omega$  было внешне устойчивым, достаточно, чтобы все цепи  $\langle C_j, \leq^j \rangle_{j \in J}$  удовлетворяли условию максимальности.

Для доказательства теоремы 3 введем на множестве  $\prod_{j \in J} C_j$  отношение порядка  $\sigma$  по формуле

$$(c_j^1)_{j \in J} \leq^\sigma (c_j^2)_{j \in J} \Leftrightarrow \forall j \in J (c_j^1 \leq^j c_j^2 \vee (\exists i < j) c_i^1 <^i c_i^2). \quad (9)$$

Тогда соответствующее отношение строгого порядка выражается в виде

$$(c_j^1)_{j \in J} <^\sigma (c_j^2)_{j \in J} \Leftrightarrow (c_j^1)_{j \in J} \leq^\sigma (c_j^2)_{j \in J} \wedge (\exists i \in J) c_i^1 <^i c_i^2. \quad (10)$$

**Лемма 2.** Пусть множество  $J$  конечно, и все цепи  $(C_j)_{j \in J}$  удовлетворяют условию максимальнойности. Тогда всякая строго возрастающая цепь в упорядоченном множестве  $\left\langle \prod_{j \in J} C_j, \leq^\sigma \right\rangle$  удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей.

**Доказательство.** Положим  $|J| = n$ . Предположим противное, т. е. что существует бесконечно возрастающая цепь вида

$$(c_1^1, \dots, c_n^1) <^\sigma (c_1^2, \dots, c_n^2) <^\sigma (c_1^3, \dots, c_n^3) <^\sigma \dots$$

Рассмотрим первое неравенство  $(c_1^1, \dots, c_n^1) <^\sigma (c_1^2, \dots, c_n^2)$ . Согласно (10)  $(\exists j_1) c_{j_1}^1 <^{j_1} c_{j_1}^2$ . Аналогично получаем  $(\exists j_2) c_{j_2}^2 <^{j_2} c_{j_2}^3, \dots, (\exists j_k) c_{j_k}^k <^{j_k} c_{j_k}^{k+1}, \dots$ . Таким образом, имеется бесконечное число таких неравенств, а так как множество  $J$  конечно, то существует индекс  $j^* \in J$ , для которого указанные неравенства выполняются бесконечное число раз:

$$c_{j^*}^{k_1} <^{j^*} c_{j^*}^{k_1+1}, \quad c_{j^*}^{k_2} <^{j^*} c_{j^*}^{k_2+1}, \quad c_{j^*}^{k_3} <^{j^*} c_{j^*}^{k_3+1}, \quad \dots$$

Обозначим через  $N_{j^*}^+$  бесконечное подмножество номеров  $k \in N$ , для которых выполняется строгое неравенство  $c_{j^*}^k <^{j^*} c_{j^*}^{k+1}$ , через  $N_{j^*}^0$  — множество номеров  $k \in N$  для которых выполняется равенство  $c_{j^*}^k = c_{j^*}^{k+1}$ , через  $N_{j^*}^-$  — множество тех номеров  $k \in N$ , для которых выполняется  $c_{j^*}^k >^{j^*} c_{j^*}^{k+1}$  соответственно. Предположим, что множество  $N_{j^*}^-$  конечно. Тогда, начиная с некоторого номера  $k^* \in N$  для всех  $k > k^*$  выполняется неравенство  $c_{j^*}^k \leq^{j^*} c_{j^*}^{k+1}$ , причем, так как  $N_{j^*}^+$  бесконечно, строгие неравенства будут выполняться бесконечное число раз. Таким образом, в цепи  $C_{j^*}$  существует бесконечно возрастающая последовательность, что противоречит условию максимальнойности для этой цепи. Следовательно,  $N_{j^*}^-$  бесконечно.

Для  $k \in N_{j^*}^-$  неравенство  $c_{j^*}^k \leq^{j^*} c_{j^*}^{k+1}$  не выполняется. Согласно определению порядка  $\sigma$  при  $j = j^*$  и  $k \in N_{j^*}^-$  в правой части (9) будет выполнен второй член дизъюнкции. Поэтому для любого  $k \in N_{j^*}^-$  найдется номер  $i < j^*$ , для которого выполнены неравенства  $c_i^k <^i c_i^{k+1}$ . В силу того что таких неравенств бесконечное число, а номеров  $i < j^*$  лишь конечное число, найдется номер  $j_2^* < j^*$ , для которого



неравенства вида  $c_{j_2^*}^k < c_{j_2^*}^{k+1}$  выполняются бесконечное число раз, т. е. подмножество  $N_{j_2^*}^+$  бесконечно. Повторяя это рассуждение, получаем последовательность индексов  $j^* = j_1^* > j_2^* > j_3^* > \dots$ , которая в силу конечности множества  $J$  должна оборваться на некотором минимальном (относительно порядка  $<$ ) номере  $j^0 \in J$ , для которого множество  $N_{j^0}^-$  будет конечным, а это влечет (как показано выше) наличие бесконечно возрастающей последовательности в цепи  $C_{j^0}$ , что противоречит условию максимальности для цепи  $C_{j^0}$ .  $\square$

Из леммы 2 вытекает

**Следствие 2.** Пусть множество критериев  $J$  конечно и все цепи  $\langle C_j, \leq^j \rangle_{j \in J}$  удовлетворяют условию максимальности. Тогда всякая модель  $G \in K$ , в которой отношение предпочтения альтернатив определяется формулой (4), удовлетворяет условию (ОВЦ).

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично теореме 2 с использованием следствия 2 вместо следствия 1.

## 2. ЗАДАНИЕ ПРАВИЛА ПРЕДПОЧТЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПСЕВДОФИЛЬТРА

Рассмотрим теперь дополнительную информацию о важности локальных критериев качества в следующей форме: должно быть задано семейство  $W$  важнейших групп критериев, которых, используя теоретико-игровую терминологию, будем называть *выигрывающими коалициями критериев*.

На семейство  $W$  накладываются следующие условия [3]:

(PF1) *непустота*:  $W \neq \emptyset$ ;

(PF2) *мажорантная стабильность*:  $S \in W, T \supseteq S \Rightarrow T \in W$ ;

(PF3) *антидополнительность*:  $S \in W \Rightarrow S' \notin W$ .

Произвольное семейство  $W$  подмножеств множества  $J$ , удовлетворяющее аксиомам (PF1)–(PF3), называется *псевдофильтром* над множеством  $J$ . Понятие псевдофильтра является обобщением понятия фильтра, играющего важную роль в некоторых вопросах алгебры, логики и топологии. В данной работе псевдофильтры используются для задания правила предпочтений. Для записи этого правила и исследования его свойств удобно с каждой моделью  $G$  вида (1) связать модель  $G_Q$  следующего вида:

$$G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle, \quad (11)$$

где  $\sigma_j$  есть отношение линейного квазипорядка на  $A$ , определенное формулой

$$a \leq^{\sigma_j} a' \Leftrightarrow q_j(a) \leq^j q_j(a').$$

Модели, принадлежащие введенному выше классу  $K$ , будем записывать в виде (11).

Под *решающим правилом* для задания предпочтений в некотором классе моделей понимается отображение  $R$ , которое каждой модели этого класса ставит в соответствие рефлексивное бинарное отношение предпочтения  $\rho$  определенное на базисном множестве альтернатив этой модели.

Пусть  $W$  — произвольный псевдофильтр над множеством критериев  $J$ . Рассмотрим решающее правило  $R_W$ , которое каждой модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$  ставит в соответствие отношение предпочтения  $R_W(G_Q) = \rho_W$  на множестве  $A$ , определенное следующим образом:

$$a_1 \lesssim^{\rho_W} a_2 \Leftrightarrow \{j \in J : q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2)\} \in W. \quad (12)$$

**Замечание.** В случае, когда  $W = \{J\}$ , решающее правило  $R_W$  приводит к Парето-предпочтению; если взять в качестве  $W$  семейство подмножеств  $S \subseteq J$ , содержащих более половины элементов множества  $J$ , правило  $R_W$  приводит к мажоритарному предпочтению.

Наша следующая задача — дать аксиоматическую характеристику решающего правила  $R_W$ . С этой целью введем следующие аксиомы для произвольного решающего правила  $R$ .

(A1) Рассмотрим две модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  и  $G_Q^1 = \langle B, (\sigma_j^1)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$ . Положим  $R(G_Q) = \rho$ ,  $R(G_Q^1) = \rho^1$ . Предположим, что для элементов  $a_1, a_2 \in A$  и  $b_1, b_2 \in B$  при любом  $j \in J$  выполнена следующая эквивалентность:  $a_1 \leq^{\sigma_j} a_2 \Leftrightarrow b_1 \leq^{\sigma_j^1} b_2$ . Тогда эквивалентность  $a_1 \leq^{\rho} a_2 \Leftrightarrow b_1 \leq^{\rho^1} b_2$  также справедлива.





- (A2) Рассмотрим две модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  и  $G_Q^1 = \langle A, (\sigma_j^1)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$ . Зафиксируем два элемента  $a_1, a_2 \in A$  и предположим, что при любом  $j \in J$  выполнена импликация  $a_1 \leq^{\sigma_j} a_2 \Rightarrow a_1 \leq^{\sigma_j^1} a_2$ . Тогда условие  $a_1 \leq^{\rho} a_2$  влечет условие  $a_1 \leq^{\rho^1} a_2$ .
- (A3) Рассмотрим две модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  и  $G_Q^1 = \langle A, (\sigma_j^1)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$ . Зафиксируем два элемента  $a_1, a_2 \in A$  и предположим, что при любом  $j \in J$  выполнена импликация  $a_1 \leq^{\sigma_j} a_2 \Rightarrow a_1 <^{\sigma_j^1} a_2$ . Тогда условие  $a_1 \leq^{\rho} a_2$  влечет условие  $a_1 <^{\rho^1} a_2$ .
- (A4) Пусть  $A$  — произвольное множество. Зафиксируем два различных элемента  $a_1, a_2 \in A$ . Тогда найдутся такие модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  и  $G_Q^1 = \langle A, (\sigma_j^1)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$ , что для первой модели выполнено  $a_1 \leq^{\rho} a_2$ , а для второй  $\neg(a_1 \leq^{\rho^1} a_2)$ .

**Теорема 4.** Пусть  $W$  — псевдофильтр над множеством критериев  $J$ . Правило предпочтений  $R_W$ , определенное формулой (12), удовлетворяет аксиомам (A1)–(A4).

Доказательство теоремы 4 проводится прямой проверкой. Проверим, например, выполнение аксиомы (A1).

Рассмотрим две модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  и  $G_Q^1 = \langle B, (\sigma_j^1)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$ . Положим  $R_W(G_Q) = \rho_W$ ,  $R_W(G_Q^1) = \rho_W^1$ . Предположим, что для элементов  $a_1, a_2 \in A$  и  $b_1, b_2 \in B$  при любом  $\alpha \in J$  выполнена эквивалентность:  $a_1 \leq^{\sigma_j} a_2 \Leftrightarrow b_1 \leq^{\sigma_j^1} b_2$ .

Тогда  $\{j \in J : a_1 \leq^{\sigma_j} a_2\} = \{j \in J : b_1 \leq^{\sigma_j^1} b_2\}$ , следовательно, условия  $\{j \in J : a_1 \leq^{\sigma_j} a_2\} \in W$  и  $\{j \in J : b_1 \leq^{\sigma_j^1} b_2\} \in W$  равносильны, поэтому высказывания  $a_1 \leq^{\rho_W} a_2$  и  $b_1 \leq^{\rho_W^1} b_2$  эквивалентны между собой.

Установим теперь обращение теоремы 4.

**Теорема 5.** Зафиксируем семейство шкал  $(C_j, \leq_j)_{j \in J}$  для измерения качественных критериев. Пусть  $R$  — правило задания предпочтений, которое каждой модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$  ставит в соответствие рефлексивное бинарное отношение предпочтения  $R(G_Q) = \rho$  на множестве альтернатив  $A$ , причем для  $R$  выполнены аксиомы (A1)–(A4). Тогда существует такой псевдофильтр  $W$  над  $J$ , что  $R = R_W$ .

Наметим доказательство теоремы 5. Определим семейство выигрывающих коалиций критериев  $W$  следующим образом. Для произвольного подмножества  $S \subseteq J$  условие  $S \in W$  полагаем выполненным тогда и только тогда, когда существует модель  $\bar{G}_Q^1 = \langle \bar{A}, (\bar{\sigma}_j^1)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$  и такие элементы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ , что

$$\bar{a}_1 \leq^{\bar{\rho}} \bar{a}_2 \wedge \{j \in J : \bar{a}_1 \leq^{\bar{\sigma}_j^1} \bar{a}_2\} = S \quad (13)$$

(мы обозначаем  $\bar{\rho} = R(\bar{G}_Q^1)$ ).

Далее определяем правило  $R_W$  для предпочтений в классе  $K$  формулой (12). Покажем, что  $R_W = R$ . Для этого достаточно убедиться, что для любой модели  $G_Q = \langle A, (\sigma_j)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$  выполнена эквивалентность

$$a_1 \leq^{\rho} a_2 \Leftrightarrow \{j \in J : a_1 \leq^{\sigma_j} a_2\} \in W. \quad (14)$$

В самом деле, импликация слева направо в (14) верна по определению семейства  $W$ . Покажем обратную импликацию. Пусть выполнена правая часть формулы (14). Это означает, что существует модель  $\bar{G}_Q = \langle \bar{A}, (\bar{\sigma}_j)_{j \in J} \rangle$  класса  $K$  и элементы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ , для которых выполнено

$$\bar{a}_1 \leq^{\bar{\rho}} \bar{a}_2 \wedge \{j \in J : \bar{a}_1 \leq^{\bar{\sigma}_j} \bar{a}_2\} = \{j \in J : a_1 \leq^{\sigma_j} a_2\}. \quad (15)$$

Тогда условия  $a_1 \leq^{\sigma_j} a_2$  и  $\bar{a}_1 \leq^{\bar{\sigma}_j} \bar{a}_2$  при любом  $j \in J$  эквивалентны между собой; по аксиоме (A1) высказывания  $a_1 \leq^{\rho} a_2$  и  $\bar{a}_1 \leq^{\bar{\rho}} \bar{a}_2$  будут равносильными, а так как высказывание  $\bar{a}_1 \leq^{\bar{\rho}} \bar{a}_2$  согласно (15) истинно, то истинным будет и высказывание  $a_1 \leq^{\rho} a_2$ . Таким образом, формула (14) проверена и равенство  $R_W = R$  установлено. Для завершения доказательства теоремы 5 осталось показать, что определенное формулой (13) семейство подмножеств образует псевдофильтр. Это производится простой проверкой аксиом (PF1)–(PF3).



## Библиографический список

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982. 256 с.
2. Смирнова Д. С. Модели многокритериальной оптимизации с частично упорядоченным множеством критериев // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. С. 293.
3. Розен В. В. Математические модели многокритериальной оптимизации по качественным критериям // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. С. 266.

## Models of Multi-criteria Optimization with Quality Criteria

V. V. Rozen, D. S. Smirnova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, Rozenvv@info.sgu.ru, smirnova@ocean-kv.ru

We consider mathematical models of multi-criteria optimization with quality criteria. The main problem is a construction of preference relations on the set of alternatives and an investigation of its mathematical properties. Two methods for contraction of Pareto-optimal set are proposed. The first method is based on introduction of a partial order relation on the set of criteria and the second leans selection of the most important groups of criteria.

*Key words:* model of multi-criteria optimization, preference relation, Pareto-optimality, winning coalition of criteria.

## References

1. Podinovskiy V. V., Noghin V. D. *Pareto-optimal'nye resheniia mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal decisions of multi-criteria problems]. Moscow, Nauka, 1982, 256 p. (in Russian).
2. Smirnova D. S. Modeli mnogokriterial'noi optimizatsii s chastichno uporiadochennym mnozhestvom kriteriev [Models of multi-criteria optimizations with partially ordered set of criteria]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii : materialy mezhdunar. nauch. konf.*, Saratov, 2012, pp. 293 (in Russian).
3. Rozen V. V. Matematicheskie modeli mnogokriterial'noi optimizatsii po kachestvennym kriteriiam [Mathematical models of multi-criteria optimization under quality criteria]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii : materialy mezhdunar. nauch. konf.* Saratov, 2012. pp. 266 (in Russian).

УДК 519.17

## УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО СВЯЗНЫХ ЧАСТЕЙ МНОГОУГОЛЬНОГО ГРАФА

В. Н. Салий

Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, SaliyVN@info.sgu.ru

Под многоугольным графом понимается ориентированный граф, полученный из цикла путем некоторой ориентации его ребер. Множество абстрактных (т. е. рассматриваемых с точностью до изоморфизма) связанных частей многоугольного графа упорядочивается отношением вложимости графов. Получено описание многоугольных графов, для которых это упорядоченное множество является решеткой.

*Ключевые слова:* многоугольный граф, линейный граф, двоичный вектор, двойственность, упорядоченное множество, решетка.

Под *графом* понимается пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное непустое множество и  $\alpha \subseteq V \times V$  — отношение на нем. Элементы множества  $V$  называются *вершинами* графа, а пары, входящие в отношение смежности  $\alpha$ , — *дугами*.

Если  $V' \subseteq V$  и  $\alpha' \subseteq \alpha$ , то граф  $G' = (V', \alpha')$  называется *частью графа*  $G$ . В случае, когда  $\alpha' = \alpha \cap (V' \times V')$ , говорят, что  $G'$  является *подграфом* графа  $G$ .

Пусть  $G = (V, \alpha)$  и  $H = (U, \beta)$  — некоторые графы. *Вложение графа*  $G$  в граф  $H$  — это такое инъективное отображение  $\varphi : V \rightarrow U$ , что  $(\forall v, v' \in V)((v, v') \in \alpha \implies (\varphi(v), \varphi(v')) \in \beta)$ . Если



$(\forall v, v' \in V)((v, v') \in \alpha \iff (\varphi(v), \varphi(v')) \in \beta)$ , то говорят, что  $\varphi$  — *сильное вложение*  $G$  в  $H$ . Биективное сильное вложение (фактически наложение)  $\varphi: V \rightarrow U$  по определению является изоморфизмом графа  $G$  на граф  $H$ . С абстрактной точки зрения изоморфные графы не различаются, их интерпретируют как различные реализации одного и того же объекта. Если граф  $G$  вкладывается в граф  $H$ , то  $G$  изоморфен некоторой части графа  $H$ , а при сильном вложении — некоторому его подграфу.

Вершины  $v, v'$  графа  $G$  называются *связанными*, если  $(\exists v_1, v_2, \dots, v_k \in V)((v, v_1) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \& (v_1, v_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \& \dots \& (v_k, v') \in \alpha \cup \alpha^{-1})$ . Граф, в котором любые две вершины связаны, по определению является связным.

*Маршрутом* с началом  $v$  и концом  $v'$  называется последовательность примыкающих дуг  $(v, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, v')$ . Маршрут можно представить в виде перечисления проходимых вдоль него вершин:  $vv_1v_2 \dots v_kv'$ . *Цепь* — это маршрут, в котором все вершины разные. Цепь, состоящую из  $n$  дуг, обозначим через  $P_n$  и будем использовать ее стандартную запись  $P_n = v_0v_1 \dots v_n$ . Если «склеить» концы цепи, получим  $n$ -звенный ( $n$ -вершинный) контур, который будем записывать в виде  $C_n = v_1v_2 \dots v_{n-1}v_1$ , считая  $v_1$  выбранной начальной вершиной.

Под *линейным графом* длины  $n$  понимается всякий граф  $L$ , полученный переориентацией некоторых дуг цепи  $P_n$ . *Многоугольным графом* порядка  $n$  называется всякий граф  $M$ , полученный переориентацией некоторых дуг контура  $C_n$  (см. [1]).

Очевидно, что все связные части линейного графа являются его подграфами. В многоугольном графе  $M$  порядка  $n$  все связные собственные части с  $\leq n - 1$  вершинами будут линейными подграфами в  $M$ , если же из  $M$  удалить какую-нибудь дугу, то получится линейный граф, являющийся частью, но не подграфом графа  $M$ .

Для многоугольного графа  $M$  через  $\text{ASubc } M$  обозначим класс всех связных графов, допускающих вложение в  $M$ . Если  $\mathbf{L} \in \text{ASubc } M$ , то это означает, что все графы из  $\mathbf{L}$  изоморфны некоторой линейной части графа  $M$  или самому графу  $M$ . Класс  $\text{ASubc } M$  упорядочивается отношением вложимости: если  $\mathbf{L}'$  и  $\mathbf{L}''$  определяются соответственно линейными частями  $L'$  и  $L''$  графа  $M$ , то  $\mathbf{L}' \leq \mathbf{L}''$  по определению означает, что  $L'$  вкладывается в  $L''$ .

Нашей задачей будет выяснение вопроса о том, для каких многоугольных графов  $M$  упорядоченное множество  $\text{ASubc } M$  будет решеткой.

Для неориентированных (т. е. с симметричным и антирефлексивным отношением смежности) графов  $G$  близкие вопросы рассматривались различными авторами. Так, в [2] установлены некоторые общие свойства упорядоченных множеств вида  $\text{ASubc } G$ . В [3] показано, что не для всякого  $G$  упорядоченное множество связных абстрактных подграфов будет шпернеровым. В [4] дана абстрактная характеристика упорядоченных множеств рассматриваемого вида. В [5] изучаются решеточные упорядочения на множестве  $\text{ASubc } G$ . В других работах (см., например, [6, 7]) авторы отказываются от условия связности и исследуют упорядоченное множество всех вообще абстрактных подграфов данного неориентированного графа. В частности, в [7] доказано, что упорядоченное множество всех абстрактных подграфов неориентированного графа тогда и только тогда будет решеткой, когда либо сам этот граф, либо его дополнение представляет собой полный многодольный граф. В [8] автором были охарактеризованы линейные графы  $L$ , для которых упорядоченное множество  $\text{ASubc } L$  является решеткой. Настоящая работа существенно опирается на идеи и методы, предложенные в [8].

Пусть  $\mathbf{b}$  — некоторый двоичный вектор. Двойственным для него называется вектор  $\mathbf{b}^\delta$ , получаемый из  $\mathbf{b}$ , если компоненты вектора  $\mathbf{b}$  записать в обратном порядке, а затем взаимно заменить в компонентах нули и единицы, т. е. осуществить преобразование  $\mathbf{b} \mapsto (\mathbf{b}^{-1})'$ . Например, для  $\mathbf{b} = 011100$  будет  $\mathbf{b}^\delta = 110001$ . Понятно, что  $\mathbf{b}^{\delta\delta} = \mathbf{b}$ .

Под отрезками вектора понимаются блоки, состоящие из подряд идущих компонент этого вектора. Через  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  обозначим совокупность всех попарно не двойственных отрезков двоичного вектора  $\mathbf{b}$ . На множестве  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  вводится порядок:  $\mathbf{b}' \leq \mathbf{b}''$ , если  $\mathbf{b}'$  является отрезком в  $\mathbf{b}''$  или в  $\mathbf{b}''^\delta$ .

Двоичными векторами естественным образом кодируются линейные и многоугольные графы. Линейному графу  $L$  длины  $n$  соотносится двоичный  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(L)$  путем сопоставления каждой дуге графа символа 1, если при переориентации цепи  $P_n = v_0v_1 \dots v_n$  в граф  $L$  эта дуга оказалась направленной от  $v_0$  к  $v_n$ , и символа 0 в противном случае. Например, для  $L = v_0 \leftarrow v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \leftarrow v_5$  будет  $\mathbf{b}(L) = 00110$ . С другой стороны, каждому  $n$ -мерному



двоичному вектору  $\mathbf{b}$  соответствует линейный граф  $L = L(\mathbf{b})$  длины  $n$ , получающийся из цепи  $P_n$  переориентацией ее дуг, согласованной в вышеуказанном смысле со значениями компонент вектора  $\mathbf{b}$ . Так, для  $\mathbf{b} = 1011$  будет  $L(\mathbf{b}) = v_0 \rightarrow v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$ . Двоичным кодом для связного подграфа линейного графа  $L$ , очевидно, является отрезок вектора  $\mathbf{b}(L)$  или двойственного. Заметим, что двойственные векторы являются кодами изоморфных линейных графов. Будем считать, что  $\mathbf{b}(L)$  является лексикографически меньшим из них.

Пусть  $M$  — многоугольный граф, полученный из контура  $C_n$  переориентацией некоторых дуг. Выберем в  $C_n$  в качестве начальной вершины вершину  $v_1$  и построим  $n$ -мерный двоичный вектор  $\mathbf{b}^1$ , полагая  $\mathbf{b}_i^1 = 1$ , если  $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$  в  $M$ , и  $\mathbf{b}_i^1 = 0$ , если  $(v_{i+1}, v_i) \in \alpha$  в  $M$  (сложение в индексах — по модулю  $n$ ). Аналогично построим вектор  $\mathbf{b}^2$ , считая начальной вершиной  $v_2$  и т.д. Выбрав из векторов  $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^n$  лексикографически минимальный, сопоставим его графу  $M$  и обозначим через  $\mathbf{b}(M)$ . Например, для четырехугольного графа  $M = v_1 \rightarrow v_2 \leftarrow v_3 \leftarrow v_4 \rightarrow v_1$  получим  $\mathbf{b}^1 = 1001, \mathbf{b}^2 = 0011, \mathbf{b}^3 = 0110, \mathbf{b}^4 = 1100$ , и значит,  $\mathbf{b}(M) = 0011$ . С другой стороны, каждому  $n$ -мерному вектору  $\mathbf{b}$  соответствует  $n$ -угольный граф  $M = M(\mathbf{b})$ , получающийся из контура  $C_n$  переориентацией некоторых его дуг, согласованной в вышеуказанном смысле со значениями компонент вектора  $\mathbf{b}$ . Например, для  $\mathbf{b} = 01001$  будет  $M(\mathbf{b}) = v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow v_3 \leftarrow v_4 \leftarrow v_5 \rightarrow v_1$ .

**Лемма.** Если  $M$  — многоугольный граф и  $\mathbf{b}$  — соответствующий ему двоичный вектор, то упорядоченные множества  $ASubc M$  и  $ASubc \mathbf{b}$  изоморфны.

**Доказательство.** Между множествами  $ASubc M$  и  $ASubc \mathbf{b}$  устанавливается взаимно однозначное соответствие  $L \mapsto \mathbf{b}(L), \mathbf{b} \mapsto L(\mathbf{b})$ . Пусть  $\mathbf{L}', \mathbf{L}'' \in ASubc M$  и  $\mathbf{L}' \leq \mathbf{L}''$ . Это означает, что линейный граф  $L'$  допускает вложение в  $L''$ . Но тогда в векторе  $\mathbf{b}(L'')$  или его двойственном  $\mathbf{b}(L'')^\delta$  в качестве отрезка содержится вектор  $\mathbf{b}(L')$ , т.е.  $\mathbf{b}(L') \leq \mathbf{b}(L'')$ . Аналогично, если  $\mathbf{b}' \leq \mathbf{b}''$  для некоторых  $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in ASubc \mathbf{b}$ , то  $L(\mathbf{b}')$  вкладывается в  $L(\mathbf{b}'')$ , т.е.  $L(\mathbf{b}') \leq L(\mathbf{b}'')$ .  $\square$

Из леммы следует, что упорядоченное множество  $ASubc M$  абстрактных связных частей многоугольного графа  $M$  тогда и только тогда будет решеткой, когда решеткой будет упорядоченное множество  $ASubc \mathbf{b}$  попарно не двойственных отрезков двоичного вектора  $\mathbf{b}$ , кодирующего граф  $M$ .

На рис. 1 и 2 приведены диаграммы упорядоченных множеств  $ASubc \mathbf{b}$  соответственно для случаев  $\mathbf{b} = 0001$  и  $\mathbf{b} = 00001$ . Как видим, первое из этих упорядоченных множеств является решеткой, а второе — нет: в нем не определена, например, точная нижняя грань для элементов  $0010$  и  $100$ .

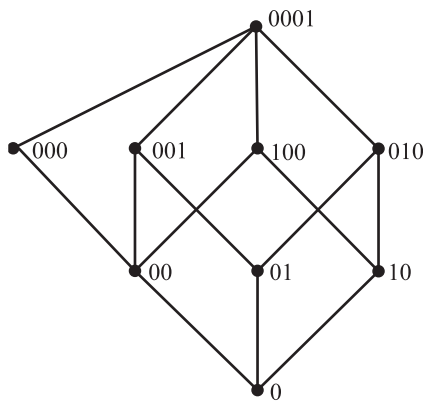


Рис. 1. Диаграмма упорядоченного множества  $ASubc \mathbf{b}$  для  $\mathbf{b} = 0001$

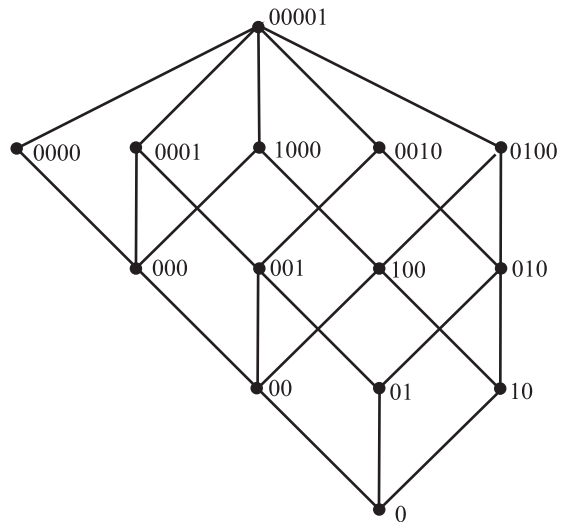


Рис. 2. Диаграмма упорядоченного множества  $ASubc \mathbf{b}$  для  $\mathbf{b} = 00001$

В дальнейшем при записи двоичных векторов будем группировать в них одинаковые компоненты и использовать экспоненциальную запись:  $01100110010 = 0(1^20^2)^210$  и т. п.

**Теорема.** Пусть  $M$  — многоугольный граф с  $n$  вершинами. Упорядоченное множество  $ASubc M$  его абстрактных связных частей тогда и только тогда будет решеткой, когда вектор  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(M)$



имеет один из следующих видов: 1)  $0^n$ ; 2)  $0^{n-1}1$ ,  $n \leq 4$ ; 3)  $0^{n-2}1^2$ ; 4)  $(0^k 1^k)^l$  при  $k \geq 1$ ,  $l \geq 1$ ,  $2kl = n$ .

**Доказательство. Необходимость.** От противного. Пусть  $\text{ASubc } \mathbf{b}$ , а значит, и  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  является решеткой, но при этом не выполнено ни одно из условий 1)–4). Запишем вектор  $\mathbf{b}$  в стандартном виде:

$$\mathbf{b} = 0^{a_1} 1^{b_1} 0^{a_2} 1^{b_2} \dots 0^{a_s} 1^{b_s}, \quad a_i \geq 1, \quad b_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq s, \quad \sum_{i=1}^s (a_i + b_i) = n.$$

Если в составе  $\mathbf{b}$  есть блок длины  $n$ , то  $\mathbf{b} = 0^n$ , а это означает выполнение запрещенного условия 1). Если в  $\mathbf{b}$  есть блок длины  $n - 1$ , то можно записать  $\mathbf{b} = 0^{n-1}1$ . При  $n \leq 4$  это означает выполнения условия 2), так что  $n \geq 5$ . Но тогда в составе вектора  $\mathbf{b}$  есть отрезки 0010 и 100, общими нижними гранями которых в  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  будут 0, 00, 01, 10 и среди них нет наибольшей, так что  $\inf(0010, 100)$  не существует, и, значит,  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  — не решетка, что противоречит предположению. Блоков длины  $n - 2$  в составе  $\mathbf{b}$  не может быть из-за отклонения условия 3). Значит, в вышеприведенной стандартной записи вектора  $\mathbf{b}$  не все показатели кратности одинаковы и все они не превосходят  $n - 3$ .

