



СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Гордиенко В. Г., Самсонова К. А.** Определение границы в локальной гипотезе Хажинского–Тамми для пятого коэффициента 5
- Королева О. А.** Аналог теоремы Жордана–Дирихле для интегрального оператора с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях 14
- Кузнецов В. Н., Кривобок В. В., Степаненко Д. С.** К задаче о целостности L -функции Артина 23
- Тюленева А. А.** Приближение периодических функций ограниченной p -вариации обобщенными средними Абеля–Пуассона и логарифмическими средними 27

Механика

- Безгласный С. П., Батина Е. С., Воробьев А. С.** Синтез асимптотически устойчивых движений руки робота-манипулятора 36
- Босяков С. М., Доста А. Н., Винокурова А. В.** Конечно-элементный анализ влияния конструкции ортодонтического аппарата на расширение верхней челюсти 42
- Гачкевич А. Р., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.** Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя 52
- Глухова О. Е., Колесникова А. С., Слепченков М. М., Савостьянов Г. В.** Методика определения областей, требующих квантового описания в рамках гибридного метода (квантовая механика / молекулярная механика) 59
- Дударь О. И., Дударь Е. С., Осипенко М. А.** Определение изменения температуры стенки полости в твердом теле при изменении температуры движущего в полости газа 66
- Кириченко В. Ф., Мисник М. П., Самаркин П. А.** Конфигурационное пространство во второй краевой задаче из неклассической теории пластин 75
- Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н.** Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. I 82
- Никитин А. И.** Конечно-элементный анализ эффекта вставания костных тканей в процессе остеоинтеграции бесцементного эндопротеза 90
- Радаев Ю. Н., Ковалев В. А.** Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного термоупругого континуума второго типа 96
- Халова В. А., Шевцова Ю. В.** Динамический простой краевой эффект в цилиндрической оболочке с краем произвольной формы 103

Информатика

- Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В.** Параллельный алгоритм вычисления оптимальных параметров одноканальной системы угловой стабилизации 109

Приложения

Хроника

- Алексеевский Д. В., Галаев А. С., Галаев С. В., Гохман А. В.** Памяти Марка Вольфовича Лосика 118

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки» Журнал выходит 4 раза в год.

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталия Владимировна

Корректор
Крылова Инна Геннадиевна

Адрес редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета
Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

Подписано в печать 25.11.13.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,41 (15,5).
Тираж 500 экз. Заказ 59.

Отпечатано в типографии
Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный университет, 2013

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

- на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

- на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

- аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

- в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Более подробную информацию о правилах оформления статей можно найти по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS**Scientific Part****Mathematics**

Gordienko V. G., Samsonova K. A. Determination of the Boundary in the Local Hypothesis Charzynski–Tammi for the Fifth Coefficient 5

Koroleva O. A. An Analogue of the Jordan–Dirichlet Theorem for the Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines 14

Kuznetsov V. N., Krivobok V. V., Stepanenko D. S. To the Problem of the Integrity of the Artin’s *L*-functions 23

Tyuleneva A. A. Approximation of Bounded *p*-variation Periodic Functions by Generalized Abel–Poisson and Logarithmic Means 27

Mechanics

Bezglasnyi S. P., Batina E. S., Vorobyov A. S. Synthesis of Asymptotically Stable Motion of a Robot Arm Manipulator 36

Bosiakov S. M., Dosta A. N., Vinokurova A. V. Finite Element Analysis of the Influence of the Orthodontic Appliance Design on the Maxillary Expansion 42

Gachkevich A. R., Zemskov V. A., Tarlakovsky D. V. The One-dimensional Problem of Unsteady-related Elastic Diffusion Layer 52

Glukhova O. E., Kolesnikova A. S., Slepchenkov M. M., Savostianov G. V. Technique of Definition Areas Requiring a Quantum Description Within of the Hybrid Method (Quantum Mechanics / Molecular Mechanics) 59

Dudar O. I., Dudar E. S., Osipenko M. A. Determination of the Wall Temperature Change for a Cavity in a Solid as a Result of the Temperature Change of the Gas Flow in a Cavity 66

Kirichenko V. F., Misnik M. P., Samarkin P. A. Configuration Space in Second Boundary Value Problem of Non-classical Plate Theory 75

Lomovtseva E. I., Chelnokov Yu. N. Dual Matrix and Biquaternion Methods of Solving Direct and Inverse Kinematics Problems of Manipulators, for Example Stanford Robot Arm. I 82

Nikitsin A. V. Biomechanical Assessment of the Bone Ingrowth Effect During Cementless Endoprosthesis Osteointegration 90

Radayev Y. N., Kovalev V. A. Rotational Invariance of Non-Linear Lagrangians of Type-II Micropolar Thermoelastic Continuum 96

Khalova V. A., Shevtsova Y. V. Dynamical Simple Edge Effect in the Cylindrical Shell with the Edge of Arbitrary Form 103

Computer Sciences

Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. Parallel Algorithm of Optimal Parameters Calculation for the Single Channel Angular Stabilization System 109

Appendices**Chronicle**

Alekseevsky D. V., Galaev A. S., Galaev S. V., Gokhman A. V. In Memory of Mork Vol’fovich Losik 118



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

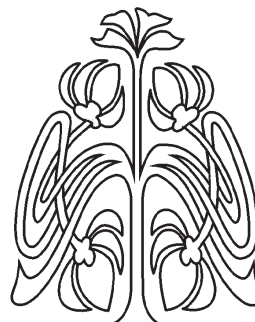
Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Клюков Василий Тихонович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Аврус Анатолий Ихильевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)
Аксеновская Людмила Николаевна, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)
Аникин Валерий Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)
Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)
Вениг Сергей Борисович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Волкова Елена Николаевна, кандидат геол.-минерал. наук, доцент (Саратов, Россия)
Голуб Юрий Григорьевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)
Захаров Андрей Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)
Ивченков Сергей Григорьевич, доктор социол. наук, профессор (Саратов, Россия)
Комкова Галина Николаевна, доктор юрид. наук, профессор (Саратов, Россия)
Лебедева Ирина Владимировна, директор Зональной научной библиотеки (Саратов, Россия)
Левин Юрий Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)
Монахов Сергей Юрьевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)
Орлов Михаил Олегович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)
Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)
Проخورов Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Федотова Ольга Васильевна, доктор хим. наук, профессор (Саратов, Россия)
Федорова Антонина Гавриловна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)
Черевичко Татьяна Викторовна, доктор экон. наук, профессор (Саратов, Россия)
Шатилова Алла Валерьевна, кандидат пед. наук, доцент (Саратов, Россия)
Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)



EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA SARATOVSKOGO UNIVERSITETA. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Usanov D. A. (Saratov, Russia)

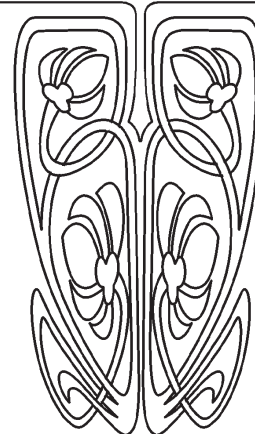
Executive Secretary – Klokov V. T. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Avrus A. I. (Saratov, Russia)
Aksenovskaya L. N. (Saratov, Russia)
Anikin V. M. (Saratov, Russia)
Balash O. S. (Saratov, Russia)
Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)
Venig S. B. (Saratov, Russia)
Volkova E. N. (Saratov, Russia)
Golub Yu. G. (Saratov, Russia)
Zakharov A. M. (Saratov, Russia)
Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)
Komkova G. N. (Saratov, Russia)
Lebedeva I. V. (Saratov, Russia)

Levin Yu. I. (Saratov, Russia)
Makarov V. Z. (Saratov, Russia)
Monakhov S. Yu. (Saratov, Russia)
Orlov M. O. (Saratov, Russia)
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)
Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)
Fedotova O. V. (Saratov, Russia)
Fedorova A. G. (Saratov, Russia)
Cherevichko T. V. (Saratov, Russia)
Shatilova A. V. (Saratov, Russia)
Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)

РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ





**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватулян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph. D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор технических наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

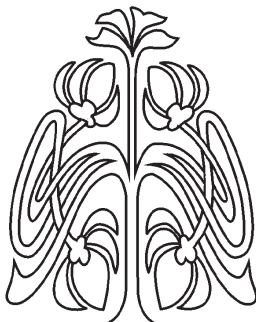
(Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

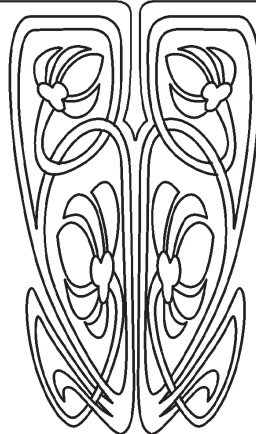
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA SARATOVSKOGO UNIVERSITETA. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)
Indeitsev D. A. (St. Petersburg, Russia)
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)
Manzhirov A. V. (Moscow, Russia)
Matveenko V. P. (Perm, Russia)
Morozov N. F. (St. Petersburg, Russia)
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)
Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)
Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)
Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)
Speranskii D. V. (Moscow, Russia)
Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)
Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)
Khromov A. P. (Saratov, Russia)
Shalyto A. A. (St. Petersburg, Russia)
Yurko V. A. (Saratov, Russia)



МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ В ЛОКАЛЬНОЙ ГИПОТЕЗЕ ХАЖИНСКОГО–ТАММИ ДЛЯ ПЯТОГО КОЭФФИЦИЕНТА

В. Г. Гордиенко¹, К. А. Самсонова²

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, valeriygor@mail.ru

²Аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kris-ruzhik@mail.ru

В статье найдено точное значение M_5 такое, что симметризованная функция Пика $P_{M_4}(z)$ является экстремальной в локальной гипотезе Хажинского–Тамми для пятого коэффициента тейлоровского разложения голоморфной нормированной ограниченной однолистной функции.

Ключевые слова: уравнение Лёвнера, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через S класс всех голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, а через S^M , $M > 1$, — подкласс, состоящий из всех ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M$, $z \in E$.

Гипотеза Бибераха о справедливости неравенства $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, для $f \in S$ со знаком равенства только для вращений функции Кёбе, имеющая вид

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad (1)$$

доказана де Бранжем (L. Branges) [1, 2]. Функция Кёбе (1) отображает единичный круг E на комплексную плоскость с разрезом по лучу на отрицательном направлении вещественной оси с вершиной в точке $w = -1/4$.

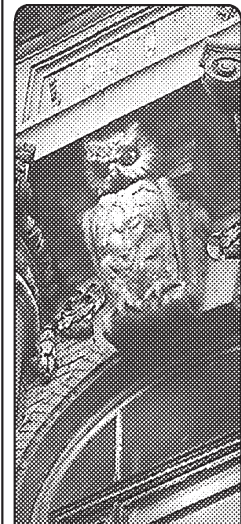
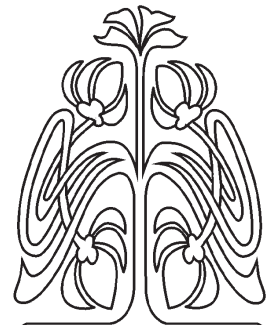
Ещё до доказательства де Бранжа предпринимались удачные попытки оценки начальных коэффициентов в классе S . Что касается оценок в классах S^M , то они были менее успешными. Так, Пик (G. Pick) [3] доказал, что

$$\max_{f \in S^M} |a_2| = 2 - \frac{2}{M}, \quad M > 1. \quad (2)$$

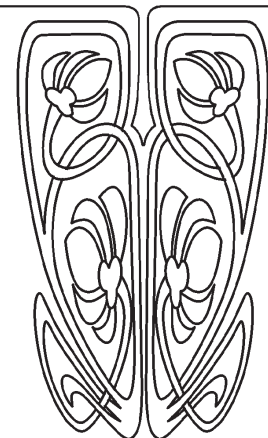
Максимум в (2) достигается только для вращений функции Пика

$$P_M(z) = MK^{-1} \left(\frac{K(z)}{M} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n. \quad (3)$$

Функция Пика (3) отображает E на круг радиуса M с центром в начале координат и с разрезом вдоль отрезка на отрицательном направлении вещественной оси.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Точная оценка третьего коэффициента в классах S^M также известна для всех $M > 1$. В частности, [4]

$$\max_{f \in S^M} |a_3| = 1 - \frac{1}{M^2}, \quad M \leq e,$$

со знаком равенства только для вращений функции Пика $P_{M^2} = [P_{M^2}(z^2)]^{1/2}$.

К настоящему времени точные оценки четвёртого коэффициента в классах S^M найдены не для всех $M > 1$, однако для M , близких к 1, функции $P_{M^3}(z) = [P_{M^3}(z^3)]^{1/3}$ остаются экстремальными в этой задаче. Именно, Шиффер (М. Schiffer) и Тамми (О. Tammi) [5] доказали, что

$$\max_{f \in S^M} |a_4| = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{M^3} \right), \quad M \leq \frac{34}{19},$$

со знаком равенства для вращений функции P_{M^3} . Такие результаты вдохновили Хажинского и Тамми сформулировать гипотезу о том, что для каждого $n \geq 2$ существует $M_n > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M_n)$ и всех функций $f \in S^M$ справедливы неравенства

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{1}{M^{n-1}} \right) \tag{4}$$

со знаком равенства для вращений функции $P_{M^n}(z) = [P_{M^n}(z^n)]^{1/n}$. Гипотеза Хажинского–Тамми была доказана Северским (L. Siewierski) [6, 7] и Шиффером и Тамми [8]. Из результата Шиффера и Тамми [5] следует, что $M_4 = 34/19$.

Доказательство гипотезы Хажинского–Тамми тем более решает локальную проблему, которую можно сформулировать как существование чисел $M_n^* > M_n$, $n \geq 2$, таких, что для всех $M \in (1, M_n^*)$ и всех функций $f \in S^M$ неравенства (4) справедливы в некоторой окрестности функции P_{M^n} . В работе [9] предложен алгоритм нахождения значений M_n^* .

В настоящей работе находится значение M_5^* . Задача сводится к определению локального максимума функции многих переменных в заданной точке, удастся выписать целевую функцию и все её частные производные до второго порядка. Значение M_5^* даётся как корень некоторого уравнения. Целевая функция и её частные производные служат решениями задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, их значения аналитически не выписываются, но могут быть вычислены приближённо. Основной результат содержится в теореме, в которой найдено число M_5^* . Попутно устанавливается, что вдоль одного из направлений точка граничной гиперповерхности $\partial V_5(M)$ множества значений $V_5(M) = \{(a_2, a_3, a_4, \operatorname{Re} a_5) : f \in S^M\}$, доставляемая функцией $P_{M^4}(z)$, имеет угловой характер.

Теорема. Число $M_5^* > 1$ определяется условием, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ матрицы (30) удовлетворяют условиям (31), где элементы матриц (30) являются значением в точке $t = 1 - 1/M$ решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (20)–(22) и (26)–(29), правые части которых определяются посредством формул (23)–(25).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Функция

$$P_{M^4}(z) = z + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{M^4} \right) z^5 + \dots, \quad z \in E,$$

доставляет граничную точку $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ множеству

$$V_5(M) = \{(a_2, a_3, a_4, \operatorname{Re} a_5) : f \in S^M\}, \quad M > 1.$$

Поскольку функция P_{M^4} отображает единичный круг E на круг радиуса M с четырьмя прямолинейными разрезами, то точка A_M является внутренней точкой части $\partial V_5^4(M)$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$ множества $V_5(M)$ [10]. Все точки части $\partial V_5^4(M)$ доставляются функциями $f \in S^M$, отображающими E на круг радиуса M с четырьмя кусочно аналитическими разрезами. Известно [10], что все такие функции f можно представить в виде

$$f(z) = Mw(z, \log M), \tag{5}$$



где

$$w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots) \quad (6)$$

является интегралом обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера:

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t < \log M, \quad (7)$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$, $k = 1, \dots, 4$, и постоянными числами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, 4$, $\sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$.

Кроме того, управляющие функции u_k удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима в экстремальной задаче о достижимости граничной поверхности $\partial V_5^4(M)$. Опишем эти условия подробнее. Пусть $a_k(t)$, $k \geq 2$, определяются разложением (6). Совершим замену переменной $t \rightarrow 1 - e^{-t}$ и обозначим $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t)$, $k = 2, \dots, 5$. Подставляя (6) в (7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , после произведённой замены переменной получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k \cos u_k, & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k \sin u_k, & x_2(0) &= 0, \\ \dot{x}_3(t) &= -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2(x_1 \cos u_k + x_2 \sin u_k) + (1-t) \cos 2u_k], & x_3(0) &= 0, \\ \dot{x}_4(t) &= 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1-t) \sin 2u_k], & x_4(0) &= 0, \\ \dot{x}_5(t) &= -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [(2x_3 + x_1^2 - x_2^2) \cos u_k + 2(x_4 + x_1 x_2) \sin u_k + \\ &\quad + 3(1-t)(x_1 \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \cos 3u_k], & x_5(0) &= 0, \\ \dot{x}_6(t) &= 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [(2x_3 + x_1^2 - x_2^2) \sin u_k - 2(x_4 + x_1 x_2) \cos u_k - \\ &\quad - 3(1-t)(x_2 \cos 2u_k - x_1 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \sin 3u_k], & x_6(0) &= 0, \\ \dot{x}_7(t) &= -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2((x_5 + x_1 x_3 - x_2 x_4) \cos u_k + (x_6 + x_1 x_4 + x_2 x_3) \sin u_k) + \\ &\quad + 3(1-t)((x_3 + x_1^2 - x_2^2) \cos 2u_k + (x_4 + 2x_1 x_2) \sin 2u_k) + \\ &\quad + 4(1-t)^2(x_1 \cos 3u_k + x_2 \sin 3u_k) + (1-t)^3 \cos 4u_k], & x_7(0) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Экстремальная задача Хажинского–Тамми о максимуме $\operatorname{Re} a_5$ в классе S^M для M , близких к 1, формализуется теперь как

$$x_7(1 - 1/M) \rightarrow \max \quad (9)$$

для решений системы (8). Запишем функцию Гамильтона этой экстремальной задачи:

$$\begin{aligned} H(t, x, \Psi, u, \lambda) &= -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [\cos u_k \Psi_1 - \sin u_k \Psi_2 + (2(x_1 \cos u_k + x_2 \sin u_k) + (1-t) \cos 2u_k) \Psi_3 - \\ &\quad - (2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1-t) \cdot \sin 2u_k) \Psi_4 + ((2x_3 + x_1^2 - x_2^2) \cos u_k + 2(x_4 + x_1 x_2) \sin u_k + \\ &\quad + 3(1-t)(x_1 \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \cos 3u_k) \Psi_5 - ((2x_3 + x_1^2 - x_2^2) \sin u_k - \\ &\quad - 2(x_4 + x_1 x_2) \cos u_k - 3(1-t)(x_2 \cos 2u_k - x_1 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \sin 3u_k) \Psi_6 + \\ &\quad + (2((x_5 + x_1 x_3 - x_2 x_4) \cos u_k + (x_6 + x_1 x_4 + x_2 x_3) \sin u_k) + 3(1-t)((x_3 + x_1^2 - x_2^2) \cos 2u_k + \\ &\quad + (x_4 + 2x_1 x_2) \sin 2u_k) + 4(1-t)^2(x_1 \cos 3u_k + x_2 \sin 3u_k) + (1-t)^3 \cos 4u_k) \Psi_7], \end{aligned} \quad (10)$$



где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, 4$, $\sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$, $x = (x_1, \dots, x_7)^T$ удовлетворяет системе (8), а $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_7)^T$, $\Psi_7 = 1$, удовлетворяет сопряжённой системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1(t) &= 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2 \cos u_k \Psi_3 - 2 \sin u_k \Psi_4 + (2x_1 \cos u_k + 2x_2 \sin u_k + 3(1-t) \cos 2u_k) \Psi_5 + \\ &\quad + (2x_1 \sin u_k + 2x_2 \cos u_k - 3(1-t) \sin 2u_k) \Psi_6 + 2x_3 \cos u_k + 2x_4 \sin u_k + \\ &\quad + 6(1-t)(x_1 \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + 4(1-t)^2 \cos 3u_k], \\ \dot{\Psi}_2(t) &= 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2 \sin u_k \Psi_3 + 2 \cos u_k \Psi_4 + (2x_1 \sin u_k - 2x_2 \cos u_k + 3(1-t) \sin 2u_k) \Psi_5 - \\ &\quad - (2x_2 \sin u_k - 2x_1 \cos u_k - 3(1-t) \cos 2u_k) \Psi_6 - 2x_4 \cos u_k + 2x_3 \sin u_k - \\ &\quad - 6(1-t)(x_2 \cos 2u_k - x_1 \sin 2u_k) + 4(1-t)^2 \sin 3u_k], \\ \dot{\Psi}_3(t) &= 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2 \cos u_k \Psi_5 - 2 \sin u_k \Psi_6 + 2x_1 \cos u_k + 2x_2 \sin u_k + 3(1-t) \cos 2u_k], \\ \dot{\Psi}_4(t) &= 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2 \sin u_k \Psi_5 + 2 \cos u_k \Psi_6 + 2x_1 \sin u_k - 2x_2 \cos u_k + 3(1-t) \sin 2u_k], \\ \dot{\Psi}_5(t) &= 4 \sum_{k=1}^4 \lambda_k \cos u_k, \quad \dot{\Psi}_6(t) = 4 \sum_{k=1}^4 \lambda_k \sin u_k \end{aligned} \quad (11)$$

и условиям трансверсальности:

$$\Psi_j(1 - 1/M) = 0, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (12)$$

Оптимальная управляющая функция $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$, соответствующая экстремальной функции $f^* \in S^M$ в (9), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [11]

$$\max_{u, \lambda} H(t, x, \Psi, u, \lambda) = H(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda), \quad 0 \leq t \leq 1 - 1/M, \quad (13)$$

где (x^*, Ψ^*) является решением систем (8) и (11) с $u = u^*$ в их правых частях. Следовательно, при положительных значениях $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ каждая из координат $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$ является корнем уравнения

$$H_{u_k}(t, x, \Psi, u, \lambda^k) = 0, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (14)$$

где $x = x^*$, $\Psi = \Psi^*$, а λ^k — это один из векторов $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ или $(0, 0, 0, 1)$. Наличие четырёх различных на $[0, 2\pi)$ значений $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$ координат оптимального управления u^* характеризует оптимальный скользящий режим.

Функции P_{M4} , локально экстремальной в задаче (9) для $1 < M \leq M_5^*$, соответствуют координаты $u_1^* = \pi/4$, $u_2^* = 3\pi/4$, $u_3^* = 5\pi/4$, $u_4^* = 7\pi/4$ оптимального управления u^* и значения параметров $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = \lambda_4^* = 1/4$. Условия трансверсальности (12) приводят к начальным условиям $\Psi_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, 6$. Проварьируем эти начальные данные, положив $\Psi_1(0) = \alpha_1$, $\Psi_2(0) = \alpha_2$, $\Psi_3(0) = \alpha_3$, $\Psi_4(0) = \alpha_4$, $\Psi_5(0) = \alpha_5$, $\Psi_6(0) = \alpha_6$. Сохранение скользящего режима в момент $t = 0$ для варьированных значений $\Psi(0)$ означает равенство между собой коэффициентов при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ функции Гамильтона (10) при $t = 0$ в точке $u^* = u^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$. Имеем:

$$\begin{aligned} H(0, x(0), \Psi(0), u^*, \lambda) &= -2 \left[\lambda_1 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_2 + \alpha_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_6 \right) + \right. \\ &+ \lambda_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_2 - \alpha_4 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_6 \right) + \lambda_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_2 + \alpha_4 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_5 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_6 \right) + \\ &\left. + \lambda_4 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_2 - \alpha_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_5 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_6 \right) \right] + r_1 \|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)\|, \end{aligned}$$



где $r_1 \rightarrow 0$ при $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rightarrow 0$. Приравнивая здесь коэффициенты при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, получаем соотношения между координатами $\Psi(0)$

$$\alpha_1 = \alpha_5 + r_2 \|(\alpha_1, \alpha_2)\|, \quad \alpha_2 = -\alpha_6 + r_3 \|(\alpha_1, \alpha_2)\|, \quad \alpha_4 = 0,$$

где $r_2, r_3 \rightarrow 0$ при $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$. Полагаем так же $\alpha_3 = 0$.

Таким образом, вариация вектора начальных данных $\Psi(0)$ в экстремальной задаче (8)–(13), сохраняющая скользящий режим, имеет вид

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0), \Psi_5(0), \Psi_6(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, \alpha_1, -\alpha_2) + o((\alpha_1, \alpha_2)), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 0. \quad (15)$$

Для решения локальной экстремальной задачи в окрестности функции P_{M4} следует подвергнуть сравнению все те функции $f \in S^M$, которые доставляют точки части $\partial V_5^4(M)$ из окрестности точки A_M . Все такие функции представимы по (5) интегралами (6) дифференциального уравнения Лёвнера (7) с непрерывным управлением u , удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина (13), начальными данными $\Psi(0)$ в (11) из окрестности точки $(0,0,0,0,0,1)$, сохраняющими согласно (15) скользящий оптимальный режим, и параметрами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ из окрестности точки $\lambda^* = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Следовательно, задача нахождения точной границы в локальной проблеме Хажинского–Тамми сводится к следующему.

Задача 1. Пусть

$$F^M : (\Psi(0), \lambda) \rightarrow x_7(1 - 1/M)$$

является функцией, которая всякому начальному данному $\Psi(0)$ и параметру λ в экстремальной задаче (8)–(13) со скользящим оптимальным режимом сопоставляет значение $x_7(1 - 1/M)$. Положим

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0), \Psi_5(0), \Psi_6(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, \alpha_1, -\alpha_2) + o((\alpha_1, \alpha_2)), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 0. \quad (16)$$

$$\lambda = (1/4 + \alpha_3, 1/4 + \alpha_4, 1/4 + \alpha_5, 1/4 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5), \quad (17)$$

согласно чему $F^M = F^M(\alpha)$. Требуется найти значение $M_5^* > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ функция $F^M(\alpha)$ достигает локального максимума в точке $\alpha = 0$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Система дифференциальных уравнений (8) при $u = u^*$ и $\lambda = \lambda^*$ имеет решение $x_k^*(t) = 0$, $k = 1, \dots, 6$, $x_7^*(t) \neq 0$. Аналогично система дифференциальных уравнений (11) с теми же $u = u^*$ и $\lambda = \lambda^*$ и с нулевыми начальными условиями в точке $t = 0$ имеет решение $\Psi^*(t) = 0$.

Так как $H_{u_k u_k}(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda^k) \neq 0$, то уравнения (14) однозначно определяют аналитические неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi)$ в окрестности точки (x^*, Ψ^*) , $u_k(t, x^*, \Psi^*) = u_k^*$, $k = 1, 2, 3, 4$. Если в правые части систем (8) и (11) подставить $u = u(t, x, \Psi) = (u_1(t, x, \Psi), u_2(t, x, \Psi), u_3(t, x, \Psi), u_4(t, x, \Psi))$, то их решение (x, Ψ) аналитически зависит от начальных данных и параметра λ . Таким образом, (x, Ψ) в задаче 1 имеет производные по α до второго порядка. Следовательно, тем же свойством обладает и управление $u = u(t, x(\alpha), \Psi(\alpha)) = u(\alpha)$. Поэтому функция $F^M(\alpha)$ имеет производные до второго порядка, и для исследования её на локальный максимум применимы классические средства дифференциального исчисления.

Начнём с вычисления частных производных первого порядка функции $F^M(\alpha)$,

$$F_{\alpha_j}^M = (x_7)_{\alpha_j}(1 - 1/M), \quad j = 1, \dots, 5.$$

Дифференцирование последнего уравнения системы (8), в котором $\lambda_4 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ приводит к формулам

$$\begin{aligned} \frac{d(x_7)_{\alpha_j}}{dt} = & -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2(((x_5)_{\alpha_j} + x_3(x_1)_{\alpha_j} + x_1(x_3)_{\alpha_j} - (x_2)_{\alpha_j}x_4 - x_2(x_4)_{\alpha_j}) \cos u_k - \\ & - (x_5 + x_1x_3 - x_2x_4) \sin u_k (u_k)_{\alpha_j} + ((x_6)_{\alpha_j} + (x_1)_{\alpha_j}x_4 + x_1(x_4)_{\alpha_j} + (x_2)_{\alpha_j}x_3 + x_2(x_3)_{\alpha_j}) \sin u_k + \\ & + (x_6 + x_1x_4 + x_2x_3) \cos u_k (u_k)_{\alpha_j} + 3(1 - t)((x_3)_{\alpha_j} + 2x_1(x_1)_{\alpha_j} - 2x_2(x_2)_{\alpha_j}) \cos 2u_k - \\ & - 2(x_3 + x_1^2 - x_2^2) \sin 2u_k (u_k)_{\alpha_j} + ((x_4)_{\alpha_j} + 2(x_1)_{\alpha_j}x_2 + 2x_1(x_2)_{\alpha_j}) \sin 2u_k + \end{aligned}$$



$$+2(x_4 + 2x_1x_2) \cos 2u_k(u_k)_{\alpha_j} + 4(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j} \cos 3u_k - 3x_1 \sin 3u_k(u_k)_{\alpha_j} + (x_2)_{\alpha_j} \sin 3u_k + 3x_2 \cos 3u_k(u_k)_{\alpha_j} - 4(1-t)^3 \sin 4u_k(u_k)_{\alpha_j}], \quad (x_7)_{\alpha_j}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(x_7)_{\alpha_j}}{dt} = & -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2((x_5)_{\alpha_j} + x_3(x_1)_{\alpha_j} + x_1(x_3)_{\alpha_j} - (x_2)_{\alpha_j}x_4 - x_2(x_4)_{\alpha_j}) \cos u_k - \\ & - (x_5 + x_1x_3 - x_2x_4) \sin u_k(u_k)_{\alpha_j} + ((x_6)_{\alpha_j} + (x_1)_{\alpha_j}x_4 + x_1(x_4)_{\alpha_j} + (x_2)_{\alpha_j}x_3 + x_2(x_3)_{\alpha_j}) \sin u_k + \\ & + (x_6 + x_1x_4 + x_2x_3) \cos u_k(u_k)_{\alpha_j} + 3(1-t)((x_3)_{\alpha_j} + 2x_1(x_1)_{\alpha_j} - 2x_2(x_2)_{\alpha_j}) \cos 2u_k - \\ & - 2(x_3 + x_1^2 - x_2^2) \sin 2u_k(u_k)_{\alpha_j} + ((x_4)_{\alpha_j} + 2(x_1)_{\alpha_j}x_2 + 2x_1(x_2)_{\alpha_j}) \sin 2u_k + \\ & + 2(x_4 + 2x_1x_2) \cos 2u_k(u_k)_{\alpha_j} + 4(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j} \cos 3u_k - 3x_1 \sin 3u_k(u_k)_{\alpha_j} + (x_2)_{\alpha_j} \sin 3u_k + \\ & + 3x_2 \cos 3u_k(u_k)_{\alpha_j} - 4(1-t)^3 \sin 4u_k(u_k)_{\alpha_j}] - 2[2(x_5 + x_1x_3 - x_2x_4)(\cos u_{j-2} - \cos u_4) + \\ & + 2(x_6 + x_1x_4 + x_2x_3)(\sin u_{j-2} - \sin u_4) + 3(1-t)((x_3 + x_1^2 - x_2^2)(\cos 2u_{j-2} - \cos 2u_4) + \\ & + (x_4 + 2x_1x_2)(\sin 2u_{j-2} - \sin 2u_4)) + 4(1-t)^2(x_1(\cos 3u_{j-2} - \cos 3u_4) + x_2(\sin 3u_{j-2} - \sin 3u_4)) + \\ & + (1-t)^3(\cos 4u_{j-2} - \cos 4u_4)], \quad (x_7)_{\alpha_j}(0) = 0, \quad j = 3, 4, 5. \quad (19) \end{aligned}$$

Из (18), (19) непосредственной подстановкой проверяем, что

$$\left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} = 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Значит, $(x_7)_{\alpha_j}(1 - 1/M)|_{\alpha=0} = F_{\alpha_j}^M(0) = 0$, $j = 1, \dots, 5$. Следовательно, выполняются необходимые условия локального экстремума функции $F^M(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$.