Здесь могут представиться следующие ситуации. I)  $a_i < a_j$  для некоторых  $i, j$ . Так как  $a_i \leq n - 3$  и  $a_j \leq n - 3$ , то в составе вектора  $\mathbf{b}$  имеются отрезки  $10^{a_i}1$  и  $10^{a_j}1$ . Их общими нижними гранями в  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  будут отрезки  $0, \dots, 0^{a_i}, 10, \dots, 10^{a_i}, 01, \dots, 0^{a_i}1$ , среди которых нет наибольшего, так что  $\inf(10^{a_i}1, 10^{a_j}1)$  не существует. II)  $a_i < b_j$  для некоторых  $i, j$ . Так как  $a_i \leq n - 3, b_j \leq n - 3$ , в составе вектора  $\mathbf{b}$  имеются отрезки  $10^{a_i}1$  и  $01^{b_j}0$ . Двойственным для последнего является  $10^{b_j}1$ , и мы попадаем в I. Наконец, III)  $b_i < b_j$  для некоторых  $i, j$ . Так как  $b_i \leq n - 3, b_j \leq n - 3$ , в составе вектора  $\mathbf{b}$  имеются отрезки  $01^{b_i}0$  и  $01^{b_j}0$ . Двойственными для них будут  $10^{b_i}1$  и  $10^{b_j}1$ , и снова получается I.

**Достаточность.** Пусть для  $n$ -мерного двоичного вектора  $\mathbf{b}$  выполняется одно из условий 1–4). Покажем, что в каждом из этих случаев упорядоченное множество  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  является решеткой.

1.  $\mathbf{b} = 0^n$ . В этом случае  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  представляет собой  $n$ -элементную цепь  $0 < 0^2 < \dots < 0^{n-1} < 0^n$ .

2.  $\mathbf{b} = 0^{n-1}1, n \leq 4$ . Для  $\mathbf{b} = 0001$  диаграмма решетки  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  изображена на рис. 1. Для  $\mathbf{b} = 001$  получаем пятиэлементную трехатомную решетку  $M_3$ . Если  $\mathbf{b} = 01$ , то  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  — двухэлементная цепь. Наконец, при  $n = 1$ , т. е.  $\mathbf{b} = 1$ , в  $\text{ASubc } \mathbf{b}$  один элемент.

3.  $\mathbf{b} = 0^{n-2}1^2$ . Возможными отрезками в  $\mathbf{b}$  являются следующие: 1)  $0^a, a \leq n - 2$ ; 2)  $0^a 1^b, a \leq n - 2, b \leq 2, a + b < n$ ; 3)  $0^a 110^b, a + b \leq n - 3$ ; 4)  $1^a, a \leq 2$ ; 5)  $1^a 0^b, a \leq 2, b \leq n - 2, a + b < n$ . Покажем, что у любых двух отрезков есть точная нижняя грань. В п.  $i, j$  указывается точная нижняя грань для отрезков  $i$  и  $j$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 5$ . Заметим еще, что  $\inf((\mathbf{b}')^\delta, (\mathbf{b}'')^\delta) = (\inf(\mathbf{b}', \mathbf{b}''))^\delta$  для любых отрезков  $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$  вектора  $\mathbf{b}$ .

В пп. 1,1)–1,5) (здесь  $i, j$ ) вариант для отрезка вида  $i$  и отрезка вида  $j$ ) результаты вполне очевидны.

1,1)  $\inf(0^a, 0^b) = 0^{\min(a,b)}$ ;

1,2)  $\inf(0^a, 0^b 1^c) = 0^{\min(a,b)}$ , так как можно считать, что  $b \geq c$ ;

1,3)  $\inf(0^a, 0^b 110^c) = 0^{\min(a, \max(b,c,2))}$ ;

1,4)  $\inf(0^a, 1^b) = 0^{\min(a,b)}$ ;

1,5)  $\inf(0^a, 1^b 0^c) = 0^{\min(a,c)}$ , так как можно считать, что  $b \leq c$ ;

2,2)  $\inf(0^a 1^b, 0^c 1^d) = 0^{\min(a,c)} 1^{\min(b,d)}$

(в самом деле, ввиду лексикографической минимальности в записи векторов,  $a \geq b$  и  $c \geq d$ . Не нарушая общности, можно считать, что  $a \geq c$ . Общими максимальными отрезками у  $0^a 1^b$  с  $0^c 1^d$  и двойственным  $0^{d-1}c$  будут соответственно  $0^{\min(a,c)} 1^{\min(b,d)} = 0^c 1^{\min(b,d)}$  и  $0^{\min(a,d)} 1^{\min(b,c)}$ . Если  $b \leq d (\leq c)$ , то получаем из них  $0^c 1^b \geq 0^d 1^b$ . Если же  $b \geq d$ , то получаем  $0^c 1^d \geq 0^{\min(b,c)} 1^d = (0^d 1^{\min(b,c)})^\delta$ . Так что  $\inf = 0^{\min(a,c)} 1^{\min(b,d)}$ );

2,3)  $\inf(0^a 1^b, 0^c 110^d) = (1) 0^{\min(a,c)} 1^b$  при  $c \geq 2$ , (2)  $0^{\min(a,2)} 1$  при  $c = 1$

(в силу соглашения о записи векторов,  $b \leq a$ . Кроме того,  $b \leq 2$ . Общими максимальными отрезками у  $0^a 1^b$  с  $0^c 110^d$  и двойственным  $1^d 001^c$  будут соответственно  $0^{\min(a,c)} 1^b$  и  $0^{\min(a,2)} 1^{\min(b,c)}$ . Если (1)



$c \geq 2$ , это будут  $0^{\min(a,c)}1^b \geq 0^{\min(a,2)}1^b$ . Если же (2)  $c = 1$ , то получаем  $01^b$  и  $0^{\min(a,2)}1 = (01^{\min(a,2)})^\delta$ .

Так как  $b \leq \min(a, 2)$ , то  $\inf = 0^{\min(a,2)}1$ ;

2,4)  $\inf(0^a1^b, 1^c) = 0^{\min(\max(a,b),c)}$ ;

2,5)  $\inf(0^a1^b, 1^c0^d) = 0^{\min(\max(a,b),\max(c,d))}$ ;

3,3)  $\inf(0^a110^b, 0^c110^d) = 0^{\min(a,c)}110^{\min(b,d)}$ ;

3,4)  $\inf(0^a110^b, 1^c) = 0^{\min(\max(a,b,2),c)}$ ;

3,5)  $\inf(1^a0^b, 0^c110^d) = (1) 1^a0^{\min(b,d)}$  при  $d \geq 2$ , (2)  $10^{\min(b,2)}$  при  $d = 1$ ;

4,4)  $\inf(1^a, 1^b) = 0^{\min(a,b)}$ ;

4,5)  $\inf(1^a, 1^b0^c) = 0^{\min(a,\max(b,c))}$ ;

5,5)  $\inf(1^a0^b, 1^c0^d) = 1^{\min(a,c)}0^{\min(b,d)}$

(здесь считается, что  $a \leq b, c \leq d$ . Не нарушая общности, положим  $a \leq c$ . Максимальными общими отрезками у  $1^a0^b$  с  $1^c0^d$  и двойственным  $1^d0^c$  соответственно будут  $1^{\min(a,c)}0^{\min(b,d)} = 1^a0^{\min(b,d)}$  и  $1^{\min(a,d)}0^{\min(b,c)} = 1^a0^{\min(b,c)}$ . Так как  $\min(b, d) \geq \min(b, c)$ , то  $\inf = 1^a0^{\min(b,d)}$ .

Таким образом, в случае 3.  $\mathbf{b} = 0^{n-2}1^2$  упорядоченное множество  $\text{ASub } \mathbf{b}$  будет нижней полурешеткой с наибольшим элементом  $\mathbf{b}$ , т.е. будет решеткой.

4.  $\mathbf{b} = (0^k1^k)^l, k \geq 1, l \geq 1, 2kl = n$ .

Каждый отрезок вектора  $\mathbf{b}$  имеет один из следующих десяти видов: 1)  $0^a$ , 2)  $0^a1^b, a \geq b$ , 3)  $0^a1^k0^b, a \geq b$ , 4)  $0^a1^k0^k1^b, a \geq b$ , 5)  $0^a1^k0^k1^k0^b, a \geq b$ , 6)  $0^a(1^k0^k)^\lambda1^b, a \geq b, \lambda > 1$ , 7)  $0^a(1^k0^k)^\lambda1^k0^b, \lambda > 1$ , 8)  $1^a0^b, a \leq b$ , 9)  $1^a0^k1^k0^b, a \leq b$ , 10)  $1^a(0^k1^k)^\lambda0^b, a \leq b, \lambda > 1$ .

Покажем, что у любых двух отрезков имеется наибольшая в смысле порядка в  $\text{ASub } \mathbf{b}$  общая часть. В п.  $i, j$ ) указывается точная нижняя грань для отрезка вида  $i$  и отрезка вида  $j, 1 \leq i \leq j \leq 10$ . Подробно рассматриваются характерные нетривиальные случаи.

1,1)  $\inf(0^a, 0^b) = 0^{\min(a,b)}$ ;

1,2)  $\inf(0^a, 0^b1^c) = 0^{\min(a,\max(b,c))}$ .

В 1,3)–1,10) следует учитывать, что  $a \leq k$ .

1,3)  $\inf(0^a, 0^b1^k0^c) = 0^a$ ;

1,4)  $\inf(0^a, 0^b1^k0^k1^c) = 0^a$ ;

1,5)  $\inf(0^a, 0^b1^k0^k1^k0^c) = 0^a$ ;

1,6)  $\inf(0^a, 0^b(1^k0^k)^\lambda1^k) = 0^a$ ;

1,7)  $\inf(0^a, 0^b(1^k0^k)^\lambda1^k0^c) = 0^a$ ;

1,8)  $\inf(0^a, 1^b0^c) = 0^{\max(\min((a,b),\min(a,c)))}$ ;

1,9)  $\inf(0^a, 1^b0^k1^k0^c) = 0^a$ ;

1,10)  $\inf(0^a, 1^b(0^k1^k)^\lambda0^c) = 0^a$ ;

2,2)  $\inf(0^a1^b, 0^c1^d) = 0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$

(по правилам записи векторов,  $a \geq b, c \geq d$ . Не нарушая общности, будем считать, что  $a \geq c$ . Максимальными общими отрезками у  $0^a1^b$  с  $0^c1^d$  и двойственным  $0^d1^c$  будут соответственно  $0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$  и  $0^{\min(a,d)}1^{\min(b,c)}$ . Если  $b \geq d$ , то  $0^{\min(a,d)}1^{\min(b,c)} \leq 0^d1^c = (0^c1^d)^\delta = (0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)})^\delta$ . Если же  $b \leq d$ , то  $0^{\min(a,d)}1^{\min(b,c)} = 0^d1^b \leq 0^c1^b = 0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$ ;

2,3)  $\inf(0^a1^b, 0^c1^k0^d) = 0^a1^{\min(b,c)}$ ;

2,4)  $\inf(0^a1^b, 0^c1^k0^k1^d) = 0^a1^{\min(b,c)}$ ;

2,5)  $\inf(0^a1^b, 0^c1^k0^k1^k0^d) = 0^a1^b$ ;

2,6)  $\inf(0^a1^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda1^d) = 0^a1^b$ ;

2,7)  $\inf(0^a1^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda1^k0^d) = 0^a1^b$ ;

2,8)  $\inf(0^a1^b, 1^c0^d) = 0^{\min(\max(a,b),\max(c,d))}$ ;

2,9)  $\inf(0^a1^b, 1^c0^k1^k0^d) = 0^a1^b$ ;

2,10)  $\inf(0^a1^b, 1^c(0^k1^k)^\lambda0^d) = 0^a1^b$ ;

3,3)  $\inf(0^a1^k0^b, 0^c1^k0^d) = 0^{\min(a,c)}1^k0^{\min(b,d)}$ ;

3,4)  $\inf(0^a1^k0^b, 0^c1^k0^k1^d) = 0^{\min(a,c)}1^k0^b$ ;

3,5)  $\inf(0^a1^k0^b, 0^c1^k0^k1^k0^d) = 0^a1^k0^b$ ;

3,6)  $\inf(0^a1^k0^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda1^d) = 0^a1^k0^b$ ;



- 3,7)  $\inf(0^a 1^k 0^b, 0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^k 0^d) = 0^a 1^k 0^b$ ;  
 3,8)  $\inf(0^a 1^k 0^b, 1^c 0^d) = 1^{\min(b,c)} 0^d$ ;  
 3,9)  $\inf(0^a 1^k 0^b, 1^c 0^k 1^k 0^d) = 0^a 1^k 0^{\min(b,d)}$ ;  
 3,10)  $\inf(0^a 1^k 0^b, 1^c (0^k 1^k)^\lambda 0^d) = 0^a 1^k 0^b$ ;  
 4,4)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^b, 0^c 1^k 0^k 1^d) = 0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^{\min(b,d)}$

(здесь  $a \geq b, c \geq d$ . Не нарушая общности, будем считать, что  $a \geq c$ . Максимальными общими отрезками у  $0^a 1^k 0^k 1^b$  с  $0^c 1^k 0^k 1^d$  и двойственным  $0^d 1^k 0^k 1^c$  будут соответственно  $0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^{\min(b,d)}$  и  $0^{\min(a,d)} 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$ , что после приведения дает  $0^c 1^k 0^k 1^{\min(b,d)}$  и  $0^{\min(a,d)} 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$ . Если  $b \geq d$ , то получаем  $0^c 1^k 0^k 1^d$  и  $0^d 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$ . Так как  $c \geq \min(b,c)$ , то  $0^d 1^k 0^k 1^c \geq 0^d 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$ , так что  $\inf = 0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^{\min(b,d)}$ . Если же  $b \leq d$ , то получим  $0^c 1^k 0^k 1^b$  и  $0^{\min(a,d)} 1^k 0^k 1^b$ . Так как  $\min(a,d) \leq d \leq c$ , то  $0^c 1^k 0^k 1^b \geq 0^{\min(a,d)} 1^k 0^k 1^b$ , так что и здесь  $\inf = 0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^{\min(b,d)}$ );

- 4,5)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^b, 0^c 1^k 0^k 1^d) = 0^a 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$ ;  
 4,6)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^b, 0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^d) = (1) 0^a 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$  при  $\lambda = 2$ , (2)  $0^a 1^k 0^k 1^b$  при  $\lambda > 2$

(здесь  $a \geq b, c \geq d, \lambda \geq 2$ . Пусть (1)  $\lambda = 2$ . Максимальными общими отрезками у  $0^a 1^k 0^k 1^b$  с  $0^c 1^k 0^k 1^d$  и двойственным  $0^d 1^k 0^k 1^c$  будут соответственно  $0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^b$ ,  $0^a 1^k 0^k 1^{\min(b,d)}$  и  $0^{\min(a,d)} 1^k 0^k 1^b$ ,  $0^a 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$ . Заметим, что так как  $c \geq d$ , то первый из этих отрезков больше третьего, а второй меньше четвертого. Так что для сравнения остаются первый и четвертый. Если  $b \geq c$ , то  $0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^b \leq 0^c 1^k 0^k 1^a = (0^a 1^k 0^k 1^{\min(b,c)})^\delta$ . Если же  $b \leq c$ , то  $0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^b \leq 0^a 1^k 0^k 1^b = 0^a 1^k 0^k 1^{\min(b,c)}$ , так что в обоих случаях четвертый отрезок больше первого, он и дает  $\inf$ .

При (2)  $\lambda > 2$  в составе  $0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^d$  есть отрезок  $0^k 1^k 0^k 1^k$ , в который вкладывается  $0^a 1^k 0^k 1^b$ );

- 4,7)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^b, 0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^k 0^d) = 0^a 1^k 0^k 1^b$ ;  
 4,8)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^b, 1^c 0^d) = 1^c 0^d$ ;  
 4,9)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^b, 1^c 0^k 1^k 0^d) = 0^a 1^k 0^d$ ;  
 4,10)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^b, 0^c (0^k 1^k)^\lambda 0^k 1^d) = 0^a 1^k 0^k 1^b$ ;  
 5,5)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^k 0^b, 0^c 1^k 0^k 1^k 0^d) = 0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^k 0^{\min(b,d)}$ ;  
 5,6)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^k 0^b, 0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^d) = (1) 0^{\min(a,c)} 1^k 0^k 1^k 0^b$  при  $\lambda = 2$ , (2)  $0^a 1^k 0^k 1^k 0^b$  при  $\lambda \geq 3$ ;  
 5,7)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^k 0^b, 0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^k 0^d) = 0^a 1^k 0^k 1^k 0^b$ ;  
 5,8)  $\inf(0^a 1^k 0^k 1^k 0^b, 1^c 0^d) = 1^c 0^d$ ;  
 5,9) (в форме 9,5)  $\inf(1^a 0^k 1^k 0^b, 0^c 1^k 0^k 1^k 0^d) = 1^{\min(a,d)} 0^k 1^k 0^b$

(здесь  $a \leq b, c \geq d$ . Максимальными общими отрезками у  $1^a 0^k 1^k 0^b$  с  $0^c 1^k 0^k 1^k 0^d$  и двойственным  $1^d 0^k 1^k 0^k 1^c$  будут соответственно  $1^a 0^k 1^k 0^{\min(b,d)}$  и  $1^{\min(a,d)} 0^k 1^k 0^b$ . Если  $a \leq d$ , то  $1^a 0^k 1^k 0^{\min(b,d)} \leq 1^a 0^k 1^k 0^b = 1^{\min(a,d)} 0^k 1^k 0^b$ . Если же  $a \geq d$ , то  $1^a 0^k 1^k 0^{\min(b,d)} = 1^a 0^k 1^k 0^d \leq 1^b 0^k 1^k 0^d = (1^d 0^k 1^k 0^b)^\delta = (1^{\min(a,d)} 0^k 1^k 0^b)^\delta$ , так что и здесь  $\inf = 1^{\min(a,d)} 0^k 1^k 0^b$ );

- 5,10)  $\inf 0^a 1^k 0^k 1^k 0^b, 1^c (0^k 1^k)^\lambda 0^k 1^d) = 0^a 1^k 0^k 1^k 0^b$ ;  
 6,6)  $\inf(0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^b, 0^c (1^k 0^k)^\mu 1^d) = (1) 0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$  при  $\mu = \lambda$ , (2)  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$  при  $\mu = \lambda + 1$ , (3)  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^b$  при  $\mu \geq \lambda + 2$

(здесь  $\lambda \leq \mu, a \geq b, c \geq d, a \geq c$ .

Если (1)  $\mu = \lambda$ , то максимальными общими отрезками у  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^b$  с  $0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^d$  и двойственным  $0^d (1^k 0^k)^\lambda 1^c$  являются соответственно  $0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$  и  $0^{\min(a,d)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$ . При  $b \geq d$  получаем:  $0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)} \geq 0^{\min(b,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^d = (0^{\min(a,d)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)})^\delta$ . При  $b \leq d$  будет  $0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)} \geq 0^{\min(a,d)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$ , так что  $\inf = 0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$ .

Если (2)  $\mu = \lambda + 1$ , то максимальными общими отрезками у  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^b$  с  $0^c (1^k 0^k)^\lambda (1^k 0^k) 1^d$  будут  $0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^b$  и  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$ , а с двойственным  $0^d (1^k 0^k)^\lambda 1^k 0^k 1^c$  получаются  $0^{\min(a,d)} (1^k 0^k)^\lambda 1^b$  и  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$ . Так как  $c \geq d$ , то первый из этих отрезков больше третьего, а четвертый больше второго. Так что для сравнения остаются  $0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^b$  и  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)} = (0^{\min(b,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^a)^\delta$ . Если  $b \leq c$ , то получаем:  $0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^b \leq 0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^b = 0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$ . Если же  $b \geq c$ , то будет  $0^{\min(a,c)} (1^k 0^k)^\lambda 1^b \leq 0^c (1^k 0^k)^\lambda 1^a = (0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^c)^\delta = (0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)})^\delta$ . Таким образом,  $\inf = 0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$ .

Если (3)  $\mu \geq \lambda + 2$ , то в составе  $0^c (1^k 0^k)^\mu 1^d$  есть отрезок  $0^k (1^k 0^k)^\lambda 1^k$ , в который вкладывается  $0^a (1^k 0^k)^\lambda 1^b$ );



6,7)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^b}, 0^c(1^k0^k)^{\mu 1^k0^d}) = (1) 0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^{\min(b,c)}}$  при  $\mu = \lambda$ , (2)  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^b}$  при  $\mu > \lambda$ ;

6,8)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^b}, 1^c0^d) = 1^c0^d$ ;

6,9)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^b}, 1^c0^k1^k0^d) = 1^c0^k1^k0^d$ ;

6,10)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^b}, 1^c(0^k1^k)^{\mu 0^d}) = (1) 0^a(1^k0^k)^{\lambda-1}1^k0^d$  при  $\mu = \lambda$ , (2)  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^b}$  при  $\mu > \lambda$ ;

7,7)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}, 0^c(1^k0^k)^{\mu 1^k0^d}) = (1) 0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^{\min(b,d)}}$  при  $\mu = \lambda$ , (2)  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}$

при  $\mu > \lambda$ ;

7,8)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}, 1^c0^d) = 1^c0^d$ ;

7,9)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}, 1^c0^k1^k0^d) = 1^c0^k1^k0^d$ ;

7,10)  $\inf(0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}, 1^c(0^k1^k)^{\mu 0^d}) = (1) 1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,c)}}$  при  $\mu = \lambda$ , (2)  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 0^{\min(b,d)}}$  при  $\mu = \lambda + 1$ , (3)  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}$  при  $\mu \geq \lambda + 2$

(если (1)  $\mu = \lambda$ , то максимальными общими отрезками у  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b} = 0^a1^k(0^k1^k)^{\lambda 0^b}$  с  $1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^d}$  и двойственным  $1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^c}$  соответственно будут  $1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,d)}}$  и  $1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,c)}}$ .

Так как  $c \leq d$ , то возможны три случая:  $b \leq c \leq d$ ,  $c \leq b \leq d$ ,  $c \leq d \leq b$ . В первом случае  $1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,d)}} \leq 1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^b} = 1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,c)}}$ , во втором  $1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,d)}} = 1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^b} = 1^{\min(b,c)}(0^k1^k)^{\lambda 0^b} \leq 1^{\min(b,c)}(0^k1^k)^{\lambda 0^d} = (1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,c)}})^{\delta}$ , в третьем  $1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,d)}} = 1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^d} = (1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,c)}})^{\delta}$ , так что  $\inf = 1^d(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,c)}}$ .

Если (2)  $\mu = \lambda + 1$ , то максимальными общими отрезками у  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}$  с  $1^c(0^k1^k)^{\lambda+1}0^d = 1^c0^k(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^d}$  и двойственным  $1^d(0^k1^k)^{\lambda+1}0^c = 1^d0^k(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^c}$  будут соответственно  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 0^{\min(b,d)}}$  и  $0^a(1^k0^k)^{\lambda 0^{\min(b,c)}}$ . Так как  $c \leq d$ , то первый больше второго.

Если (3)  $\mu \geq \lambda + 2$ , то  $1^c(0^k1^k)^{\mu 0^d} \geq 1^c(0^k1^k)^{\lambda+2}0^d = 1^c0^k(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^k}0^d \geq 0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}$ , так что  $\inf = 0^a(1^k0^k)^{\lambda 1^k0^b}$ ;

8,8)  $\inf(1^a0^b, 1^c0^d) = 1^{\min(a,c)}0^{\min(b,d)}$ ;

8,9)  $\inf(1^a0^b, 1^c0^k1^k0^d) = 1^{\min(a,d)}0^b$ ;

8, 10)  $\inf(1^a0^b, 1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^d}) = 1^a0^b$ ;

9,9)  $\inf(1^a0^k1^k0^b, 1^c0^k1^k0^d) = 1^{\min(a,c)}0^k1^k0^{\min(b,d)}$ ;

9,10)  $\inf(1^a0^k1^k0^b, 1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^d}) = (1) 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$  при  $\lambda = 2$ , (2)  $1^a0^k1^k0^b$  при  $\lambda > 2$

(здесь  $a \leq b, c \leq d$ ).

Если (1)  $\lambda = 2$ , то максимальными общими отрезками у  $1^a0^k1^k0^b$  с  $1^c0^k1^k0^k1^k0^d$  будут  $1^{\min(a,c)}0^k1^k0^b$  и  $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)}$ , а с двойственным  $1^d0^k1^k0^k1^k0^c$  будут  $1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$  и  $1^a0^k1^k0^{\min(b,c)}$ .

При этом первый отрезок меньше третьего, а четвертый меньше второго. Так что для сравнения остаются  $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)}$  и  $1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$ . При  $a \leq d$  получаем:  $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)} \leq 1^a0^k1^k0^b = 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$ . Если же  $a \geq d$ , то  $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)} \leq 1^b0^k1^k0^d = (1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b)^{\delta}$ . Так что  $\inf = 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$ .

Если (2)  $\lambda > 2$ , то в составе  $1^c(0^k1^k)^{\lambda 0^d}$  имеется отрезок  $0^k1^k0^k1^k0^k1^k$ , в который вкладывается  $1^a0^k1^k0^b$ ;

10,10)  $\inf(1^a(0^k1^k)^{\lambda 0^b}, 1^c(0^k1^k)^{\mu 0^d}) = (1) 1^{\min(a,c)}(0^k1^k)^{\lambda 0^{\min(b,d)}}$  при  $\mu = \lambda$ , (2)  $1^{\min(a,d)}(0^k1^k)^{\lambda 0^b}$  при  $\mu = \lambda + 1$ , (3)  $1^a(0^k1^k)^{\lambda 0^b}$  при  $\mu \geq \lambda + 2$ .

Рассмотрев все случаи, приходим к выводу, что  $ASub\mathbf{b}$  является нижней полурешеткой. Так как в ней есть наибольший элемент  $\mathbf{b}$ , то получается решетка.  $\square$

### Библиографический список

1. Салий В. Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1(1). С. 116–119.
2. Trotter W. T., Moore J. I. Some theorems on graphs and posets // Discrete Math. 1976. Vol. 15, № 1. P. 79–84.
3. Jacobson M. S., Kézdy F. E., Seif S. The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner // Order. 1995. Vol. 12, № 3. P. 315–318.
4. Kézdy A. E., Seif S. When is a poset isomorphic to the poset of connected induced subgraphs of a graph? // Southwest J. Pure Appl. Math. 1996. Vol. 1. P. 42–50 (Electronic).
5. Nieminen J. The lattice of connected subgraphs of a connected graph // Comment. Math. Prace Mat. 1980. Vol. 21, № 1. P. 187–193.
6. Adams P., Eggleton R. B., MacDougall J. A. Degree sequences and poset structure of order 9 graphs // Proc. XXXV Southeast Conf. Comb., Graph Theory and Computing. Boca Raton, FL, USA, 2004. Vol. 166. P. 83–95.





7. Leach D., Walsh M. A characterization of lattice-ordered graphs // Proc. Integers Conf. 2005. N. Y. : Gruyter, 2007. P. 327–332.
8. Салий В. Н. Система абстрактных связанных подграфов линейного графа // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2(16). С. 90–94.

## The Ordered Set of Connected Parts of a Polygonal Graph

V. N. Saliy

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, SaliyVN@info.sgu.ru

Under a polygonal graph is meant an oriented graph obtained from a cycle by some orientation of its edges. The set of all abstract (i. e. pairwise non-isomorphic) connected parts of a polygonal graph is ordered by graph embedding. Polygonal graphs are characterized for which this ordered set is a lattice.

*Key words:* polygonal graph, linear graph, binary vector, duality, ordered set, lattice.

### References

1. Saliy V. N. Minimal primitive extensions of oriented graphs. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2008, no. 1(1), pp. 116–119 (in Russian).
2. Trotter W. T., Moore J. I. Some theorems on graphs and posets. *Discrete Math.*, 1976, vol. 15, no. 1, pp. 79–84.
3. Jacobson M. S., Kézdy F. E., Seif S. The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner. *Order*, 1995, vol. 12, no. 3, pp. 315–318.
4. Kézdy A. E., Seif S. When is a poset isomorphic to the poset of connected induced subgraphs of a graph? *Southwest J. Pure Appl. Math.*, 1996, vol. 1, pp. 42–50. Available at: <http://rattler.cameron.edu/swjpam.html> (Accessed 28, September, 2012).
5. Nieminen J. The lattice of connected subgraphs of a connected graph. *Comment. Math. Prace Mat.*, 1980, vol. 21, no. 1, pp. 187–193.
6. Adams P., Eggleton R. B., MacDougall J. A. Degree sequences and poset structure of order 9 graphs. *Proc. XXXV Southeast Conf. Comb., Graph Theory and Computing*. Boca Raton, FL, USA, 2004, vol. 166, pp. 83–95.
7. Leach D., Walsh M. A characterization of lattice-ordered graphs. *Proc. Integers Conf.*, 2005. New York, Gruyter, 2007, pp. 327–332.
8. Saliy V. N. The system of abstract connected subgraphs of a linear graph. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2012, no. 2(16), pp. 90–94 (in Russian).

УДК 004.021

## СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФА ДЕ БРЁЙНА, ГРАФА ПЕРЕКРЫТИЙ И МИКРОСБОРКИ ДЛЯ DE NOVO СБОРКИ ГЕНОМА

А. А. Сергушичев<sup>1</sup>, А. В. Александров<sup>2</sup>, С. В. Казаков<sup>3</sup>, Ф. Н. Царев<sup>4</sup>, А. А. Шальто<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Магистрант кафедры компьютерных технологий, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, [alserg@rain.ifmo.ru](mailto:alserg@rain.ifmo.ru)

<sup>2</sup>Магистрант кафедры компьютерных технологий, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, [alexandr@rain.ifmo.ru](mailto:alexandr@rain.ifmo.ru)

<sup>3</sup>Магистрант кафедры компьютерных технологий, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, [svkazakov@rain.ifmo.ru](mailto:svkazakov@rain.ifmo.ru)

<sup>4</sup>Кандидат технических наук, ассистент кафедры программной инженерии и верификации программ, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, [tsarev@rain.ifmo.ru](mailto:tsarev@rain.ifmo.ru)

<sup>5</sup>Доктор технических наук, заведующий кафедрой технологий программирования, профессор, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, [shalyto@mail.ifmo.ru](mailto:shalyto@mail.ifmo.ru)

В работе предлагается метод сборки контигов геномных последовательностей из парных чтений. Особенностью этого метода является разбиение процесса сборки контигов на три этапа: сборка квазиконтигов из чтений, сборка контигов из квазиконтигов и микросборка. На первом из этапов используется граф де Брёйна, на втором — граф перекрытий. Описываются результаты экспериментального исследования разработанного метода на чтениях геномов бактерии *E. Coli* (размер генома — 4.5 миллиона нуклеотидов) и рыбы *Maylandia zebra* (размер генома — миллиард нуклеотидов). Преимущество разработанного метода состоит в том, что для его работы требуется существенно меньше оперативной памяти по сравнению с существующими программными средствами для сборки генома.

*Ключевые слова:* сборка генома, контиги, граф де Брёйна, граф перекрытий, микросборка.



## ВВЕДЕНИЕ

Многие современные задачи биологии и медицины требуют знания геномов живых организмов, который состоит из нескольких нуклеотидных последовательностей молекул дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). Поэтому возникает необходимость в дешевом и быстром методе секвенирования — определения последовательности нуклеотидов в образце ДНК. Существующие секвенаторы — устройства для чтения ДНК — не позволяют считать за один раз всю молекулу. Вместо этого они позволяют читать фрагменты генома небольшой длины. В настоящее время получил распространение следующий подход: сначала большое число копий ДНК разбивается (например, с помощью ультразвука) на много маленьких фрагментов длиной около 500 нуклеотидов, а затем у фрагментов считываются их префикс и суффикс (длиной до 80–120 нуклеотидов каждый). Эти префикс и суффикс называются парными чтениями. Описанный процесс заканчивается, когда суммарное число прочитанных нуклеотидов превосходит размер генома в несколько десятков раз (50–200). Указанным образом работают, например, секвенаторы компании *Illumina* [1]. Отметим, что описанные выше префикс и суффикс читаются с разных нитей ДНК: один — с прямой, другой — с обратно-комплементарной, причем неизвестно, который откуда.

Задачей сборки генома является восстановление последовательности ДНК (ее длина составляет от миллионов до миллиардов нуклеотидов у разных живых существ) на основании информации, полученной в результате секвенирования.

Процесс сборки делится, как правило, на следующие этапы:

1. Исправление ошибок в данных секвенирования.
2. Сборка контигов — максимальных непрерывных последовательностей нуклеотидов, которые удалось восстановить.
3. Построение скэффолдов — упорядоченных множеств контигов, разделенных промежутками, на размеры которых есть какие-то оценки.

Секвенаторы первого поколения выдавали на выходе длинные чтения. Это позволяло при небольшом покрытии (около 10-кратного) получать достаточно длинные и качественные контиги. Вследствие этого было разработано много сборщиков, основанных на подходе *overlap-layout-consensus (OLC)* [2]. Этот подход использует поиск перекрытий, не меньших некоторой заданной длины, между всеми чтениями и построение графа перекрытий — графа, вершинами которого являются чтения, а ребрами — найденные перекрытия.

Секвенаторы второго поколения позволили существенно удешевить процесс секвенирования, но длина чтений уменьшилась. При использовании такой технологии большое число чтений и их небольшая длина не позволяет эффективно использовать метод *OLC*. Одной из наиболее часто используемых математических моделей для сборки генома из таких данных является граф де Брёйна [3]. Вершинами этого графа являются строки из нуклеотидов длины  $k$  —  $k$ -меры; ребрами являются  $(k + 1)$ -меры; ребро соединяет вершины, соответствующие его префиксу и суффиксу. На использовании этого графа основано множество современных средств для сборки генома: *Velvet* [4], *Allpaths* [5], *AbySS* [6], *SOAPdenovo* [7], *EULER* [8]. Одним из недостатков, которым обладают перечисленные программные средства, является большой объем оперативной памяти, необходимый им для сборки генома, сходного по размерам с геномом человека (2–3 миллиарда нуклеотидов). Так, например, *SOAPdenovo* необходимо около 140 ГБ оперативной памяти, а *ABySS* — 21 компьютер с 16 ГБ каждый (всего — 336 ГБ). Такие затраты памяти обусловлены наличием ошибок секвенирования в исходных данных (такие ошибки ведут к увеличению размера графа де Брёйна), а также неэкономным методом хранения этого графа.

В настоящей работе предлагается метод, ориентированный на низкое использование памяти. Исправление ошибок в небольшом объеме памяти было рассмотрено в работе [9]. Построение скэффолдов в настоящей работе не рассматривается.

## 1. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД

Этап сборки контигов в предлагаемом методе состоит из трех подэтапов.

1. Сборка квазиконтигов из чтений геномной последовательности. Квазиконтигами называются последовательности нуклеотидов, которые, с одной стороны, длиннее чтений, но, с другой стороны, все еще являются достаточно короткими. Этот подэтап выполняется с использованием графа де Брёйна.



2. Сборка контигов из квазиконтигов. Выполняется с использованием графа перекрытий и метода *overlap-layout-consensus*.
3. Построение контигов с помощью микросборки. Использует граф де Брёйна и граф, сходный с графом перекрытий.

**Сборка квазиконтигов.** В первом подэтапе используется граф де Брёйна, в котором множество ребер состоит только из «надежных»  $(k + 1)$ -меров — тех, которые встречаются в чтениях достаточно большое число раз, не меньшее некоторого порогового значения, для того чтобы их можно было с достаточно большой вероятностью считать входящими в геном (как правило, это значение составляет от трех до шести). Множество вершин состоит из тех вершин графа де Брёйна, которым инцидентно хотя бы одно из выбранных ребер. Если участок нуклеотидной последовательности покрылся достаточно хорошо, то все входящие в него  $(k + 1)$ -меры по много раз входят в исходные данные, а тогда в этом графе существует путь между первым и последним  $k$ -мерами участка. Предлагаемый метод основан на поиске такого пути для фрагмента, соответствующего парным чтениям. Чтобы оба чтения находились на одной цепочке, второе чтение заменяется комплементарной ему последовательностью. Чтения при этом направлены внутрь, поэтому исходному фрагменту соответствует путь между первым  $k$ -мером первого чтения и обращенным первым  $k$ -мером второго чтения. В дальнейшем считаем, что операция комплементирования чтения уже произведена и оба чтения находятся на одной нити.

Известно, что длины фрагментов, из которых были получены парные чтения, имеют распределение, близкое к нормальному, поэтому для длин путей существуют верхняя и нижняя границы, и, следовательно, слишком короткие и слишком длинные пути можно отбросить. Если нашелся единственный путь, то можно с очень большой уверенностью сказать, что он соответствует реальной подстроке геномной последовательности, поэтому этот фрагмент считается восстановленным, а найденный путь выводится. Возможен также вариант, когда нашлось несколько путей одинаковой длины. В случае, если эти пути достаточно похожи, в неоднозначных позициях можно выводить любой из нуклеотидов, так как на следующем подэтапе ищутся в том числе и неточные перекрытия.

Для поиска путей применяется подход *meet-in-the-middle* — пути ищутся одновременно с двух сторон с помощью двух одновременных обходов в ширину. Первый обход идет по прямым ребрам графа де Брёйна начиная от первого чтения в паре, а второй — по обратным, начиная от второго чтения. Таким образом, после  $l_1$  шагов в первом обходе получается слой вершин  $L_1$ , удаленных от начальной вершины на  $l_1$ , а после  $l_2$  шагов во втором обходе — слой вершин  $L_2$ , удаленных от конечной вершины на  $l_2$ . Если в какой-то момент слои  $L_1$  и  $L_2$  вершинно пересекаются, то существуют путь между начальной и конечной вершиной длины  $l_1 + l_2$ , которому соответствует последовательность длины  $l_1 + l_2 + k$ . Используя деревья обходов в ширину, этот путь можно восстановить.

В обходах в ширину в качестве начальной и конечной вершин выбираются соответственно первый  $k$ -мер первого чтения и обращенный первый  $k$ -мер второго чтения. При этом, чтобы не потерять возможность собрать квазиконтиг даже при ошибках в этих  $k$ -мерах, на шаге  $l_1$  первого обхода в множество  $L_1$  добавляется  $l_1$ -й  $k$ -мер первого чтения, а на шаге  $l_2$  второго обхода в множество  $L_2$  добавляется обращенный  $l_2$ -й  $k$ -мер второго чтения. Из-за этого пересечение множеств  $L_1$  и  $L_2$  может на самом деле давать путь короче  $l_1 + l_2$ .

Можно также заметить, что путей длины  $l_1$  от начальной вершины может быть много, про часть из которых можно сказать, что маловероятно, что они являются подпутями искомого пути. Для этого можно сравнивать каждый путь длины  $l_1$  с префиксом первого чтения длины  $l_1 + k$  (пока такой префикс существует). Если путь отличается от префикса чтения в большом числе позиций с маленькой вероятностью ошибки, то такой путь можно не рассматривать — удалить соответствующую вершину из  $L_1$ . Аналогично удаляются некоторые вершины из  $L_2$ .

Важным моментом является то, в каком порядке делать шаги в обходах в ширину. Имеет смысл их каким-то образом чередовать, так как число посещенных вершин в каждом обходе в ширину асимптотически экспоненциально зависит от числа шагов в этом обходе. Два одновременных обхода в ширину навстречу друг другу позволяют сократить число посещенных вершин, а, стало быть, и операций, с примерно  $d^l$  до  $2d^{l/2}$ , где  $d$  — средняя степень вершины в графе де Брёйна, а  $l$  — примерная длина искомого пути. На практике можно делать попеременное выполнение шагов, либо, что еще лучше, делать шаг в том обходе, в котором в текущем слое меньше вершин.

На рис. 1 показан пример работы алгоритма поиска путей. В этом примере были найдены пути разной длины, что означает, что из этой пары чтений собрать квазиконтиг не получается.

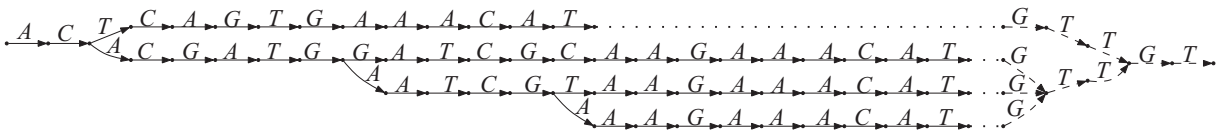


Рис. 1. Пример фрагмента графа, получившегося при поиске путей. Сплошные и штриховые пунктирные ребра — ребра, добавленные в ходе первого и второго обходов в ширину соответственно. Точечные пунктирные ребра соединяют вершины, соответствующие двум одинаковым  $k$ -мерам

Выполнение обходов в ширину заканчивается в одном из трех случаев:

- 1) сумма  $l_1 + l_2 + k$  достигла верхней границы на длину пути;
- 2) было найдено два соединяющих начальную и конечную вершины пути разной длины;
- 3) число посещенных вершин стало слишком большим.

Для того чтобы потребление памяти при применении предлагаемого метода было не очень большим, необходимо иметь компактное представление используемого графа де Брёйна. Для этого достаточно хранить только множество его ребер, что можно эффективно делать, используя, например, хеш-таблицу с открытой адресацией. Преимуществами такого подхода хранения перед другими являются его простота, быстродействие и возможность балансировки между используемой памятью и скоростью. Более эффективными с точки зрения потребляемой памяти являются *rank/select* словари [10]. Необходимый для них объем оперативной памяти близок к теоретическому пределу, однако время доступа к данным выше (в том числе асимптотически), чем у хеш-таблиц. Другим вариантом, предложенным в статье [11], является применение фильтров Блума с хранением небольшого числа ложноположительных ребер в хеш-таблице, что позволяет сохранить асимптотическое время доступа  $O(1)$ , при близком к оптимальному использовании памяти. Этот подход может быть применен и в предлагаемом алгоритме сборки квазиконтигов.

Стоит отметить, что для работы предложенного метода не требуется, чтобы парные чтения перекрывались, в отличие от некоторых других подобных подходов.

**Сборка контигов из квазиконтигов.** Как уже было сказано выше, сборка контигов из квазиконтигов основана на подходе *overlap-layout-consensus*. На этом подэтапе сначала производится поиск перекрытий между квазиконтигами. Для этого строится строка вида « $C_1C_2C_3\dots C_n$ », где  $C_i$  —  $i$ -й квазиконтиг, а  $n$  — число квазиконтигов. Затем для этой строки строится суффиксный массив [12] — массив суффиксов строки, упорядоченных лексикографически. С его помощью можно найти все квазиконтиги, заканчивающиеся на заданную строку  $s$ . Это можно сделать, например, с помощью бинарного поиска суффиксов в суффиксном массиве, которые начинаются с  $s$ . Так как из-за сортировки они будут располагаться рядом, то получится интервал суффиксов в суффиксном массиве. В начале этого интервала будут располагаться те суффиксы, в которых после  $s$  идет «\$». Каждый из этих суффиксов соответствует квазиконтигу, который заканчивается на  $s$ . Если в качестве строки  $s$  брать префиксы квазиконтига, то описанным способом можно найти квазиконтиги, с которым они перекрываются. Если к ним добавить префиксы с небольшим изменением, то можно также находить неточные перекрытия.

Для хранения суффиксного массива в памяти используется примерно 3 бита на нуклеотид при хранении исходной строки и 5 байт на элемент суффиксного массива — позицию, с которой начинается суффикс. Чтобы сократить использование памяти, применяется разбиение суффиксов на корзины в зависимости от их префикса небольшой фиксированной длины.

Для построения суффиксного массива применяется корзинная сортировка с последующим применением быстрой сортировки для достаточно небольших участков массива. Так как все суффиксы в одной корзине начинаются с одинакового префикса, каждую корзину можно сортировать независимо, загружая в память только исходную строку (полностью) и массив суффиксов из текущей корзины, заданных их позициями в строке.

Для того чтобы при поиске перекрытий не выполнять бинарного поиска многократно для одних и тех же параметров, поиск перекрытий осуществляется одновременно для группы квазиконтигов. Будем поддерживать два интервала: интервал  $Q = (q_l, q_r)$ , соответствующий квазиконтигам с одинаковым префиксом некоторой длины  $l$ , для которых в данный момент ищутся перекрытия, и интервал  $S = (s_l, s_r)$ , соответствующий суффиксам с одинаковым префиксом той же длины  $l$ . При этом префиксы квазиконтигов из  $Q$  и суффиксов из  $S$  различаются лишь в небольшом числе позиций. На



каждом шаге сначала проверяется, есть ли среди суффиксов из  $S$  такие, что на  $(l + 1)$ -й позиции в них находится «\$». Такие суффиксы соответствуют перекрытиям квазиконтингов из  $Q$  с некоторыми другими квазиконтингами. Затем интервал квазиконтингов  $Q$  и интервал суффиксов  $S$  делятся на четыре интервала  $Q_A, Q_G, Q_C, Q_T$  и  $S_A, S_G, S_C, S_T$  соответственно в зависимости от  $(l + 1)$ -го нуклеотида. Функция поиска перекрытий рекурсивно вызывается для всех 16 пар интервалов с учетом того, что несовпадение  $(l + 1)$ -х символов может дать различие префиксов, превышающее установленный порог на число возможных несовпадений в перекрытии.

После того как все перекрытия были найдены, получается граф, в котором вершинами являются квазиконтинги, а ребрами — перекрытия. Этот граф упрощается: из него удаляются транзитивные перекрытия — такие перекрытия между контингами  $A$  и  $C$ , что существует квазиконтинг  $B$ , который перекрывается и с квазиконтингом  $A$ , и с квазиконтингом  $C$  (рис. 2).

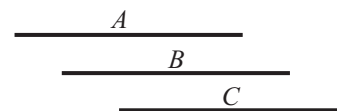


Рис. 2. Транзитивное перекрытие квазиконтингов  $A, B$  и  $C$

В конце подэтапа полученный граф перекрытий модифицируется с помощью набора эвристик: удаление квазиконтингов, не имеющих перекрытий с другими, удаление небольших «отростков» в графе, объединение путей одинаковой длины и др. Эти модификации применяются для того, чтобы избавиться от ошибок, которые могли быть

в квазиконтингах. Затем в этом графе выделяются пути без ветвлений, которые соответствуют контингам. Для того чтобы из последовательности перекрывающихся квазиконтингов получить последовательность контингов, для каждой позиции континга выбирается нуклеотид, который наиболее часто встречается в соответствующих позициях квазиконтингов, покрывающих эту позицию континга.

**Микросборка.** В подэтапе микросборки сначала определяются пары контингов, которые могут быть расположены в геноме рядом. Для этого все чтения картируются на континги с помощью программного средства *Bowtie*. Находятся все парные чтения, картированные на разные континги. Такие парные чтения называются соединяющими. Для каждой пары соединенных таким образом контингов определяется, в каком порядке они идут в геноме, и выбираются все пары чтений, хотя бы одно из которых картируется на эти континги. Из этих чтений строится граф де Брёйна (рис. 3). Его размер существенно меньше графа, используемого на этапе сборки квазиконтингов (поэтому этап называется микросборкой). Путем поиска путей в этом графе промежутки между контингами заполняются, тем самым они объединяются.

На рис. 3 континги  $A$  и  $B$  предположительно расположены в геноме рядом, так как существует пара чтений  $(a_1, a_2)$ , в которой  $a_1$  входит в первый континг, а  $a_2$  — во второй. Пары чтений  $(b_1, b_2)$  и  $(c_1, c_2)$  не соединяют эти континги, но используются для построения графа де Брёйна. Этот граф имеет меньший размер, чем в подэтапе сборки квазиконтингов, — при сборке квазиконтингов граф имеет размер порядка длины генома, который может состоять из миллиардов нуклеотидов, а при микросборке — порядка размера контингов или даже размера фрагмента (при некоторой оптимизации), то есть порядка тысяч нуклеотидов. За счет этого удается восстановить больше пар чтений.

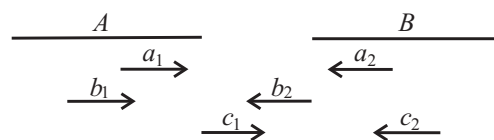


Рис. 3. Пары чтений, соединяющие континги и использующиеся для построения графа де Брёйна

После того как некоторые пары контингов получилось соединить, может оказаться, что после некоторого континга  $A$  есть несколько вариантов контингов, которые могут идти после него. В некоторых случаях это соответствует тому, что континг  $A$  является повтором и встречается в геноме несколько раз. Возможен и другой вариант, когда после континга  $A$  могут идти континги  $B$  и  $C$ , притом что после континга  $B$  может идти континг  $C$ . Этот случай может соответствовать последовательному расположению контингов  $A, B$  и  $C$  в геноме. Чтобы учесть такие случаи, строится граф, похожий на граф перекрытий, в котором вершинами являются континги, а ребрам соответствуют соединения между контингами — длина промежутка (в частности, она может быть отрицательной, если континги перекрываются) и последовательность нуклеотидов, заполняющая этот промежуток. В этом графе пути одинаковой длины объединяются, после чего неветвящиеся пути в этом графе выводятся как новая версия контингов.



## 2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Предложенные алгоритмы были реализованы на языке программирования *Java*. Экспериментальные исследования разработанного метода проводились для генома бактерии *E. Coli* (размер генома — примерно 4,5 миллиона нуклеотидов) и рыбы *Maylandia zebra* (размер генома — примерно миллиард нуклеотидов). Для сборки генома *E. Coli* использовалась библиотека парных чтений *SRR001665* со средним размером фрагмента около 200 нуклеотидов, с размером чтения 36 нуклеотидов и суммарным 160-кратным покрытием.

Сборка генома *E. Coli* проводилась на компьютере с 16 ГБ оперативной памяти и 6-ядерным процессором *AMD Phenom™ II X6 1090T*. Размер памяти, доступный виртуальной машине *JVM*, составлял 1 ГБ. При сборке контигов после первого подэтапа было получено 10 миллионов квазиконтигов — из большинства пар чтений было получено по квазиконтигу. Перед вторым подэтапом часть самых коротких квазиконтигов была отброшена, суммарный размер оставшихся составил 175 миллионов нуклеотидов. После второго подэтапа было получено 525 контигов со значением метрики *N50*, равным 17804 и максимальным размером, равным 73908. После подэтапа микросборки было получено 247 контигов со значением метрики *N50*, равным 53720, и максимальным размером контига равным 167319. Покрытие генома контигами составило 98%. Эти результаты примерно соответствуют результатам других сборщиков, что говорит о применимости предложенного метода.

Сборка генома *Maylandia zebra* проводилась в рамках проекта *Assemblathon 2* [13], организованного Калифорнийским университетом в Дэвисе (*University of California, Davis*). Для сборки контигов использовался набор чтений со средним размером фрагмента 180 и 60-кратным покрытием. Для запуска программ использовался компьютер с 32 ГБ оперативной памяти и двумя 4-ядерными процессорами. Суммарное время работы составило пять суток. Перед исправлением ошибок чтения были обрезаны, чтобы вероятность отдельной ошибки в каждом нуклеотиде не превышала 10%. После этого длина всех чтений в среднем уменьшилась на 20%. Исправление ошибок работало в течение 42 часов. В результате было найдено 150 миллионов исправлений. Всего чтений было 600 миллионов, поэтому было исправлено в среднем каждое четвертое чтение. Сборка квазиконтигов заняла 38 часов. Квазиконтиги были получены из 60% чтений. Сборка контигов выполнялась за 26 часов. В результате было получено 734165 контигов, суммарный размер которых составляет 680321319 нуклеотидов. Длина максимального составляет 23514 нуклеотидов, средняя длина — 927, значение метрики *N50* — 1799. Микросборка не повлияла на окончательный результат. Возможной причиной этого может являться то, что при покрытии генома контигами около 80–85% (примерно такая часть чтений была найдена в контигах) и среднем размере контига около 1000, среднее расстояние между «соседними» контигами составляет около 250, а парные чтения со средним размером фрагмента около 180 позволяют соединить контиги с промежутком примерно 120.

*Исследования выполняются в рамках соглашения № 14.В37.21.0562 и государственного контракта № 16.740.11.0495 (заключены в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы»).*

### Библиографический список

1. Illumina, Inc. URL: <http://www.illumina.com/> (дата обращения : 18.05.2012).
2. Böckenhauer H.-J., Bongrratz D. Algorithmic Aspects of Bioinformatics. Berlin : Springer, 2007. 396 p.
3. Pevzner P. A. 1-Tuple DNA sequencing : computer analysis // J. Biomol. Struct. Dyn. 1989. Vol. 7. P. 63–73.
4. Zerbino D. R., Birney E. Velvet : Algorithms for de novo short read assembly using de Bruijn graphs // Genome Research. 2008. Vol. 18. P. 821–829.
5. Butler J., MacCallum I., Kleber M., Shlyakhter I. A., Belmonte M.K., Lander E.S., Nusbaum C., Jaffe D. B. ALLPATHS: de novo assembly of wholegenome shotgun microreads // Genome Research. 2008. Vol. 18. P. 810–820.
6. Simpson J. T., Wong K., Jackman S. D., Schein J. E., Jones S. J., Birol I. ABySS : a parallel assembler for short read sequence data // Genome Research. 2009. Vol. 19. P. 1117–1123.
7. Li R., Zhu H., Ruan J., Qian W., Fang X., Shi Z., Li Y., Li S., Shan G., Kristiansen K., Li S., Yang H., Wang J., Wang J. De novo assembly of human genomes with massively parallel short read sequencing // Genome Research. 2010. Vol. 20. P. 265–272.



8. Pevzner P. A., Tang H., Waterman M. S. EULER : An Eulerian path approach to DNA fragment assembly // Proc. Natl. Acad. Sci. 2001. № 98. P. 9748–9753.
9. Александров А. В., Казаков С. В., Мельников С. В., Сергушичев А. А., Царев Ф. Н., Шалыто А. А. Метод исправления ошибок в наборе чтений нуклеотидной последовательности // Науч.-техн. вестн. С.-Петербург. гос. ун-та информационных технологий, механики и оптики. 2011. № 5. С. 81–84.
10. Okanohara D., Sadakane K. Practical entropy-compressed rank/select dictionary // Computing Research Repository. 2006. URL: <http://arxiv.org/abs/cs/0610001> (дата обращения : 18.05.2012).
11. Chikhi R., Rizk G. Space-efficient and exact de Bruijn graph representation based on a Bloom filter // Algorithms in Bioinformatics. 2012. P. 236–248.
12. Гасфилд Д. Строки, деревья и последовательности в алгоритмах. Информатика и вычислительная биология. СПб. : Невский диалект, 2003. 656 с.
13. The Assemblathon. URL: <http://www.assemblathon.org> (дата обращения : 18.05.2012).

## Combining De Bruijn Graphs, Overlap Graphs and Microassembly for De Novo Genome Assembly

A. A. Sergushichev, A. V. Alexandrov, S. V. Kazakov, F. N. Tsarev, A. A. Shalyto

Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia, 197101, St. Petersburg, Kronverkskiy pr., 49, [alserg@rain.ifmo.ru](mailto:alserg@rain.ifmo.ru), [alexandr@rain.ifmo.ru](mailto:alexandr@rain.ifmo.ru), [svkazakov@rain.ifmo.ru](mailto:svkazakov@rain.ifmo.ru), [tsarev@rain.ifmo.ru](mailto:tsarev@rain.ifmo.ru), [shalyto@mail.ifmo.ru](mailto:shalyto@mail.ifmo.ru)

In this paper we present a method for *de novo* genome assembly that splits the process into three stages: quasicontig assembly; contig assembly from quasicontigs; contig postprocessing with microassembly. The first stage uses de Bruijn graph, the second one uses overlap graph. We have carried out experiments of assembling the *E. Coli* genome (size  $\approx 4.5$  Mbp) and *Maylandia zebra* genome (size  $\approx 1$  Gbp). Advantage of proposed method is a low memory consumption.

*Key words:* genome assembly, contigs, de Bruijn graph, overlap graph, microassembly.

### References

1. Illumina, Inc. Available at: <http://www.illumina.com/> (Accessed 18, May, 2012).
2. Böckenhauer H.-J., Bongrätz D. *Algorithmic Aspects of Bioinformatics*. Springer, 2007, 396 p.
3. Pevzner P. A. 1-Tuple DNA sequencing: computer analysis. *J. Biomol. Struct. Dyn.* 1989. vol. 7, pp. 63–73.
4. Zerbino D. R., Birney E. Velvet : Algorithms for de novo short read assembly using de Bruijn graphs. *Genome Research*, 2008, vol. 18, pp. 821–829.
5. Butler J., MacCallum I., Kleber M., Shlyakhter I. A., Belmonte M. K., Lander E. S., Nusbaum C., Jaffe D. B. ALLPATHS : De novo assembly of wholegenome shotgun microreads, *Genome Research*, 2008, vol. 18, pp. 810–820.
6. Simpson J. T., Wong K., Jackman S. D., Schein J. E., Jones S. J., Birol I. ABySS : A parallel assembler for short read sequence data. *Genome Research*, 2009, vol. 19, pp. 1117–1123.
7. Li R., Zhu H., Ruan J., Qian W., Fang X., Shi Z., Li Y., Li S., Shan G., Kristiansen K., Li S., Yang H., Wang J., Wang J. De novo assembly of human genomes with massively parallel short read sequencing. *Genome Research*, 2010, vol. 20, pp. 265–272.
8. Pevzner P. A., Tang H., Waterman M. S. EULER : An Eulerian path approach to DNA fragment assembly. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 2001, no. 98, pp. 9748–9753.
9. Aleksandrov A. V., Kazakov S. V., Melnikov S. V., Sergushichev A. A., Tsarev F. N., Shalyto A. A. Errors Correction Method in the Readings Set of Nucleotide Sequence. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2011, no. 5, pp. 81–84 (in Russian).
10. Okanohara D., Sadakane K. Practical entropy-compressed rank/select dictionary. *Comput. Research Repository*, 2006. Available at: <http://arxiv.org/abs/cs/0610001> (Accessed 18, May, 2012).
11. Chikhi R., Rizk G. Space-efficient and exact de Bruijn graph representation based on a Bloom filter. *Algorithms in Bioinformatics*, 2012, pp. 236–248.
12. Gusfield D. *Algorithms on String, Trees and Sequences*. Computer Science and Computational Biology. Cambridge Univ. Press, 1997, 554 p. (Rus. ed.: Gusfield D. *Строки, деревья и последовательности в алгоритмах*. Информатика и вычислительная биология. Ст. Petersburg, Nevskii dialekt Publ., 2003, 656 p.).
13. *The Assemblathon*. Available at: <http://www.assemblathon.org> (Accessed 18, May, 2012).



УДК 512.7+519.7+681.3

## АВТОМАТЫ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

В. В. Скобелев

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теории управляющих систем, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, vv\_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

В работе представлен обзор результатов, полученных при исследовании автоматов над конечными алгебраическими структурами. Объектами исследования являются автоматы над конечным кольцом, автоматы, определенные в терминах идеалов, автоматы на многообразиях и семейства хеш-функций, определяемые автоматами без выхода. Для исследуемых автоматов охарактеризованы вычислительная стойкость, сложность построения имитационной модели и гомоморфизмы.

*Ключевые слова:* кольца, автоматы, идентификация, вычислительная стойкость.

### ВВЕДЕНИЕ

Автоматы, заданные системой уравнений над конечной алгебраической структурой, определяют новый раздел алгебраической теории автоматов. Потенциальная область его приложений — разработка моделей и методов преобразования и защиты информации в современных информационных технологиях. При этом обратимые автоматы являются математическими моделями поточных шифров (обладающих тем свойством, что прямой и обратный автомат движутся в пространстве состояний по одной и той же траектории в одном и том же направлении), а автоматы без выхода определяют семейства хэш-функций (являющиеся вычислительно стойкими, если структура графа переходов удовлетворяет определенным условиям). Следует отметить, что исследование указанных выше автоматов открывает большие возможности для взаимопроникновения моделей и методов теории автоматов, теории алгоритмов, теории алгебраических систем, комбинаторного анализа и теории систем.

Основная цель настоящей работы — представить результаты исследования автоматов, заданных системой уравнений над конечной алгебраической структурой. В п. 1 кратко охарактеризованы автоматы над конечным кольцом и автоматы, определенные в терминах идеалов кольца. В п. 2 представлено решение задачи построения имитационной модели для параметрического семейства автоматов над конечным кольцом. В п. 3 охарактеризованы гомоморфизмы автоматов, определенных на двух типах многообразий над конечным кольцом: многообразиях с алгеброй и параметризованных многообразиях. В п. 4 выделен класс вычислительно стойких семейств хеш-функций, определяемых автоматами без выхода над конечным кольцом. Заключение содержит ряд выводов.

### 1. АВТОМАТЫ НАД КОНЕЧНЫМ КОЛЬЦОМ

Исследования задач анализа и синтеза линейных автоматов над конечным полем представлены в [1, 2], а задач идентификации соответствующих автоматных отображений — в [3, 4]. По видимому, [5] является одной из первых монографий, посвященных систематическому исследованию экспериментов с линейными и билинейными автоматами над конечным полем. Естественным нетривиальным обобщением поля является кольцо [6]. Возможность наличия делителей нуля, некоммутативности умножения и отсутствия единицы открывают широкие перспективы для применения теории колец при решении задач защиты информации в современных информационных системах (отметим, что все кандидаты на стандарты современных поточных шифров используют вычисления в кольцах вычетов).