Теперь вычислим частные производные второго порядка функции $F^M(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$. С этой целью продифференцируем уравнения (18), (19) в точке $\alpha = 0$ и найдём

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j \alpha_l}}{dt} \right]_{\alpha=0} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2((x_5)_{\alpha_j} \sin u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_5)_{\alpha_l} \sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) - 2((x_6)_{\alpha_j} \cos u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + \\ & + (x_6)_{\alpha_l} \cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) + 6(1-t)((x_3)_{\alpha_j} \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_3)_{\alpha_l} \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) + \\ & + 12(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j} \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_1)_{\alpha_l} \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j} - (x_2)_{\alpha_j} \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l} - \\ & - (x_2)_{\alpha_l} \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) - 16(1-t)^3(u_k)_{\alpha_j}(u_k)_{\alpha_l}], \quad (x_7)_{\alpha_j \alpha_l}(0) = 0, \quad j, l = 1, 2. \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j \alpha_l}}{dt} \right]_{\alpha=0} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2((x_5)_{\alpha_j} \sin u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_5)_{\alpha_l} \sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) - 2((x_6)_{\alpha_j} \cos u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + \\ & + (x_6)_{\alpha_l} \cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) + 6(1-t)((x_3)_{\alpha_j} \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_3)_{\alpha_l} \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) + \\ & + 12(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j} \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_1)_{\alpha_l} \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j} - (x_2)_{\alpha_j} \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l} - \\ & - (x_2)_{\alpha_l} \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) - 16(1-t)^3(u_k)_{\alpha_j}(u_k)_{\alpha_l}] - 4(x_5)_{\alpha_j}(\cos u_{l-2}^* - \cos u_4^*) - \\ & - 4(x_6)_{\alpha_j}(\sin u_{l-2}^* - \sin u_4^*) - 6(1-t)(x_4)_{\alpha_j}(\sin 2u_{l-2}^* - \sin 2u_4^*) - \\ & - 8(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j}(\cos 3u_{l-2}^* - \cos 3u_4^*) + (x_2)_{\alpha_j}(\sin 3u_{l-2}^* - \sin 3u_4^*)), \\ & (x_7)_{\alpha_j \alpha_l}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad l = 3, 4, 5. \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j \alpha_l}}{dt} \right]_{\alpha=0} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2((x_5)_{\alpha_j} \sin u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_5)_{\alpha_l} \sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) - 2((x_6)_{\alpha_j} \cos u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + \\ & + (x_6)_{\alpha_l} \cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) + 6(1-t)((x_3)_{\alpha_j} \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_3)_{\alpha_l} \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) + \\ & + 12(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j} \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l} + (x_1)_{\alpha_l} \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j} - \\ & - (x_2)_{\alpha_j} \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l} - (x_2)_{\alpha_l} \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) - 16(1-t)^3(u_k)_{\alpha_j}(u_k)_{\alpha_l}] - \\ & - 4((x_5)_{\alpha_l}(\cos u_{j-2}^* - \cos u_4^*) + (x_6)_{\alpha_l}(\sin u_{j-2}^* - \sin u_4^*) + (x_5)_{\alpha_j}(\cos u_{l-2}^* - \cos u_4^*) + \\ & + (x_6)_{\alpha_j}(\sin u_{l-2}^* - \sin u_4^*)) - 6(1-t)((x_4)_{\alpha_l}(\sin 2u_{j-2}^* - \sin 2u_4^*) + \\ & + (x_4)_{\alpha_j}(\sin 2u_{l-2}^* - \sin 2u_4^*)) - 8(1-t)^2((x_1)_{\alpha_l}(\cos 3u_{j-2}^* - \cos 3u_4^*) + (x_2)_{\alpha_l}(\sin 3u_{j-2}^* - \sin 3u_4^*) + \\ & + (x_1)_{\alpha_j}(\cos 3u_{l-2}^* - \cos 3u_4^*) + (x_2)_{\alpha_j}(\sin 3u_{l-2}^* - \sin 3u_4^*)), \quad (x_7)_{\alpha_j \alpha_l}(0) = 0, \quad j, l = 3, 4, 5. \quad (22) \end{aligned}$$

Все частные производные по координатам вектора α в правых частях формул (20)–(22) вычисляются в точке $\alpha = 0$.



Тождество (14) с произвольными (x, Ψ) из окрестности точки (x^*, Ψ^*) определяет неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi)$, $k = 1, \dots, 4$. Для вычисления частных производных управлений u_k про дифференцируем это тождество по α и получим:

$$H_{u_k x} x_{\alpha_j} + H_{u_k \Psi} \Psi_{\alpha_j} + H_{u_k u_k} (u_k)_{\alpha_j} = 0, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 5,$$

откуда находим выражения для частных производных

$$(u_k)_{\alpha_j} = -\frac{H_{u_k x} x_{\alpha_j} + H_{u_k \Psi} \Psi_{\alpha_j}}{H_{u_k u_k}}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 5. \quad (23)$$

Из (10) при $\alpha = 0$ непосредственно находим:

$$\begin{aligned} H_{u_k u_k} &= -32(1-t)^3, & H_{u_k x_1} &= 24(1-t)^2 \sin 3u_k^*, & H_{u_k x_2} &= -24(1-t)^2 \cos 3u_k^*, \\ H_{u_k x_3} &= 12(1-t) \sin 2u_k^*, & H_{u_k x_4} &= 0, & H_{u_k x_5} &= 4 \sin u_k^*, & H_{u_k x_6} &= -4 \cos u_k^*, \\ H_{u_k \Psi_1} &= 2 \sin u_k^*, & H_{u_k \Psi_2} &= 2 \cos u_k^*, & H_{u_k \Psi_3} &= 4(1-t) \sin 2u_k^*, & H_{u_k \Psi_4} &= 0, \\ H_{u_k \Psi_5} &= 6(1-t)^2 \sin 3u_k^*, & H_{u_k \Psi_6} &= 6(1-t)^2 \cos 3u_k^*, & k &= 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), элементарными средствами сможем вычислить все 20 частных производных (23) при $\alpha = 0$ как линейные функции относительно $(x_p)_{\alpha_j}$ и $(\Psi_p)_{\alpha_j}$, $p = 1, \dots, 6$.

Таким образом, правые части системы 15 различных дифференциальных уравнений (20),(21),(22) для частных производных второго порядка целевой функции представляют собой полиномы второго порядка относительно 60 частных производных первого порядка $(x_p)_{\alpha_j}$, $(\Psi_p)_{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, 5$, $p = 1, \dots, 6$, вычисленных в точке $\alpha = 0$. В свою очередь, для вычисления частных производных первого порядка функций x и Ψ по координатам вектора α в точке $\alpha = 0$ про дифференцируем уравнения систем (8) и (11) по α . Некоторое облегчение вызывается интегрированием двух последних уравнений системы (11) в сравнении с двумя первыми уравнениями системы (8). Именно

$$\Psi_5(t) = \alpha_1 - 2x_1(t), \quad \Psi_6(t) = -\alpha_2 + 2x_2(t).$$

откуда находим 10 соотношений

$$\begin{aligned} (\Psi_5)_{\alpha_1} &= 1 - 2(x_1)_{\alpha_1}, & (\Psi_5)_{\alpha_j} &= -2(x_1)_{\alpha_j}, & j &= 2, \dots, 5, \\ (\Psi_6)_{\alpha_2} &= -1 + 2(x_2)_{\alpha_2}, & (\Psi_6)_{\alpha_j} &= 2(x_2)_{\alpha_j}, & j &= 1, 3, 4, 5. \end{aligned} \quad (25)$$

Вычислим оставшиеся частные производные, и для координат фазового вектора получим системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(x_1)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sin u_k^* (u_k)_{\alpha_j}, & (x_1)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\ \left[\frac{d(x_2)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \cos u_k^* (u_k)_{\alpha_j}, & (x_2)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\ \left[\frac{d(x_3)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} &= -\sum_{k=1}^4 ((x_1)_{\alpha_j} \cos u_k^* + (x_2)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (1-t) \sin 2u_k^* (u_k)_{\alpha_j}), & (x_3)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\ \left[\frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} &= \sum_{k=1}^4 ((x_1)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_2)_{\alpha_j} \cos u_k^*), & (x_4)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\ \left[\frac{d(x_5)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2((x_3)_{\alpha_j} \cos u_k^* + (x_4)_{\alpha_j} \sin u_k^*) + 3(1-t)(x_2)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* - \\ &\quad - 3(1-t)^2 \sin 3u_k^* (u_k)_{\alpha_j}], & (x_5)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\ \left[\frac{d(x_6)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2((x_3)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_4)_{\alpha_j} \cos u_k^*) + 3(1-t)(x_1)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* + \\ &\quad + 3(1-t)^2 \cos 3u_k^* (u_k)_{\alpha_j}], & (x_6)_{\alpha_j}(0) &= 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (26)$$



$$\begin{aligned}
\left[\frac{d(x_1)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j} - 2(\cos u_{j-2}^* - \cos u_4^*), & (x_1)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(x_2)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j} + 2(\sin u_{j-2}^* - \sin u_4^*), & (x_2)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(x_3)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= - \sum_{k=1}^4 ((x_1)_{\alpha_j} \cos u_k^* + (x_2)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (1-t) \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}), & (x_3)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \sum_{k=1}^4 ((x_1)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_2)_{\alpha_j} \cos u_k^*) + 2(1-t)(\sin 2u_{j-2}^* - \sin 2u_4^*), \\
& & (x_4)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(x_5)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2((x_3)_{\alpha_j} \cos u_k^* + (x_4)_{\alpha_j} \sin u_k^*) + 3(1-t)(x_2)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* - \\
& & -3(1-t)^2 \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}] - 2(1-t)^2 (\cos 3u_{j-2}^* - \cos 3u_4^*) & (x_5)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(x_6)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2((x_3)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_4)_{\alpha_j} \cos u_k^*) - 3(1-t)(x_1)_{\alpha_j} \cos 2u_k^* + \\
& & +3(1-t)^2 \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}] + 2(1-t)^2 (\sin 3u_{j-2}^* - \sin 3u_4^*) & (x_6)_{\alpha_j}(0) &= 0, \quad j = 3, 4, 5.
\end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя значения $u_1^* = \pi/4$, $u_2^* = 3\pi/4$, $u_3^* = 5\pi/4$, $u_4^* = 7\pi/4$, в третье уравнение системы (26), получим:

$$\left[\frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = 0, \quad (x_4)_{\alpha_j}(0) = 0.$$

Это означает, что изменение координат вектора $\Psi(0)$ не вызывает изменения координаты x_4 фазового вектора, следовательно, вдоль направления $Im a_3$ точка $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$, доставляемая функцией $P_{M4}(z)$, имеет угловой характер.

Для координат сопряжённого вектора имеем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d(\Psi_1)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2(x_3)_{\alpha_j} \cos u_k^* + 2(x_4)_{\alpha_j} \sin u_k^* + 6(1-t)(x_2)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* - \\
& & -12(1-t)^2 \sin 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}], & (\Psi_1)_{\alpha_1}(0) &= 1, & (\Psi_1)_{\alpha_2}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(\Psi_2)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [-2(x_4)_{\alpha_j} \cos u_k^* + 2(x_3)_{\alpha_j} \sin u_k^* + 6(1-t)(x_1)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* + \\
& & +12(1-t)^2 \cos 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}], & (\Psi_2)_{\alpha_1}(0) &= 0, & (\Psi_2)_{\alpha_2}(0) &= 1, \\
\left[\frac{d(\Psi_3)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2(x_1)_{\alpha_j} \cos u_k^* + 2(x_2)_{\alpha_j} \sin u_k^* - 3(1-t) \sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}], & (\Psi_3)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(\Psi_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= 0, & (\Psi_4)_{\alpha_j}(0) &= 0, & j &= 1, 2, \\
\left[\frac{d(\Psi_1)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2(x_3)_{\alpha_j} \cos u_k^* + 2(x_4)_{\alpha_j} \sin u_k^* + 6(1-t)(x_2)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* - \\
& & -12(1-t)^2 \sin 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}] + 8(1-t)^2 \left(\cos 3u_{j-2}^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & (\Psi_1)_{\alpha_j}(0) &= 0, \\
\left[\frac{d(\Psi_2)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [-2(x_4)_{\alpha_j} \cos u_k^* + 2(x_3)_{\alpha_j} \sin u_k^* + 6(1-t)(x_1)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* + \\
& & +12(1-t)^2 \cos 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}] + 8(1-t)^2 \left(\sin 3u_{j-2}^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & (\Psi_2)_{\alpha_j}(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{28}$$



$$\left[\frac{d(\Psi_3)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [2(x_1)_{\alpha_j} \cos u_k^* + 2(x_2)_{\alpha_j} \sin u_k^* - 3(1-t) \sin 2u^*(u_k)_{\alpha_j}], \quad (\Psi_3)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(\Psi_4)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} = 6(1-t)(\sin 2u_{j-2}^* + 1), \quad (\Psi_4)_{\alpha_j}(0) = 0, \quad j = 3, 4, 5. \quad (29)$$

Дифференциальные уравнения (26)–(29) с функциями $(u_k)_{\alpha_j}$ из (23) образуют систему 50 линейных дифференциальных уравнений, распадающуюся на несколько независимых подсистем. В частности, подсистемы относительно $(x_1)_{\alpha_j}$, $(x_5)_{\alpha_j}$, $(\Psi_1)_{\alpha_j}$, $j = 2, 3$ и $(x_2)_{\alpha_j}$, $(x_6)_{\alpha_j}$, $(\Psi_2)_{\alpha_j}$, $j = 1, 5$, являются линейными однородными системами с нулевыми начальными условиями. Это приводит к 12 вырожденным нулевым решениям. Нулевые решения имеют и подсистемы относительно $(x_3)_{\alpha_j}$, $(\Psi_3)_{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, 5$. Остальные независимые подсистемы допускают понижение порядка. Тем не менее мы не будем пытаться отыскать решение подсистем в квадратурах.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Локальная экстремальная задача в теореме сведена к решению задачи 1, т. е. к отысканию значения $M_5^* > 1$ такого, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ функция $F^M(\alpha)$, соответствующая локальной экстремальной задаче (9), достигает локального максимума в точке $\alpha = 0$. Как было показано, необходимое условие экстремума

$$(x_7)_{\alpha_j}(1 - 1/M)|_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial F^M(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right]_{\alpha=0} = 0, \quad j = 1, \dots, 5,$$

выполняется для всех $M > 1$. Поэтому остается лишь проверить достаточное условие экстремума функции $F^M(\alpha)$, зависящей от пяти координат вектора α , которое заключается в том, что при $\alpha = 0$ квадратичная форма, порождённая квадратной матрицей $\Delta = \Delta(M)$ с элементами $(x_7)_{\alpha_j \alpha_l}(1 - 1/M)$, $j, l = 1, \dots, 5$, отрицательно определена.

Для $M > 1$ обозначим:

$$\Delta_m(M) = \begin{pmatrix} (x_7)_{\alpha_1 \alpha_1}(1 - 1/M) & \dots & (x_7)_{\alpha_1 \alpha_m}(1 - 1/M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_7)_{\alpha_m \alpha_1}(1 - 1/M) & \dots & (x_7)_{\alpha_m \alpha_m}(1 - 1/M) \end{pmatrix}_{\alpha=0}, \quad m = 1, \dots, 5. \quad (30)$$

Согласно критерию Сильвестра матрица $\Delta(M)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$(-1)^m \det \Delta_m(M) > 0, \quad m = 1, \dots, 5. \quad (31)$$

Элементы матрицы $\Delta(M)$ являются значением в точке $t = 1 - 1/M$ решения $(x_7)_{\alpha_j \alpha_l}(t)$, $(x_p)_{\alpha_j}(t)$, $(\Psi_p)_{\alpha_j}(t)$, $j, l = 1, \dots, 5$, $p = 1, \dots, 6$ задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (20)–(22) и (26)–(29), в которых частные производные $(u_k)_{\alpha_j}$, $k = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 5$, задаются формулами (23), (24).

Численное интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений с использованием пакета MAPLESOFT Maple 15 и проверка критерия Сильвестра (31) приводят к значению $M_5^* = 2.06263 \dots$. Это доказывает теорему.

Библиографический список

1. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture. LOMI Preprints E-5-84. 1984. P. 1–21.
2. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. Vol. 154, № 1–2. P. 137–152.
3. Pick G. Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet // S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math., Naturwiss. Kl. Abt. II a. 1917. B. 126. P. 247–263.
4. Schaeffer A. C., Spencer D. C. The coefficients of schlicht functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 107–125.
5. Schiffer M., Tammi O. On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 119. P. 67–78.
6. Siewierski L. Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity // Bull. Acad. Polon. Sci. 1968. Vol. 16. P. 575–576.
7. Siewierski L. Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions close to identity // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1971. Vol. 86. P. 1–153.
8. Schiffer M., Tammi O. On bounded univalent functions



which are close to identity // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.* 1968. Vol. 435. P. 3–26.

9. Прохоров Д. В., Гордиенко В. Г. Определение границы в локальной гипотезе Хажинского–Тамми // *Изв. вузов. Математика.* 2008. № 9. С. 59–68.

10. Прохоров Д. В. Множества значений систем функ-

ционалов в классах однолистных функций // *Мат. сб.* 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1677.

11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1969. 384 с.

Determination of the Boundary in the Local Charzynski–Tammi Conjecture for the Fifth Coefficient

V. G. Gordienko, K. A. Samsonova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, valeriygor@mail.ru, kris-ruzhik@mail.ru

In this article we find the exact value of M_5 such that the symmetrized Pick function $P_{M_4}(z)$ is an extreme in the local Charzynski–Tammi conjecture for the fifth Taylor coefficient of the normalized holomorphic bounded univalent functions

Key words: Löwner equation, optimum control, Pontryagin maximum principle.

References

1. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture. *LOMI Preprints* E-5-84, 1984, pp. 1–21.

2. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 1985, vol. 154, no 1–2, pp. 137–152.

3. Pick G. Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet. *S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math., Naturwiss. Kl. Abt. II a*, 1917, B. 126, pp. 247–263.

4. Schaeffer A. C., Spencer D. C. The coefficients of schlicht functions. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, pp. 107–125.

5. Schiffer M., Tammi O. On the fourth coefficient of bounded univalent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 119, pp. 67–78.