В [7] исследованы семейства линейных автоматов Мили:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = A\mathbf{q}_t + B\mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} = C\mathbf{q}_t + D\mathbf{x}_{t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+) \quad (1)$$

и Мура

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = A\mathbf{q}_t + B\mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} = C\mathbf{q}_{t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+), \quad (2)$$





над кольцом вычетов (эти результаты обобщены в [8] для произвольного конечного ассоциативно-коммутативного кольца  $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$  с единицей), где  $\mathbf{q}_t, \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t \in K^n$  есть соответственно состояние, входной и выходной символ в момент  $t \in \mathbb{Z}_+$ , а квадратные  $n \times n$ -матрицы  $A, B, C, D$  являются параметрами, определяющими конкретный автомат, принадлежащий данному семейству. Показано, что:

1) автомат (1) (соответственно автомат (2)) — обратимый, тогда и только тогда, когда  $D$  — обратимая матрица (соответственно  $B$  и  $C$  — обратимые матрицы);

2) при известных параметрах решение задачи идентификации начального состояния автоматов (1) и (2) сводится к решению системы линейных уравнений, формируемой в процессе эксперимента с автоматом;

3) при решении задачи параметрической идентификации автоматов (1) и (2) идентификация матриц  $A$  и  $B$  сводится к решению системы нелинейных уравнений, формируемой в процессе эксперимента с автоматом.

Для любого кольца, не являющегося кольцом с сокращением (т. е. ненулевые элементы кольца не образуют гауссовой полугруппы относительно умножения), при решении системы линейных уравнений возникает необходимость поиска по множеству допустимых кандидатов. Ситуация является значительно более сложной при решении нелинейных уравнений над кольцом (известно, что даже над полем  $GF(2^k)$  решение уравнения 2-й степени от многих переменных является NP-полной задачей).

Таким образом, приведенные выше результаты показывают, что, во-первых, переход к обратимым автоматам не упрощает решения задач идентификации даже для линейных автоматов над кольцом, а, во-вторых, что при использовании автомата над кольцом в качестве преобразователя информации начальное состояние целесообразно выбирать в качестве секретного сеансового ключа, а параметры — в качестве секретного ключа средней длительности.

В [9, 10] исследована сложность задач параметрической идентификации и идентификации начального состояния автомата

$$\begin{cases} q_{t+2} = a + bq_{t+1}^2 + cq_t + dx_{t+1} \\ y_{t+1} = eq_{t+2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+) \quad (3)$$

над конечным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей (отметим, что первое уравнение системы (3) является аналогом над кольцом ряда модельных хаотических отображений, в том числе отображения Эно [11]).

На основе полученных результатов в [8, 12] разработан подход к решению уравнений над ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей, основанный на классах ассоциированных элементов кольца (т. е. элементов, которые могут быть получены друг из друга умножением на обратимый элемент кольца). Суть этого подхода состоит в следующем. Для переменных выделяются допустимые комбинации классов ассоциированных элементов. Для каждой такой комбинации переменная заменяется переменным элементом класса, т. е. произведением фиксированного элемента класса на переменный обратимый элемент (таким образом, задача сводится к поиску обратимых элементов кольца). Далее осуществляется поиск допустимых комбинаций обратимых элементов для данной комбинации классов ассоциированных элементов.

В [13] рассмотренный выше подход обобщен для произвольных ассоциативных некоммутативных колец с левой или правой единицей.

В [14] исследованы автоматы Мили:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_t) + \mathbf{f}_3(\mathbf{x}_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}_t) + \mathbf{f}_4(\mathbf{x}_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+) \quad (4)$$

и Мура

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_t) + \mathbf{f}_3(\mathbf{x}_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+), \quad (5)$$

над конечным ассоциативно-коммутативным кольцом  $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ , где  $\mathbf{f}_i : K^n \rightarrow K^n$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — такие отображения, что  $Val \mathbf{f}_1 = \mathbf{I}_1$  и  $Val \mathbf{f}_2 = \mathbf{I}_2$  для фиксированных наборов идеалов



$\mathbf{I}_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$  ( $r = 1, 2$ ) кольца  $\mathcal{K}$ . Определим на входной полугруппе  $(K^n)^+$  отношение эквивалентности  $\sim_{n,12}$  равенством  $\sim_{n,12} = \sim_{n,1} \cap \sim_{n,2}$ , где для любых входных слов  $\mathbf{u}' = \mathbf{x}'_1 \dots \mathbf{x}'_k \in (K^n)^+$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{x}''_1 \dots \mathbf{x}''_k \in (K^n)^+$

$$\mathbf{u}' \sim_{n,r} \mathbf{u}'' \Leftrightarrow (\forall 1 \leq j \leq k)(\mathbf{f}_{2+r}(\mathbf{x}'_j) \equiv \mathbf{f}_{2+r}(\mathbf{x}''_j) \pmod{\mathbf{I}_r}) \quad (r = 1, 2),$$

а отношение эквивалентности  $\sim'_{n,12}$  — формулой

$$\mathbf{u}' \sim'_{n,12} \mathbf{u}'' \Leftrightarrow \mathbf{u}' \sim_{n,1} \mathbf{u}'' \ \& \ (\forall \mathbf{q}'_0, \mathbf{q}''_0 \in K^n)(\forall 1 \leq j \leq k)(\mathbf{q}'_j \equiv \mathbf{q}''_j \pmod{\ker \mathbf{f}_2}).$$

В [14] доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для автомата (4) при любых наборах идеалов  $\mathbf{I}_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$  ( $r = 1, 2$ ) для любых входных слов  $\mathbf{u}' = \mathbf{x}'_1 \dots \mathbf{x}'_k \in (K^n)^+$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{x}''_1 \dots \mathbf{x}''_k \in (K^n)^+$  истинна формула

$$\mathbf{u}' \sim_{n,12} \mathbf{u}'' \Leftrightarrow (\forall \mathbf{q}'_0, \mathbf{q}''_0 \in K^n)(\forall 1 \leq j \leq k)(\mathbf{q}'_j \equiv \mathbf{q}''_j \pmod{\mathbf{I}_1} \ \& \ \mathbf{y}'_j \equiv \mathbf{y}''_j \pmod{\mathbf{I}_2}).$$

**Теорема 2.** Для автомата (5) при любых наборах идеалов  $\mathbf{I}_r = (I_1^{(r)}, \dots, I_n^{(r)})$  ( $r = 1, 2$ ) для любых входных слов  $\mathbf{u}' = \mathbf{x}'_1 \dots \mathbf{x}'_k \in (K^n)^+$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{x}''_1 \dots \mathbf{x}''_k \in (K^n)^+$  истинна формула

$$\mathbf{u}' \sim'_{n,12} \mathbf{u}'' \Leftrightarrow (\forall \mathbf{q}'_0, \mathbf{q}''_0 \in K^n)(\forall 1 \leq j \leq k)(\mathbf{q}'_j \equiv \mathbf{q}''_j \pmod{\mathbf{I}_1} \ \& \ \mathbf{y}'_j \equiv \mathbf{y}''_j \pmod{\mathbf{I}_2}).$$

Отметим, что, по своей сути, эти теоремы определяют гомоморфные образы автоматов вида (4) и (5) при гомоморфизме колец.

## 2. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СЕМЕЙСТВА АВТОМАТОВ НАД КОНЕЧНЫМ КОЛЬЦОМ

Анализ задачи параметрической идентификации автомата над конечным кольцом  $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$  показывает, что параметры не всегда могут быть идентифицированы однозначно (такая ситуация, в частности, имеет место для автомата (3)). Поэтому естественно возникает задача построения алгоритма, моделирующего с определенной точностью любой автомат, принадлежащий заданному семейству. Эта задача была решена в [15, 16]. Суть предложенного решения состоит в следующем.

Рассмотрим такое семейство автоматов  $\mathcal{M} = \{M_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}}$  ( $\mathbf{A} \subseteq K^l$ ), что

$$M_{\mathbf{a}} : \begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{a}), \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{a}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

где  $\mathbf{f}_1 : K^{n_1+n_2+l} \rightarrow K^{n_1}$  и  $\mathbf{f}_2 : K^{n_1+n_2+l} \rightarrow K^{n_3}$  — фиксированные отображения.

Зафиксируем множество параметров  $\mathbf{B} \subseteq K^l$  ( $|\mathbf{B}| < |\mathbf{A}|$ ) и три семейства отображений  $\{\varphi_{\mathbf{b}}^{(1)} : K^{n_1} \times K^{n_2} \rightarrow K^{n_3}\}_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}}$ ,  $\{\varphi_{\mathbf{b}}^{(2)} : K^{n_1} \times \bigcup_{j=1}^{r-1} (K^{n_3})^j \times K^{n_2} \rightarrow K^{n_3}\}_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}}$  и  $\{\varphi_{\mathbf{b}}^{(3)} : K^{n_1} \times (K^{n_3})^r \times K^{n_2} \rightarrow K^{n_3}\}_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}}$ . Рассмотрим семейство таких отображений  $\mathcal{G}_{\mathbf{B}} = \{G_{\mathbf{b}} : K^{n_1} \times (K^{n_2})^+ \rightarrow (K^{n_3})^+\}_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}}$ , что  $G_{\mathbf{b}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m) = \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_m$  ( $\mathbf{b} \in \mathbf{B}, m \in \mathbb{N}$ ), где

$$\mathbf{y}_i = \begin{cases} \varphi_{\mathbf{b}}^{(1)}(\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_1), & \text{если } i = 1, \\ \varphi_{\mathbf{b}}^{(2)}(\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{x}_i), & \text{если } i = 2, \dots, r, \\ \varphi_{\mathbf{b}}^{(3)}(\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_{i-r} \dots \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{x}_i), & \text{если } r < i \leq m. \end{cases} \quad (6)$$

Определим отображения  $H_{\mathbf{b}, \mathbf{q}_0} : (K^{n_2})^+ \rightarrow (K^{n_3})^+$  ( $\mathbf{b} \in \mathbf{B}, \mathbf{q}_0 \in K^{n_1}$ ) равенством  $H_{\mathbf{b}, \mathbf{q}_0}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m) = G_{\mathbf{b}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Из (6) вытекает, что  $H_{\mathbf{b}, \mathbf{q}_0}$  ( $\mathbf{b} \in \mathbf{B}, \mathbf{q}_0 \in K^{n_1}$ ) — автоматные отображения, причем каждое семейство  $\mathcal{H}_{\mathbf{b}} = \{H_{\mathbf{b}, \mathbf{q}_0}\}_{\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}}$  ( $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ ) определяет конечный автомат над кольцом  $\mathcal{K}$ . Зафиксировав сюръекцию  $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ , сопоставим с каждым автоматом  $M_{\mathbf{a}} \in \mathcal{M}$  автомат, определяемый семейством автоматных отображений  $\mathcal{H}_{h(\mathbf{a})}$ , т.е. упорядоченная пара  $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, h)$  является имитационной моделью семейства автоматов  $\mathcal{M}$ . Естественно потребовать, чтобы выполнялись равенства  $H_{h(\mathbf{a}), \mathbf{q}_0} \big|_{\bigcup_{i=1}^r (K^{n_2})^i} = F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} \big|_{\bigcup_{i=1}^r (K^{n_2})^i}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{q}_0 \in K^{n_1}$ ), где  $F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} : (K^{n_2})^+ \rightarrow (K^{n_3})^+$  — отображение, реализуемое начальным автоматом  $(M_{\mathbf{a}}, \mathbf{q}_0)$ . Содержательный смысл этих равенств



состоит в том, что имитационная модель  $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, h)$ , подсоединенная к входу и выходу исследуемого автомата  $M_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ ) пропускает первые  $r$  выходных символов, после чего блокирует выход автомата  $M_{\mathbf{a}}$  и моделирует его поведение на оставшейся части входного слова. Всюду в дальнейшем считаем, что это условие выполнено. Отметим, что если переменная  $\mathbf{q}_0$  фиктивна для каждого отображения  $\varphi_{\mathbf{b}}^{(3)}$  ( $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ ), то  $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, h)$  моделирует поведения каждого автомата  $M_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ ) посредством автоматов с конечной памятью.

Определим точность имитационной модели  $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, h)$  на основе стандартной техники теории алгоритмов.

Пусть  $F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m) = \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_m$  и  $H_{h(\mathbf{a}), \mathbf{q}_0}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m) = \tilde{\mathbf{y}}_1 \dots \tilde{\mathbf{y}}_m$ .

Число  $\alpha_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, m} = |K^{n_2}|^{-m} \sum_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m \in (K^{n_2})^m} (m - \varrho(\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_m, \tilde{\mathbf{y}}_1 \dots \tilde{\mathbf{y}}_m))$  (где  $\varrho$  — расстояние по Хеммингу)

является средним количеством позиций в выходных словах, в которых отображения  $F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  и  $H_{h(\mathbf{a}), \mathbf{q}_0}$  совпадают на множестве входных слов длины  $m$ . Отсюда вытекает, что число  $\beta_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, m} = m^{-1} \alpha_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, m}$  — среднее количество позиций в выходных словах, приходящихся на одну букву входного слова, в которых отображения  $F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  и  $H_{h(\mathbf{a}), \mathbf{q}_0}$  совпадают на множестве входных слов длины  $m$ . Следовательно, число  $\gamma_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, m} = \frac{|K^{n_2}| - 1}{|K^{n_2}|^{m+1} - |K^{n_2}|} \sum_{i=1}^m |K^{n_2}|^i \beta_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, m}$  — среднее количество позиций в выходных словах, приходящихся на одну букву входного слова, в которых отображения  $F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  и  $H_{h(\mathbf{a}), \mathbf{q}_0}$  совпадают на множестве всех входных слов длины, не превосходящей  $m$ .

Числа  $\underline{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} = \liminf_{m \rightarrow \infty} \{\gamma_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, i} | i \in \mathbb{N}_m\}$  и  $\bar{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \{\gamma_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0, i} | i \in \mathbb{N}_m\}$  определяют соответственно нижнюю и верхнюю границу среднего количества позиций в выходных словах, приходящегося на одну букву входного слова, в которых отображения  $F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  и  $H_{h(\mathbf{a}), \mathbf{q}_0}$  совпадают на своей области определения  $(K^{n_2})^+$ . Следовательно:

1) числа  $\underline{\eta}_{\mathbf{a}} = \min_{\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}} \underline{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  и  $\bar{\eta}_{\mathbf{a}} = \max_{\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}} \bar{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  определяют соответственно нижнюю и верхнюю границу среднего количества позиций в выходных словах, приходящегося на одну букву входного слова, в которых элементы семейства  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}} = \{F_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}\}_{\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}}$  совпадают с соответствующими элементами семейства  $\mathcal{H}_{h(\mathbf{a})}$ ;

2) если  $\underline{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} = \bar{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} = \gamma_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  для всех  $\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}$ , то:

а) число  $\eta_{\mathbf{a}} = \min_{\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}} \gamma_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  определяет в наихудшем случае среднее количество позиций в выходных словах, приходящееся на одну букву входного слова, в которых элементы семейства  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$  совпадают с соответствующими элементами семейства  $\mathcal{H}_{h(\mathbf{a})}$ ;

б) число  $\zeta_{\mathbf{a}} = |K^{n_1}|^{-1} \sum_{\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}} \gamma_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  определяет в среднем количество позиций в выходных словах, приходящееся на одну букву входного слова, в которых элементы семейства  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$  совпадают с соответствующими элементами семейства  $\mathcal{H}_{h(\mathbf{a})}$ .

Таким образом:

1) числа  $\underline{\eta} = \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \underline{\eta}_{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\eta} = \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \bar{\eta}_{\mathbf{a}}$  определяют соответственно нижнюю и верхнюю границу для среднего количества позиций в выходных словах, приходящегося на одну букву входного слова, в которых автоматные отображения, реализуемые семейством автоматов  $\mathcal{M}$ , совпадают с автоматными отображениями, реализуемыми имитационной моделью  $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, h)$ ;

2) если  $\underline{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} = \bar{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} = \gamma_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  для всех  $\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}$  и  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ , то:

а) число  $\nu_1 = \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \eta_{\mathbf{a}}$  определяет в наихудшем случае среднее количество позиций в выходных словах, приходящееся на одну букву входного слова, в которых автоматные отображения, реализуемые семейством автоматов  $\mathcal{M}$ , совпадают с автоматными отображениями, реализуемыми имитационной моделью  $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, h)$ ;

б) число  $\nu_2 = |\mathbf{A}|^{-1} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \eta_{\mathbf{a}}$  определяет среднее для наихудших случаев от средних количеств позиций в выходных словах, приходящихся на одну букву входного слова, в которых автоматные отображения, реализуемые семейством автоматов  $\mathcal{M}$ , совпадают с автоматными отображениями, реализуемыми имитационной моделью  $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, h)$ ;

в) число  $\nu_3 = \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \zeta_{\mathbf{a}}$  определяет наихудший случай для средних от средних количеств позиций в выходных словах, приходящихся на одну букву входного слова, в которых автоматные отображения,



реализуемые семейством автоматов  $\mathcal{M}$ , совпадают с автоматными отображениями, реализуемыми имитационной моделью  $(\mathcal{S}_{\mathbf{B}}, h)$ ;

г) число  $\nu_4 = |\mathbf{A}|^{-1} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \zeta_{\mathbf{a}}$  определяет среднее от средних количеств позиций в выходных словах, приходящееся на одну букву входного слова, в которых автоматные отображения, реализуемые семейством автоматов  $\mathcal{M}$ , совпадают с автоматными отображениями, реализуемыми имитационной моделью  $(\mathcal{S}_{\mathbf{B}}, h)$ .

Рассмотренные случаи охватывают все представляющие интерес комбинации понятий «в наихудшем случае» и «в среднем», и дают возможность охарактеризовать имитационную модель  $(\mathcal{S}_{\mathbf{B}}, h)$  как асимптотически  $[\eta, \bar{\eta}]$ -точную или, в случае, когда  $\underline{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0} = \bar{\gamma}_{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0}$  для всех  $\mathbf{q}_0 \in K^{n_1}$  и  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ , то как асимптотически  $\nu$ -точную, где  $\nu$  — любое из чисел  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  или  $\nu_4$ . В последнем случае естественно определить имитационную модель  $(\mathcal{S}_{\mathbf{B}}, h)$  как асимптотически точную, если  $\nu = 1$ .

В [15, 16] показано, что для семейства автоматов (3) существует асимптотически точная имитационная модель, моделирующая каждый автомат этого семейства автоматом с конечной памятью.

### 3. АВТОМАТЫ НА МНОГООБРАЗИИ НАД КОНЕЧНЫМ КОЛЬЦОМ

Применение эллиптических кривых над конечными полями при решении задач преобразования информации, в частности криптографии, обосновывают актуальность исследования автоматов, определенных на многообразиях (т. е. на множествах решений систем алгебраических уравнений) над конечным кольцом  $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ . Такое исследование дает возможность установить внутренние связи между современной алгебраической геометрией, теорией систем, теорией автоматов и криптологией. Рассмотрим некоторые результаты, полученные в этом направлении в [17–21].

С позиции алгебраической теории автоматов и ее приложений наибольший интерес представляют следующие два класса многообразий над кольцом  $\mathcal{K}$ :

1) класс  $\mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ , состоящий из всех таких многообразий  $\mathbf{V} \subseteq K^n$ , что определена алгебра  $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ , где  $\mathcal{F}_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$  и  $\mathcal{F}_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_{k_2}\}$  — множество соответственно унарных и бинарных операций;

2) класс  $\mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ , состоящий из всех многообразий  $\mathbf{V} \subseteq K^n$ , представленных полиномиальной параметризацией  $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\vec{\tau})$  ( $\vec{\tau} \in K^m$ ).

Отметим, что эллиптическая кривая  $\gamma$  над областью целостности  $\mathcal{K}$  — многообразие, принадлежащее классу  $\mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ . Действительно, в поле дробей  $\widetilde{\mathcal{K}}$  множество  $\widetilde{\mathcal{K}}(\gamma)$  точек кривой  $\gamma$  (включая бесконечно удаленную точку  $O$ ) образует абелеву группу  $(\widetilde{\mathcal{K}}(\gamma), +_{\gamma})$  (точка  $O$  — нейтральный элемент). Положив  $\mathcal{F}_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}\}$  ( $1 \leq k_1 < |\widetilde{\mathcal{K}}(\gamma)|$ ), где  $\alpha_0(P) = O$  ( $P \in \widetilde{\mathcal{K}}(\gamma)$ ) и  $\alpha_i(P) = \underbrace{P +_{\gamma} \dots +_{\gamma} P}_i$  ( $P \in \widetilde{\mathcal{K}}(\gamma)$ ) для всех  $i = 1, \dots, k_1$  и  $\mathcal{F}_2 = \{+_{\gamma}\}$ , мы определяем алгебру  $(\widetilde{\mathcal{K}}(\gamma), \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ .

Для многообразия  $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$  алгебра  $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$  дает возможность определить множество  $\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V})$  автоматов Мили:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \beta_{j_1}(\alpha_{i_1}(\mathbf{q}_t), \alpha_{x_{t+1}}(\mathbf{v}_1)) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \beta_{j_2}(\alpha_{i_2}(\mathbf{q}_t), \alpha_{x_{t+1}}(\mathbf{v}_2)) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+)$$

и множество  $\mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V})$  автоматов Мура:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \beta_{j_1}(\alpha_{i_1}(\mathbf{q}_t), \alpha_{x_{t+1}}(\mathbf{v}_1)) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \beta_{j_2}(\alpha_{i_2}(\mathbf{q}_{t+1}), \mathbf{v}_2) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}_+),$$

где  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$  — фиксированные точки,  $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{k_1+1}$  и  $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_{k_2}$  — фиксированные числа,  $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{V}$ , а  $x_{t+1} \in \mathbb{Z}_{k_1+1}$  ( $t \in \mathbb{Z}_+$ ). Таким образом,  $x_t, \mathbf{q}_t$  и  $\mathbf{y}_t$  являются соответственно входным символом, состоянием и выходным символом автомата  $M \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}) \cup \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V})$  в момент  $t$ .

Пусть  $\mathbf{V}, \mathbf{U} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ . Будем говорить, что:

1) многообразие  $\mathbf{U}$  — гомоморфный образ многообразия  $\mathbf{V}$ , если алгебра  $(\mathbf{U}, \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$  — гомоморфный образ алгебры  $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$ ;



2) многообразия  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  изоморфны, если алгебры  $(\mathbf{U}, \mathcal{F}_1^{(2)} \cup \mathcal{F}_2^{(2)})$  и  $(\mathbf{V}, \mathcal{F}_1^{(1)} \cup \mathcal{F}_2^{(1)})$  изоморфны. В [17] доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ . Если многообразие  $\mathbf{U}$  — гомоморфный образ многообразия  $\mathbf{V}$ , то существуют такие отображения  $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$  ( $j = 1, 2$ ), что автомат  $\Psi_j(M_j)$  — гомоморфный образ автомата  $M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_1(\mathcal{K})$ . Если многообразия  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  изоморфны, то существуют такие отображения  $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U})$  ( $j = 1, 2$ ), что автоматы  $M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V})$  и  $\Psi_j(M_j)$  изоморфны.

Пусть  $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ , а  $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\vec{\tau})$  ( $\vec{\tau} \in K^m$ ) — полиномиальная параметризация многообразия  $\mathbf{V}$ . Фиксированное семейство отображений  $\Theta = \{\theta_i : K^m \rightarrow K^m\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$  дает возможность определить множество  $\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}, \Theta)$  автоматов Мили:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{h}(P_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{r}_{x_{t+1}}(\mathbf{q}_t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+)$$

и множество  $\mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V}, \Theta)$  Мура:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{h}(P_{t+1}) \\ \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{r}(\mathbf{q}_{t+1}) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}_+),$$

где  $P_0 \in K^m$  — фиксированная точка,  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{h}(P_0)$ ,  $\mathbf{r}_i : K^n \rightarrow K^l$  ( $i \in \mathbf{Z}_k$ ) и  $\mathbf{r} : K^n \rightarrow K^l$  — фиксированные отображения, а  $x_{t+1} \in \mathbf{Z}_k$  ( $t \in \mathbf{Z}$ ). Таким образом,  $x_t$ ,  $\mathbf{q}_t$  и  $\mathbf{y}_t$  — соответственно входной символ, состояние и выходной символ автомата  $M \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{V}, \Theta) \cup \mathcal{A}^{(2)}(\mathbf{V}, \Theta)$  в момент  $t$ .

Пусть для многообразия  $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$  определена полиномиальная параметризация  $\mathbf{v} = \mathbf{h}_1(\vec{\tau}_1)$  ( $\vec{\tau}_1 \in K^{m_1}$ ) и зафиксировано семейство  $\Theta_1 = \{\theta_i^{(1)}\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$  отображений  $\theta_i^{(1)} : K^{m_1} \rightarrow K^{m_1}$ , а для многообразия  $\mathbf{U} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$  — полиномиальная параметризация  $\mathbf{v} = \mathbf{h}_2(\vec{\tau}_2)$  ( $\vec{\tau}_2 \in K^{m_2}$ ) и зафиксировано семейство  $\Theta_2 = \{\theta_i^{(2)}\}_{i \in \mathbf{Z}_k}$  отображений  $\theta_i^{(2)} : K^{m_2} \rightarrow K^{m_2}$ . Будем говорить, что:

1) пара  $(\mathbf{U}, \Theta_2)$  — гомоморфный образ пары  $(\mathbf{V}, \Theta_1)$ , если существует такая пара сюръекций  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$  ( $\varphi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}, \varphi_2 : K^{m_1} \rightarrow K^{m_2}$ ), что равенства  $\varphi_2(\theta_i^{(1)}(\vec{\tau}_1)) = \theta_i^{(2)}(\varphi_2(\vec{\tau}_1))$  и  $\varphi_1(\mathbf{h}_1(\vec{\tau}_1)) = \mathbf{h}_2(\varphi_2(\vec{\tau}_1))$  истинны для всех  $\vec{\tau}_1 \in K^{m_1}$  и  $i \in \mathbf{Z}_k$ ;

2) пары  $(\mathbf{U}, \Theta_2)$  и  $(\mathbf{V}, \Theta_1)$  изоморфны, если указанные выше отображения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — биекции.

В [17] доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ . Если пара  $(\mathbf{U}, \Theta_2)$  — гомоморфный образ пары  $(\mathbf{V}, \Theta_1)$ , то существуют такие отображения  $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$  ( $j = 1, 2$ ), что автомат  $\Psi_j(M_j)$  — гомоморфный образ автомата  $M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1)$ .

**Следствие 2.** Пусть  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V}_2(\mathcal{K})$ . Если пары  $(\mathbf{U}, \Theta_2)$  и  $(\mathbf{V}, \Theta_1)$  изоморфны, то существуют такие отображения  $\Psi_j : \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1) \rightarrow \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{U}, \Theta_2)$  ( $j = 1, 2$ ), что автоматы  $M_j \in \mathcal{A}^{(j)}(\mathbf{V}, \Theta_1)$  и  $\Psi_j(M_j)$  изоморфны.

В [17, 21] в явном виде построены отображения  $\Psi_j$  ( $j = 1, 2$ ), о которых идет речь в теоремах 3 и 4. В [18] исследована структура автоматов на многообразии с алгеброй, а в [19, 20] — структура автоматов на полиномиально параметризованном многообразии. В [22] исследованы автоматы, определенные на эллиптической кривой над конечной областью целостности. В частности, решена задача построения имитационной модели для этих автоматов.

#### 4. СЕМЕЙСТВА ХЕШ-ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ АВТОМАТАМИ НАД КОНЕЧНЫМ КОЛЬЦОМ

Известно, что хеш-функция  $H : X^+ \rightarrow Y$ , применяемая при решении задач защиты информации, должна удовлетворять следующим трем условиям:

- 1)  $H$  легко вычисляемая функция;
- 2) для любого  $y \in Y$  сложность поиска такого  $u \in X^+$ , что  $H(u) = y$  является экспонентой;
- 3) сложность случайного поиска двух таких  $u, u' \in X^+$  одной и той же длины, что  $H(u) = H(u')$  является экспонентой.

Ясно, что любая хеш-функция — это отображение входной полугруппы во множество состояний, реализуемое инициальным автоматом без выхода. Поэтому актуально исследование семейств хеш-



функций, определенных автоматами без выхода над над конечным кольцом  $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ . Рассмотрим некоторые результаты, полученные в этом направлении в [23].

Пусть  $\mathcal{F}_{k,m}$  ( $k \leq m$ ) — множество таких отображений  $\mathbf{f} : K^k \times K^m \rightarrow K^k$ , что

$$|\{x \in K^m | \mathbf{f}(\mathbf{q}, x) = \mathbf{q}''\}| = |K|^{m-k}$$

и

$$\{x \in K^m | \mathbf{f}(\mathbf{q}, x) = \mathbf{q}''\} \cap \{x \in K^m | \mathbf{f}(\mathbf{q}', x) = \mathbf{q}''\} = \emptyset$$

для всех  $\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'' \in K^k$  ( $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}'$ ). Отображение  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{k,m}$  определяет сильно связный автомат без выхода  $M_{\mathbf{f}}$  с множеством состояний  $K^k$  и входным алфавитом  $K^m$ .

Обозначим через  $H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0}$  отображение входной полугруппы  $(K^m)^+$  во множество состояний  $K^k$ , реализуемое инициальным автоматом  $(M_{\mathbf{f}}, \mathbf{q}_0)$ . Таким образом, автомат  $M_{\mathbf{f}}$  определяет семейство хэш-функций  $\{H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0}\}_{\mathbf{q}_0 \in K^k}$ . В [23] доказаны следующие теоремы, характеризующие свойства структуры этого семейства хэш-функций.

**Теорема 5.** Для любого отображения  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{k,m}$  если  $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}'_0$  ( $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0 \in K^k$ ), то  $H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0}(\mathbf{u}) \neq H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}'_0}(\mathbf{u})$  для любого входного слова  $\mathbf{u} \in (K^m)^+$ .

**Следствие 3.** Для любого отображения  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{k,m}$  если  $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}'_0$  ( $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0 \in K^k$ ), то  $H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0}^{-1}(\mathbf{q}) \cap H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}'_0}^{-1}(\mathbf{q}) = \emptyset$  для любого состояния  $\mathbf{q} \in K^k$  автомата  $M_{\mathbf{f}}$ .

**Теорема 6.** Для любых  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{k,m}$  и  $\mathbf{q}_0 \in K^k$  равенство  $|H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0}^{-1}(\mathbf{q}_t) \cap (K^m)^t| = |K|^{tm-k}$  ( $\mathbf{q}_t \in K^k$ ) истинно при всех  $t \in \mathbb{N}$ .

Обозначим через  $p_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0, t}^{(1)}(\mathbf{q})$  вероятность того, что случайно выбранное из множества  $(K^m)^t$  входное слово  $\mathbf{u}$  является решением уравнения  $H(\mathbf{u}) = \mathbf{q}$ , а через  $p_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0, t}^{(2)}$  — вероятность того, что для двух случайно выбранных из множества  $(K^m)^t$  различных входных слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}'$  истинно равенство  $H(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u}')$ . В [23] вычислительная стойкость семейства хэш-функций  $\{H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0}\}_{\mathbf{q}_0 \in K^k}$  охарактеризована следующим образом.

**Теорема 7.** Для любых  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{k,m}$  и  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q} \in K^k$  равенство  $p_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0, t}^{(1)}(\mathbf{q}) = |K|^{-k}$  истинно при всех  $t \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 8.** Для любых  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{k,m}$  и  $\mathbf{q}_0 \in K^k$  равенство  $p_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0, t}^{(2)} = |K|^{-k} \left(1 - \frac{|K|^k - 1}{|K|^{mt} - 1}\right)$  истинно при всех  $t \in \mathbb{N}$ .

Таким образом, число  $|K|^{-k}$  характеризует вычислительную стойкость семейства хэш-функций  $\{H_{\mathbf{f}, \mathbf{q}_0}\}_{\mathbf{q}_0 \in K^k}$ . Отсюда вытекает целесообразность использования таких семейств хэш-функций при решении задач защиты информации. При этом начальное состояние  $\mathbf{q}_0$  целесообразно использовать в качестве секретного сеансового ключа, а значения параметров, входящих в формулу  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_t, \mathbf{x}_{t+1})$ , — в качестве секретного ключа средней длительности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе кратко охарактеризованы результаты, полученные при исследовании автоматов над конечными алгебраическими структурами.

Анализ автоматов, определенных в терминах идеалов кольца, показывает целесообразность исследования их свойств в зависимости от тех или иных соотношений между идеалами, входящими в наборы идеалов  $\mathbf{I}_r = (I_1^r, \dots, I_n^r)$  ( $r = 1, 2$ ). Это определяет одно из направлений дальнейших исследований.

Анализ задачи построения имитационной модели для семейства автоматов показывает целесообразность выделения нетривиальных классов семейств автоматов, для которых любая асимптотически  $\nu$ -точная имитационная модель при всех значениях числа  $\nu$ , достаточно близких к единице, существенно сложнее, чем система уравнений с параметрами, определяющая автомат, а также исследование классов обратимых автоматов, для которых при обращении имитационной модели существенно теряется ее точность. Это определяет второе направление дальнейших исследований.

Анализ автоматов, определенных на многообразиях, показывает целесообразность исследования свойств таких автоматов при дополнительных ограничениях на многообразии, определенную на нем



алгебру, либо на заданное семейство отображений  $\Theta = \{\theta_i : K^m \rightarrow K^m\}_{i \in \mathbb{Z}_k}$ . Это определяет третье направление дальнейших исследований.

Анализ семейств хэш-функций, определяемых автоматами без выхода над конечным кольцом показывает целесообразность исследования семейств хэш-функций, определяемых автоматами на многообразиях, в частности, семейств хэш-функций, определяемых автоматами на эллиптических кривых над конечными областями целостности. Это определяет четвертое направление дальнейших исследований.

### Библиографический список

1. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М. : Наука, 1974. 298 с.
2. Фараджев Р. Г. Линейные последовательностные машины. М. : Сов. радио, 1975. 248 с.
3. Агибалов Г. П. Распознавание операторов, реализуемых в линейных автономных автоматах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1970. № 3. С. 99–108.
4. Агибалов Г. П., Юфит Я. Г. О простых экспериментах для линейных инициальных автоматов // Автоматика и вычислительная техника. 1972. № 2. С. 17–19.
5. Сперанский Д. В. Эксперименты с линейными и билинейными конечными автоматами. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2004. 144 с.
6. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М. : Наука, 1973. 400 с.
7. Скобелев В. В., Скобелев В. Г. Анализ шифрсистем // ИПММ НАНУ. Донецк, 2009. 479 с.
8. Скобелев В. В., Глазунов Н. М., Скобелев В. Г. Многообразия над кольцами. Теория и приложение // ИПММ НАНУ. Донецк, 2011. 323 с.
9. Скобелев В. В., Скобелев В. Г. Анализ нелинейных автоматов с лагом 2 над конечным кольцом // Прикладная дискретная математика. 2010. № 1. С. 68–85.
10. Скобелев В. В. Сложность идентификации нелинейных одномерных автоматов с лагом 2 над конечным кольцом // Компьютерная мат. 2011. Вып. 2. С. 81–89.
11. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М. : Физматлит, 2001. 296 с.
12. Скобелев В. В., Скобелев В. Г. О сложности анализа автоматов над конечным кольцом // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 4. С. 17–30.
13. Skobelev V. V. On systems of polynomial equations over finite rings // Наукові записки НаУ-КМА. Сер. Комп'ютерні науки. 2012. Т. 138. С. 15–19.
14. Скобелев В. В. Про множини автоматів над скінченним кільцем, які визначено у термінах ідеалів // Вісник Київського університету. Сер. : фіз.-мат. науки. 2011. № 3. С. 212–218.
15. Скобелев В. В. Моделирование автоматов над кольцом автоматами с конечной памятью // Проблемы управления и информатики. 2012. № 3. С. 114–122.
16. Скобелев В. В. Анализ задачи распознавания автомата над кольцом // Доповіді НАНУ. 2012. № 9. С. 29–35.
17. Скобелев В. В. Об автоматах на многообразиях над кольцом // Труды ИПММ НАНУ. 2012. Т. 24. С. 190–201.
18. Скобелев В. В. Автоматы на многовидах с алгеброй // Вісник Київського університету. Сер. : фіз.-мат. науки. 2012. № 2. С. 234–238.
19. Skobelev V. V. Analysis of automata determined over parametric varieties over an associative ring // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. 2012. № 3. С. 239–244.
20. Скобелев В. В. Об автоматах на полиномиально-параметризованном многообразии над конечным кольцом // Труды ИПММ НАНУ. 2012. Т. 25. С. 185–195.
21. Скобелев В. В. О гомоморфизмах автоматов на многообразиях над кольцом // Доповіді НАНУ. 2013. № 1. С. 42–46.
22. Скобелев В. В. Аналіз автоматів, які визначено на еліптичних кривих // Вісник Київського університету. Сер. : фіз.-мат. науки. 2012. № 1. С. 223–230.
23. Скобелев В. В. Анализ семейств хэш-функций, определяемых автоматами над конечным кольцом // Кибернетика и системный анализ. 2013. № 2. С. 46–55.

## Automata on Algebraic Structures

V. V. Skobelev

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine, 83114, Donetsk, R. Luxembourg st., 74, vv\_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

A survey of results obtained in investigations of automata determined over finite algebraic structures. The objects of research are automata over some finite ring, automata determined in terms of ideals, automata over varieties, and families of hash-functions determined by automata without output function. Computational security, complexity of simulation and homomorphisms of investigated automata are characterized.

*Key words:* rings, automata, identification, computational security.



## References

1. Gill A. *Lineinye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow, Nauka, 1974. 298 p. (in Russian).
2. Faradjev R. G. *Lineinye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow, Sovetskoje Radio, 1975, 248 p. (in Russian).
3. Agibalov G. P. Recognition of operators realized by linear autonomous automata. *Izv. AN USSR. Tech. Cybernetika*, 1970, no. 3, pp. 99–108 (in Russian).
4. Agibalov G. P., Jufit Ya.G. O prostykh eksperimentakh dlia lineinykh initsial'nykh avtomatov [On simple experiments for linear initial automata]. *Avtomatica i vychislitel'naja tehnika*, 1972, no. 2, pp. 17–19 (in Russian).
5. Speranskij D. V. *Eksperimenty s lineinymi i bi-lineinymi konechnymi avtomatami* [Experiments with linear and bi-linear finite automata]. Saratov, Saratov. Univ. Press, 2004. 144 p. (in Russian).
6. Kurosh A.G. *Lektsii po obshchei algebre* [Lectures in general algebra]. Moscow, Nauka, 1973, 400 p. (in Russian).
7. Skobelev V. V., Skobelev V. G. Analiz shifrsistem [Analysis of ciphersystems]. Donetsk, IAMM NASU, 2009, 479 p. (in Russian).
8. Skobelev V. V., Glazunov N. M., Skobelev V. G. *Mnogooobraziia nad kol'tsami. Teoriia i prilozhenie* [Varieties over rings. Theory and applications]. Donetsk, IAMM NASU, 2011, 323 p. (in Russian).
9. Skobelev V. V., Skobelev V. G. Analysis of non-linear automata with lag 2 over finite ring. *Prikladnaja discretnaja matematika*, 2010, no. 1, pp. 68–85 (in Russian).
10. Skobelev V. V. Complexity of identification of non-linear 1-dimensional automata with lag 2 over finite ring. *Computernaja matematika*, 2011, vol. 2, pp. 81–89 (in Russian).
11. Kuznetsov S. P. *Dinamicheskii kaos* [Dynamical chaos]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 296 p. (in Russian).
12. Skobelev V. V., Skobelev V. G. On the complexity of analysis of automata over a finite ring. *Cybernet. Systems Anal.*, 2010, vol. 46, no. 4, pp. 533–545.
13. Skobelev V. V. On systems of polynomial equations over finite rings. *Naukovi zapysky NaU-KMA. Ser. Computerny nauky*, 2012, vol. 138, pp. 15–19.
14. Skobelev V. V. On subsets of automata over finite ring determined via terms of ideals. *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka*, 2011, no. 3, pp. 212–218 (in Ukrainian).
15. Skobelev V. V. Simulation of automata over a finite ring by the automata with finite memory. *J. of Automation and Information Sci.* 2012, vol. 44, no. 5, pp. 57–66.
16. Skobelev V. V. Analysis of the problem of recognition of automaton over some ring. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat., Pryr., Tekh. Nauky*, 2012, no. 9, pp. 29–35 (in Russian).
17. Skobelev V. V. On automata determined over varieties over some ring. *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 24, pp. 190–201 (in Russian).
18. Skobelev V. V. Automata over varieties with some algebra. *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka*, 2012, no. 2, pp. 234–238 (in Ukrainian).
19. Skobelev V. V. Analysis of automata determined over parametric varieties over an associative ring. *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka*, 2012, no. 3, pp. 239–244.
20. Skobelev V. V. On automata determined over polynomially parametric varieties over some finite ring. *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.* 2012, vol. 25, pp. 185–195 (in Russian).
21. Skobelev V. V. On homomorphisms of automata over varieties over some ring. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat., Pryr., Tekh. Nauky*, 2013, no. 1, pp. 42–46 (in Russian).
22. Skobelev V. V. Analysis of automata determined over elliptic curves. *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka*, 2012, no. 1, pp. 223–230 (in Ukrainian).
23. Skobelev V. V. Analysis of families of hash functions defined by automata over a finite ring. *Cybernet. Systems Anal.*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 209–216.

УДК 62-50

## ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕЧЕТКИМИ АВТОМАТАМИ

Д. В. Сперанский

Доктор технических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Speranskiy.DV@gmail.com

Для нечетких автоматов введено понятие обобщенной диагностической последовательности. Предложен метод ее построения. Метод базируется на использовании конструкции диагностического дерева. Установлено, что задача синтеза обобщенной диагностической последовательности является многокритериальной задачей оптимизации.

*Ключевые слова:* нечеткий автомат, диагностический эксперимент.





## ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что экспериментом с детерминированным автоматом [1] принято называть процесс подачи на автомат последовательности входных сигналов, наблюдения реакции на эту последовательность и вывода заключений о его состоянии (начальном, промежуточном или конечном). Модель такого автомата во многих случаях является вполне приемлемой для многих реальных систем. Однако информация о функционировании систем часто носит приближенный и субъективный характер, а потому приводит к огрублению модели. Для адекватного отражения нечеткости исходной информации требуется подходящий математический аппарат, созданный Л.Заде на основе понятия нечеткого множества [2]. Полезность и эффективность концепции нечеткости (размытости) подтверждается многочисленными практическими приложениями разработанных на этой базе теорий нечетких алгоритмов, нечетких отношений, нечеткой логики, нечетких графов в различных предметных областях. Понятно, что это справедливо и для теории нечетких автоматов. В настоящее время известны несколько модификаций понятия нечеткого конечного автомата, каждое из которых адаптировано к конкретному классу рассматриваемых задач. Ниже исследуются так называемые диагностические эксперименты для нечетких автоматов (НА).

### 1. МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОГО АВТОМАТА

Определим модель НА, которая будет использоваться в дальнейшем.

Нечетким конечным автоматом назовем пятерку:

$$A = (S, X, Y, \delta, \lambda),$$

где  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  — конечное множество состояний,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  — конечное множество входов,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  — конечное множество выходов,  $\delta : S \times X \times [0, 1] \rightarrow S$  — функция переходов,  $\lambda : S \times X \times [0, 1] \rightarrow Y$  — функция выходов. Функция  $\delta$  имеет следующую интерпретацию: НА, находящийся в состоянии  $s$ , под воздействием входа  $x$  переходит в состояние  $s'$ , причем значение функции принадлежности элемента  $(s, x, s')$  нечеткому подмножеству  $S \times X \times S$  равно некоторой величине  $q \in [0, 1]$ .

Функция  $\delta$ , введенная выше, фактически, порождает множество нечетких матриц  $T(x)$  для каждого входа  $x \in X$ :

$$T(x) = [\mu_x(s_i, s_j)], \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Каждая такая матрица является квадратной, ее строки и столбцы соответствуют состояниям множества  $S$ . На пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца стоит величина  $\mu_x(s_i, s_j) \in [0, 1]$ , являющаяся оценкой степени возможности перехода НА из состояния  $s_i$  в состояние  $s_j$  при воздействии входа  $x$ .

Некоторые классические определения различных типов автоматов (например, недетерминированного) являются частными случаями приведенного определения НА.

По аналогии с [3] введем функцию выхода  $\lambda : S \times X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , имеющую следующую интерпретацию: НА, перешедший в состоянии  $s$  под воздействием входа  $x$ , инициирует выход  $y$ , причем значение функции принадлежности элемента  $(s, x, y)$  нечеткому подмножеству  $S \times X \times Y$  равно некоторой величине  $q \in [0, 1]$ .

Введенная нами функция  $\lambda$ , фактически, порождает множество матриц  $\Lambda(x)$  для каждого входа  $x \in X$ :

$$\Lambda(x) = [\nu_x(s_i, y_j)], \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

Каждая такая матрица является прямоугольной, ее строки соответствуют состояниям множества  $S$ , а столбцы — выходам НА из множества  $Y$ . На пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит величина  $\nu_x(s_i, y_j) \in [0, 1]$ , являющаяся оценкой степени возможности выхода  $y_j$  НА при переходе его из состояния  $s_i$  при воздействии входа  $x$ .

Рассмотрим пример НА, имеющего множество состояний  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  и множество входов



$X = \{0, 1\}$ . Предположим, что матрицы  $T(x)$  для этого НА имеют следующий вид:

$$T(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как следует из содержимого этих матриц, например при входе  $x = 0$  НА переходит из состояния 1 в состояние 2 со значением  $\mu_0(1, 2) = 0.5$ , а из состояния 1 в состояние 3 со значением  $\mu_0(1, 3) = 0.8$ . Аналогично, переход НА при входе  $x = 0$  из состояния 4 в состояние 2 и  $\mu_0(4, 2) = 0.6$ , переход из состояния 4 в состояние 3 со значением  $\mu_0(4, 3) = 0.4$ .

Условимся далее указанные переходы  $\delta(s, x)$  записывать в следующем виде:

$$\delta(1, 0) = \{(2|0.5), (3|0.8)\}, \quad \delta(4, 0) = \{(2|0.6), (3|0.4)\}.$$

Введем также следующие обозначения:

1.  $\delta_S(s, x) = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\}$  — это подмножество состояний НА, в которые он переходит из состояния  $s$  под воздействием входа  $x$ . Так, для нашего примера  $\delta_S(1, 0) = \{2, 3\}$ ,  $\delta_S(4, 0) = \{2, 3\}$ .
2.  $\delta_\mu(s, x) = \{\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_k}\}$  — степени возможности перехода НА из состояния  $s$  под воздействием входа  $x$  в соответствующие состояния из множества  $\delta_S(s, x)$ . Так, для нашего примера  $\delta_\mu(1, 0) = \{0.5, 0.8\}$ ,  $\delta_\mu(4, 0) = \{0.6, 0.4\}$
3.  $\delta_\mu(s, x, s') = \mu(s, s')$  — степень возможности перехода из состояния  $s$  в состояние  $s'$  при входе  $x$ . Так, для нашего примера  $\delta_\mu(1, 0, 2) = \{0.5\}$ ,  $\delta_\mu(4, 0, 3) = \{0.4\}$ .

Условимся далее вместо слов «степень возможности перехода из состояния  $s$  в состояние  $s'$ » писать «степень перехода...».

Пусть  $S' = \{s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_\nu}\}$  есть некоторое подмножество множества  $S$  состояний НА. Переход НА из состояний подмножества  $S'$  при входе  $x$  определим следующим образом:

$$\delta(S', x) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\nu} \delta(s_{j_i}, x) \right\}.$$

Пусть для нашего примера  $S' = \{s_1, s_2\}$ , тогда  $\delta(\{s_1, s_2\}, 0) = \{\delta(s_1, 0) \cup \delta(s_2, 0)\} = \{(2|0.5), (3|0.8), (4|0.3)\}$ .

В соответствии с введенным выше обозначением для этого  $S'$  имеем:

$$\delta_\mu(\{1, 2\}, 0) = \{0.5, 0.8, 0.3\} \quad \text{и} \quad \delta_S(\{1, 2\}, 0) = \{2, 3, 4\}.$$

Множество состояний, в которые НА переходит из состояния  $s$  под воздействием входной последовательности  $u = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_b}$  определяется так:

$$\delta_S(s, u) = \delta_S(\dots \delta_S(\delta_S(s, x_{i_1}), x_{i_2}) \dots, x_{i_b}).$$

Вернемся к нашему примеру. Пусть  $u = x_{i_1}, x_{i_2} = 0, 1$  и  $s = 1$ . В соответствии со сказанным выше

$$\delta_S(1, u) = \delta_S(\delta_S(1, 0), 1) = \delta_S(\{2, 3\}, 1) = \{\delta_S(2, 1)\} \cup \{\delta_S(3, 1)\} = \{\{1\} \cup \{1\}\} = \{1\}. \quad (1)$$

Понятно, что переход НА из состояния  $s$  в некоторое фиксированное состояние  $s' \in \delta_S(s, u)$  возможен по различным траекториям (путям). Так, формула (1) показывает, что из состояния 1 в состояние  $\delta_S(1, u) = 1$  возможно перейти по двум различным траекториям:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  и  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . Каждому переходу в этих траекториях соответствует некоторая конкретная степень перехода. Так, для траектории  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  переходу  $1 \rightarrow 2$  соответствует  $\mu_0(1, 2) = 0.5$ , а для перехода  $2 \rightarrow 1$  эта степень есть  $\mu_1(2, 1) = 0.4$ .

Рассмотрим входную последовательность  $u = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_b}$ . Зафиксируем некоторое состояние НА  $s \in S$  и некоторое состояние  $s' \in \delta_S(s, u)$ . Среди всех возможных траекторий перехода этого НА из состояния  $s$  в состояние  $s'$  под воздействием указанной входной последовательности  $u$  выделим,



например, траекторию, проходящую следующим образом:  $s \rightarrow s_{t_1} \rightarrow s_{t_2} \rightarrow \dots \rightarrow s_{t_{b-1}} \rightarrow s'$ . Этой траектории поставим в соответствие число  $M(u, q)$ , которое назовем степенью перехода по зафиксированной траектории, где  $q = s, s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s'$ .

Для того чтобы выразить  $M(u, q)$  через заданную функцию переходов НА, можно воспользоваться одним из следующих вариантов, ранее использованных в ряде работ:

$$M_1(u, q) = \min[\delta_\mu(s, x_{i_1}, s_{t_1}), \delta_\mu(s_{t_1}, x_{i_2}, s_{t_2}), \dots, \delta_\mu(s_{t_b}, x_{i_b}, s')],$$

$$M_2(u, q) = \max[\delta_\mu(s, x_{i_1}, s_{t_1}), \delta_\mu(s_{t_1}, x_{i_2}, s_{t_2}), \dots, \delta_\mu(s_{t_b}, x_{i_b}, s')].$$

Заметим, что приведенные варианты определения значения  $M(u, q)$  связаны с возможными вариантами определения композиции двух нечетких отношений [4].

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В теории детерминированных автоматов [1] исследовалась диагностическая задача, заключающаяся в определении неизвестного начального состояния автомата по наблюдаемой реакции на специальную входную последовательность, называемую диагностической. Диагностическая задача считается разрешимой, если искомое начальное состояние, которое предполагается принадлежащим заранее оговоренному множеству допустимых начальных состояний, определяется однозначно.

Ниже рассматривается аналогичная задача для нечетких автоматов. В отличие от классической задачи здесь будет исследоваться возможность минимизации неопределенности, касающейся состава множества возможных стартовых (начальных) состояний автомата, порождающих наблюдаемую экспериментатором реакцию.

Для поиска диагностической последовательности, используемой при решении диагностической задачи для заданного НА и заданного множества допустимых начальных состояний, воспользуемся конструкцией дерева преемников (ДП), аналогичной введенной в [1].

По аналогии с [1] далее используется понятие  $\sigma$ -множества состояний автомата — произвольной конечной совокупности его состояний. Подчеркнем, что элементы  $\sigma$ -множества не обязательно различны.  $\sigma$ -множество назовем простым (кратным), если оно состоит из единственного элемента (содержит два или более одинаковых элемента).

Назовем  $\sigma$ -множество однородным, если все его элементы одинаковы. Отметим, что простое  $\sigma$ -множество есть частный случай однородного.

Под  $A$ -группой далее понимается множество  $\sigma$ -множеств. Назовем  $A$ -группу простой (однородной), если все  $\sigma$ -множества в ней просты (однородны).

Используемые далее понятие  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$ -преемника  $A$ -группы в целом совпадает с введенным в [1], а незначительные отличия легко видеть из примера на приведенном ниже рисунке.

Конструкция ДП бесконечна по своему протяжению. Ниже будет дано определение усеченного варианта ДП, которое назовем диагностическим деревом (ДД). Для формулировки правил «усечения» ДП введем еще одно понятие.

Пусть  $g$  есть  $\sigma$ -множество некоторой  $A$ -группы  $G'$ , связанной с ветвью  $k$ -го уровня ( $k \geq 1$ ), являющегося преемником по входному символу  $x$  некоторых  $\sigma$ -множеств из  $A$ -группы  $G$  уровня  $(k - 1)$ . Множество состояний  $\sigma$ -множеств  $A$ -группы  $G$ , из которых можно перейти по входному символу  $x$  в состояния из множества  $g$  (это их состояния-«предшественники»), обозначим через  $g^{-1}$ . Величину  $|g^{-1}|$  назовем мерой неопределенности  $\sigma$ -множества  $g$  (по символу  $x$ ) и обозначим через  $UN(g)$ . Мерой неопределенности  $A$ -группы  $G'$  (по символу  $x$ ), которую обозначим через  $UN(G')$ , назовем максимум из значений мер неопределенностей всех  $\sigma$ -множеств, входящих в состав  $A$ -группы  $G'$ . Условимся считать, что мера неопределенности множества  $S_0$ , связанного с нулевой ветвью ДД, равна  $|S_0|$ .

Перейдем теперь к определению ДД, конструируемого для заданного НА. ДД есть дерево преемников, в котором ветвь  $b$   $k$ -го уровня становится конечной, если удовлетворяется одно из следующих условий:

1. Мера неопределенности  $A$ -группы, связанной с  $b$ , равна 1;



2. Мера неопределенности  $A$ -группы  $k$ -го уровня ( $k \geq 1$ ), связанной с  $b$ , больше меры неопределенности некоторой  $A$ -группы уровня, предшествующего  $k$ -му;
3.  $A$ -группа, связанная с  $b$ , связана с некоторой ветвью уровня, предшествующего  $k$ -му.

Понятно, что выполнение условия 1 означает, что для исследуемого НА его начальное состояние по наблюдаемой реакции определяется однозначно. Выполнение условия 2 указывает на то, что продолжение построения ДП по направлению ветви  $b$  не имеет смысла, так как неопределенность при определении начального состояния по этому направлению возрастает. Выполнение условия 3 означает бесперспективность построения ДП по этому направлению: в уже построенном на предыдущем этапе фрагменте ДД имеется возможность найти более короткую ДП.

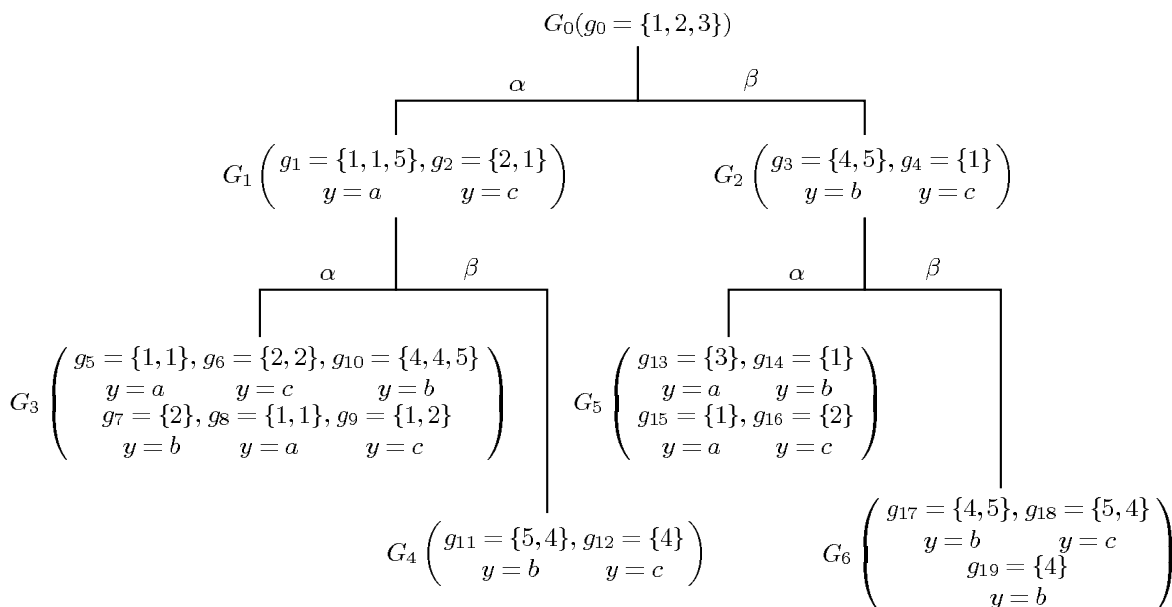
Нетрудно доказать, что построение ДД есть конечный процесс.

Рассмотрим пример построения ДД для НА, у которого  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X = \{\alpha, \beta\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$ , множество допустимых начальных состояний есть  $S_0 = \{1, 2, 3\}$ , а матрицы переходов и выходов  $T(x)$  и  $\Lambda(x)$  таковы:

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Lambda(\alpha) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix};$$

$$T(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}; \quad \Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Диагностическое дерево для этого НА изображено на рисунке.



Диагностическое дерево

Заметим, что терминология и понятия для ДП, такие как путь по дереву, входная последовательность, соответствующая пути, траектория движения НА и т. д., в полной мере относятся и к ДД.

Введенные выше значения меры неопределенности  $A$ -групп для построенного ДД, как легко проверить, таковы:

$$UN(G_0) = UN(G_1) = 3, \quad UN(G_2) = UN(G_3) = UN(G_4) = UN(G_6) = 2, \quad UN(G_5) = 1.$$



Из этих данных вытекают следующие факты: ветвь ДД, связанная с  $A$ -группой  $G_5$ , является конечной в силу условия 1 определения ДД; ветви  $G_3, G_4$  и  $G_6$  являются конечными в силу условия 2 определения ДД. Понятно, что движение НА по различным траекториям порождает различные реакции. Рассмотрим, например, входное слово  $p = \beta, \alpha$ . В ДД на рисунке ему соответствуют пути (траектории) из  $A$ -группы  $G_0$  в различные  $\sigma$ -множества  $A$ -группы  $G_5$ . Принимая во внимание, что  $S_0 = \{1, 2, 3\}$ , для рассматриваемого НА его движение может осуществляться по следующим четырем траекториям:

$$q_1 = g_0, g_3, g_{13}; \quad q_2 = g_0, g_3, g_{14}; \quad q_3 = g_0, g_4, g_{15}; \quad q_4 = g_0, g_4, g_{16}.$$

Далее множество всех возможных траекторий движения НА при подаче входного слова  $p$  будем обозначать как  $Q(p)$ .

Введем теперь понятие обобщенной диагностической последовательности (ОДП) для нечеткого автомата.

**Определение.** Входное слово  $p$  назовем ОДП для заданного НА с множеством допустимых начальных состояний  $S_0$ , если и только если

$$\forall q_i, q_j \in Q(p) \quad \lambda(S_0, q_i) = \lambda(S_0, q_j) \rightarrow \max(UN(\delta(S_0, q_i)), \delta(UN(S_0, q_j))) < |S_0|. \quad (2)$$

Здесь  $\delta(S_0, q_i)$  обозначает  $\sigma$ -множество, в одном из состояний которого оказывается НА после подачи входного слова  $p$  при движении по траектории  $q_j$ .

Смысл использования ОДП состоит в уменьшении неопределенности (размытости) множества состояний НА, из которых он мог стартовать при наблюдаемой экспериментатором реакции на его выходе.

Вообще говоря, исходя из определения ОДП, можно рассматривать различные постановки диагностической задачи. Одна из них, которая рассматривается далее, формулируется следующим образом: для заданного НА и заданного множества допустимых начальных состояний построить такую входную последовательность, подача которой позволяет по наблюдаемой реакции НА найти минимальное по мощности множество его возможных начальных состояний.

Другая постановка диагностической задачи связана с построением ОДП, когда в качестве критерия оптимизации используются значение степени переходов. Перейдем теперь к описанию метода построения ОДП для решения диагностической задачи в первой из представленных выше постановок. Ее решение будет получено с использованием конструкции ДД. Нетрудно сообразить, что минимизация мощности возможных стартовых состояний рассматриваемого НА будет достигнута на пути в ДД из  $A$ -группы  $G_0$ , связанной с нулевой ветвью ДД, в  $A$ -группу, для которой достигается минимум величины  $\max(UN(\delta(S_0, q_i)), \delta(UN(S_0, q_j)))$ , фигурирующей в определении ОДП. Напомним, что эта величина есть не что иное как мера неопределенности  $A$ -группы, в состав которой входят  $\sigma$ -множества, являющиеся конечными вершинами траекторий, соответствующих некоторому входному слову  $p$ .

Отсюда становится понятным метод решения исследуемой задачи: среди всех  $A$ -групп ДД необходимо найти такую  $A$ -группу  $G$ , которая доставляет минимум мере неопределенности  $UN(G)$ , тогда входное слово  $p$ , соответствующее пути по ДД из  $A$ -группы  $G_0$  в эту  $A$ -группу  $G$ , и является решением рассматриваемой задачи.

Проиллюстрируем метод на примере НА, для которого ДД изображено на рисунке. Поскольку в этом ДД минимальное значение величины  $UN(G)=1$  достигается для  $A$ -группы  $G_5$ , то входное слово  $p = \beta, \alpha$ , соответствующее пути по ДД из  $G_0$  в  $G_5$ , дает искомую ОДП. В самом деле, вычисленные выходные реакции при движении по всем возможным траекториям, приведенным выше и представленным в таблице, подтверждают, что использование ОДП  $p = \beta, \alpha$  позволяет однозначно определить стартовое состояние рассматриваемого НА.

Заметим, что входное слово  $p = \beta, \beta$ , которое соответствует пути по ДД из  $A$ -группы  $G_0$  в  $A$ -группу  $G_6$ , также является ОДП. В самом деле,  $UN(G_6) = 2 < UN(G_0) = 3$ , т. е. упомянутое входное слово удовлетворяет неравенству (2) в определении ОДП. Вместе с тем, наблюдение реакции НА именно на это слово не всегда дает возможность однозначно восстановить его

Траектория	Реакция НА	Стартовое состояние
$q_1$	$ba$	1
$q_2$	$bb$	2
$q_3$	$ca$	3
$q_4$	$cc$	3



стартовое состояние. Легко убедиться, что слово  $p = \beta, \beta$  дает одну и ту же реакцию  $b, b$ , если НА стартует в состоянии 1 или 2 ( $1 \xrightarrow{\beta/b} 4 \xrightarrow{\beta/b} 4, 2 \xrightarrow{\beta/b} 5 \xrightarrow{\beta/b} 4$ ). Можно проверить, что входные слова  $\alpha, \alpha$  и  $\alpha, \beta$  также являются ОДП для рассматриваемого НА, но оба они позволяют определить стартовые состояния только как одно из двух возможных.