6. Siewierski L. Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 1968, vol. 16, pp. 575–576.

7. Siewierski L. Sharp estimation of the coefficients

of bounded univalent functions close to identity. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 1971, vol. 86, pp. 1–153.

8. Schiffer M., Tammi O. On bounded univalent functions which are close to identity. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.*, 1968, vol. 435, pp. 3–26.

9. Prokhorov D. V., Gordienko V. G. Definition of the boundary in the local Charzynski–Tammi conjecture. *Russ. Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2008, vol. 52, no. 9, pp. 51–59.

10. Prokhorov D. V. Sets of values of systems of functionals in classes of univalent functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 499–516.

11. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes], Moscow, Nauka, 1969, 384 p. (in Russian).

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА–ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

О. А. Королева

Старший преподаватель кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, korolevaart@yandex.ru

Найдены достаточные условия (условия типа Жордана–Дирихле) разложения функции $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. Как известно, для такого разложения необходимо, чтобы $f(x)$ была непрерывна и принадлежала замыканию области значений интегрального оператора. Оказывается, если $f(x)$ к тому же функция ограниченной вариации, эти условия являются и достаточными.

Ключевые слова: теорема Жордана–Дирихле, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.



Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Обозначим $A_1(x, t) = A(x, t)$, если $\{0 \leq t \leq 1/2 - x, 0 \leq x \leq 1/2\}$, $A_2(x, t) = A(x, t)$, если $\{1/2 + x \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1/2\}$, $A_3(x, t) = A(x, t)$, если $\{0 \leq t \leq -1/2 + x, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $A_4(x, t) = A(x, t)$, если $\{3/2 - x \leq t \leq 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $A_5(x, t) = A(x, t)$, если $\{1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x, 0 \leq x \leq 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \leq t \leq 3/2 - x, 1/2 \leq x \leq 1\}$.

Предположим, что $A_i(x, t)$, $i = 1, \dots, 5$ непрерывно-дифференцируемые в своих областях, причем $A_5(x, 1/2 - x + 0) - A_1(x, 1/2 - x - 0) = a$, $A_5(x, 1/2 + x - 0) - A_2(x, 1/2 + x + 0) = b$, $A_5(x, -1/2 + x + 0) - A_3(x, -1/2 + x - 0) = c$, $A_5(x, 3/2 - x - 0) - A_4(x, 3/2 - x + 0) = d$, где a, b, c, d — постоянные.

Частный случай оператора (1) впервые рассматривался в статье [1].

Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{1/2} B(x, t)g(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad (2)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x, 1/2 - t) & A(x, 1/2 + t) & 0 \\ A(1/2 - x, t) & 0 & 0 & A(1/2 - x, 1 - t) \\ A(1/2 + x, t) & 0 & 0 & A(1/2 + x, 1 - t) \\ 0 & A(1 - x, 1/2 - t) & A(1 - x, 1/2 + t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Если $y = Af$, то $z = Bg$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1/2 - x)$, $z_3(x) = y(1/2 + x)$, $z_4(x) = y(1 - x)$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1/2 - x)$, $g_3(x) = f(1/2 + x)$, $g_4(x) = f(1 - x)$. Обратно, если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2 - x)$, $g_3(x) = g_4(1/2 - x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2 - x)$, $z_3(x) = z_4(1/2 - x)$ и $y = Af$, где $f(x) = g_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = g_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$ и $y(x) = z_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $y(x) = z_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$.

Доказательство представлено в [2].

Замечание. Представление типа (2) не единственно. Наше же представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x, t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.

В статье [2] также найдены необходимые и достаточные условия существования оператора B^{-1} . В дальнейшем будем предполагать, что B^{-1} существует.

Теорема 2. Для оператора B^{-1} справедливо представление

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \int_0^{1/2} a(x, t)z(t) dt, \quad (3)$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t) dt = 0. \quad (4)$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $a'_3(x)$, $a(x)$ — непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x, t)$, $S = E + \int_0^{1/2} B(0, t)a_1(t) dt$,

$$T = \int_0^{1/2} B(0, t)a_2(t) dt — постоянные матрицы 4×4 .$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 10 в статье [1].

1. Получим интегродифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A . Пусть $z = (E - \lambda B)^{-1}Bg$. Тогда $z - \lambda Bz = Bg$. Отсюда по теореме 2 из (3), (4) получаем:

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \quad (5)$$



$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t) dt = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{N}z = \int_0^{1/2} a(x,t)z(t) dt$.

Теорема 3. Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где

$$v(x) = z_1(x) \text{ при } x \in [0, 1/2] \quad \text{и} \quad v(x) = z_3(x - 1/2) \text{ при } x \in [1/2, 1], \quad (7)$$

z_1, z_3 — первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (5), (6). Обратно, если λ таково, что однородная краевая задача для (5), (6) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (7).

Доказательство повторяет лемму 1 из статьи [3].

Рассмотрим систему (5), (6). Минимальный многочлен матрицы $Q = P^{-1}$ совпадает с характеристическим многочленом и равен $\lambda^4 - \lambda^2(d^2 - 2bc + a^2) + (bc - ad)^2$. Значит, выполняется:

Лемма 1. При условии $d \neq a, (d+a)^2 - 4bc \neq 0$ матрица P^{-1} подобна диагональной $D = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, причём $\omega_3 = -\omega_2, \omega_4 = -\omega_1, \omega_1 \neq \omega_2$. Пусть матрица Γ такая, что $\Gamma^{-1}P^{-1}\Gamma = D$. Выполним в (5), (6) замену $z = \Gamma\tilde{z}$. Получим:

$$\tilde{z}'(x) + P_1(x)\tilde{z}(0) + P_2(x)\tilde{z}(1/2) + P_3(x)\tilde{z}(x) + N\tilde{z}(x) - \lambda D\tilde{z}(x) = m(x), \quad (8)$$

$$M_0\Gamma\tilde{z}(0) + M_1\Gamma\tilde{z}(1/2) + \Gamma \int_0^{1/2} \Omega(t)\tilde{z}(t) dt = 0, \quad (9)$$

где $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma, N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma, m(x) = D\Gamma^{-1}g(x), \Omega(t) = a(t)\Gamma, M_0 = S\Gamma, M_1 = T\Gamma$.

В дальнейшем при изучении системы (8), (9) затруднение вызывает матрица $P_3(x)$. Поэтому дадим её дальнейшее преобразование.

Лемма 2. Существует матрица-функция $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно-дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x), H_1(x)$, причём $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональная, такая, что преобразование $\tilde{z} = H(x, \lambda)v$ приводит систему (8), (9) к виду

$$v'(x) + P_1(x, \lambda)v(0) + P_2(x, \lambda)v(1/2) + P_3(x, \lambda)v(x) + N_\lambda v(x) - \lambda Dv(x) = m(x, \lambda), \quad (10)$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t, \lambda)v(t)dt, \quad (11)$$

где $P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_1(x)H(0, \lambda), P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_2(x)H(1/2, \lambda), P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda) \times [H_2'(x) + P_3(x)H_2(x)], N_\lambda = H^{-1}(x, \lambda)NH(x, \lambda), M_{0\lambda} = M_0H(0, \lambda), M_{1\lambda} = M_1H(1/2, \lambda), \Omega(t, \lambda) = \Omega(t)H(t, \lambda), m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x)$.

Доказательство такое же, как и леммы 16 в статье [1].

Рассмотрим систему

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x), \quad (12)$$

$$U_0(u) = M_0H_0(0)u(0) + M_1H_0(1/2)u(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)u(t) dt = 0, \quad (13)$$

Будем считать, что $\text{Re } \lambda\omega_1 \geq \text{Re } \lambda\omega_2 \geq 0$.

Так же, как в статье [1], получаем, что для решения $u(x)$ системы (12), (13) имеет место представление

$$u(x) = u(x, \lambda) = -Y(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{1/2} U_{0x}(g(x, t, \lambda))m(t)dt + g_\lambda m(x), \quad (14)$$

где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, \dots, e^{\lambda\omega_4 x}), \Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda)), U_{0x}$ означает, что U применяется по $x, g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), \dots, g_4(x, t, \lambda))$,

$$g_i(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t, x)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \text{при } \text{Re } \lambda\omega_i \geq 0, \\ \varepsilon(x, t)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \text{при } \text{Re } \lambda\omega_i \leq 0, \end{cases}$$



$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leq x, \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases} \quad g_{\lambda}m(x) = \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda)m(t) dt.$$

Лемма 3. В S_{δ_0} [2] при больших $|\lambda|$ компоненты матрицы $Y(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda)$ имеют оценку $O(1)$ равномерно по $x \in [0, 1/2]$.

Доказательство. Доказательство следует из оценок (27), (28) из статьи [2] для решения $u(x, \lambda) = R_{0\lambda}m$ системы (12), (13).

Лемма 4. Имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}m(x))] d\lambda \right\|_{\infty} = 0,$$

где $v(x, \lambda)$ — решение задачи (10), (11), $\|\cdot\|_{\infty}$ — норма в C_{∞} .

Доказательство аналогично доказательству леммы 11 в статье [2].

Лемма 5. При $x \in [0, 1/2]$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{\lambda}f d\lambda = \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}D\Gamma g) d\lambda \right)_1 + o(1),$$

где $(\cdot)_1$ — первая компонента вектора, $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [0, 1/2]$.

При $x \in [1/2, 1]$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{\lambda}f d\lambda = \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}D\Gamma g) d\lambda \right)_3 + o(1),$$

где $(\cdot)_3$ — третья компонента вектора, $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [1/2, 1]$.

Доказательство. По теореме 3 и лемме 4 аналогично теореме 4 из статьи [2].

2. Будем считать, что компоненты $m(x)$ принадлежат $C[0, 1/2] \cap V[0, 1/2]$. Рассмотрим подробно $R_{0\lambda}m$ при этом условии.

Лемма 6. Имеет место формула

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} U_{0x}(g(x, t, \lambda))m(t) dt = -\frac{1}{\lambda}M_0H_0(0)D^{-1}g(0, 1/2, \lambda)m(1/2) + \frac{1}{\lambda}M_0H_0(0)D^{-1} \times \\ & \times g(0, 0+, \lambda)m(0) + \frac{1}{\lambda}M_0H_0(0)D^{-1} \int_0^{1/2} g(0, t, \lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda}M_1H_0(1/2)D^{-1}g(1/2, 1/2 - 0, \lambda)m(1/2) + \\ & + \frac{1}{\lambda}M_1H_0(1/2)D^{-1}g(1/2, 0, \lambda)m(0) + \frac{1}{\lambda}M_1H_0(1/2)D^{-1} \int_0^{1/2} g(1/2, t, \lambda) dm(t) - \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)D^{-1}m(t) dt + \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} \Omega(\tau)H_0(\tau)D^{-1}d\tau \int_0^{1/2} g(\tau, t, \lambda) dm(t) + \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} \Omega(\tau)H_0(\tau)D^{-1}g(\tau, 0, \lambda)m(0) d\tau - \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} \Omega(\tau)H_0(\tau)D^{-1}g(\tau, 1/2, \lambda)m(1/2)d\tau. \end{aligned}$$

Доказательство. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} U_{0x}(g(x, t, \lambda))m(t) dt = M_0H_0(0) \int_0^{1/2} g(0, t, \lambda)m(t) dt + \\ & + M_1H_0(1/2) \int_0^{1/2} g(1/2, t, \lambda)m(t) dt + \int_0^{1/2} \Omega(\tau)H_0(\tau)d\tau \int_0^{1/2} g(\tau, t, \lambda)m(t) dt = \end{aligned}$$



$$= -\frac{1}{\lambda} M_0 H_0(0) D^{-1} \int_0^{1/2} g'_t(0, t, \lambda) m(t) dt - \frac{1}{\lambda} M_1 H_0(1/2) D^{-1} \int_0^{1/2} g'_t(1/2, t, \lambda) m(t) dt -$$

$$-\frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} \Omega(\tau) H_0(\tau) d\tau D^{-1} \int_0^\tau g'_t(\tau, t, \lambda) m(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} \Omega(\tau) H_0(\tau) d\tau D^{-1} \int_\tau^{1/2} g'_t(\tau, t, \lambda) m(t) dt.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим требуемое. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь $g_\lambda m(x)$ из равенства (14).

Лемма 7. *Справедлива формула*

$$g_\lambda m(x) = -\frac{1}{\lambda} D^{-1} m(x) + \frac{1}{\lambda} D^{-1} g(x, 0, \lambda) m(0) - \frac{1}{\lambda} D^{-1} g(x, 1/2, \lambda) m(1/2) + \frac{1}{\lambda} D^{-1} \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda) dm(t).$$

Доказательство. Имеем:

$$g_\lambda m(x) = \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda) m(t) dt = \int_0^x g(x, t, \lambda) m(t) dt + \int_x^{1/2} g(x, t, \lambda) m(t) dt.$$

К каждому интегралу применим формулу интегрирования по частям и получим требуемое. Лемма доказана.

Значит, решение системы (12), (13) принимает вид

$$R_{0\lambda} m = I_1 + I_2 - \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1}(\lambda) M_0 H_0(0) D^{-1} \int_0^{1/2} g(0, t, \lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1}(\lambda) \times$$

$$\times M_1 H_0(1/2) D^{-1} \int_0^{1/2} g(1/2, t, \lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1}(\lambda) \int_0^{1/2} \Omega(t) H_0(t) D^{-1} m(t) dt -$$

$$-\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1}(\lambda) \int_0^{1/2} \Omega(\tau) H_0(\tau) D^{-1} d\tau \int_0^{1/2} g(\tau, t, \lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(\tau) \times$$

$$\times H_0(\tau) D^{-1} g(\tau, 0, \lambda) m(0) d\tau + \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(\tau) H_0(\tau) D^{-1} g(\tau, 1/2, \lambda) m(1/2) d\tau -$$

$$-\frac{1}{\lambda} D^{-1} m(x) + \frac{1}{\lambda} D^{-1} g(x, 0, \lambda) m(0) - \frac{1}{\lambda} D^{-1} g(x, 1/2, \lambda) m(1/2) + \frac{1}{\lambda} D^{-1} \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda) dm(t), \quad (15)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_0 H_0(0) D^{-1} g(0, 1/2, \lambda) m(1/2) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_1 H_0(1/2) D^{-1} g(1/2, 1/2 - 0, \lambda) m(1/2) - \frac{1}{\lambda} D^{-1} g(x, 1/2, \lambda) m(1/2),$$

$$I_2 = -\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_0 H_0(0) D^{-1} g(0, 0+, \lambda) m(0) -$$

$$-\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_1 H_0(1/2) D^{-1} g(1/2, 0, \lambda) m(0) + \frac{1}{\lambda} D^{-1} g(x, 0, \lambda) m(0).$$

Рассмотрим в (15) некоторые слагаемые.

Лемма 8. *Имеет место формула*

$$I_1 = \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_1 H_0(1/2) D^{-1} m(1/2) - \frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t) H_0(t) \times$$



$$\times Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)D^{-1}g(x, 1/2, \lambda) dt m(1/2).$$

Доказательство. В самом деле, за счет перестановочности диагональных матриц

$$I_1 = \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}ID^{-1}m(1/2),$$

где $I = M_0H_0(0)g(0, 1/2, \lambda) + M_1H_0(1/2)g(1/2, 1/2 - 0, \lambda) - \Delta_0Y^{-1}(x, \lambda)g(x, 1/2, \lambda)$.

Рассмотрим подробно I :

$$\begin{aligned} I &= M_0H_0(0)\text{diag}(-e^{-\lambda\omega_1/2}, -e^{-\lambda\omega_2/2}, 0, 0) + M_1H_0(1/2)\text{diag}(0, 0, 1, 1) - \\ &- M_0H_0(0)Y(0, \lambda)\text{diag}(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x})\text{diag}(-e^{\lambda\omega_1(x-1/2)}, -e^{\lambda\omega_2(x-1/2)}, 0, 0) - \\ &- M_1H_0(1/2)Y(1/2, \lambda)\text{diag}(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x})\text{diag}(-e^{\lambda\omega_1(x-1/2)}, -e^{\lambda\omega_2(x-1/2)}, 0, 0) - \\ &- \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)g(x, 1/2, \lambda) dt = M_0H_0(0)[\text{diag}(-e^{-\lambda\omega_1/2}, -e^{-\lambda\omega_2/2}, 0, 0) + \\ &+ \text{diag}(1, 1, 1, 1)\text{diag}(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x})\text{diag}(e^{\lambda\omega_1(x-1/2)}, e^{\lambda\omega_2(x-1/2)}, 0, 0)] + \\ &+ M_1H_0(1/2)[\text{diag}(0, 0, 1, 1) + \text{diag}(e^{\lambda\omega_1/2}, e^{\lambda\omega_2/2}, e^{\lambda\omega_3/2}, e^{\lambda\omega_4/2}) \times \\ &\times \text{diag}(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x})\text{diag}(e^{\lambda\omega_1(x-1/2)}, e^{\lambda\omega_2(x-1/2)}, 0, 0)] - \\ &- \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)g(x, 1/2, \lambda) dt = M_0H_0(0)[\text{diag}(-e^{-\lambda\omega_1/2}, -e^{-\lambda\omega_2/2}, 0, 0) + \\ &+ \text{diag}(e^{-\lambda\omega_1/2}, e^{-\lambda\omega_2/2}, 0, 0)] + M_1H_0(1/2)[\text{diag}(0, 0, 1, 1) + \text{diag}(1, 1, 0, 0)] - \\ &- \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)g(x, 1/2, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Первое слагаемое обращается в ноль, и мы получили требуемое. Лемма доказана.