Из сказанного следует, что для рассматриваемого НА существует четыре различных ОДП длины два, но только одна из них ( $p = \beta, \alpha$ ) позволяет однозначно восстановить его стартовое состояние.

Заметим, что в диагностической задаче оптимизация ОДП возможна по трем возможным критериям.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из изложенного выше вытекает, что между диагностической задачей для детерминированного автомата и аналогичной задачей для нечеткого автомата имеется принципиальное различие. Для НА эта задача в общем случае является многокритериальной, а для детерминированного автомата при сравнении двух ДП используется лишь один критерий (либо длина, либо вес).

Для решения многокритериальных задач необходима формализация, которая требует экспертных оценок самих критериев и выявления отношений между ними. Дело в том, что используемые критерии могут либо противоречить друг другу, либо действовать в одном направлении, либо быть независимыми.

В настоящее время известен ряд подходов к решению многокритериальных задач. Первый из них связан с выделением наиболее важного критерия и поиска решения оптимизационной задачи для одного критерия. В этом случае остальные критерии рассматриваемой задачи играют роль дополнительных ограничений. Второй подход основан на упорядочении заданного множества критериев и выполнения последовательной оптимизации по каждому из критериев. Третий подход базируется на сведении заданного множества критериев к одному. Обычно такое сведение осуществляется путем введения весовых коэффициентов для каждого критерия. Сами весовые коэффициенты представляют собой экспертные оценки. Отметим, что разработке упомянутых подходов и методологии поиска решений многокритериальных задач посвящено много работ, в которых различные аспекты этой проблемы достаточно детально исследованы.

## Библиографический список

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М. : Наука, 1966. 272 с.
2. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inf. Control. 1965. Vol. 8. P. 338–353.
3. Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications. N. Y. : Academy Press, 1980. 392 p.
4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М. : Радио и связь, 1982. 432 с.

## On Diagnostic Experiments for Fuzzy Automata

D. V. Speranskiy

Moscow State University of Railway Engineering, Russia, 127994, Moscow, Obraztsova st., 9, bld. 9, Speranskiy.DV@gmail.com

The concept of a generalized diagnostic experiment for fuzzy automata is introduced. A method constructing diagnostic experiments for fuzzy automata is proposed. The method is based on diagnostic tree structure. It is established that the problem of diagnostic experiment synthesis is a multi-criteria optimization problem.

*Key words:* diagnostic experiment, fuzzy automata.

## References

1. Gill A. Introduction to the Theory of Finite-state Machines. New-York, San-Francisco, Toronto, London, McGraw Hill Book Company, 1962 (Rus. ed.: Gill A. *Vvedenie v teoriyu konechnykh avtomatov*. Moscow, Nauka, 1966, 272 p.)
2. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Inf. Control.*, 1965, vol. 8, pp. 338–353.
3. Dubois D., Prade H. *Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications*. New York, Academy Press, 1980. 392 p.
4. Kaufmann A. Introduction à la théorie des sous-ensembles flous à l'usage des ingénieurs (fuzzy sets theory). Paris, Masson, 1977 (in French). (Rus. ed.: Koifman A. *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv*. Moscow, Radio i svyaz', 1982, 432 p.)



УДК 519.7

## ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОБРАЗАМИ АВТОМАТОВ

Л. Б. Тяпаев<sup>1</sup>, Д. В. Василенко<sup>2</sup>, М. В. Карандашов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой дискретной математики и информационных технологий, доцент, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tiaraevlb@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Студентка факультета компьютерных наук и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, egoschauer@mail.ru

<sup>3</sup>Аспирант кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, norg113@gmail.com

Объектом исследования является динамическая система, определяемая геометрическими образами автоматов. Фазовое пространство системы определяется ортогональными и аффинными преобразованиями геометрических образов. Изучаются произведения динамических систем заданного типа и их характеристики.

*Ключевые слова:* автоматы, дискретные динамические системы, геометрические образы автоматов.

*Динамической системой* называется тройка объектов  $D = (S, f, G)$ , где  $S$  — пространство состояний,  $|S| < \infty$ ,  $f : S \rightarrow S$  — функция эволюции,  $G$  — граф фазового пространства динамической системы.

В дальнейшем будем использовать термин *точка динамической системы* в качестве синонима для термина состояние динамической системы.

*Аттракторами* динамической системы  $D = (S, f, G)$  называют циклы графа  $G$ . *Точкой ветвления* динамической системы  $D$  называется вершина графа  $G$ , в которую входит более чем одна дуга. *Стволом* притягиваемого дерева называется такое его поддерево, которое является цепью максимальной длины, содержащей все точки ветвления дерева (включая корень).

*Произведением* динамических систем  $D_1 = (S, f, G)$  и  $D_2 = (T, g, G')$  будем называть динамическую систему  $D_1 \circ D_2 = (S \times T, f \times g, G \circ G')$ , где  $S \times T$  — декартово произведение множеств  $S$  и  $T$ ;  $(f \times g) : S \times T \rightarrow S \times T$  — прямое произведение отображений  $f : S \rightarrow S$  и  $g : T \rightarrow T$ , т.е.  $(f \times g) : (s, t) \mapsto (f(s), g(t))$ ;  $G \circ G'$  — граф, определяемый следующим образом:

1. Множеством вершин графа  $G \circ G'$  является декартово произведение множеств вершин графов  $G$  и  $G'$ ;

2. Вершины  $(u, u')$  и  $(v, v')$  графа  $G \circ G'$  смежны тогда и только тогда, когда одновременно вершины  $u$  и  $v$  смежны в графе  $G$ , и вершины  $u'$  и  $v'$  смежны в графе  $G'$ .

Будем рассматривать динамические системы, определяемые геометрическими образами автоматов [3]. Пространство состояний динамической системы — конечное множество геометрических образов конечных автоматов. Геометрические образы автоматов суть множества точек плоскости с рациональными координатами, прообразами которых являются множества входных слов автомата и его реакций [1, 2]. Фазовое пространство динамической системы формируется посредством ортогональных и аффинных преобразований пространства состояний [3].

Дадим необходимые определения.

*Конечный автомат* это пятёрка  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ , где  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\}$  — множество состояний автомата,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$  — множество входных символов (входной алфавит),  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_M\}$  — множество выходных символов (выходной алфавит),  $\delta : S \times X \rightarrow S$  — функция переходов автомата,  $\lambda : S \times X \rightarrow Y$  — функция выходов автомата.

Расширим функции  $\delta$  и  $\lambda$  на словах из множеств  $X^*$  и  $Y^*$  соответственно, и в дальнейшем будем использовать те же обозначения для этих функций. Здесь  $X^*$  и  $Y^*$  — множества слов конечной длины над алфавитами  $X$  и  $Y$  соответственно.

Пусть  $s_0$  — начальное состояние автомата  $A$ . *Инициальным автоматом* называется пара  $(A, s_0)$ . Автомат  $A$  называется *автономным*, если  $|X| = 1$ .

*Поведение автомата*  $A$  определяется множеством  $\Lambda_A = \bigcup_{p \in X^*} \bigcup_{s \in S} (p, \lambda(s, p))$ . Множество  $\Lambda_A(s_0) = \bigcup_{p \in X^*} (p, \lambda(s_0, p))$  определяет поведение автомата  $A$  из состояния  $s_0$ .

*Геометрическое пространство*  $\Gamma$  для автомата  $(A, s_0)$  определяется следующим образом [1]:

1. Сопоставим элементам множества  $X$  натуральные числа от 1 до  $L$ , т.е. осуществим взаимно однозначное отображение  $f : X \rightarrow \{1, 2, \dots, L\}$ .



2. Определим координатную ось абсцисс  $\tilde{X}$  для пространства  $\Gamma$  как отрезок числовой оси  $[0, L+1]$ .
3. Каждому слову  $p = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_k}$  сопоставим вектор  $\omega = (f(x_{i_1}), f(x_{i_2}), \dots, f(x_{i_k}))$ , т. е. осуществим взаимно однозначное соответствие  $g : X^* \rightarrow V_N$ , где  $V_N$  — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа.
4. Каждому такому вектору  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$  взаимно однозначно сопоставим точку  $\tilde{x} \in \mathbb{Q}$  на оси абсцисс:

$$\tilde{x} = \frac{\omega_1}{(L+1)^0} + \frac{\omega_2}{(L+1)^1} + \frac{\omega_3}{(L+1)^2} + \dots + \frac{\omega_k}{(L+1)^{k-1}}.$$

Аналогично определяется нумерация элементов множества  $Y$ , ось ординат  $\tilde{Y}$  пространства  $\Gamma$  и отображение  $h : Y^* \rightarrow V_N$ .

Каждой паре  $(p, q) \in \Lambda_A(s_0)$  в пространстве  $\Gamma$  сопоставляется точка с координатами  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , где

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(L+1)^{i-1}}, \quad (c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) = g(p),$$

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{(M+1)^{i-1}}, \quad (b_1, b_2, \dots, b_{|q|}) = h(q).$$

Под *геометрическим образом*  $\Omega_A(s_0)$  автомата  $(A, s_0)$  понимается множество таких пар  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Кривой  $f$ , задающей поведение автомата  $(A, s)$ , называется любая непрерывная кривая, такая, что любая точка  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_A(s)$  принадлежит кривой  $f$ . Кривая  $f$  называется *функциональной кривой*, если  $f$  есть график некоторой непрерывной функции. Понятие функции, определяющей функциональную кривую, отождествляется с самой кривой. Будем обозначать класс  $K(N, L, M)$  автоматов, у которых  $|S| = N$ ,  $|X| = L$ , и  $|Y| = M$ . Класс автономных автоматов обозначим  $K(N, M)$ . Аналитическое задание геометрического образа автономного автомата характеризует следующая теорема.

**Теорема 1** [2]. Пусть  $A \in K(N, M)$ . Тогда поведение автомата  $(A, s)$  в пространстве  $\Gamma$  можно определить функциональной кривой  $f$ , которая может быть задана следующим уравнением:

$$f(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^M \left( j \cdot \sum_{i=1}^{l_j} (M+1)^{\Delta_i^{(j)} - \log_2 \frac{1}{2-\tilde{x}}} \right),$$

где  $0 \leq l_j \leq N$ ,  $\Delta_i^{(j)} = (N-1) - r_i^{(j)}$ ,  $r_i^{(j)} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

Две кривые называются *аффинно-эквивалентными*, если они могут быть получены одна из другой с помощью аффинного преобразования. Совокупность всех кривых, аффинно-эквивалентных какой-нибудь определенной кривой  $f$ , называется *аффинным классом* кривой  $f$ .

Зафиксируем некоторый класс автономных автоматов  $K(N, M)$  и рассмотрим множество  $\Omega$  всех различных геометрических образов из данного класса. Будем рассматривать аффинные преобразования, которые преобразуют некоторый образ  $\Omega_i \in \Omega$  в другой образ  $\Omega_j \in \Omega$ . При рассмотрении преобразований геометрических образов из одного класса  $K(N, M)$  имеет смысл рассматривать только следующее преобразование: параллельный перенос вдоль оси ординат и растяжение и сжатие относительно оси абсцисс. Данное преобразование имеет вид:  $\tilde{x}' = \tilde{x}, \tilde{y}' = a\tilde{y} + b$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Тогда образ  $\Omega_i \in \Omega$  переводится в образ  $\Omega_j \in \Omega$  описанным преобразованием с коэффициентами  $(a, b)$ , если  $(\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_i) ((\tilde{x}, a\tilde{y} + b) \in \Omega_j)$ . Будем говорить, что образы  $\Omega_i, \Omega_j$  *совместимы* с выбранным видом аффинного преобразования. Бинарное отношение  $\rho \subseteq \Omega^2$ , образованное парами совместимых образов

$$\rho = \{(\Omega_i, \Omega_j) \in \Omega^2 \mid (\exists a, b \in \mathbb{Q}) (\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_i) ((\tilde{x}, a\tilde{y} + b) \in \Omega_j)\},$$

является отношением эквивалентности на множестве  $\Omega$  и задает разбиение этого множества на классы эквивалентности.

В работе [4] были доказаны следующие теоремы относительно классов эквивалентности образов автономных автоматов и их преобразований.

Будем обозначать через  $F(N, M)$  множество коэффициентов аффинных преобразований геометрических образов автоматов из класса  $K(N, M)$ .

**Теорема 2** [4]. Пусть  $a, b \in F(N, M)$ , тогда  $a = p_a/q_a$ ,  $b = p_b/q_b$ , где  $p_a, p_b, q_a, q_b \in \mathbb{Z}$ , причём  $1 \leq p_a \leq M$ ,  $1 \leq q_a \leq M$ ,  $1 \leq p_b \leq M$ ,  $0 \leq |p_b| \leq M^2 - 1$ .

**Следствие.**  $|F(N, M)| \leq M^5$ .





**Теорема 3** [4].  $(a, b) \in F(N, M)$ ,  $N \geq 2$  тогда и только тогда, когда  $(a, b) \in F(2, M)$ .

**Теорема 4** [4].  $|F(N, M)| \leq M^4$ .

Рассмотрим максимальный (по мощности) класс эквивалентности  $K$  отношения совместимости  $\rho \subseteq \Omega^2$  геометрических образов автоматов из класса  $K(N, M)$ . Выберем произвольным образом периодическую последовательность  $u(v)$  элементов данного класса, где  $u$  и  $v$  — конечные последовательности различных элементов,  $u$  — префикс,  $v$  — период последовательности  $u(v)$ . Каждая такая последовательность  $u(v)$  порождает последовательность  $F$  преобразований геометрических образов автоматов из класса  $K$ . Построим динамическую систему  $D$ , состояниями  $S$  которой будут элементы последовательности  $u(v)$ , а эволюция состояний будет определяться последовательностью  $F$  преобразований.

Рассмотрим свойства операции произведения динамических систем. Граф динамической системы состоит из циклов-аттракторов и притягиваемых деревьев.

Рассмотрим произведение динамических систем  $D = D_1 \circ D_2$ ,  $D_1 = (S_1, f_1, G_1)$ ,  $D_2 = (S_2, f_2, G_2)$ , состоящих из одного цикла-аттрактора каждая. Для произведения данных систем справедливы следующие леммы.

**Лемма 1.** Состояние  $d = (a, b) \in S$ ,  $S = S_1 \times S_2$  тогда и только тогда принадлежит циклу-аттрактору динамической системы  $D$ , когда состояния  $a$  и  $b$  принадлежат циклам-аттракторам в  $D_1$  и  $D_2$  соответственно.

**Лемма 2.** Количество компонент связности в динамической системе  $D$  равно  $\text{НОД}(c, e)$ , где  $c$  и  $e$  — это длины циклов-аттракторов динамических систем  $D_1$  и  $D_2$ .

**Лемма 3.** Длины циклов-аттракторов в системе  $D$  одинаковы и равны  $\text{НОК}(c, e)$ , где  $c$  и  $e$  это длины циклов-аттракторов динамических систем  $D_1$  и  $D_2$ .

Будем называть расстоянием от состояния  $a$  до состояния  $b$  некоторой динамической системы  $D' = (S, f, g)$  такое наименьшее число  $n$ , что  $f^n(a) = b$  и обозначать это как  $r(a, b) = n$ .

**Лемма 4.** Пусть  $D = (S, f, G)$  и  $D = D_1 \circ D_2$ ,  $D_1 = (S_1, f_1, G_1)$ ,  $D_2 = (S_2, f_2, G_2)$ . Тогда расстояние от точки  $z = (a, b) \in S$  до цикла-аттрактора равняется максимуму расстояний до циклов-аттракторов из  $a$  и  $b$  соответственно.

**Лемма 5.** Пусть  $D = (S, f, G)$  и  $D = D_1 \circ D_2$ , где  $D_1 = (S_1, f_1, G_1)$ ,  $D_2 = (S_2, f_2, G_2)$ . Тогда степень захода вершины  $z = (a, b) \in S$  равна произведению степеней захода вершин  $a$  и  $b$ .

**Теорема 5.** Пусть  $D = D_1 \circ D_2$ , где  $D_1 = (A, f, G_1)$ ,  $D_2 = (B, g, G_2)$  динамические системы, состоящие из одного цикла-аттрактора каждая, тогда функция  $f' = f^{|B|}$  переводит состояние  $a' \in A$  в множество состояний  $A'$  такое, что для каждого  $a \in A'$  существует  $a'' \in A' : r(a, a'') = \text{НОД}(|A|, |B|)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим два случая: 1)  $|A| \bmod |B| = 0$ ; 2)  $|A| \bmod |B| > 0$ .

Для первого случая доказательство очевидно, так как в этом случае  $|B| = \text{НОД}(|A|, |B|)$ .

Рассмотрим второй случай. Пусть  $|A| - |B| = c$ ,  $\text{НОД}(|A|, |B|) = t$ , тогда  $|A| = i \cdot t$ ,  $|B| = j \cdot t$ ,  $|A| - |B| = (i - j) \cdot t$ , т. е.  $c$  кратно  $\text{НОД}(|A|, |B|)$ . Из этого следует, что  $f'$  переводит состояние  $a'$  в множество состояний  $Z = \{z \mid r(a', z) \bmod \text{НОД}(|A|, |B|) = 0\}$ .

Оценим мощность  $Z$ . Так как  $\text{НОК}(|A|, |B|)$  — длина циклов в  $D$ , то  $|Z| = \frac{\text{НОК}(|A|, |B|)}{|B|}$ . Из соотнесения  $\text{НОД}(|A|, |B|)$  и  $\text{НОК}(|A|, |B|)$  получаем, что  $|Z| = \frac{|A|}{\text{НОД}(|A|, |B|)}$ . А из мощности множества  $Z$  и его построения следует верность утверждения теоремы для второго случая, так как расстояние между любыми двумя ближайшими состояниями из  $Z$  будет равно  $\text{НОД}(|A|, |B|)$ , что и требовалось доказать.

Аналогичные рассуждения можно привести для функции  $g' = g^{|A|}$ . □

**Следствие.** Исходя из утверждения теоремы 5, можно составить следующий алгоритм перевода состояния  $(a, b)$  в состояние  $(a', b')$  в системе  $D$ , где  $(a, b)$  и  $(a', b')$  принадлежат одному циклу-аттрактору:

- 1) перевести состояние  $a$  в состояние  $a'$ , что переведёт состояние  $b$  в состояние  $b'' = g^{r(a, a')}(b)$ ;
- 2) итерировать полученное состояние  $(a', b'')$  с шагом  $|B|$ , что оставит неизменным первую компоненту состояния и переведёт вторую компоненту в состояние  $b'$ .

**Теорема 6.** Пусть  $D_1 = (A, f, G_1)$ ,  $D_2 = (B, g, G_2)$  динамические системы, состоящие из одного цикла-аттрактора каждая. Тогда состояния  $(a, b)$ ,  $(a', b')$ , где  $a, b \in D_1$ ,  $a', b' \in D_2$ , принадлежат одному циклу-аттрактору динамической системы  $D = D_1 \circ D_2$  тогда и только тогда, когда  $r(a, a') \bmod \text{НОД}(|A|, |B|) = r(b, b') \bmod \text{НОД}(|A|, |B|)$ .



**Доказательство. Достаточность.** Пусть выполняется условие теоремы и  $r(a, a') = h_a, r(b, b') = h_b$ . Покажем, что существует  $n$ , такое что  $f^n(a) = a', g^n(b) = b'$ . Для этого рассмотрим следующие соотношения: 1)  $h_a = h_b$ ; 2)  $h_a > h_b$ ; 3)  $h_a < h_b$ .

Для первого случая справедливость утверждения теоремы очевидным образом следует из доказательства теоремы 5, рассмотрим второй случай.

Переведём состояние  $a$  в  $a'$ , тогда состояние  $b$  перейдёт в некоторое состояние  $b''$ .  $b''$  может равняться  $b'$ , в этом случае утверждение теоремы выполняется. Если же  $b'' \neq b'$ , то требуется показать, что  $b''$  переводится в  $b'$  за кратное  $\text{НОД}(|A|, |B|)$  число итераций. Для этого построим множество  $Z_{a'}$  следующим образом:

$$Z_{a'} = \left\{ (a', b_z) \mid \exists n : f^{|A|^n}(a') = a', g^{|A|^n}(b'') = b_z \right\}.$$

Множество  $Z_{a'}$  — это множество всех состояний вида  $(a', b)$ , принадлежащих одному циклу-аттрактору. Следовательно  $(a', b') \in Z_{a'}$ . Из построения  $Z_{a'}$  и теоремы 5 следует, что для любых  $e, l \in Z_{a'}$   $r(e, l) \bmod \text{НОД}(|A|, |B|) = 0$ . Из чего, в свою очередь, следует, что  $r(b, b'') \bmod \text{НОД}(|A|, |B|) = r(b, b') \bmod \text{НОД}(|A|, |B|)$ , что и требовалось показать. Аналогичные рассуждения можно привести для третьего случая.

**Необходимость.** Пусть состояния  $(a, b)$  и  $(a', b')$  принадлежат одному циклу-аттрактору в системе  $D$  и  $r(a, a') \bmod \text{НОД}(|A|, |B|) > r(b, b') \bmod \text{НОД}(|A|, |B|)$ .

Из принадлежности состояний  $(a, b)$  и  $(a', b')$  одному циклу-аттрактору следует, что алгоритм, полученный из теоремы 1, переведёт состояние  $(a, b)$  в  $(a', b')$ . Но это вызывает противоречие, так как данный алгоритм переводит состояние  $(a, b)$  в  $(a', b')$  только в том случае, если выполняется утверждение теоремы. Следовательно,  $(a, b)$  и  $(a', b')$  не принадлежат одному циклу-аттрактору, и утверждение теоремы верно.  $\square$

Введём некоторые обозначения:  $P_{k_j}$  — цепь длины  $k_j$ ,  $O_m$  — аттрактор длины  $m$ ,  $P_{k_j, q}^{m, l(k_1, k_2, \dots, k_l)}$  — дерево с периодом ветвления  $m$ , длина ствола которого равна  $k_j$ ,  $q$  — номер первой точки ветвления,  $l(k_1, k_2, \dots, k_l)$  — количество цепей, входящих в каждую точку ветвления, и их максимально возможные длины (расстояние от любого листа до аттрактора не должно превышать длину ствола дерева);  $O_m^i$  — аттрактор длины  $m$ , на котором расположены 2 корня дерева с расстоянием между ними, равным  $i$ .

Будем обозначать записью вида  $O_m + P_k$  граф, состоящий из цикла-аттрактора длины  $m$  и притягиваемой к нему цепи длины  $k$ . Факт вхождения притягиваемых деревьев или цепей в одну точку цикла-аттрактора будем обозначать в формулах с помощью группировки символов деревьев и цепей скобками.

**Теорема 7.** Пусть  $D = O_m + (P_{k_1} + P_{k_2} + \dots + P_{k_l})$  — динамическая система. Тогда граф динамической системы  $D^2 = D \circ D$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} & (P_{k_1, q_1}^{m, l(k_1, k_2, \dots, k_l)} + P_{k_2, q_1}^{m, l(k_2, k_2, \dots, k_2)} + \dots + P_{k_l, q_1}^{m, l(k_l, k_l, \dots, k_l)}) + O_m^i + \\ & + (P_{k_1, q_2}^{m, l(k_1, k_2, \dots, k_l)} + P_{k_2, q_2}^{m, l(k_2, k_2, \dots, k_2)} + \dots + P_{k_l, q_2}^{m, l(k_l, k_l, \dots, k_l)}), \end{aligned}$$

где точки  $q_1$  и  $q_2$  вычисляются по формулам:  $q_1 = i; q_2 = m - i$ ,  $i$  — кратчайшее из расстояний между точками ветвления на цикле-аттракторе.

**Доказательство.** Для доказательства теоремы покажем, что каждая из компонент связности системы  $D^2$  будет удовлетворять утверждению теоремы. Для этого будем описывать строение компонент связности, получаемых в системе  $D^2$ , начиная от цикла-аттрактора и поднимаясь по притягиваемым деревьям.

Рассмотрим случай  $D = O_m + P_k$ . Из лемм 2 и 3 следует, что в системе  $D^2$  будет  $m$  циклов длины  $m$ , что соответствует компоненте  $O_m^i$  утверждения теоремы.

Обозначим символом  $a$  точку ветвления системы  $D$ , а символами  $a'$  и  $b$  состояния, переходящие в  $a$  за один шаг, находящиеся на цикле-аттракторе и притягиваемой цепи соответственно. Тогда, исходя из леммы 5, точками ветвления, принадлежащими аттракторам в  $D^2$ , могут быть только точки вида  $(a, y)$ ,  $(x, a)$  и  $(a, a)$ , где  $x$  и  $y$  лежат на цикле-аттракторе системы  $D$ .

Из вышесказанного и теоремы 2 получаем, что  $m - 1$  компонент связности  $D^2$  будут иметь вид  $T + O_m + T'$  (в случае если точки ветвления циклов имеют вид  $(a, y)$ ,  $(x, a)$ ) и одна компонента будет иметь вид  $O_m + (T'' + T''' + T''''')$  (если точка ветвления цикла имеет  $(a, a)$ ), где под  $T$  понимаются деревья некоторой формы. Следовательно общий вид компонент связности удовлетворяет утверждению теоремы. Покажем, что форма деревьев  $T, T', T'', T''', T'''''$  также удовлетворяет условию теоремы.



Рассмотрим компоненты связности вида  $T + O_m + T'$  и притягиваемые ими деревья. Точки ветвления данных компонент, лежащие на цикле, будут иметь вид  $(a, y)$  и  $(x, a)$ . Тогда для точки ветвления  $(a, y)$  имеются два состояния  $(a'_1, y')$ ,  $(a'_2, y')$ , одно из которых лежит на цикле-аттракторе, а второе на притягиваемом дереве. Пусть, для определённости,  $(a'_1, y')$  лежит на притягиваемом дереве, т. е.  $a'_1$  принадлежит притягиваемому дереву в  $D$ . Из чего следует, что состояния, лежащие на рассматриваемом дереве, могут быть точками ветвления только в том случае, когда вторая их компонента обращается в  $a$ . Соответственно расстояние между данными точками ветвления равно  $m$ , исключая ближайшую к циклу точку ветвления.

Так как каждая из рассматриваемых точек ветвления имеет вид  $(a_k, a)$ , то, очевидно, что все точки ветвления будут расположены на одной цепи, которая будет притягивать другие, более короткие, цепи. Аналогичные рассуждения можно привести и для второй точки ветвления цикла данных компонент связности.

Покажем, что данные деревья удовлетворяют условиям о расстоянии до первой точки ветвления. Пусть имеются две точки ветвления  $t_1$  и  $t_2$ , лежащие на цикле и являющиеся корнями притягиваемых деревьев. Наименьшее расстояние между ними равно  $h_1$  и, для определённости, пусть это  $h(t_1, t_2)$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} h(t_1, t_2) + h(t_2, t_1) &= m, & h(t_1, t_2) &= m - h(t_2, t_1), & h(t_1, t_2) &= h_1, \\ h_1 &= m - h(t_2, t_1), & h(t_2, t_1) &= m - h_1. \end{aligned}$$

Из данных равенств получаем, что для точки  $t_2$  первая точка ветвления притягиваемого дерева будет расположена на расстоянии  $h_1$ , так как первая компонента точки  $t_2$  является точкой  $a$  на  $h_1$ -м предыдущем шаге. Аналогично для  $t_1$  — первая точка ветвления будет располагаться на расстоянии  $(m - h_1)$  от цикла-аттрактора, что соответствует утверждению теоремы относительно первых точек ветвления притягиваемых деревьев.

Таким образом, получаем, что для случая с двумя точками ветвления на цикле-аттракторе результирующая динамическая система удовлетворяет утверждению теоремы. Покажем, что и для случая с единственной точкой ветвления теорема выполняется.

В случае, если точка ветвления компоненты связности системы  $D^2$  единственна, она должна иметь вид  $(a, a)$ . Следовательно, в неё будут переходить точки вида  $(a', b)$ ,  $(b, a')$ ,  $(a', a')$  и  $(b, b)$ , где  $a'$  — состояние, переходящее в  $a$  и расположенное на цикле-аттракторе, а  $b$  — состояние, переходящее в  $a$  и расположенное на притягиваемой цепи в исходной системе.

По лемме 1 состояние  $(a', a')$  принадлежит циклу-аттрактору, а остальные состояния, переходящие в  $(a, a)$ , принадлежат притягиваемым деревьям. Очевидно, что форма деревьев, определяемых состояниями  $(a', b)$  и  $(b, a')$ , аналогична форме деревьев рассмотренных выше (для случая с компонентой связности, притягивающей два дерева). Дерево, ассоциированное с состоянием  $(b, b)$ , будет представлять собой цепь, так как в системе  $D$  точка  $a$  не переходит в точку  $b$ , следовательно, ни  $(b, b)$ , ни любая из точек, переходящих в  $(b, b)$ , не может быть точкой ветвления. Тогда, рассматривая точку  $(a, a)$  как первую точку ветвления одного из деревьев, ассоциированных с точками  $(a', b)$  и  $(b, a')$ , получаем, что данный случай также удовлетворяет условию теоремы.

Из вышесказанного следует, что теорема верна, если  $D = O_m + P_k$ . Расширим данное утверждение на  $D = O_m + (P_{k_1} + P_{k_2} + \dots + P_{k_l})$ .

Заметим, что если все цепи притягиваются одной точкой ветвления в системе  $D$ , то количество компонент связности и расположение точек ветвления не изменится в системе  $D^2$ , как и ограничения по высотам деревьев. Следовательно, для компонент связности, имеющих две точки ветвления на цикле, справедливость теоремы очевидна. Покажем, что теорема также справедлива и для компоненты связности системы  $D^2$ , имеющей одну точку ветвления на цикле.

Пусть система  $D$  притягивает  $l$  цепей в точке  $a$ , принадлежащей циклу-аттрактору, тогда точка  $(a, a)$  системы  $D^2$  должна притягивать  $(l + 1)^2 - 1$  деревьев. Из того, что множество состояний системы  $D^2$  есть декартово произведение множества состояний системы  $D$  на себя, получаем, что из  $((l + 1)^2 - 1)$  деревьев иметь точки ветвления могут  $2 \cdot l$  деревьев, т. е. только деревья ассоциированные с точками вида  $(a, y)$  и  $(x, a)$ . Следовательно,  $((l + 1)^2 - 1) - 2 \cdot l$  деревьев, притягиваемых к  $(a, a)$ , будут цепями.

Упрощая  $((l + 1)^2 - 1) - 2 \cdot l$  получаем, что количество притягиваемых цепей (точкой  $(a, a)$ ) равняется  $l^2$ . Тогда рассматривая  $l$  цепей с первой точкой ветвления в  $(a, a)$ , получаем утверждение теоремы, что и требовалось показать.  $\square$



## Библиографический список

1. Тьяпаев Л. Б. Геометрическая модель поведения автоматов и их неотличимость // Математика, механика, математическая кибернетика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1999. С. 139–143.
2. Тьяпаев Л. Б. Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. 1/2. С. 121–133.
3. Тьяпаев Л. Б. Геометрические образы автоматов и динамические системы // Дискретная математика и ее приложения : материалы X междунар. семинара / под ред. О. М. Касим-Заде. М. : Изд-во мех.-мат. ф-та Моск. ун-та, 2010. С. 510–513.
4. Матов Д. О. Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов // Проблемы теоретической кибернетики : материалы XVI междунар. конф. / под ред. Ю. И. Журавлева. Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госун-та, 2011. С. 303–306.