Лемма 9. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1}m(0) + \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t) \times \\ &\times Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)D^{-1}g(x, 0, \lambda) dt m(0). \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.

Значит равенство (15) приобретает вид

$$\begin{aligned} R_{0\lambda}m &= \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1}m(0) + \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(1/2)D^{-1}m(1/2) + \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1} \times \\ &\times \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)D^{-1}m(t) dt - \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)g(0, t, \lambda) dm(t) - \\ &- \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(1/2)D^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)g(1/2, t, \lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(\tau) \times \\ &\times H_0(\tau)d\tau D^{-1} \int_0^{1/2} g(\tau, t, \lambda) dm(t) + \frac{1}{\lambda}D^{-1} \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}[\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2], \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{I}_1 = \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)g(x, 1/2, \lambda) dt D^{-1}m(1/2) - \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)g(t, 1/2, \lambda) dt D^{-1}m(1/2),$$

$$\tilde{I}_2 = - \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)g(x, 0, \lambda)dtD^{-1}m(0) + \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)g(t, 0, \lambda)dtD^{-1}m(0).$$

Лемма 10. В равенстве (16) $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим, например, \tilde{I}_1 :

$$\tilde{I}_1 = \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t) I dtD^{-1}m(1/2),$$

где $I = Y(t, \lambda)Y^{-1}(x, \lambda)g(x, 1/2, \lambda) - g(t, 1/2, \lambda)$. В свою очередь,

$$\begin{aligned} I &= \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 t}, e^{\lambda\omega_2 t}, e^{\lambda\omega_3 t}, e^{\lambda\omega_4 t}) \cdot \text{diag}(e^{-\lambda\omega_1 x}, e^{-\lambda\omega_2 x}, e^{-\lambda\omega_3 x}, e^{-\lambda\omega_4 x}) \times \\ &\times \text{diag}(-e^{\lambda\omega_1(x-1/2)}, -e^{\lambda\omega_2(x-1/2)}, 0, 0) - \text{diag}(-e^{\lambda\omega_1(t-1/2)}, -e^{\lambda\omega_2(t-1/2)}, 0, 0) = \\ &= \text{diag}(-e^{\lambda\omega_1(t-1/2)}, -e^{\lambda\omega_2(t-1/2)}, 0, 0) + \text{diag}(e^{\lambda\omega_1(t-1/2)}, e^{\lambda\omega_2(t-1/2)}, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично равенство устанавливается и для \tilde{I}_2 . Лемма доказана.

Равенство (16) теперь приобретает вид

$$R_{0\lambda}m = \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}J - \frac{1}{\lambda}D^{-1}m(x) + \Omega_\lambda m(x), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} J &= M_0H_0(0)D^{-1}m(0) + M_1H_0(1/2)D^{-1}m(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)D^{-1}m(t) dt, \\ \Omega_\lambda m(x) &= -\frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)g(0, t, \lambda) dm(t) - \\ &- \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(1/2)D^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)g(1/2, t, \lambda) dm(t) - \\ &- \frac{1}{\lambda}Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(\tau)H_0(\tau)d\tau D^{-1} \int_0^{1/2} g(\tau, t, \lambda) dm(t) + \frac{1}{\lambda}D^{-1} \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda) dm(t). \end{aligned}$$

Вернемся к лемме (5). Рассмотрим $R_{0\lambda}m$ при $m(x) = H_0^{-1}(x)D\Gamma g(x)$.

Лемма 11. Если $m(x) = H_0^{-1}(x)D\Gamma g(x)$ и $g(x)$ удовлетворяет условию (6), то

$$R_{0\lambda}m = -\frac{1}{\lambda}D^{-1}m(x) + \Omega_\lambda m(x). \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим J в равенстве (17) при $m(x) = H_0^{-1}(x)D\Gamma g(x)$:

$$\begin{aligned} J &= M_0H_0(0)D^{-1}H_0^{-1}(0)D\Gamma g(0) + M_1H_0(1/2)D^{-1}H_0^{-1}(1/2)D\Gamma g(1/2) + \\ &+ \int_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)D^{-1}H_0^{-1}(t)D\Gamma g(t) dt. \end{aligned}$$

Подставим $M_0 = S\Gamma$, $M_1 = T\Gamma$, $\Omega(t) = a(t)\Gamma$ из леммы (1) и воспользуемся перестановочностью диагональных матриц D^{-1} и $H_0(x)$, получим:

$$J = Sg(0) + Tg(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)g(t) dt.$$

Так как $g(x)$ удовлетворяет условию (6), то $J = 0$. Лемма доказана.



Лемма 12. В S_{δ_0} при больших $|\lambda|$

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} (\Omega_{\lambda} m)(x) d\lambda \right\|_{\infty} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Имеем:

$$\Omega_{\lambda} m(x) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где теперь

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_0 H_0(0) D^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t) H_0(t) g(0, t, \lambda) dm(t), \\ I_2 &= -\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_1 H_0(1/2) D^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(t) H_0(t) g(1/2, t, \lambda) dm(t), \\ I_3 &= -\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} \int_0^{1/2} \Omega(\tau) H_0(\tau) d\tau D^{-1} \int_0^{1/2} g(\tau, t, \lambda) dm(t), \quad I_4 = \frac{1}{\lambda} D^{-1} \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda) dm(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} M_0 H_0(0) D^{-1} \int_0^{1/2} \text{diag}(-e^{-\lambda\omega_1 t}, -e^{-\lambda\omega_2 t}, 0, 0) dm(t) = -\frac{1}{\lambda} Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1} \times \\ &\quad \times M_0 H_0(0) D^{-1} \int_0^{1/2} (-e^{-\lambda\omega_1 t} dm_1, -e^{-\lambda\omega_2 t} dm_2, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Так как (лемма 3) компоненты матрицы $Y(x, \lambda) \Delta_0^{-1}$ имеют оценку $O(1)$, то после перемножения компоненты вектора I_1 имеют вид

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} O(1) e^{-\lambda\omega_1 t} dm_1 + \int_0^{1/2} O(1) e^{-\lambda\omega_2 t} dm_2,$$

где $O(1)$ — разные ограниченные функции. Тогда, для произвольного $x \in [0, 1/2]$

$$|J_1| \leq \frac{c}{r} \int_0^{1/2} |e^{-\lambda\omega_1 t}| |dm_1|.$$

Зададим сколь угодно малое ε . Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\bigvee_0^{\delta}(m_1) < \varepsilon$. Значит,

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{c}{r} \int_0^{\delta} |e^{-\lambda\omega_1 t}| |dm_1| + \frac{c}{r} \int_{\delta}^{1/2} |e^{-\lambda\omega_1 t}| |dm_1| \leq \frac{c}{r} \int_0^{\delta} |dm_1| + \frac{c}{r} \int_{\delta}^{1/2} |e^{-\lambda\omega_1 \delta}| |dm_1| \leq \\ &\leq \frac{c}{r} \bigvee_0^{\delta}(m_1) + \frac{c}{r} |e^{-\lambda\omega_1 \delta}| \bigvee_0^{1/2}(m_1) \leq \frac{c}{r} \varepsilon + \frac{c}{r} |e^{-\lambda\omega_1 \delta}|, \end{aligned}$$

где через c обозначены разные константы. Также оценивается J_2 :

$$|J_2| \leq \frac{c}{r} \varepsilon + \frac{c}{r} |e^{-\lambda\omega_2 \delta}|.$$



Значит,

$$\|I_1\|_\infty \leq \frac{c}{r} \varepsilon + \frac{c}{r} |e^{-\lambda\omega_2\delta}|.$$

Аналогично оцениваются I_2, I_3, I_4 . Тогда

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} (\Omega_\lambda m)(x) d\lambda \right\|_\infty \leq \frac{c}{r} \varepsilon \int_{|\lambda|=r} |d\lambda| + \frac{c}{r} \int_{|\lambda|=r} |e^{-\lambda\omega_2\delta}| |d\lambda| = \pi \varepsilon + \frac{c}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

в силу произвольности ε . Лемма доказана.

Теорема 4. Если $f(x) \in \bar{\Delta}_A$, где $\bar{\Delta}_A$ — замыкание по норме $C[0, 1]$ области значений оператора A и $f(x) \in V[0, 1]$, то

$$\|f(x) - S_r(f, x)\|_\infty \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Известно [4], что $\bar{\Delta}_A$ состоит из непрерывных функций, удовлетворяющих условию (6). Рассмотрим $S_r(f, x)$. По лемме (5) для $x \in [0, 1/2]$:

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda = \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x) R_{0\lambda} (H_0^{-1} D\Gamma g) d\lambda \right)_1 + o(1).$$

По (18) имеем:

$$\begin{aligned} S_r(f, x) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \Gamma H_0(x) \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda} D^{-1} m(x) d\lambda \right)_1 - \left(\Gamma H_0(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \Omega_\lambda m(x) d\lambda \right)_1 + o(1) = \\ &= (\Gamma H_0(x) D^{-1} m(x))_1 - \left(\Gamma H_0(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \Omega_\lambda m(x) d\lambda \right)_1 + o(1). \end{aligned}$$

Так как $m(x) = H_0^{-1}(x) D\Gamma g(x)$, то

$$S_r(f, x) = f(x) - \left(\Gamma H_0(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \Omega_\lambda m(x) d\lambda \right)_1 + o(1).$$

Для $x \in [1/2, 1]$ получаем аналогичное равенство с $(\cdot)_3$ вместо $(\cdot)_1$. В силу леммы 12 теорема доказана.

Библиографический список

1. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С 115–142. DOI: 10.4213/sm1534.
2. Королева О.А., Хромов А.П. Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 2. С. 6–13.
3. Корнев В.В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С 33–50. DOI: 10.4213/sm601.
4. Королева О.А. О сходимости средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 63–67.

An Analogue of the Jordan–Dirichlet Theorem for the Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines

O. A. Koroleva

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, korolevaort@yandex.ru

In this paper the sufficient conditions (conditions such as Jordan–Dirichlet) expansion function $f(x)$ in a uniformly convergent series of eigenfunctions and associated functions of the integral operator whose kernel is suffering jumps on the sides of the square, inscribed in the unit square. As is known, this expansion requires to $f(x)$ is continuous and belong to the closure of the integral values operator. It turns out that if $f(x)$ also is a function of bounded variation, these conditions are also sufficient.

Key words: Jordan–Dirichlet theorem, resolvent, eigenvalues, eigenfunctions and associated functions.



References

1. Khromov A. P. Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines. *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 11, pp. 1669–1696. DOI: 10.4213/sm1534.
2. Koroleva O A., Khromov A. P. Integral operator with a kernel that has jumps on broken lines. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 6–13 (in Russian).
3. Kornev V. V., Khromov A. P. Uniform convergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.4213/sm601.
4. Koroleva O A. On Convergence of Riesz Means of the Expansions in Eigen and Associated Functions Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 1, iss. 2, pp. 63–67 (in Russian).

УДК УДК 501.1

К ЗАДАЧЕ О ЦЕЛОСТНОСТИ L -ФУНКЦИИ АРТИНА

В. Н. Кузнецов¹, В. В. Кривобок², Д. С. Степаненко³

¹Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KuznetsovVN@info.sgu.ru

²Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KrivobokVV@info.sgu.ru

³Ассистент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, stepanenko.dmitry@gmail.com

В работе определяется класс L -функций Артина, которые являются мероморфными функциями, полюсы которых лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ и совпадают с нулями Z -функций Дедекинда некоторых числовых полей.

Ключевые слова: L -функция Артина, теорема Брауэра.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть K — нормальное расширение числового поля k степени n и G — группа Галуа этого расширения. Пусть $\{M(g)\}_{g \in G}$ — представление группы G в группу матриц размерности $n \times n$ и χ — характер этого представления:

$$\chi(g) = \operatorname{Sp} M(g), \quad g \in G,$$

где $\operatorname{Sp} M(g)$ означает след матрицы $M(g)$.

L -функция Артина определяется следующим образом:

$$L(s, \chi) = L(s, \chi, K|k) = \prod_{\wp} \left| I - M \left(\left[\frac{K|k}{\wp} \right] \right) N(\wp^{-s}) \right|^{-1},$$

где \wp — неразветвленный простой идеал поля k , $\left[\frac{K|k}{\wp} \right]$ — автоморфизм Фробениуса (т. е. образующий элемент, связанный с расширением классов вычетов по модулю \wp), а $\left| I - M \left(\left[\frac{K|k}{\wp} \right] \right) N(\wp^{-s}) \right|$ — характеристический многочлен матрицы $M(g)$ при $\lambda = N(\wp)^{-s}$.

Отметим некоторые свойства L -функции Артина [1, 2].

1. $L(s, \chi)$ регулярна при $\sigma > 1$.

2. Если расширение $K|k$ абелево, а χ — простой характер, то определение функции $L(s, \chi)$ за вычетом множителей, относящихся к разветвленным простым идеалам, совпадает с L -функцией Дирихле.

3. Пусть Ω — промежуточное поле между K и k , являющееся нормальным над k . Пусть $H = \operatorname{Gal}(K|\Omega)$ так, что H — нормальный делитель в G и $G|H = \operatorname{Gal}(\Omega|k)$.

Тогда каждый характер χ группы $G|H$ можно очевидным образом рассматривать как характер группы G , причем $L(s, \chi, K|k) = L(s, \chi, \Omega|k)$.

4. Предположим, что χ — непростой характер в G , а именно $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Тогда $L(s, \chi) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$.



5. Предположим снова, что Ω — поле между K и k , но уже не обязательно нормальное над k . Пусть $H = \text{Gal}(K|\Omega)$ и пусть $G = \sum_i H_{\alpha_i}$ есть разложение группы G на правые классы смежности. Каждому характеру χ группы H соответствует индуцированный характер χ^* группы G :

$$\chi^*(\mu) = \sum_{\alpha_i \mu \alpha_i^{-1} \in H} \chi(\alpha_i \mu \alpha_i^{-1}), \mu \in G;$$

при этом $L(s, \chi^*, K|k) = L(s, \chi, K|\Omega)$.

В начале 1930-х гг. Артин высказал предположение о целостности L -функции в случае неглавного характера [1]. В направлении решения этой гипотезы Р. Брауэром в 1947 г. было доказано следующее утверждение [3].

Теорема (Брауэр). Неабелев характер χ можно разложить в виде линейной комбинации индуцированных характеров χ^* циклических подгрупп с целыми коэффициентами, т. е.

$$\chi = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{t_{\alpha}} n_{i,\alpha} \chi_{i,\alpha}^*.$$

Как следствие теоремы Брауэра, получается мероморфность L -функции Артина.

Действительно, рассмотрим семейство циклических подгрупп H_{α} группы G и семейство характеров χ_{α} этих циклических подгрупп. Из теоремы Брауэра следует, что неабелев характер χ можно разложить в виде линейной комбинации индуцированных характеров $\chi_{\alpha_i}^*$ с целыми коэффициентами. Отсюда в силу свойств L -функции Артина следует представление L -функции Артина в следующем виде:

$$L(s, \chi, K|k) = \frac{\prod_i L_i(s, \chi_i, K|k_{\alpha_i})^{n_i}}{\prod_j L_j(s, \chi_j, K|k_{\alpha_j})^{n_j}},$$

где χ_i, χ_j — характеры циклических групп $G(K|k_{\alpha})$, что и доказывает мероморфность L -функции Артина.

В 1949 г. Брауэр показал, что L -функция в случае неглавного характера является регулярной и не обращается в ноль при $\sigma \geq 1$, и возможные полюсы этой функции могут располагаться в критической полосе $0 < \sigma < 1$. В работе [4] приводится уточнение результата Брауэра, а именно показывается, что возможные полюсы L -функции могут лежать только на критической прямой $\sigma = 1/2$.

В данной статье указывается класс L -функций Артина, полюсы которых лежат на критической прямой $\sigma = 1/2$ и совпадают с нулями некоторой Z -функции Дедекинда.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть дано расширение $k \subset K$ с характером χ и группой Галуа G .

Теорема. Пусть для характера χ имеет место разложение

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{s_i} r_{ij} \chi_{ij}^0 - r_0 \chi_0^*(g), \quad (1)$$

где r_{ij} — положительные рациональные числа, а χ_{ij}^* — индуцированные характеры некоторых циклических подгрупп $G = \bigcup_{i=1}^m H_i$, где $H_i \cap H_j = \{e\}$, $i \neq j$. Тогда $L(s, \chi)$ — мероморфная функция, полюсы которой являются нулями некоторой Z -функции Дедекинда и лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

Доказательство. В силу (1) и свойства 4 L -функции Артина получаем:

$$L(s, \chi, K|k) = \frac{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{s_i} L^{r_{ij}}(s, \chi_{ij}, K|k_{ij})}{Z_K^{r_0}(s)}.$$

Отсюда в силу мероморфности функции $L(s, \chi)$ ее полюсы совпадают с некоторыми нулями Z -функции Дедекинда, которые в силу работы [4] лежат на критической прямой $\sigma = 1/2$.



Покажем, что существует достаточно много расширений и характеров Артина, удовлетворяющих условию (1).

Рассмотрим расширение Галуа $k \subset K$ с группой Галуа G .

Предположим, что группа G представима в виде $G = \bigcup_{i=1}^m H_i$, где H_i — циклические и $H_i \cap H_j = \{e\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим следующее представление характера χ :

$$\chi(g) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \chi|_{H_i}, & g \neq e, \\ \sum_{i=1}^m \chi|_{H_i} - (m-1)\chi(e), & g = e. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим $\hat{\chi} = \chi|_{H_i}$ и $\chi_0(g) = \begin{cases} n = [G], & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$

Предположим также, что

$$\hat{\chi}_i(g) = \sum_{(j=1)}^{s_i} r_{ij} \chi_{ij}^*(g), \quad g \in H_i, \quad (3)$$

где r_{ij} — некоторые положительные рациональные числа, а χ_{ij} — одномерные характеры подгрупп H_i .

В силу (2) и (3) выполняется соотношение (1)

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{s_i} r_{ij} \chi_{ij}^* - r_0 \chi_0^*(g).$$

Остановимся на примерах расширений, для которых выполняются (2) и (3).

Пример 1. Пусть G — неабелева группа 6-го порядка, т. е. $[G] = 6 = 2 \cdot 3$. В работе [2] показано, что неабелев характер можно представить в виде

$$\psi_3(g) = (\chi_1^* + \chi_2^*)(g) + \frac{1}{2}(\chi_{4,2}^* + \chi_{4,3}^*)(g) - \chi_0^*(g).$$

Пример 2. Рассмотрим случай, когда порядок группы G является произведением двух простых, т. е. $[G] = n = p_1 \cdot p_2$, $p_1 < p_2$. Как следует из теории конечных групп [5], в G существует нормальная подгруппа H порядка p_2 . Пусть H_1 — подгруппа порядка p_1 .

Известно [5], что если G неабелева, то $p_1 | (p_2 - 1)$ (в противном случае получим, что G — абелева). Рассмотрим группу $G|H$. Так как $G|H$ — циклическая группа порядка p_1 , каждый её характер является одномерным. Известно [2], что каждый характер группы $G|H$ продолжим на всю группу G , причем число таких характеров равно p_1 . Число сопряженных классов у подгруппы H_1 равно $p_1 - 1$ (порядок H_1 , за исключением тривиального класса e), у H два класса сопряженности (H и e), тогда общее число сопряженных классов равно $p_1 - 1 + 1 + 1 = p_1 + 1$.

Как показано в [6], число простых характеров группы G равно числу классов сопряженных элементов этой группы. Кроме того, имеет место равенство

$$\sum n_i^2 = n, \quad (4)$$

где n_i — размерность простого характера ψ_i , а $n = [G]$.

Следовательно, существуют $p_1 + 1$ простых характеров группы G . Из них p_1 одномерных — $\psi_1, \dots, \psi_{p_1}$ и один неодномерный — ψ . Пусть его «толщина» равна d , т. е. $\psi(e) = d$. Тогда по формуле (4) в нашем случае получим:

$$p_1 p_2 = 1^2 + \dots + 1^2 + d^2 p_1 (p_2 - 1) = d^2.$$

Извлечение корня возможно лишь в случае, когда $p_2 - 1 = p_1 d^2$ или $p_2 - 1 = p_1 d_1^2$. Тогда $d = p_1 d_1$. Рассмотрим соотношение ортогональности, приведенное в [6]:

$$\sum_{i=1}^{p_1} \psi_i(g) + \psi(e)\psi(g) = \chi_0^*(g). \quad (5)$$

Имеем $G = \left(\bigcup_{i=1}^{p_2} H_i \right) \cup H$. Тогда

$$\psi(g) = \left(\sum_{i=1}^{p_2} \psi|_{H_i} + \psi|_H \right)(g) - \frac{1}{p_1} \chi_0^*(g).$$

Найдем $\psi|_{H_i}$. Из соотношения (5) получаем:

$$\psi|_{H_i} = \begin{cases} d, & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases} \quad (6)$$

Если $\chi_1, \dots, \chi_{p_1-1}$ — одномерные простые характеры подгруппы H_1 , то $\sum_{\chi_i} \chi_i(g) = \begin{cases} p_1, & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$

Но $p_1 = d/d_1$. Следовательно,

$$\psi|_{H_i} = \begin{cases} d_1 \left(\sum_{\chi_i} \chi_i(g) \right), & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\chi_0^*(g) = \sum_{i=1}^{p_2} \chi_0(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \begin{cases} p_2, & g = e \\ 1, & g \neq e, \end{cases}$$

так как H_1 состоит из p_1 несопряженных элементов. Пусть $\chi_i \neq \chi_0$. Тогда

$$\chi_j^*(g) = \sum_{i=1}^{p_2} \chi_j(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \begin{cases} p_2, & g = e, \\ \chi_j(g), & g \neq e. \end{cases}$$

Так как все элементы не сопряжены в H_1 , то

$$\psi|_{H_1}(g) = d_1 \left(\sum_{\chi_i} \chi_i(g) \right) = \begin{cases} d = d_1 p_1, & g = e, \\ 0, & g \neq e, \end{cases} \quad (7)$$

В силу (6) и (7) получаем:

$$\psi|_{H_1}(g) = d_1 \left(\sum_{\chi_i} \chi_i(g) \right) = d_1 \frac{1}{p_2} \left(\sum_{\chi_i} \chi_i^*(g) \right). \quad (8)$$

И так для любой подгруппы из класса сопряженных подгрупп H_1, \dots, H_{p_2} .

Рассмотрим действие характера ψ на подгруппе H .

Так как ψ_j полностью определяются только на подгруппах H_i , а на H они равны 1, то из соотношения (5) имеем:

$$\psi|_H = \begin{cases} d, & g = e, \\ -1/d, & g \neq e. \end{cases} \quad (9)$$

С другой стороны, пусть χ_j — одномерные характеры группы H . Для подгруппы H имеется p_1 классов смежности. Поэтому имеем

$$\sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j^*(g) = \sum_{\chi_j \neq \chi_0} \sum_{i=1}^{p_1} \chi_j(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \sum_{i=1} \sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \begin{cases} (p_2 - 1)p_1, & g = e, \\ -p_1, & g \neq e \end{cases} = \begin{cases} d^2, & g = e, \\ -d/d_1, & g \neq e. \end{cases} \quad (10)$$

В силу (9) и (10) получаем:

$$\psi|_H(g) = \frac{1}{d} \left(\sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j^*(g) \right). \quad (11)$$



Таким образом, в силу (8) и (11) получаем:

$$\psi(g) = d_1 \left(\sum_{\chi_i} \chi_i^* \right) (g) + \frac{1}{d} \left(\sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j^* \right) (g) - d_1 \chi_0^*(g),$$

что соответствует условию (1) основной теоремы □.

Библиографический список

1. Artin E. Über eine neue Art von L -Reihen // Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. 1923. Vol. 3. P. 89–108.
2. Хейльброн Х. ζ -функции и L -функции // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1969. С. 310–348
3. Brauer R. On Artin's L -series with general group characters // Ann. of Math. 1947. Vol. 48. P. 502–514.
4. Степаненко Д. С. Об одном уточнении теоремы Брауэра относительно L -функций числовых полей // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 31–34.
5. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М. : Наука, 1972.
6. Ленг С. Алгебра. М. : Мир, 1968.

To the Problem of the Integrity of the Artin's L -functions

V. N. Kuznetsov, V. V. Krivobok, D. S Stepanenko

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KuznetsovVN@info.sgu.ru, KrivobokVV@info.sgu.ru, stepanenko.dmitry@gmail.com

In this paper was described a class of Artin's L -functions, each of which is meromorphic, their poles lays on the critical line $\text{Re } s = 1/2$ and coincides with zeroes of Dedekind's Z -functions of some fields.

Key words: Artin's L -function, Brauer's theorem.

References

1. Artin E. Über eine neue Art von L -Reihen. *Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.*, 1923, vol. 3, pp. 89–108.
2. Heilbronn H. ζ -functions and L -functions. *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, Washington, D.C., Thompson, 1967, pp. 310–348.
3. Brauer R. On Artin's L -series with general group characters. *Ann. of Math.*, 1947, vol. 48, pp. 502–514.
4. Stepanenko D. S. On verification of Brauer's Theorem concerning Artin's L -functions of Number Fields. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 31–34 (in Russian).
5. Kargaplov M. I., Merzliakov Iu. I. *Osnovy teorii grupp* [Fundamentals of Group Theory]. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).
6. Leng S. *Algebra*. Moscow, Mir, 1968 (in Russian).

УДК 517.518

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ P -ВАРИАЦИИ ОБОБЩЕННЫМИ СРЕДНИМИ АБЕЛЯ–ПУАССОНА И ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

А. А. Тюленева

Ассистент кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aatuleneva@km.ru

В работе доказывается асимптотическая оценка приближения обобщенными средними Абеля–Пуассона и логарифмическими средними p -вариационной метрике на классе функций с заданной мажорантой p -вариационных наилучших приближений. Получен ряд других количественных результатов о приближении этими средними.

Ключевые слова: функции ограниченной p -вариации, обобщенные средние Абеля–Пуассона, наилучшее приближение, p -вариационный модуль непрерывности.



concerning Artin's L-functions of number fields. *Izv. grupp [Перевод названия на англ. яз.]*. Moscow, Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform., 2012, Nauka, 1972 (in Russian).
vol. 12, iss. 4, pp. 31–34 (in Russian).
5. Kargapolov M. I., Merzliakov Iu. I. *Osnovy teorii* 6. Leng S. *Algebra*. Moscow, Mir, 1968 (in Russian).

УДК 517.518

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ P -ВАРИАЦИИ ОБОБЩЕННЫМИ СРЕДНИМИ АБЕЛЯ–ПУАССОНА И ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

А. А. Тюленева

Ассистент кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aatuleneva@km.ru

В работе доказывается асимптотическая оценка приближения обобщенными средними Абеля–Пуассона и логарифмическими средними p -вариационной метрике на классе функций с заданной мажорантой p -вариационных наилучших приближений. Получен ряд других количественных результатов о приближении этими средними.

Ключевые слова: функции ограниченной p -вариации, обобщенные средние Абеля–Пуассона, наилучшее приближение, p -вариационный модуль непрерывности.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая, ограниченная, 2π -периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем p -вариационную сумму:

$$\varkappa_{\xi}^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}$$

и p -вариационные модули непрерывности (см. [1]):

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup_{|\xi| \leq \delta} \varkappa_{\xi}^p(f), \quad |\xi| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}),$$

$$\omega_{k-1/p}(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), h), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$$

Здесь $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$, $k \in \mathbb{N}$. Пространство C_p функций f , удовлетворяющих равенству $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0$, является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_{\infty}, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi))$, где $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Можно рассматривать также обычный модуль непрерывности целого порядка $\omega_k(f, \delta)_{C_p} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_{C_p}$. Известно, что $\omega_k(f, \delta)_{C_p} \leq 2\omega_{k-1/p}(f, \delta)$ (см. [1]).

Пусть $T_n = \{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix), \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $E_n(f)_{C_p} := \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{C_p}$. Пространство интегрируемых на $[0, 2\pi]$ в p -й степени 2π -периодических функций $L_{2\pi}^p$ снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$. Для убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ определим $E_{C_p}(\varepsilon) = \{f \in C_p : E_n(f)_{C_p} \leq \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Пусть $\omega(\delta)$ возрастает, непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $\omega(0) = 0$ ($\omega \in \Omega$). Тогда будем писать $\omega \in N^{\alpha}$, $\alpha > 0$, если для $0 < \delta < \eta \leq 2\pi$ имеем $\omega(\eta) \leq C(\eta/\delta)^{\alpha} \omega(\delta)$, соответственно $\omega \in B$, если $\sum_{i=n}^{\infty} i^{-1} \omega(i^{-1}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega \in S^{\alpha}$, $\alpha > 0$, если $\sum_{i=1}^n i^{\alpha-1} \omega(i^{-1}) = O(\omega(n^{\alpha} \omega(n^{-1})))$, $n \in \mathbb{N}$. По поводу этих определений см. статью [2]. Для $\omega \in \Omega$ через $H_{1-1/p}^{\omega}$ обозначим пространство $\{f \in C_p : \omega_{1-1/p}(f, \delta) \leq C\omega(\delta), \delta \in [0, 2\pi]\}$ с нормой $\|f\|_{\omega, 1-1/p} = \|f\|_{C_p} + \sup_{0 < t \leq 2\pi} \omega_{1-1/p}(f, t)/\omega(t)$. Условие Бари для последовательностей см. в лемме 3.

Напомним, что для $f \in L_{2\pi}^1$ сопряженной функцией $\tilde{f}(x)$ называется интеграл

$$-\pi^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} (f(x+t) - f(x-t))/(2 \operatorname{tg} t/2) dt,$$



который существует п. в. на \mathbb{R} (см. [3, гл. 4, § 3]). Если $f, \tilde{f} \in L_{2\pi}^1$ и f имеет ряд Фурье $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, то \tilde{f} обладает рядом Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$.

Для $\lambda > -1$ и $f \in L_{2\pi}^1$ положим

$$A^\lambda(r, f)(x) = (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n S_n(f)(x),$$

где $S_n(f) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — сумма Фурье n -го порядка. При $\lambda = 0$ верно равенство

$$A^0(r, f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

т.е. получаются классические средние Абеля–Пуассона. Для дальнейшего нам понадобятся понятия свертки $f * g(x) := \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt$ функций $f, g \in L_{2\pi}^1$ и ядра Дирихле $D_n(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^n \cos kt = \sin(n+1/2)t/2 \sin t/2$, $t \neq 2\pi k$. Легко видеть, что $S_n(f) = \pi^{-1} f * D_n$ и что $|D_n(t)| \leq \pi/2t$, $t \in (0, \pi)$.

Обобщенные средние Абеля–Пуассона $A^\lambda(r, f)$, по-видимому, были введены Х. Ханом (H. Khan) [4], который дал критерий сходимости этих средних в точке при $r \rightarrow 1 - 0$. Им же [5] получены поточечные оценки обобщенного ядра Абеля–Пуассона (см. лемму 1), которые будут активно нами использоваться. Другие подходы к обобщению средних Абеля–Пуассона см. в [6, гл. 4]. Интересные оценки приближений классическими средними Абеля–Пуассона в $L_{2\pi}^p$ и $C_{2\pi}$ можно найти в работе М. Ф. Тимана [7]. Логарифмические средние произвольного ряда были определены Д. Борвейном (D. Borwein) [8]. Сходимость в точке логарифмических средних ряда Фурье была исследована Ф. Хсиангом (F. C. Hsiang) [9]. Они задаются равенством

$$L(r, f) = |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} r^{n+1} S_n(f) = f * J_r, \quad r \in (0, 1),$$

где $J_r = |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} r^{n+1} D_n$.

Будем писать $A(r) \asymp B(r)$, $r \in D$, если $C_1 A(r) \leq B(r) \leq C_2 A(r)$, где $C_2 > C_1 > 0$ не зависят от $r \in D$.

Целью нашей работы является получение точной по порядку двусторонней оценки приближения обобщенными средними Абеля–Пуассона $A^\lambda(r, f)$ и логарифмическими средними $L(r, f)$ на классе $E_{C_p}(\varepsilon)$ при $1/2 \leq r < 1$. Кроме того, установлен ряд количественных оценок приближения данными средними в p -вариационной метрике и связанной с ней метрике Гельдера. Данные результаты во многом аналогичны полученным Т. С. Чикиной (T. S. Chikina) [10] для средних Зигмунда–Рисса.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1 ([5]). Пусть $K_{r,\lambda}(t) = (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n D_n(t)$, где $D_n(t) = \sin(n+1/2)t/2 \sin t/2$.

Тогда

$$|K_{r,\lambda}(t)| = \begin{cases} O((1-r)^{-1}), & 0 \leq t \leq \pi(1-r), \quad 0 \leq r < 1, \\ O((1-r)^{\lambda+1}/t^{\lambda+2}), & t \geq \pi(1-r), \quad 0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 повторяет доказательство аналогичной теоремы в $L_{2\pi}^p$ и $C_{2\pi}$ (см. [11, гл. 6]).