## Discrete Dynamical Systems Defined Geometrical Images of Automata

L. B. Tyapaev, D. V. Vasilenko, M. V. Karandashov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, tyapaevlb@info.sgu.ru, egoschauer@mail.ru, norg113@gmail.com

The object of study is the dynamic system defined by geometrical images of automata. The phase space of the system is determined by orthogonal and affine transformations of geometric images. Compositions of dynamical systems of a given type and their characteristics are studied.

*Key words:* automata, discrete dynamical systems, geometric images of automata.

## References

1. Tyapaev L. B. The geometric model of the behavior of automata and their indistinguishability. *Matematika, Mekhanika, Matematicheskaya kibernetika: Sb. nauch. tr.* Saratov, Saratov Univ. Press, 1999, pp. 139–143 (in Russian).
2. Tyapaev L. B. Solving Some Problems of Automata Behaviour Analysis. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2006, vol. 6, no. 1/2, pp. 121–133 (in Russian).
3. Tyapaev L. B. Geometric images of automata and dynamical systems. *Discretnaya matematika i eyo prilozheniya. Materialy X Mezhd. seminar.* Ed. O. M. Kasim-Zade. Moscow, 2010, pp. 510–513 (in Russian).
4. Matov D. O. Affine transformations of geometric images of finite automata. *Problemy teoreticheskoy kibernetiki : Materialy XVI Mezhdunar. konf.* Ed. Yu. I. Zhuravlyova. Nizhni Novgorod, 2011, pp. 303–306 (in Russian).

УДК 519.71, 519.651

## ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛА С ОДНИМ СКРЫТЫМ СЛОЕМ

Н. С. Узенцова<sup>1</sup>, С. П. Сидоров<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Аспирантка кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Uzentsovans@gmail.com

<sup>2</sup> Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sidorovsp@info.sgu.ru

В данной статье приводится алгоритм нахождения весов нейронной сети прямого распространения сигнала с одним основным слоем. Алгоритм используется для решения задачи равномерного приближения алгебраического многочлена совместно с его производными с наперед заданной точностью. В качестве функции активации используется рациональная сигмоида.

*Ключевые слова:* нейронные сети, аппроксимация функций.



## ВВЕДЕНИЕ

Определение и детальное описание основных понятий теории нейронных сетей (а именно понятие многослойной нейронной сети прямого распространения с различными функциями активации), а также подробное изложение используемых понятий и архитектур сетей, можно найти, например, в [1, 2].

Для решения многих прикладных задач используется способность нейронных сетей аппроксимировать полиномиальную функцию. В статье [3] полиномиальная функция используется как мера емкости искусственной нейронной сети прямого распространения с конечным числом скрытых узлов, при этом под емкостью сети понимается наибольшая степень полиномов, которые данная нейронная сеть приближает с наперед заданной точностью.

Полиномиальная функция  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  степени  $r$  с  $m$  переменными может быть записана в следующем виде:

$$f(x) = \left( a_0 + \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i \right) + \left( \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i \right)^2 + \dots + \left( \sum_{i=1}^m a_{ir}x_i \right)^r, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $a_0, a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим архитектуру нейронной сети  $F$  с одним скрытым слоем. Пусть вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$  есть вектор входа нейронной сети,  $m$  есть количество узлов входного слоя сети  $F$ . Обозначим через  $N$  количество узлов скрытого слоя сети. Количество входов в скрытый слой равно числу компонент вектора  $x$ . Обозначим через  $y$  выход сети  $F$ . Вес связи между  $i$ -м узлом входного слоя и  $j$ -м скрытым узлом обозначим  $w_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Вес связи между  $j$ -м узлом скрытого слоя и (единственным) нейроном выходного слоя обозначим  $c_j$ . Выход скрытого узла  $j$  определяется следующим образом:

$$\sigma(\theta_j) = \frac{\theta_j}{\alpha + |\theta_j|}, \quad \theta_j = \sum_{i=1}^m w_{ji}x_i + b_j, \quad (2)$$

где  $j = 1, \dots, N$ ,  $\alpha$  — положительная константа,  $m$  — количество входов,  $b_j$  — пороговое значение  $j$ -го узла скрытого слоя.

Выходное значение  $y \in \mathbb{R}$  нейронной сети  $F$  будет равно

$$y = \sum_{j=1}^N c_j \sigma(\theta_j).$$

В настоящей статье, следуя идеям работы [3], мы находим алгоритм настройки весов сети для одновременного приближения в равномерной метрике с заданной ошибкой полиномиальной функции фиксированной степени и ее производных. В отличие от работы [3], мы рассматриваем нейронную сеть прямого распространения сигнала с рациональной сигмоидой в качестве функции активации, в то время как в работе [3] изучалась нейронная сеть с экспоненциальной сигмоидальной функцией активации. Мы покажем, что результаты, аналогичные результатам работы [3], будут справедливы и для задачи равномерного приближения алгебраического многочлена совместно с его производными.

## ИСКУССТВЕННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ С ОДНИМ ВХОДОМ И ОДНИМ ВЫХОДОМ

Рассмотрим нейронную сеть  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  прямого распространения с одним входом и одним выходом:

$$F(x) = \sum_{j=1}^N c_j \sigma(w_j x + b_j),$$

где  $c_j, w_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , есть параметры сети. Обозначим множество всех таких отображений как  $\mathcal{F}_N(\sigma)$ .

Полиномиальная функция  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  степени  $r$  имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_r x^r,$$

где  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$ .



**Лемма 1.** Производная порядка  $s$  функции  $F$  существует в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$ , при этом справедливо равенство

$$\frac{d^s F(x)}{dx^s} = \sum_{j=1}^N c_j w_j^s Q_s(\sigma(\theta_j)), \quad (3)$$

где  $Q_s(\sigma(\theta_j)) = (-1)^{s+1} s! \theta_j^{-s} \sigma^s(\theta_j) (1 - \sigma(\theta_j) \cdot \operatorname{sgn} \theta_j)$ ,  $\theta_j = \theta_j(x) = w_j x + b_j$ .

Предположим, что справедливы следующие равенства:

$$\frac{d^s F(0)}{dx^s} = \frac{d^s f(0)}{dx^s} = (s!) a_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, r,$$

т. е. имеет место следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} Q_0(\sigma_1^0) & Q_0(\sigma_2^0) & \dots & Q_0(\sigma_N^0) \\ Q_1(\sigma_1^0)w_1 & Q_1(\sigma_2^0)w_2 & \dots & Q_1(\sigma_N^0)w_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_r(\sigma_1^0)w_1^r & Q_r(\sigma_2^0)w_2^r & \dots & Q_r(\sigma_N^0)w_N^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ (1!)a_1 \\ \dots \\ (r!)a_r \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $Q_0(\sigma(\theta)) = \sigma(\theta)$ ,  $\sigma_j^0 := \sigma(\theta_j(0)) = \frac{\theta_j(0)}{\alpha + |\theta_j(0)|}$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Обозначим

$$\Omega = \begin{pmatrix} Q_0(\sigma_1^0) & Q_0(\sigma_2^0) & \dots & Q_0(\sigma_N^0) \\ Q_1(\sigma_1^0)w_1 & Q_1(\sigma_2^0)w_2 & \dots & Q_1(\sigma_N^0)w_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_r(\sigma_1^0)w_1^r & Q_r(\sigma_2^0)w_2^r & \dots & Q_r(\sigma_N^0)w_N^r \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тогда матричное равенство (4) можно записать в виде  $\Omega c = a$ , где  $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ ,  $a = (a_0, (1!)a_1, \dots, (r!)a_r)^T$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\delta > 0$  и  $w_i = (i - 1)\delta$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Если  $c_1, \dots, c_N$  есть решение системы (4), то справедлива система неравенств

$$|c_j| \leq \psi_{\max} q_{\max} \sum_{i=0}^r |i! a_i| \delta^{-i}, \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $\psi_{\max}$  есть положительное число, зависящее от  $N$  и  $r$ ,  $q_{\max}$  есть положительное число, зависящее от порогового значения в скрытом слое.

В следующей теореме показывается, что сеть с одним скрытым слоем, содержащим  $N$  узлов, может аппроксимировать любой алгебраический многочлен степени  $N - 1$  совместно с его производными с любой степенью точности на произвольном замкнутом множестве числовой прямой.

**Теорема 1.** Пусть  $x_{\max} > 0$  — произвольное число. Тогда для произвольной функции  $f \in \mathcal{P}_{N-1}$  и для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется функция  $F(x) \in \mathcal{F}_N(\sigma)$  такая, что

$$\sup_{x \in [-x_{\max}, x_{\max}]} \sum_{s=0}^{N-1} |F^{(s)}(x) - f^{(s)}(x)| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  является ошибкой равномерного приближения на  $[-x_{\max}, x_{\max}]$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in \mathcal{P}_{N-1}$  есть произвольный многочлен. Возьмем  $\varepsilon > 0$  и покажем, что для некоторой  $F(x) \in \mathcal{F}_N(\sigma)$  для всех  $x \in [-x_{\max}, x_{\max}]$  будет

$$\sum_{s=0}^{N-1} |F^{(s)}(x) - f^{(s)}(x)| < \varepsilon.$$

Потребуем

$$\frac{d^s F(0)}{dx^s} = \frac{d^s f(0)}{dx^s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

Пусть  $r = N - 1$ . Так как  $F^{(s)}(x)$  имеет производную любого порядка в каждой точке вещественной оси, то функцию  $F^{(s)}(x)$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$ . Так, для  $s = 0$  имеем:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{r!}F^{(r)}(0)x^r + R_{r,0}(x),$$



где  $R_{r,0}(x)$  есть остаточный член форме Лагранжа:

$$R_{r,0}(x) = \frac{F^{(r+1)}(\zeta_0)}{(r+1)!} x^{r+1}.$$

Имеем:

$$F^{(s)}(x) = \sum_{l=s}^r \frac{F^{(l)}(0)x^{l-s}}{(l-s)!} + R_{r,s}(x),$$

где  $R_{r,s}(x)$  есть остаточный член в форме Лагранжа,

$$R_{r,s}(x) = \frac{F^{(r+1)}(\zeta_s)}{(r+1-s)!} x^{r+1-s}.$$

Имеем:

$$\sum_{s=0}^{N-1} |F^{(s)}(x) - f^{(s)}(x)| = \sum_{s=0}^{N-1} |R_{r,s}(x)|.$$

Согласно лемме 1

$$R_{r-s}(x) = \frac{x^{r+1-s}}{(r+1-s)!} \sum_{j=1}^N c_j w_j^{r+1} Q_{r+1}(\sigma(\theta_j(\zeta_s))),$$

где  $-x_{\max} \leq \zeta_s \leq x_{\max}$ .

Возьмем  $0 < \delta < 1$ . Положим  $w_j = (j-1)\delta$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Согласно лемме 1 для  $s \geq 1$

$$Q_s(\sigma(\theta_j)) = (-1)^{s+1} s! \theta_j^{-s} \sigma^s(\theta_j) (1 - \sigma(\theta_j) \cdot \operatorname{sgn} \theta_j)$$

и  $Q_0(\sigma_j) = \sigma_j$ , где  $\sigma_j(x) = \sigma(\theta_j(x))$ . Так как для всех  $x$  имеет место  $-1 < \sigma_j < 1$ , то  $|Q_0(\sigma_j)| \leq 1$  и существует  $M^0$  такое, что  $|\sigma^s(\theta_j)(1 - \sigma(\theta_j) \cdot \operatorname{sgn} \theta_j)| < M^0$ . Имеем, учитывая лемму 2,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{N-1} |R_{r,s}(x)| &\leq \sum_{s=0}^{N-1} \left( \frac{x_{\max}^{r+1-s}}{(r+1-s)!} \sum_{j=1}^N |c_j| |w_j^{r+1}| |Q_{r+1}(\sigma_j(\zeta_s))| \right) \leq \\ &\leq \sum_{s=0}^{N-1} \left( \frac{x_{\max}^{r+1-s}}{(r+1-s)!} \psi_{\max} q_{\max} \sum_{j=1}^N \sum_{p=0}^r |p! a_p| \delta^{-p} (r+1)! j^{r+1} \delta^{r+1} M^0 \right) \leq \\ &\leq \delta \psi_{\max} q_{\max} M^0 \sum_{p=0}^r |p! a_p| \sum_{s=0}^{N-1} \left( \frac{(r+1)!}{(r+1-s)!} x_{\max}^{r+1-s} \sum_{j=1}^N j^{r+1} \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$M = \psi_{\max} q_{\max} M^0 \sum_{p=0}^r |p! a_p| \sum_{s=0}^{N-1} \left( \frac{(r+1)!}{(r+1-s)!} x_{\max}^{r+1-s} \sum_{j=1}^N j^{r+1} \right),$$

т. е.  $M$  есть конечное число, не зависящее от  $x$ . Имеем:

$$\sum_{s=0}^{N-1} |R_{r,s}(x)| \leq \delta M.$$

Взяв  $\delta < \varepsilon/(M+1)$ , получаем  $\sum_{s=0}^N |R_r(x)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  есть ошибка аппроксимации.  $\square$

Заметим, что утверждение, аналогичное теореме, не будет справедливым, если в скрытом слое содержится не  $r+1$ , а  $r$  узлов, т. е. нейронные сети с  $r$  узлами в скрытом слое не способны с любой степенью точности приближать полиномы степени  $r$ . Это означает, что существует неустранимая ошибка приближения многочленов степени  $r$  нейронными сетями с  $r$  узлами в скрытом слое. В работе [4] находится оценка этой ошибки.

Отметим, что используя подход, изложенный в работе [3], легко получить следующий результат для нейронных сетей прямого распространения с несколькими входами и одним выходом.



**Теорема 2.** Пусть  $x_{\max} > 0$  есть произвольное действительное число,  $I = [-x_{\max}, x_{\max}]$ . Если  $r \leq \sqrt{2N + 1.5^2} - 1.5$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  и произвольной полиномиальной функции  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  степени  $r$  с  $m$  переменными вида (1) существует сеть прямого распространения  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  с одним скрытым слоем, содержащим  $N$  узлов и функцией активации (2), которая равномерно аппроксимирует  $f$  с любой наперед заданной степенью точности на  $I^m$ , т. е.

$$\sup_{x \in I^m} |F(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

### Библиографический список

1. Галушкин А. Нейронные сети. Основы теории. М. : Горячая Линия – Телеком, 2012.
2. Haykin S. Neural networks : a comprehensive foundation. 2 ed. N. J. : Prentice-Hall, Inc., 1999.
3. Malakooti B., Zhou Y. Q. Approximating polynomial functions by feedforward artificial neural networks : capacity analysis and design // Appl. Math. and Comp. 1998. Vol. 90. P. 27–52.
4. Сидоров С. П. Об ошибке приближения алгебраических полиномов нейронными сетями прямого распространения // Нейрокомпьютеры : разработка, применение. 2005. № 5. С. 13–17.

## Simultaneous Approximation of Polynomial Functions and Its Derivatives by Feedforward Artificial Neural Networks with One Hidden Layer

N. S. Uzentsova, S. P. Sidorov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, UzentsovaNS@gmail.com, SidorovSP@info.sgu.ru

In this paper we propose the algorithm for finding weights of feedforward artificial neural networks with one hidden layer to approximate polynomial functions and its derivatives with a given error. We use the rational sigmoidal function as a transfer function.

*Key words:* neural networks, approximation.

### References

1. Galyshkin A. *Neironnye seti. Osnovy teorii* [Neural Networks. The foundations of the theory]. Moscow, Goriachaia Liniia – Telekom, 2012 (in Russian).
2. Haykin S. *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*. Second ed., New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1999.
3. Malakooti B., Zhou Y. Q. Approximating Polynomial Functions by Feedforward Artificial Neural Networks : Capacity Analysis and Design. *Appl. Math. and Comp.*, 1998, vol. 90, pp. 27–52.
4. Sidorov S. P. Ob oshibke priblizheniia algebraicheskikh polinomov neironnymi setiami priamogo rasprostraneniia [On the error of approximation of algebraical polynomials by means of artificial feedforward neural networks]. *Neirokomp'iutery : razrabotka, primeneniie*, 2005, no. 5, pp. 13–17 (in Russian).

УДК 519.872

## МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ В СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Н. П. Фокина<sup>1</sup>, И. Е. Тананко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. FokinaNP.sgu@gmail.com

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, TanankoIE@info.sgu.ru

Рассматриваются замкнутые экспоненциальные сети массового обслуживания с изменяющейся топологией. Предложен метод управления маршрутизацией в сетях обслуживания данного типа.

*Ключевые слова:* сети массового обслуживания, переменная топология, управление маршрутизацией, надежность.





## ВВЕДЕНИЕ

Сети массового обслуживания с ненадежными элементами используются для решения задач проектирования, анализа и модификации больших сложных систем с сетевой структурой и стохастическим характером функционирования. Методы анализа сетей обслуживания с ненадежными элементами, используемых в качестве моделей сетей передачи данных, вычислительных сетей, систем баз данных, рассмотрены в обзоре [1].

Разработке точных методов анализа сетей массового обслуживания с отказами и восстановлением приборов систем обслуживания посвящены статьи [2–5]. В этих статьях отказ прибора вызывает прекращение поступления требований в систему и их обслуживания до момента восстановления прибора. При этом все требования, находящиеся в момент отказа прибора в системе обслуживания либо уничтожаются [2], либо ожидают восстановления прибора [3], либо мгновенно переходят в смежные работоспособные системы обслуживания [4]. При выходе из строя систем обслуживания и их восстановлении изменяется маршрутная матрица, в которой учитываются связи только между работоспособными системами. Метод оптимального управления маршрутизацией в замкнутых сетях массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания и стационарное распределение вероятностей состояний такой сети приведены в статьях [4, 5].

Разработке приближенных методов анализа сетей массового обслуживания с ненадежными приборами систем обслуживания посвящены статьи [6–9]. В статьях [6, 7] процесс отказа и восстановления приборов систем обслуживания в сети отображается корректировкой интенсивности обслуживания требований. Получены выражения для стационарных средних характеристик систем обслуживания. Метод определения пределов ошибки в характеристиках ненадежных сетей массового обслуживания, не имеющих мультипликативной формы стационарного распределения вероятностей состояний, представлен в статье [8]. В статье [9] рассмотрен приближенный метод анализа открытой сети массового обслуживания с обратными связями между группами систем обслуживания и управлением потоками требований при наличии в сети обслуживания отказавших систем обслуживания.

К особому классу ненадежных сетей обслуживания можно отнести сети массового обслуживания с переменной топологией, которые характеризуются случайными или детерминированными изменениями связей между системами обслуживания. В статье [10] предлагается метод оптимального управления входящим потоком в сеть параллельных систем массового обслуживания со случайно нарушающимися и восстанавливаемыми связями между источником требований и системами обслуживания. В статье [11] исследуется метод управления требованиями, основанный на информации о числе мест ожидания в очередях и времени пребывания требований в системах сети обслуживания с изменяемыми связями между системами обслуживания.

В данной работе рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с одним классом требований. Через фиксированные интервалы времени случайным образом изменяются связи между системами обслуживания. Для сети с переменной топологией используется метод формирования маршрутных матриц, обеспечивающих одинаковые средние длительности пребывания требований в системах обслуживания. Получены вероятностно-временные характеристики сети обслуживания рассматриваемого типа.

## 1. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Пусть  $N$  — замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с  $L$  системами массового обслуживания  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , типа  $M/M/1$  с интенсивностями обслуживания  $\mu_i$ ,  $Q$  требованиями одного класса и переменной топологией. Обозначим через  $W = (w_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , — матрицу смежности ориентированного графа, определяющую топологию сети  $N$ . Вершины графа соответствуют системам обслуживания, а дуги — связям между ними.

Матрица  $W$  принимает значения из конечного множества матриц смежности  $\{W(k)\}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , с равными вероятностями, где  $W(k) = (w_{ij}(k))$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ . Обозначим через  $N(k)$  сеть  $N$  с топологией  $W = W(k)$ . Эволюция сети  $N$  представляет собой последовательность эволюций сетей  $N(k)$  фиксированных длительностей  $\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , соответственно.

Очередное изменение топологии в сети  $N$  приводит в действие механизм формирования новой



маршрутной матрицы, реализующей в сети маршрутизацию, обеспечивающую равенство математических ожиданий (м. о.) длительностей пребывания требований в системах обслуживания, т. е.  $\bar{u}_i = \rho$ ,  $i = 1, \dots, L$ .

Таким образом, каждой сети  $N(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , поставим в соответствие неприводимую маршрутную матрицу  $\Theta(k) = (\theta_{ij}(k))$ , где

$$\theta_{ij}(k) = \begin{cases} \theta_{ij}(k) \geq 0, & w_{ij}(k) = 1, \\ 0, & w_{ij}(k) = 0. \end{cases}$$

Вектор относительных интенсивностей потоков  $\omega = (\omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , является решением уравнения  $\omega\Theta(k) = \omega$  с условием нормировки  $\sum_{i=1}^L \omega_i = 1$ .

Обозначим через  $s = (s_1, \dots, s_L)$  состояние сети  $N$ , где  $s_i$  — число требований в системе  $S_i$ ,  $X$  — множество состояний сети мощности  $c_X = |X|$ .

Введем следующие обозначения для некоторых стационарных характеристик систем обслуживания сети  $N$ ,  $i = 1, \dots, L$ :  $\bar{u}_{i|Q}$  — м. о. длительности пребывания требований в системе  $S_i$  при условии, что в сети  $N$  находится  $Q$  требований;  $\bar{s}_{i|Q}$  — м. о. числа требований в системе  $S_i$ ;  $\lambda_{i|Q}$  — интенсивность потока требований в систему  $S_i$ ;  $\Phi = \sum_{i=1}^L \mu_i$ .

Функционирование сети  $N$  можно рассматривать как два протекающих одновременно процесса: 1) процесс смены топологии сети и 2) вложенный в него процесс обслуживания и переходов требований между системами сети обслуживания.

Целью данной работы является определение вероятностно-временных характеристик замкнутых сетей массового обслуживания с переменной топологией, разработка метода управления маршрутизацией в этих сетях. При использовании этого метода сначала находятся векторы относительных интенсивностей потоков требований  $\omega$ , обеспечивающих равенство математических ожиданий длительностей пребывания требований во всех системах сети  $N(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Затем для сети  $N(k)$  с заданным вектором формируется соответствующая маршрутная матрица  $\Theta(k)$ .

## 2. МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ СЕТЬЮ

Приведем выражения для некоторых стационарных характеристик систем обслуживания сети  $N$ ,  $i = 1, \dots, L$ ,

$$\bar{u}_{i|Q} = \frac{1}{\mu_i} (\bar{s}_{i|Q-1} + 1), \quad \bar{s}_{i|Q} = Q \frac{\omega_i \bar{u}_{i|Q}}{\sum_{j=1}^L \omega_j \bar{u}_{j|Q}}, \quad \lambda_{i|Q} = \frac{\bar{s}_{i|Q}}{\bar{u}_{i|Q}}.$$

Пусть в сети  $N$  выполняется условие

$$\bar{u}_{i|Q} = \rho_Q, \quad i = 1, \dots, L, \tag{1}$$

где  $\rho_Q$  — константа. Тогда известно [12], что сеть  $N$  будет иметь следующие стационарные характеристики,  $i = 1, \dots, L$ ,

$$\bar{s}_{i|Q} = Q\omega_i, \tag{2}$$

$$\bar{u}_{i|Q} = \frac{Q + L - 1}{\Phi}, \tag{3}$$

$$\lambda_{i|Q} = \frac{Q\Phi}{Q + L - 1} \omega_i. \tag{4}$$

В работе [12] получено выражение для определения элементов вектора  $\omega$ :

$$\omega_i = \frac{\mu_i(L + Q) - \Phi}{Q\Phi}, \quad i = 1, \dots, L. \tag{5}$$



Выражение (5) дает только приближенные к (2)–(4) значения характеристик  $\bar{s}_{i|Q}$ ,  $\bar{u}_{i|Q}$  и  $\lambda_{i|Q}$ , поскольку получено из допущения, что при больших  $Q$  и  $L$  выполняется не только (1), но справедливо также выражение  $\bar{u}_{i|Q-1} = \rho_{Q-1}$ ,  $i = 1, \dots, L$ .

Математическое ожидание длительности пребывания требований в системе  $S_i$  может быть представлено также в виде

$$\bar{u}_{i|Q} = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^Q m P_i(m-1)$$

или

$$\frac{\mu_i(Q+L-1)}{\Phi} = \sum_{m=1}^Q m P_i(m-1), \quad i = 1, \dots, L, \quad (6)$$

где  $P_i(m)$  — вероятность того, что в системе  $S_i$  находится  $m$  требований, определяется

$$P_i(m) = \frac{1}{G(Q, L)} \sum_{\substack{s \in X: \\ s_i = m}} \prod_{j=1}^L \left( \frac{\omega_j}{\mu_j} \right)^{s_j},$$

$G(Q, L)$  — нормализующая константа.

Выражения (6) образуют систему нелинейных уравнений относительно неизвестных  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , которая может быть решена численно.

Маршрутная матрица  $\Theta(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , для заданного вектора  $\omega$  может быть построена с использованием метода формирования маршрутных матриц, рассмотренного в работе [13]. Необходимо отметить, что не для каждой топологии сети  $N$  и вектора  $\omega$  существует матрица  $\Theta$ . В этом случае для вектора  $\omega$  определяется приближенная маршрутная матрица  $\Theta$ .

Для сетей  $N(k)$  с топологиями, определяемыми матрицами  $W(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , будем использовать следующий метод определения вероятностно-временных характеристик.

Обозначим через  $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_L^{(n)})$  состояние сети с номером  $n$ , где  $s_i^{(n)}$  — число требований в системе  $S_i$ . Длительность пребывания сети в состоянии  $s^{(n)} \in X$  является случайной величиной с экспоненциальным распределением и математическим ожиданием  $\beta_n = 1/\alpha_n$ , где  $\alpha_n$  — параметр ее функции распределения. Эволюция сети  $N(k)$  описывается цепью Маркова  $C^k$ , с множеством состояний  $B = \{1, \dots, c_X\}$  и непрерывным временем. Длительность пребывания цепи в состоянии  $n$  является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром  $0 < \alpha_n < \infty$ . Длительность реализации цепи  $C^k$  равна длительности  $\tau_k$ .

Введем обозначения параметров и характеристик цепи  $C^k$ :  $A^k = (a_{mn}^k)$ ,  $m, n \in B$ , — инфинитесимальный оператор;  $P^{(t),k} = (p_{mn}^{(t),k})$  — матрица вероятностей перехода за время  $t$ , определяемая известным соотношением  $P^{(t),k} = \exp(A^k t)$ .

Параметры и характеристики цепи  $C^k$  будут зависеть от соответствующей маршрутной матрицы  $\Theta(k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_{mn}^k &= \varepsilon(s_i^{(m)}) \mu_i \theta_{ij}(k), \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \\ a_{mm}^k &= - \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(m)}) \mu_i, \quad m \in B, \\ \alpha_m &= -a_{mm}^k, \quad m \in B, \end{aligned}$$

Пусть  $\pi^k = (\pi_n^k)$ ,  $n \in B$ , — распределение вероятностей состояний цепи  $C^k$  на момент завершения интервала  $\tau_k$ ;  $q_n(k)$ ,  $n \in B$ , — средняя вероятность пребывания в состоянии  $n$  цепи  $C^k$  в течение интервала времени длительности  $\tau_k$

$$q_n(k) = \frac{1}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} \sum_{m=1}^{c_X} \pi_m p_{mn}^{(t),k} dt, \quad n \in B, \quad k = 1, \dots, K. \quad (7)$$



Обозначим  $\bar{\tau} = \sum_{k=1}^K \tau_k$ . Следовательно, стационарная вероятность пребывания сети  $N$  в состоянии  $s^{(n)}$  определяется выражением

$$q_n = \sum_{k=1}^K \frac{\tau_k}{\bar{\tau}} q_n(k), \quad s^{(n)} \in X. \quad (8)$$

### 3. ПРИМЕР

Пусть  $N$  — замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с  $L = 7$  системами массового обслуживания,  $Q = 21$  требованиями одного класса, вектором интенсивностей обслуживания требований

$$\mu = (1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2),$$

$K = 2$  числом топологий сети  $N$ ,  $\tau = (30, 40)$  — вектором длительностей реализаций эволюций сетей  $N(k)$ ,  $k = 1, 2$ , матрицами смежности:

$$W(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При заданных параметрах сети решением системы нелинейных уравнений (6) является вектор относительных интенсивностей потоков:

$$\omega = (0.0690, 0.0931, 0.1176, 0.1423, 0.1673, 0.1926, 0.2181).$$

Методом формирования маршрутных матриц получим:

$$\Theta(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.195 & 0 & 0 & 0.242 & 0.563 \\ 0.277 & 0 & 0 & 0.723 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.376 & 0 & 0.624 \\ 0 & 0 & 0.19 & 0 & 0 & 0.81 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.167 & 0 & 0.311 & 0 & 0.522 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Theta(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.34 & 0 & 0.36 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.13 & 0.37 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.188 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.812 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя выражения (7) и (8), а также известные выражения для  $\bar{s}_i$ ,  $\bar{u}_i$  и  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , получим следующие характеристики сети  $N$ :

$$\bar{s} = (1.45, 1.96, 2.47, 2.99, 3.51, 4.04, 4.58),$$

$$\bar{u} = (2.41, 2.41, 2.41, 2.41, 2.41, 2.41, 2.41),$$

$$\lambda = (0.60, 0.81, 1.02, 1.24, 1.46, 1.68, 1.90).$$



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использованный метод формирования маршрутных матриц обеспечивает требуемые значения характеристик сети обслуживания с изменяемой топологией. Сети массового обслуживания с таким свойством могут быть использованы в качестве моделей управляемых дискретных стохастических систем с сетевой структурой (гибких производственных систем, сложных систем с резервными элементами, систем спутниковой связи и т. п.).

## Библиографический список

1. Dijk N. M. van. Analytic comparison results for communication networks // *Computer Communications*. 1998. Vol. 21. P. 1495–1508.
2. Chao X. A queueing network model with catastrophes and product form solution // *Operations Research Letters*. 1995. Vol. 18. P. 75–79.
3. Sauer C., Daduna H. BCMP networks with unreliable servers. Preprint № 2003-01, Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse, Universität Hamburg, 2003.
4. Тананко И. Е. Метод оптимального управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной конфигурацией // *Автоматика и вычислительная техника*. 2006. № 3. С. 71–77.
5. Тананко И. Е. О замкнутых сетях массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 138–141.
6. Chakka R., Mitrani I. Approximate solutions for open networks with breakdowns and repairs // *Stochastic Networks — Theory and Applications* / eds. F. P. Kelly, S. Zachary, I. Ziedins. Oxford : Clarendon Press, 1996. Ch. 16. P. 267–280.
7. Vinod B., Altiook T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // *J. Opl. Res. Soc.* 1986. Vol. 37, №. 3. P. 309–316.
8. Dijk N. M. van. Bounds and error bounds for queueing networks // *Annals of Operations Research*. 1998. Vol. 79. P. 295–319.
9. Thomas N., Thornley D., Zatschler H. Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns // *Proc. of 17-th European Simulation Multi-conference, Nottingham, UK, 9–11 June 2003*. Delft, Netherlands : SCS-European Publishing House, 2003. P. 251–256.
10. Bambos N., Michailidis G. Queueing networks of random link topology: stationary dynamics of maximal throughput schedules // *Queueing Systems*. 2005. Vol. 50. P. 5–52.
11. Tassioulas L. Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology // *IEEE Transactions on Information Theory*. 1997. Vol. 43, № 3. P. 1067–1073.
12. Митрофанов Ю. И. Синтез сетей массового обслуживания. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1995. 184 с.
13. Тананко И. Е. Метод оптимизации маршрутных матриц открытых сетей массового обслуживания // *Автоматика и вычислительная техника*. 2002. № 4. С. 39–46.