Лемма 2. Пусть $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедлива обратная теорема приближения:

$$\omega_k(f, 1/n)_{C_p} \leq C n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_{i-1}(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает к нулю и удовлетворяет условию Бари $\sum_{i=n}^{\infty} a_i/i = O(a_n)$,

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx/n$. Тогда $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, и $E_n(f)_{C_p} \leq C a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогичное утверждение верно в $C_{2\pi}$.

Доказательство. В работе Б. И. Голубова [12] аналогичная оценка установлена в лемме 5 для функции $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx/n$ без дополнительного условия Бари. С другой стороны, в той же работе



в теореме 4 показано, что если $g \in C_p$, $E_n(g)_{C_p} \leq C_1 \varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty \downarrow 0$ удовлетворяет условию Бари (считаем выполненным неравенство $\sum_{n=1}^\infty \varphi_n/n \leq \varphi_0$), то для сопряженной функции $\tilde{g} = f$ также справедлива оценка $E_n(f)_{C_p} \leq C_2 \varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Утверждение для $C_{2\pi}$ принадлежит Н. К. Бари [13]. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $g \in L_{2\pi}^1$. Тогда $f * g \in C_p$ и $\omega_{1-1/p}(f * g) \leq \|g\|_1 \omega_{1-1/p}(f, \delta)$.

Лемма 4 получена в статье [12] для $\delta = 2\pi$. Анализ доказательства показывает, что неравенство верно для произвольного δ .

Лемма 5. Пусть $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\omega_{k-1/p}(f, \delta)$ принадлежит классу $N^{k-1/p}$ и класс N^α , $\alpha > 0$, содержится в любом классе S^β при $\beta > \alpha$.

Первое утверждение леммы 5 приведено с доказательством в статье [14], тогда как второе легко следует из леммы 2 известной статьи Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [2].

Основные идеи доказательства следующей леммы можно найти в статье [9].

Лемма 6. Для ядра J_r , $r \in (0, 1)$, имеем оценку

$$J_r(t) = \begin{cases} O(r(1-r)^{-1} |\ln(1-r)|^{-1}), & 0 \leq t \leq 1-r, \\ O(t^{-1} |\ln(1-r)|^{-1}), & 1-r \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

В частности, $\|J_r\|_1$ ограничены.

Доказательство. Поскольку

$$D_n(t) = t^{-1} \sin(n+1)t + \sin(n+1)t(1/2 \operatorname{tg} t/2 - 1/t) - \cos(n+1)t = t^{-1} \sin(n+1)t + O(1),$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty (n+1)^{-1} r^{n+1} D_n(t) &= O\left(\sum_{n=0}^\infty (n+1)^{-1} r^{n+1}\right) + \sum_{n=0}^\infty (n+1)^{-1} r^{n+1} t^{-1} \sin(n+1)t = \\ &= O(|\ln(1-r)|) + t^{-1} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^\infty r^n e^{int} n^{-1} = O(|\ln(1-r)|) + t^{-1} \operatorname{Im} \ln[(1 - re^{it})^{-1}] = \\ &= O(|\ln(1-r)|) + t^{-1} \operatorname{arctg}[r \sin t / (1 - r \cos t)]. \end{aligned}$$

Здесь рассматривается ветвь $\ln z$ со свойством $\ln(1) = 0$. При $0 < t \leq 1-r$ в силу неравенств $\operatorname{arctg} t < t$ и $\sin t < t$ имеем:

$$t^{-1} \operatorname{arctg}[r \sin t / (1 - r \cos t)] < t^{-1} r \sin t / (1 - r \cos t) < r / (1 - r),$$

откуда следует при $t \in (0, 1-r]$

$$J_r(t) = O(|\ln(1-r)|^{-1} r(1-r)^{-1} + |\ln(1-r)|^{-1} |\ln(1-r)|) = O(r(1-r)^{-1} |\ln(1-r)|^{-1}).$$

Докажем теперь, что сумма ряда $\sum_{n=0}^\infty r^{n+1} (n+1)^{-1} \sin(n+1/2)t$ ограничена. Пусть $t \in (\pi/(N+1), \pi/N]$. Тогда

$$\left| \sum_{n=0}^\infty r^{n+1} (n+1)^{-1} \sin(n+1/2)t \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N \right| + \left| \sum_{n=N+1}^\infty \right| = I_1 + I_2$$

и

$$I_1 \leq \sum_{n=0}^N r^{n+1} (n+1)^{-1} (n+1/2)t \leq (N+1)rt \leq (N+1)r2\pi/(N+1) \leq 2\pi.$$

Для оценки I_2 используем преобразование Абеля и формулу

$$\sum_{k=0}^n \sin(k+1/2)t = (1 - \cos(n+1)t) / 2 \sin t/2, \quad t \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Имеем в силу неравенств $\sin(t/2) \geq t/\pi$ на $[0, \pi]$ и $t^{-1} \leq \pi^{-1}(N+1)$

$$I_2 \leq \sum_{n=N+1}^\infty \left(\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{r^{n+2}}{n+2} \right) \left| \sum_{k=0}^n \sin(k+1/2)t \right| + \frac{r^{N+2}}{N+2} \left| \sum_{k=0}^N \sin(k+1/2)t \right| \leq$$



$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{r^{n+2}}{n+2} \right) \pi t^{-1} + \frac{r^{N+2}}{N+2} \pi t^{-1} \leq 2\pi(N+1)^{-1} t^{-1} r^{N+1} \leq 2.$$

Из оценок для I_1 и I_2 получаем:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} (n+1)^{-1} D_n(t) \right| \leq 2(\pi+1)/2 \sin t/2 \leq C_1 t^{-1}, \quad t \in (0, \pi),$$

и $J_r(t) \leq C_1 t^{-1} |\ln(1-r)|^{-1}$ при $1-r \leq t \leq \pi$. Последнее утверждение леммы выводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \|J_r\|_1 &= 2 \left(\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\pi} \right) |J_r(t)| dt \leq 2 |\ln(1-r)|^{-1} \left(\int_0^{1-r} C_2 r (1-r)^{-1} dt + \int_{1-r}^{\pi} C_1 t^{-1} dt \right) \leq \\ &\leq C_3 |\ln(1-r)|^{-1} (r + |\ln(1-r)|) \leq C_4 < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $-1 < \lambda < 1$, $1 < p < \infty$, $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ удовлетворяет условию Бари В. Тогда

$$\sup\{\|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p} : f \in E_{C_p}(\varepsilon)\} \asymp (1-r)^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^\lambda r^i \varepsilon_i, \quad 1/2 \leq r < 1. \quad (1)$$

Доказательство. Так как $(1-r)^{-\lambda-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n$, то для $g \equiv 1$ имеем $A^\lambda(r, g)(x) = g(x) = 1$.

Стандартным образом получаем:

$$\begin{aligned} A^\lambda(r, f)(x) - f(x) &= (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) K_{r,\lambda}(t) dt, \end{aligned}$$

где $K_{r,\lambda}(t)$ — то же, что в лемме 1. По лемме 1 находим, что

$$\begin{aligned} \|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p} &\leq C_1 \left(\int_0^{\pi(1-r)} \frac{\|\Delta_t^2 f(x)\|_{C_p}}{1-r} dt + (1-r)^{\lambda+1} \int_{\pi(1-r)}^{\pi} \frac{\|\Delta_t^2 f(x)\|_{C_p}}{t^{\lambda+2}} dt \right) \leq \\ &\leq C_2 \left(\omega_2(f, \pi(1-r))_{C_p} + (1-r)^{\lambda+1} \int_{\pi(1-r)}^{\pi} \frac{\omega_2(f, t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}} dt \right) = C_2(I_1 + I_2). \quad (2) \end{aligned}$$

Пусть $n = [1/(1-r)]$, т. е. $n+1 > 1/(1-r) \geq n$ и $\pi/(n+1) < \pi(1-r) \leq \pi/n$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\pi(1-r)}^{\pi} \frac{\omega_2(f, t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}} dt &\leq \int_{\pi(1-r)}^{\pi/n} \frac{\omega_2(f, t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}} dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} \frac{\omega_2(f, t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}} dt \leq \\ &\leq C_3 \left((n+1)^{-2} \omega_2(f, \pi/n)_{C_p} (1-r)^{-2-\lambda} + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_2(f, \pi/k)_{C_p} (k+1)^{\lambda+2} k^{-2} \right). \end{aligned}$$



Отсюда выводим оценку

$$I_2 = (1-r)^{\lambda+1} \int_{\pi(1-r)}^{\pi} \frac{\omega_2(f, t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}} dt \leq C_4 ((1-r)\omega_2(f, \pi/n)_{C_p} + (1-r)^{\lambda+1} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_2(f, \pi/k)_{C_p} k^\lambda) \leq C_5 \left((1-r)^{\lambda+1} \sum_{k=1}^n \omega_2(f, 1/k)_{C_p} k^\lambda \right), \quad (3)$$

так как $(1-r) \leq \max(2^\lambda, 1)(1-r)^{\lambda+1} n^\lambda$ при $\lambda > -1$.

Применяя лемму 2, получаем в силу неравенства $\lambda < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega_2(f, 1/k)_{C_p} k^\lambda &\leq C_6 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k k^{-2} i E_{i-1}(f)_{C_p} (k+1)^\lambda = \\ &= C_6 \sum_{i=1}^n i E_{i-1}(f)_{C_p} \sum_{k=i}^n k^{-2+\lambda} \leq C_7 \sum_{i=1}^n i^\lambda E_{i-1}(f)_{C_p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $r^i \geq r^n \geq (1-1/n)^n \geq 1/4$ при $1 \leq i \leq n = [1/(1-r)]$, находим, что

$$\sum_{i=1}^n i^\lambda E_{i-1}(f)_{C_p} \leq C_8 \sum_{i=0}^n (i+1)^\lambda r^i E_i(f)_{C_p} \leq C_8 \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^\lambda r^i E_i(f)_{C_p}. \quad (5)$$

Наконец, I_1 из правой части (2) оценивается следующим образом при $\lambda > -1$:

$$I_1 \leq \omega_2(f, \pi/n)_{C_p} \leq C_9 n^{-\lambda-1} \sum_{k=1}^n k^\lambda \omega_2(f, \pi/n)_{C_p} \leq C_{10} (1-r)^{\lambda+1} \sum_{k=1}^n k^\lambda \omega_2(f, 1/k)_{C_p}.$$

Другими словами, $I_1 = \omega_2(f, \pi(1-r))_{C_p}$ оценивается через правую часть (3). Из (3)–(5) окончательно имеем:

$$\|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p} = O \left((1-r)^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^\lambda r^i E_i(f)_{C_p} \right),$$

откуда следует верхняя оценка в (1).

Докажем оценку снизу в (1). Пусть $f_0(x) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n \cos nx/n$. Тогда по лемме 3 имеем $E_n(f)_{C_p} \leq C_{11} \varepsilon_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $E_0(f_0)_{C_p} \leq C_{11} \varepsilon_0$. С другой стороны, используя обозначения $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$, $\varepsilon'_n = \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем:

$$\begin{aligned} \|f_0 - A^\lambda(r, f_0)\|_{C_p} &\geq |f_0(0) - A^\lambda(r, f_0)(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_n}{n} - (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_k}{k} (1-r)^{\lambda+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n - \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_k}{k} (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{k-1} \binom{n+\lambda}{n} r^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как при $n \geq 1$ справедливо неравенство $\binom{n+\lambda}{n} \geq C_{12} n^\lambda$ (см. [15, Добавления, §9]), а $\binom{0+\lambda}{0} = 1$, то

$$\sum_{n=0}^{k-1} \binom{n+\lambda}{n} r^n \geq C_{12} \sum_{n=0}^{k-1} n^\lambda r^n \geq C_{13} k^{\lambda+1} r^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 2, \quad (7)$$

и аналогичное неравенство верно при $k = 1$. Поэтому из (6) и (7) следует при $1/2 \leq r < 1$ неравенство

$$\|f_0 - A^\lambda(r, f_0)\|_{C_p} \geq C_{13} (1-r)^{\lambda+1} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon'_k k^\lambda r^k \leq C_{14} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^\lambda r^i \varepsilon_i.$$

Из последней оценки вытекает оценка снизу в (1). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, $\lambda > -1$. Тогда

$$\omega_{1-1/p}(A^\lambda(r, f), \delta) \leq C(\lambda) \omega_{1-1/p}(f, \delta), \quad \delta \in [0, 2\pi].$$



Доказательство. По лемме 4 имеем $\omega_{1-1/p}(f * K_{r,\lambda}, \delta) \leq \|K_{r,\lambda}\|_1 \omega_{1-1/p}(f, \delta)$. Согласно лемме 1 получаем:

$$\begin{aligned} \|K_{r,\lambda}\|_1 &\leq \int_0^{\pi(1-r)} |K_{r,\lambda}(x)| dx + \int_{\pi(1-r)}^{\pi} |K_{r,\lambda}(x)| dx \leq C_1 (\pi(1-r)/(1-r) + \\ &+ (1-r)^{\lambda+1} \int_{\pi(1-r)}^{\pi} t^{-\lambda-2} dt) \leq C_2 \left(1 + \frac{(1-r)^{\lambda+1}}{(\pi(1-r))^{1+\lambda}(\lambda+1)} \right) < C_2 \frac{\lambda+2}{\lambda+1} < \infty. \end{aligned}$$

Из этих оценок вытекает утверждение теоремы.

Теорема 3. Пусть $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, $\lambda > -1/p$. Тогда

$$\|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p} = O(\omega_{1-1/p}(f, 1-r)), \quad r \in (0, 1).$$

Если же $\lambda > 1 - 1/p$, то

$$\|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p} = O(\omega_{2-1/p}(f, 1-r)), \quad r \in (0, 1).$$

Доказательство. Согласно оценке (2), в которой нет ограничения $\lambda < 1$, и в силу неравенства $\omega_k(f, \delta)_{C_p} \leq 2\omega_{k-1/p}(f, \delta)$ (см. [1]) имеем:

$$\|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p} \leq C_1 \left(\omega_{2-1/p}(f, 1-r) + (1-r)^{\lambda+1} \int_{\pi(1-r)}^{\pi} t^{-\lambda-2} \omega_{2-1/p}(f, t) dt \right). \quad (8)$$

По лемме 2 из [2] условие $\omega \in S^\alpha$ равносильно условию $\delta^\alpha \int_{\delta}^{\pi} t^{-\alpha-1} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0, \pi)$.

Поэтому правая часть (8) есть $O(\omega_{2-1/p}(f, 1-r))$ в том случае, когда $\omega_{2-1/p}(f, t) \in S^{\lambda+1}$. По лемме 5 это справедливо при $\lambda + 1 > 2 - 1/p$, т.е. при $\lambda > 1 - 1/p$. В силу очевидного неравенства $\omega_{2-1/p}(f, \delta) \leq 2\omega_{1-1/p}(f, \delta)$ первое утверждение теоремы доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $\omega(\delta)$, $\varphi(\delta)$ положительны на $(0, 2\pi]$, возрастают на $[0, 2\pi]$, $\omega(0) = \varphi(0) = 0$ и $\omega, \varphi \in C[0, 2\pi]$ причем $\eta(\delta) := \omega(\delta)/\varphi(\delta)$ возрастает на $(0, 2\pi]$. Тогда для $1 < p < \infty$, $\lambda > -1/p$ и $f \in H_{1-1/p}^\omega$ имеем:

$$\|A^\lambda(r, f) - f\|_{\varphi, 1-1/p} = O(\eta(1-r)), \quad r \in (0, 1).$$

Доказательство. Пусть $\delta \geq 1-r$. Тогда по теореме 3 получаем:

$$\frac{\omega_{1-1/p}(f - A^\lambda(r, f), \delta)}{\varphi(\delta)} \leq \frac{\|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{C_1 \omega(1-r)}{\varphi(1-r)} = C_1 \eta(1-r).$$

При $0 < \delta < 1-r$ находим по теореме 2:

$$\frac{\omega_{1-1/p}(f - A^\lambda(r, f), \delta)}{\varphi(\delta)} \leq \frac{\omega_{1-1/p}(f, \delta) + \omega_{1-1/p}(A^\lambda(r, f), \delta)}{\varphi(\delta)} \leq \frac{C_2 \omega(\delta)}{\varphi(\delta)} = C_2 \eta(\delta) \leq C_2 \eta(1-r).$$

Таким образом, $\sup_{0 < \delta \leq 2\pi} \omega_{1-1/p}((f - A_r(f), \delta)/\varphi(\delta)) = O(\lambda(1-r))$. Так как по теореме 3

$$\|A^\lambda(r, f) - f\|_{C_p} = O(\omega(1-r)) = O(\varphi(1-r)\lambda(1-r)) = O(\lambda(1-r)),$$

то утверждение теоремы 4 доказано.