## A Method of Routing Control in Queueing Networks with Changing Topology

N. P. Fokina, I. E. Tananko

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, FokinaNP.sgu@gmail.com, TanankoIE@info.sgu.ru

Closed exponential queueing networks with changing topology are considered. A method of routing control in given type queueing networks is proposed.

*Key words:* queueing networks, changing topology, routing control, reliability.

## References

1. Dijk N. M. van. Analytic comparison results for communication networks. *Computer Communications*, 1998, vol. 21, pp. 1495–1508.
2. Chao X. A queueing network model with catastrophes and product form solution. *Operations Research Letters*, 1995, vol. 18, pp. 75–79.
3. Sauer C., Daduna H. BCMP networks with unreliable servers. Preprint no. 2003-01, *Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse*, Universität Hamburg. 2003.
4. Tananko I. E. A method of optimal routing control in queueing networks with variable configuration. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2006, vol. 40, no. 3, pp. 71–77.
5. Tananko I. E. About of queueing networks with changing number of queues. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 138–141 (in Russian).
6. Chakka R., Mitrani I. Approximate solutions for open networks with breakdowns and repairs. *Stochastic*



- Networks – Theory and applications*. Eds. F. P. Kelly, S. Zachary, I. Ziedins. Oxford, Clarendon Press, 1996, Ch. 16, pp. 267–280.
7. Vinod B., Altiok T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality. *J. Opl. Res. Soc.*, 1986. vol. 37, no. 3, pp. 309–316.
8. Dijk N. M. van. Bounds and error bounds for queueing networks. *Annals of Operations Research*, 1998, vol. 79, pp. 295–319.
9. Thomas N., Thornley D., Zatschler H. Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns. *Proc. of 17-th European Simulation Multiconference*, Nottingham, UK, 9–11 June 2003. Delft, Netherlands, SCS-European Publishing House, 2003, pp. 251–256.
10. Bambos N., Michailidis G. Queueing networks of random link topology : stationary dynamics of maximal throughput schedules. *Queueing Systems*, 2005, vol. 50, pp. 5–52.
11. Tassioulas L. Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1997, vol. 43, no. 3, pp. 1067–1073.
12. Mitrophanov Yu. I. *Sintez setej massovogo obsluzhivaniya* [Synthesis of queueing networks]. Saratov, Sarat. Univ. Press, 1995, 184 p. (in Russian).
13. Tananko I. E. A method for optimization of routing matrices for open queueing networks. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2002, vol. 36, no. 4, pp. 39–46.

УДК 519.85, 519.712

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

А. А. Хомченко<sup>1</sup>, Н. П. Гришина<sup>2</sup>, К. Лукас<sup>3</sup>, С. П. Сидоров<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Аспирант кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aahomchenko@gmail.com

<sup>2</sup>Кандидат экономических наук, зам. руководителя Института рисков, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, riskinstitute@sgu.ru

<sup>3</sup>Профессор, Брунельский университет, Лондон, Великобритания, cormac.lucas@brunel.ac.uk

<sup>4</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sidorovsp@info.sgu.ru

В настоящей работе рассматривается метаэвристический подход с использованием алгоритма дифференциальной эволюции для нахождения эффективной границы при решении задачи портфельной оптимизации для инвестора с невогнутой функцией полезности, отражающей несимметричное отношение инвестора к потерям и убыткам.

*Ключевые слова:* эвристический поиск, оптимальное портфельное инвестирование, теория перспектив.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального портфельного инвестирования может быть сформулирована как задача нахождения

$$x \in D := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}, \quad (1)$$

максимизирующего математическое ожидание значения функции полезности:

$$\int_{r \in \mathbb{R}} u(r(x)) dP(x) \rightarrow \max_{x \in D},$$

$r(x)$  есть доходность портфеля  $x$ ,  $P(x)$  есть распределение доходности портфеля  $x$ .

Обычно предполагается, что предпочтения инвесторов описываются квадратичной или степенной функцией полезности  $u$ , а доходности активов — нормальным распределением. Но так как, ни характеристики распределений доходностей активов, ни предпочтения лиц, принимающих решения, не соответствуют предположениям классической теории Марковица, то возникают разногласия по поводу того, что такое оптимальное решение. Теория поведенческих финансов приблизилась к определению более реалистичной модели предпочтения и выбора, а это неизбежно приводит к добавлению новых ограничений и рассмотрению задач невыпуклой оптимизации.



Примером такого подхода является теория перспектив D. Kahneman и А. Tversky [1]. В статье [1] содержится ряд примеров и демонстраций, показывающих, что в условиях лабораторных экспериментов инвесторы и игроки систематически нарушают предсказания теории ожидаемой полезности. Более того, они предложили новую теорию — теорию перспектив, которая смогла объяснить поведение людей при принятии решений в условиях риска в тех экспериментах, в которых традиционная теория ожидаемой полезности потерпела неудачу. Они обнаружили, что при принятии инвестиционных решений инвесторы асимметрично относятся к потерям и выигрышам, а именно переоценивают либо вероятность, либо величину потерь.

Учет поведенческих аспектов отношения инвестора к потерям приводит к рассмотрению задачи

$$\int_{r \in \mathbb{R}} u_{PT}(r(x)) dw(P(x)) \rightarrow \max_{x \in D}, \quad (2)$$

где  $w$  есть некоторая весовая функция, трансформирующая исходное распределение вероятностей, и

$$u_{PT}(r) = \begin{cases} (r - r_0)^\alpha, & r \geq r_0 \\ \lambda(r_0 - r)^\beta, & r < r_0 \end{cases} \quad (3)$$

$r_0$  — заданный уровень доходности,  $\alpha, \beta, \lambda$  — положительные константы, характеризующие отношение инвестора к потерям.

Отметим, что задача (2), (3) не является выпуклой, а функция  $u_{PT}$  не дифференцируема в точке  $r_0$ . Более того, если ввести ограничение на число активов в портфеле, задача будет иметь неполиномиальную сложность, а стандартные методы нелинейной оптимизации не могут гарантировать нахождения ее решения за приемлемое время.

## 1. АЛГОРИТМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

В данном разделе представлено описание алгоритма дифференциальной эволюции, предназначенного для решения задачи (2) с ограничением на доходность портфеля. Обозначим:  $n$  — количество активов в портфеле,  $x_i$  — доля  $i$ -го актива в портфеле,  $T$  — количество временных промежутков,  $r_{ti}$  — доходность актива  $i$  в момент  $t$ ,  $p_t$  — вероятность сценария  $t$ . Задача, которую мы рассматриваем, состоит в нахождении  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , максимизирующего

$$G(x) := \sum_{t=1}^T \pi_t u_{PT} \left( \sum_{i=1}^n r_{ti} x_i \right) \rightarrow \max \quad (4)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_{ti} x_i = d, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Числа  $\pi_t$  рассчитываются на основе значений  $p_t$  [2].

Недавнее дополнение к классу эволюционных эвристик является метод дифференциальной эволюции, предложенный R. Storn и K. Price [3, 4].

В нашей работе мы используем алгоритм дифференциальной эволюции для решения задачи (4), (5). Дифференциальная эволюция основана на эволюционном принципе и природном развитии поколений. В ходе дифференциальной эволюции создаются поколения из решений, которые постоянно модифицируются в соответствии с эволюционными принципами, при этом с ростом числа поколений решения сходятся в некоторую точку пространства решений, которая является глобальным оптимумом.

По историческим данным, на базе которых выполняется алгоритм, вычисляются наибольшее и наименьшее возможные значения ожидаемой доходности. Полученный отрезок разбивается на  $S$  равных промежутков  $[Er_k, Er_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, S$ .

На каждом из отрезков  $[Er_k, Er_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, S$ , поиск производится следующим образом: создается популяция  $P$  из векторов  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  — количество особей в исходной популяции.



Под векторами  $v_i \in D$  понимаются точки  $n$ -мерного пространства, в котором определена целевая функция  $G(x)$ , которую требуется максимизировать. На каждой итерации алгоритм генерирует новое поколение векторов (популяцию) случайным образом, комбинируя векторы из предыдущего поколения. Для каждого вектора  $v_i$  из предыдущего поколения выбирается три различных случайных вектора  $v_a, v_b, v_c$  среди векторов предыдущего поколения, не совпадающих с  $v_i$ , и генерируется вектор  $\tilde{v}_i$  следующим образом:

$$\tilde{v}_{i,j} = v_{a,j} + (F + z_1)(v_{b,j} - v_{c,j} + z_2),$$

где  $\tilde{v}_{i,j}, v_{a,j}, v_{b,j}, v_{c,j}$  —  $j$ -е компоненты векторов  $\tilde{v}_i, v_a, v_b, v_c$  соответственно,  $F$  — положительная действительная константа из интервала  $[0, 2]$ , управляющая усилением влияния разности  $(v_{b,j} - v_{c,j} + z_2)$  на результирующий вектор,  $z_1$  и  $z_2$  или равны нулю с малыми вероятностями (например, 0.0001 и 0.0002 соответственно), или являются нормально распределенными случайными величинами с математическим ожиданием, равным нулю, и малым стандартным отклонением (например, 0.02). Параметры  $z_1$  и  $z_2$  есть необязательные параметры алгоритма дифференциальной эволюции, они необходимы для внесения «шума» в вычисление результирующего вектора, что помогает избежать попадания в локальные экстремумы.

Для выполнения оценки  $\tilde{v}_i$  и  $v_i$  преобразуем их в  $\tilde{x}_i$  и  $x_i$  соответственно следующим образом: все отрицательные значения исходных векторов заменяем на ноль, а каждый положительный элемент делим на сумму элементов. Таким образом, условие (1) будет выполнено. Вектор  $\tilde{v}_i$  заменяет  $v_i$  и переходит в новое поколение, если выполняются следующие условия:

$$G(\tilde{x}_i) > G(x_i); \quad G(\tilde{x}_i) \in [Er_k, Er_{k+1}].$$

Описанные стадии метода дифференциальной эволюции повторяются по достижении заданного числа итераций  $K$ . Получившаяся в результате популяция содержит векторы, из которых необходимо выбрать «лучший», то есть с наибольшим значением целевой функции, вектор  $v_i$ , и соответствующий ему искомым вектор долей активов в портфеле, для которого будет достигаться максимум целевой функции.

Псевдокод алгоритма максимизации функции полезности с помощью алгоритма дифференциальной эволюции приведен ниже.

Инициализация популяции  $P$  из векторов  $v_i, i = 1, \dots, N$ ;

цикл из  $K$  итераций

для каждого  $v_i, i = 1, \dots, N$ , из матрицы  $P$

выбираем 3 случайных вектора  $v_a, v_b, v_c \neq v_i$

для каждого компонента  $j$  вектора  $v_i$

с вероятностью  $\pi_1 : z_1[j] \leftarrow N(0, \sigma_1)$ , иначе  $z_1[j] = 0$

с вероятностью  $\pi_2 : z_2[j] \leftarrow N(0, \sigma_2)$ , иначе  $z_2[j] = 0$

$u[j] \leftarrow U(0, 1)$

если  $u[j] < \pi$

то  $\tilde{v}_i[j] \leftarrow v_i[j]$

иначе  $\tilde{v}_i[j] = v_a[j] + (F + z_1[j])(v_b[j] - v_c[j] + z_2[j])$

для каждой строки  $\tilde{v}_p, p = 1, \dots, N$ , новой матрицы  $\tilde{P}$

производим нормализацию  $\tilde{v}_p \rightarrow \tilde{x}_p, v_p \rightarrow x_p$

если  $G(\tilde{x}_p) > G(x_p)$  и  $\tilde{v}_p$  удовлетворяет критериям отбора

то производим замену  $v_p$  на  $\tilde{v}_p$  в матрице  $P$

в полученной в результате отбора матрице  $P$  ищется строка, для которой удовлетворяются критерии отбора и  $E_{\max} = \max G(x_p)$

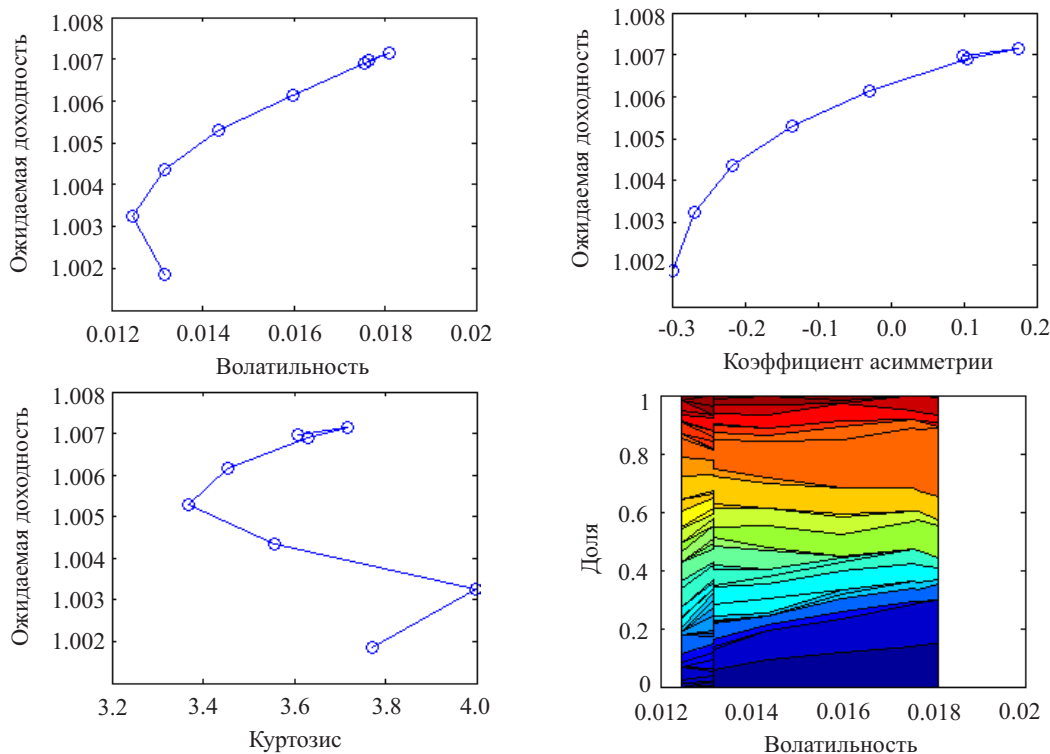
## 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В вычислительном эксперименте использовались реальные данные об акциях 86 компаний за 291 промежуток времени, для расчета эффективных портфелей применялся пакет прикладных программ Matlab. Численность популяции была установлена равной  $N = 80$ , а число итераций алгоритма —  $K = 1500$ , число разбиений отрезка  $S = 30$ . Для улучшения производительности алгоритма, если на некотором отрезке  $[Er_k, Er_{k+1}]$  за 750 итераций не происходит изменения поколения, то итерации прекращаются, и происходит финальная оценка. Рисунок визуализирует различные характеристики





эффективных (с точки зрения теории перспектив) портфелей, с коэффициентом неприятия потерь  $\lambda = 3$  и ожидаемым уровнем доходности инвестора  $w_0 = 1.004$ .



Эффективные портфели с точки зрения теории перспектив ( $\lambda = 3, w_0 = 1.004$ )

В заключение отметим, что эвристические методы становятся все более популярными по сравнению с альтернативными традиционными методами оптимизации. Наличие недетерминированных элементов дает возможность легче преодолевать локальные минимумы. Кроме того перезапуск алгоритма не обязательно приводит к одному и тому же результату, если поиск сходится к локальному оптимуму в первый раз, то при другом запуске может определиться другой оптимум — в идеале глобальный. Все эти качества дают возможность использовать эвристические методы для широкого класса задач.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00175).*

### Библиографический список

1. Kahneman D., Tversky A. Prospect theory : an analysis of decision under risk// *Econometrica*. 1979. Vol. 47. P. 263–291.
2. Tversky A., Kahneman D. Advances in prospect theory : cumulative representation of uncertainty // *J. of Risk and Uncertainty*. 1992. Vol. 5(4). P. 297–323.
3. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient adaptive scheme or global optimization over continuous spaces // *J. of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
4. Price K., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential evolution : a practical approach to global optimization*. Berlin : Springer, 2005.

## Differential Evolution Algorithm for Solving the Portfolio Optimization Problem

A. A. Homchenko<sup>1</sup>, N. P. Grishina<sup>1</sup>, C. Lucas<sup>2</sup>, S. P. Sidorov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, aahomchenko@gmail.com, riskinstitute@sgu.ru, sidorovsp@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Brunel University, Kingston Lane, Uxbridge, London, United Kingdom, UB8 3PH, cormac.lucas@brunel.ac.uk

In the paper we develop metaheuristic method based on differential evolution for finding efficient frontier in solving the portfolio optimisation problem for investor with non concave utility function which reflects asymmetric investor attitude to losses and gains.

*Key words:* heuristic search, portfolio optimization problem, prospect theory.



## References

1. Kahneman D., Tversky A. Prospect theory : an analysis of decision under risk. *Econometrica*, 1979, vol. 47, pp. 263–291.
2. Tversky A., Kahneman D. Advances in prospect theory : cumulative representation of uncertainty. *J. of Risk and Uncertainty*, 1992, vol. 5(4), pp. 297–323.
3. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient adaptive scheme or global optimization over continuous spaces. *J. of Global Optimization*, 1997, vol. 11. pp. 341–359.
4. Price K., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential evolution : a practical approach to global optimization*. Berlin, Springer, 2005.

УДК 519.85, 519.712

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА КАРДИНАЛЬНОСТЬ МЕТОДАМИ ЭВРИСТИЧЕСКОГО ПОИСКА

А. А. Хомченко<sup>1</sup>, К. Лукас<sup>2</sup>, С. В. Миронов<sup>3</sup>, С. П. Сидоров<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Аспирант кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aahomchenko@gmail.com

<sup>2</sup>Профессор, Брунельский университет, Лондон, Великобритания, cormac.lucas@brunel.ac.uk

<sup>3</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, mironovsv@info.sgu.ru

<sup>4</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sidorovsp@info.sgu.ru

В настоящей работе рассматривается задача портфельной оптимизации с ограничением на кардинальность. Введение ограничения на максимальное количество активов в портфеле сводит задачу оптимального портфельного инвестирования к смешанной целочисленной задаче квадратичного программирования. Эффективную границу предлагается найти с помощью метаэвристического подхода с использованием генетического алгоритма.

*Ключевые слова:* смешанная целочисленная оптимизация, генетический алгоритм, оптимальное портфельное инвестирование.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $N$  — общее число доступных активов;  $K$  — необходимое количество активов в выбранном портфеле;  $\mu_i$  — ожидаемая доходность актива  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $\sigma_{ij}$  — ковариация между доходностью от актива  $i$  и актива  $j$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ ;  $\rho$  — необходимый уровень ожидаемой доходности;  $l_i$  ( $l_i \geq 0$ ) — нижнее ограничение на размер доли, инвестируемой в актив  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , если инвестиции вложены в актив  $i$ , и  $u_i$  ( $u_i \geq 0$ ) — верхнее ограничение на размер доли, инвестируемой в актив  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Переменными модели являются  $x_i$  — доля ( $0 \leq x_i \leq 1$ ) от общего объема инвестиций, вложенных в актив  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), и переменная  $\delta_i$ , равная 1, если актив  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) включен в портфель, и равная 0, в противном случае.

Мы рассматриваем следующую модель Марковица с дискретными ограничениями на размер доли, инвестируемой в актив, и ограничениями на кардинальность: найти минимум квадратичной формы:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^N \mu_i x_i = \rho, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad (3)$$



$$l_i \delta_i \leq x_i \leq u_i \delta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N \delta_i = K, \quad (5)$$

$$\delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Оптимизационная задача (1)–(6) рассматривалась в статье [1]. Нужно отметить, что модель Марковица (без ограничений) состоит из соотношений (1)–(4), где  $\delta_i = 1, i = 1, \dots, N$ .

Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации [2] на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования (СЦЗКП), которая является NP-полной [3]. Поскольку для СЦЗКП трудно найти оптимальное решение, многие исследователи и трейдеры используют эвристики, то есть неточные методы решения задач в этой области.

В настоящей работе, развивая идеи статей [1] и [4], для нахождения эффективной границы для портфелей с ограничением на кардинальность мы предлагаем алгоритм, основанный на использовании метаэвристических подходов, а именно генетического алгоритма [5].

## 1. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Генетические алгоритмы (ГА) являются поисковым механизмом, основанным на эволюционных принципах естественного отбора и генетики. Теоретические основы ГА были первоначально разработаны Холландом [5]. Они работают с популяциями решений и используют принцип выживания. В ГА переменные решения закодированы в конечные строки, называемые хромосомами. Чтобы реализовать естественный отбор и вывести хорошие решения, хромосомы оцениваются по критерию пригодности (фитнес-критерию). В рассматриваемых задачах оптимизации мера пригодности обычно непосредственно связана с целевой функцией. ГА используют популяцию особей (обычно фиксированного размера), которая с изменениями переходит от одной итерации ГА к другой. ГА использует четыре основных оператора: отбора, скрещивания, мутации и замены. Популяция изменяется посредством итерационно повторяемого применения этих операторов, при этом более сильные и пригодные решения (элементы популяции) заменяют более слабых. Более всесторонний обзор ГА можно найти в статьях [6–9].

Обозначим  $\Delta_N = \{(\delta_1, \dots, \delta_N) : \delta_i \in \{0, 1\}\}$  и  $\Delta_N(K) = \{\delta \in \Delta_N, \sum_{i=1}^N \delta_i = K\}$ . Для  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \Delta_N$  обозначим  $S(\delta) = \{i \in \{1, \dots, N\} : \delta_i = 1\}$  и пусть  $P(\delta, \rho)$  есть следующая задача квадратичного программирования:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \sum_{j \in S(\delta)} \sigma_{ij} x_i x_j \rightarrow \min \quad (7)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \mu_i x_i = \rho, \quad (8)$$

$$\sum_{i \in S(\delta)} x_i = 1, \quad (9)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i \in S(\delta). \quad (10)$$

В настоящей работе предлагается следующая модификация алгоритма, рассмотренного в статье [4]. Обозначим  $P_{\min}(\delta, \rho)$  решение задачи (7)–(10), т.е. минимальное значение целевой функции (7) в оптимальной точке допустимого множества, определяемого соотношениями (8)–(10). Если для некоторых  $\delta, \rho$  допустимое множество задачи  $P(\delta, \rho)$  пусто, будем полагать  $P_{\min}(\delta, \rho) = M$  для некоторого достаточно большого положительного числа  $M$ . Обозначим  $\Delta_N(K, \rho)$  множество всех тех  $\delta \in \Delta_N(K)$ , для которых множество всех  $x \in \mathbb{R}^K$ , удовлетворяющих (8)–(10), непусто.

Возьмем  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ , где  $\rho_{\min}$  есть минимальное значение доходностей активов,  $\rho_{\max}$  есть максимальное значение доходностей активов. Работа ГА состоит в выполнении следующих шагов.



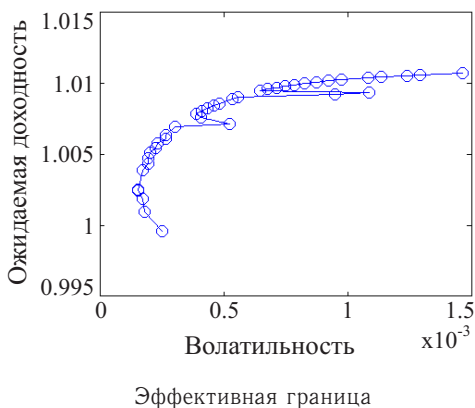
1. **Кодирование.** В нашем ГА используется фиксированный размер популяции  $P = s^2$  портфелей,  $s$  есть некоторое натуральное число. Элементами популяции (особями) будут  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \Delta_N(K)$ .
2. **Генерация начальной популяции**  $\Delta_{N,P}^0(K)$  происходит путем случайного выбора  $P$  элементов из элементов множества  $\Delta_N(K, \rho)$ . Отметим, что для непустоты решения задачи  $P(\delta, \rho)$  необходимо включения как части активов, имеющих доходность, более высокую, чем  $\rho$ , так и части активов с доходностью меньшей, чем  $\rho$ . Для отсеечения заведомо недопустимых элементов популяции мы использовали соответствующую маску.
3. **Отбор.** Для каждого элемента  $\delta \in \Delta_{N,P}^{(j)}(K)$  текущей  $j$ -й популяции решается оптимизационная задача  $P(\delta, \rho)$  и находится соответствующее значение  $P_{\min}(\delta, \rho)$ . Портфели сортируются в порядке увеличения риска (дисперсии) и берутся первые  $2s$  элементов этого упорядоченного списка, чтобы на их основе составить новую популяцию для следующего поколения, т. е. выбираем  $2s \ll P$  элементов текущей  $j$ -й популяции  $\Delta_{N,P}^{(j)}(K)$  с наименьшим значением  $P_{\min}(\delta, \rho)$ . Обозначим через  $A_j$  множество особей, полученных в результате отбора на шаге  $j$ . Отберем случайным образом  $s$  элементов множества  $A_j$  и обозначим получившееся множество  $A_{1,j}$ . Множество остальных элементов обозначим  $A_{2,j}$ .
4. **Скрещивание.** Каждой паре элементов  $(\varepsilon, \delta)$ ,  $\varepsilon \in A_{1,j}$ ,  $\delta \in A_{2,j}$ , ставится в соответствие элемент (потомок)  $\gamma$  по следующим правилам:
  - если  $\varepsilon_i = 1$  и  $\delta_i = 1$  (т.е. актив присутствует в обоих родительских портфелях), то  $\gamma_i = 1$  (он присутствует и в потомке);
  - если  $\varepsilon_i = 0$  и  $\delta_i = 0$  (актив отсутствует в обоих родительских портфелях), то  $\gamma_i = 0$  (он отсутствует и в потомке);
  - если  $\varepsilon_i + \delta_i = 1$  (актив присутствует только в одном из родительских портфелей), то его присутствие (или отсутствие) в потомке будет решено на основе случайного выбора так, чтобы  $\sum_i \gamma_i = K$ .

В результате скрещивания получаем  $P = s^2$  потомков.

5. **Мутация** является стандартной для ГА и представляет собой степень случайного изменения элементов с низкой вероятностью. В рассматриваемом ГА потомок подвергается мутации с вероятностью  $\alpha$  посредством случайного выбора одного актива в портфеле-потомке и замены его случайным активом, не представленным в портфеле-потомке, а также в родительских портфелях.

Нужно отметить, что нельзя гарантировать, что в результате мутации получится потомок, имеющий допустимое решение задачи (8)–(10), т. е. возможно, что не существует допустимого потомка для некоторых родителей после скрещивания и мутации.

## 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ



В вычислительном эксперименте использовались реальные данные об акциях 86 компаний за определенный промежуток времени (291 день), для расчета эффективных портфелей применялся пакет прикладных программ Matlab. В конце работы генетического алгоритма  $P$  портфелей последней популяции участвуют в построении эффективной границе с ограничением на кардинальность. Рисунок визуализирует эффективную границу для задачи (1)–(6). Использовались следующие параметры генетического алгоритма: общее число доступных активов  $N = 86$ , необходимое количество активов в выбранном портфеле (кардинальность)  $K = 10$ , размер популяции  $P = 100$ ,  $s = 10$ , вероятность мутации  $\alpha = 0,1$ .

В заключение отметим, что генетические алгоритмы оказываются эффективным средством решения задачи (1)–(6) в случае, когда  $N$  достаточно велико и  $K \ll N$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00175).*



## Библиографический список

1. Chang T.-J., Yang S.-C., Chang K.-J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm // *Expert Systems with Applications*. 2009. Vol. 36. P. 10529–10537.
2. Markowitz H. Portfolio selection // *J. of Finance*. 1952. Vol. 7. P. 77–91.
3. Moral-Escudero R., Ruiz-Torrubiano R., Suarez A. Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints // *Proc. of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. 2006. P. 2382–2388.
4. Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // *European J. of Operational Research*. 2011. Vol. 213 (3). P. 538–550.
5. Holland J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis With Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. Ann Arbor, MI, USA : University of Michigan Press, 1975.
6. *Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques* / eds. E. K. Burke, G. Kendall. Berlin : Springer, 2005.
7. *Local Search in Combinatorial Optimization* / eds. E. H. L. Aarts, J. K. Lenstra. Princeton, USA : Princeton Univ. Press, 2003.
8. Beasley J. E. Population heuristics // *Handbook of Applied Optimization* / eds. P. M. Pardalos, M. G. C. Resende. Oxford : Oxford Univ. Press, 2002. P. 138–157.
9. Mitchell M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, MA, USA : MIT Press, 1996.

## Heuristic Algorithm for the Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem

A. A. Homchenko<sup>1</sup>, C. Lucas<sup>2</sup>, S. V. Mironov<sup>1</sup>, S. P. Sidorov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, aahomchenko@gmail.com, mironovsv@info.sgu.ru, sidorovsp@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Brunel University, Kingston Lane, Uxbridge, London, United Kingdom, UB8 3PH, cormac.lucas@brunel.ac.uk

In the paper we consider the cardinality constrained portfolio optimization problem. Constraint on the number of assets in portfolio leads to the mixed integer optimization problem. Effective frontier is constructed using the metaheuristic approach by genetic algorithm.

*Key words:* mixed-integer optimization, genetic algorithms, portfolio optimization problem.

## References

1. Chang T.-J., Yang S.-C., Chang K.-J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2009, vol. 36, pp. 10529–10537.
2. Markowitz H. Portfolio selection *J. of Finance*, 1952, vol. 7, pp. 77–91.
3. Moral-Escudero R., Ruiz-Torrubiano R., Suarez A. Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints. *Proc. of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2006, pp. 2382–2388.
4. Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier. *European Journal of Operational Research*, 2011, vol. 213 (3), pp. 538–550.
5. Holland J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis With Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. Ann Arbor, MI, USA, University of Michigan Press, 1975.
6. *Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques*. Eds. E. K. Burke, G. Kendall. Berlin, Springer, 2005.
7. *Local Search in Combinatorial Optimization*. Eds. E. H. L. Aarts, J. K. Lenstra. Princeton, USA, Princeton Univ. Press, 2003.
8. Beasley J. E. Population heuristics. *Handbook of Applied Optimization*. Eds. P. M. Pardalos, M. G. C. Resende. Oxford, Oxford University Press, 2002, pp. 138–157.
9. Mitchell M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, MA, USA, MIT Press, 1996.