Теорема 5. Пусть $1 < p < \infty$, последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$, убывающая к нулю, удовлетворяет двустороннему условию Бари $\sum_{k=n+1}^\infty \varepsilon_k/(k+1) \asymp \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\sup\{\|L(r, f) - f\|_{C_p} : f \in E_{C_p}(\varepsilon)\} \asymp |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=0}^\infty (n+1)^{-1} r^n \varepsilon_n, \quad 1/2 \leq r < 1.$$



Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 имеем:

$$L(r, f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) J_r(t) dt.$$

Полагая $n = [\pi/(1-r)]$ и используя лемму 6, получаем:

$$\begin{aligned} \|L(r, f) - f\|_{C_p} &\leq C_1 |\ln(1-r)|^{-1} \left((1-r)^{-1} \int_0^{1-r} \|\Delta_t^2 f(\cdot)\|_{C_p} dt + \int_{1-r}^{\pi} t^{-1} \|\Delta_t^2 f(\cdot)\|_{C_p} dt \right) \leq \\ &\leq C_2 |\ln(1-r)|^{-1} \left(\omega_2(f, 1-r)_{C_p} + \int_{1-r}^{\pi/n} t^{-1} \omega_2(f, t)_{C_p} dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} t^{-1} \omega_2(f, t)_{C_p} dt \right) \leq \\ &\leq C_3 |\ln(1-r)|^{-1} \left(\omega_2(f, 1-r)_{C_p} + \sum_{k=1}^n k^{-1} \omega_2(f, 1/k)_{C_p} \right) = \frac{C_3(I_1 + I_2)}{|\ln(1-r)|}. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя лемму 2, получаем аналогично (4)

$$\sum_{k=1}^n k^{-1} \omega_2(f, 1/k)_{C_p} \leq C_4 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k k^{-1} k^{-2} i E_{i-1}(f)_{C_p} = C_4 \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n k^{-3} i E_{i-1}(f)_{C_p} \leq C_5 \sum_{i=1}^n i^{-1} E_{i-1}(f)_{C_p}.$$

Так как $r^i \geq r^n \geq (1-\pi/n)^n \geq (1-\pi/4)^4$ при $0 \leq i \leq n$, $n \geq 4$, то имеем:

$$\sum_{i=1}^n i^{-1} E_{i-1}(f)_{C_p} \leq C_6 \sum_{i=0}^n (i+1)^{-1} r^i E_i(f)_{C_p} \leq C_6 \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{-1} r^i E_i(f)_{C_p}$$

при $n \geq 4$ и аналогичное неравенство при $n \leq 3$ и $1/2 \leq r < 1$. Легко видеть, что $I_1 \leq I_2$. Поэтому

$$\|L(r, f) - f\|_{C_p} \leq C_7 |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{-1} r^i E_i(f)_{C_p}$$

и оценка сверху доказана. Пусть $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n \cos nx/n$, где $\varepsilon'_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$, $\varepsilon'_n = \varepsilon_n$ при $n \geq 2$. Тогда по лемме 3 $E_0(f_0)_{C_p} \leq C_8 \varepsilon_0$, $E_n(f_0)_{C_p} \leq C_8 \varepsilon_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и мы находим, что

$$\begin{aligned} \|f_0 - L(r, f_0)\|_{C_p} &\geq |f_0(0) - L(r, f_0)(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_n}{n} - |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{k} = \\ &= |\ln(1-r)|^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_k}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_k}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} \right) = |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} r^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_k}{k} \geq \\ &\geq C_9 |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} r^{n+1} \varepsilon'_n \geq C_{10} |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} r^n \varepsilon_n \end{aligned}$$

при условии $1/2 \leq r < 1$. Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 с помощью леммы 6 доказываемся

Теорема 6. Пусть $f \in C_p$, $1 < p < \infty$. Тогда $\omega_{1-1/p}(L(r, f), \delta) \leq C \omega_{1-1/p}(f, \delta)$, $\delta \in [0, 2\pi]$.

Из неравенства (9) вытекает

Теорема 7. Если $f \in C_p$, $1 < p < \infty$ и $\int_0^{\pi} t^{-1} \omega_{1-1/p}(f, t) dt < \infty$, то

$$\|f - L(r, f)\|_{C_p} = O(|\ln(1-r)|^{-1}), \quad 1/2 \leq r < 1.$$

Замечание. Теоремы 1 и 5 верны в $C_{2\pi}$, поскольку лемма 3 справедлива в этом случае. Теоремы 6 и 7 дают возможность получить аналог теоремы 4 для логарифмических средних, но скорость сходимости в гильбертовых пространствах будет еще ниже, чем $O(|\ln(1-r)|^{-1})$.



Библиографический список

1. Терехин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
2. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с.
4. Khan H. On some aspects of summability // Indian J. Pure Appl. Math. 1975. Vol. 6, № 6. P. 1468–1472.
5. Khan H. On the degree of approximation // Math. Chronicle. 1981. Vol. 10, № 1. P. 63–72.
6. Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
7. Тиман М. Ф. Наилучшее приближение функций и линейные методы суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 29, № 3. С. 587–604.
8. Borwein D. A logarithmic method of summability // J. London Math. Soc. 1958. Vol. 33, № 2. P. 212–220.
9. Hsiang F. C. Summability of the Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 67, № 1. P. 150–153.
10. Chikina T. S. Approximation by Zygmund-Riesz means in the p -variation metrics // Analysis Math. 2013. Vol. 39, № 1. P. 29–44.
11. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.
12. Голубов Б. И. О наилучшем приближении p -абсолютно непрерывных функций // Некоторые вопросы теории функций и функционального анализа. Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1988. Т. 4. С. 85–99.
13. Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1955. Т. 19, № 5. С. 284–302.
14. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p -absolutely continuous functions // Analysis Math. 2000. Vol. 26, № 1. P. 63–80.
15. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

Approximation of Bounded p -variation Periodic Functions by Generalized Abel–Poisson and Logarithmic Means

A. A. Tyuleneva

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, aatuleneva@km.ru

An asymptotic estimate of approximation by generalized Abel–Poisson means in p -variation metric on the class of functions with given majorant of p -variational best approximation is proved. Several other quantity results on approximation by these means are obtained.

Key words: functions of bounded p -variation, generalized Abel–Poisson means, best approximation, p -variational modulus of continuity.

References

1. Terekhin A. P. The approximation of functions of bounded p -variation. *Izv. vysch. ucheb. zaved. Matematika*, 1965, no. 2. p. 171–187. (in Russian).
2. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties two conjugate functions. *Trudy Mosk. matem. obch.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522. (in Russian).
3. Zygmund A. *Trigonometricheskie riady* [Trigonometric series], vol. 1. Moscow, Mir, 1965, 616 p. (in Russian).
4. Khan H. On some aspects of summability. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 1975, vol. 6, no. 6, pp. 1468–1472.
5. Khan H. On the degree of approximation. *Math. Chronicle*, 1981, vol. 10, no. 1, pp. 63–72.
6. Hardy G. *Raskhodiashchiesia riady* [Divergent series]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1951, 504 p. (in Russian).
7. Timan M. F. Best approximation of functions and linear methods of summation of Fourier series. *Izvestiya AN SSSR. Ser. matem.*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 587–604 (in Russian).
8. Borwein D. A logarithmic method of summability. *J. London Math. Soc.*, 1958, vol. 33, no. 2, pp. 212–220.
9. Hsiang F. C. Summability of the Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1961, vol. 67, no. 1, pp. 150–153.
10. Chikina T. S. Approximation by Zygmund–Riesz means in the p -variation metrics. *Analysis Math.*, 2013, vol. 39, no. 1, pp. 29–44.
11. Timan A. F. *Teoriia priblizheniia funktsii deistvitel'nogo peremennogo* [Approximation theory of real variable functions]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 624 p. (in Russian).
12. Golubov B. I. On the best approximation p -absolutely continuous functions. Several questions of function theory and functional analysis, vol. 4. Tbilisi, Izd-vo Tbil. Univ., 1988, pp. 85–99 (in Russian).
13. Bari N. K. On the best approximations of two conjugate functions by trigonometric polynomials. *Izvestiya AN SSSR. Ser. matem.*, 1955, vol. 19, no. 5, pp. 284–302 (in Russian).
14. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p -absolutely continuous functions. *Analysis Math.* 2000, vol. 26, no. 1, pp. 63–80.
15. Bari N. K. *Trigonometricheskie riady* [Trigonometric series]. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 936 p. (in Russian).

МЕХАНИКА

УДК 62.534(031)

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ РУКИ РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

С. П. Безгласный¹, Е. С. Батина², А. С. Воробьев³

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, bezglasnsp@rambler.ru

²Студентка кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, katja4-2@mail.ru

³Инженер-конструктор, Государственный научно производственный ракетно-космический центр «ЦСКБ-Прогресс», Самара, svirex.hide@gmail.com

Работа посвящена проблеме синтеза активных управлений, решающих обратную задачу динамики о построении программных движений неавтономных механических систем. Актуальность исследований определена необходимостью в приборостроении математического конструирования систем управления автоматических механизмов, в частности — различных многозвенных аппаратов и роботоманипуляторов. В работе решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольных программных движений модели руки робота-манипулятора, моделируемой механической системой с тремя степенями свободы. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными. Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем управления механизмами в робототехнике и приборостроении.

Ключевые слова: программные движения, стабилизирующее управление, метод функции Ляпунова.

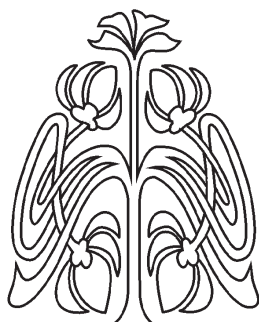
ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях системы являются актуальными, привлекают внимание многих исследователей в связи с бурным развитием робототехники и расширением сфер применения роботизированных систем и рассматриваются авторами во многих работах, например [1–5].

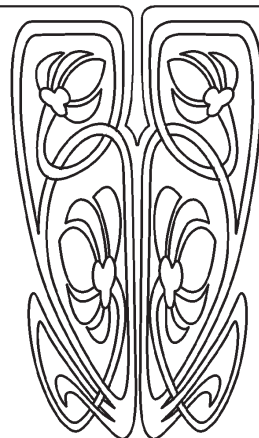
В данной работе ставится и решается задача об определении управления, реализующего и стабилизирующего произвольные заданные движения модели руки робота-манипулятора. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [6]. Метод предельных систем [7] и его модификация [8] позволяют при использовании функции Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение механической системы с тремя степенями свободы, моделирующей руку робота-манипулятора. Эта система представляет собой два цилиндра, вставленных один в другой, и не-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





кое тело (кисть, штамп) на конце выдвигаемого цилиндра. Параметры первого цилиндра: длина l_1 , внешний радиус R , внутренний радиус r , масса m_1 ; второго цилиндра: длина l_2 , радиус r , масса m_2 . Тело на конце второго цилиндра имеет массу m_3 и тензор инерции $J_3 = \text{diag}(A_3, B_3, C_3)$. $Oxyz$ — жестко связанная с первым цилиндром система координат, в точке O двустепенной шарнир, позволяющий манипулятору вращаться вокруг вертикали и поворачиваться вокруг горизонтали, совпадающей с осью Oy (рис. 1). Движение описывается тремя переменными: углом φ вращения вокруг вертикальной оси, углом ψ отклонения от вертикали и длиной x выдвижения второго цилиндра относительно первого.

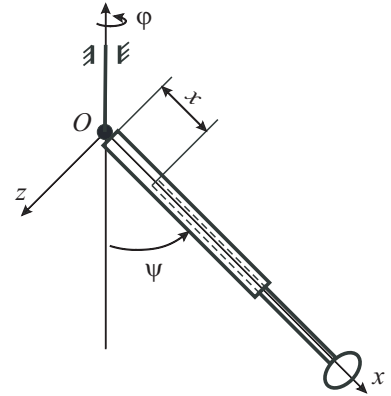


Рис. 1. Система

Поставим задачу о реализации управляющими силами произвольных заданных (программных движений) и о стабилизации этих движений.

Программным (желаемым) движением механической системы назовем ограниченную, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $r(t) = (\varphi^*(t), \psi^*(t), x^*(t))^T$, описывающую некоторое заданное движение механической системы.

Уравнения движения для рассматриваемой системы составим в форме уравнений Лагранжа второго рода в связанной системе координат $Oxyz$. Выберем вектор обобщенных координат $q = (\varphi, \psi, x)^T$, запишем кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{1}{48}(24(m_2 + m_3)\dot{x}^2 + ((3(r^2 + R^2)(3 + \cos(2\psi)) + 8 \sin(\psi)^2 l_1^2)m_1 + 24(A_3 \cos(\psi)^2 + C_3 \sin(\psi)^2 + \sin(\psi)^2 l_2^2 m_3 + 2 \sin(\psi)^2 l_2 m_3 x + \sin(\psi)^2 m_3 x^2) + m_2(8 \sin(\psi)^2 l_2^2 + 24 \sin(\psi)^2 l_2 x + 3(r^2(3 + \cos(2\psi)) + 8 \sin(\psi)^2 x^2)))\dot{\varphi}^2 + 2((3(r^2 + R^2) + 4l_1^2)m_1 + m_2(3r^2 + 4l_2^2 + 12l_2 x + 12x^2) + 12(B_3 + l_2^2 m_3 + 2l_2 m_3 x + m_3 x^2))\dot{\psi}^2) = T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}.$$

Квадратичная по скоростям форма T_2 определяется симметричной положительно определенной ограниченной матрицей $A = \{a_{ij}\}$ с элементами

$$a_{11} = \frac{1}{24}((3(r^2 + R^2)(3 + \cos(2\psi)) + 8 \sin(\psi)^2 l_1^2)m_1 + 24(A_3 \cos(\psi)^2 + C_3 \sin(\psi)^2 + \sin(\psi)^2 l_2^2 m_3 + 2 \sin(\psi)^2 l_2 m_3 x + \sin(\psi)^2 m_3 x^2) + m_2(8 \sin(\psi)^2 l_2^2 + 24 \sin(\psi)^2 l_2 x + 3(r^2(3 + \cos(2\psi)) + 8 \sin(\psi)^2 x^2))),$$

$$a_{22} = \frac{1}{12}((3(r^2 + R^2) + 4l_1^2)m_1 + m_2(3r^2 + 4l_2^2 + 12l_2 x + 12x^2) + 12(B_3 + l_2^2 m_3 + 2l_2 m_3 x + m_3 x^2)),$$

$$a_{33} = m_2 + m_3, \quad a_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

можно переписать в виде

$$A\ddot{q} + M = Q_{\text{вн}} + Q_u, \quad (1)$$

где через $M = M(q, \dot{q})$ обозначен вектор-столбец с компонентами

$$M_i = \dot{q}^T \frac{\partial A_i}{\partial q} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q} \quad (i = \overline{1, 3}).$$

вычисляемыми по формуле

$$M_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (2)$$



Вектор обобщенных сил $Q = Q_{\text{вн}} + Q_u$ представляет собой сумму внешних сил $Q_{\text{вн}}$, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий Q_u , определяемых в дальнейшем.

В общем случае функция $r(t)$, описывающая программное движение тела, может не являться решением системы (1). Поэтому реализацию программных движений будем рассматривать как задачу о двухуровневом управлении, разделив управляющие воздействия на две группы:

$$Q_u = Q_{\text{пр}} + Q_{\text{ст}},$$

где $Q_{\text{пр}}$ — силы, реализующие программное движение, $Q_{\text{ст}}$ — стабилизирующие его.

2. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $(r(t), \dot{r}(t))$. Прямой подстановкой функции $r(t)$ в уравнение (1) определим управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q_{\text{пр}} = A(r)\ddot{r} + M(r, \dot{r}) - Q_{\text{вн}}(t, r, \dot{r}), \quad (3)$$

где координаты вектора $M = M(r, \dot{r})$ вычисляются по формулам, получающимся из формул (2) заменой q и \dot{q} на r и \dot{r} соответственно.

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче о стабилизации решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит, как и в [9], применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты [8], разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем.

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $x = q - r(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^T A(x + r) \dot{x} + \dot{r}^T A(x + r) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{r}^T A(x + r) \dot{r}.$$

Вычислив производные

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= A\ddot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x} + A\ddot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r}, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{r}, \end{aligned}$$

получим уравнения движения в отклонениях:

$$A\ddot{x} + M + M' + M'' + A\ddot{r} = Q_{\text{вн}} + Q_u, \quad (4)$$

где $Q_{\text{вн}} = Q_{\text{вн}}(t, r + x, \dot{r} + \dot{x})$, $M = M(x, \dot{x})$ обозначает вектор-столбец, компоненты которого M_i определены равенствами:

$$M_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j \quad (i = \overline{1,3}),$$

M' — вектор-столбец с компонентами

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j \quad (i = \overline{1,3}),$$

M'' — вектор-столбец с компонентами

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j \quad (i = \overline{1,3}).$$



3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть C — неисчезающая ограниченная диагональная матрица, удовлетворяющая условиям

$$c_0 E \leq C = \text{const} \leq c_1 E \quad (0 < c_0 < c_1 - \text{const}), \quad (5)$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим положительно определенную, допускающую бесконечно малый высший предел функцию Ляпунова:

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} x^T C x + \frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x}. \quad (6)$$

Тогда ее полная производная по времени будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)^T \ddot{x} = \dot{x}^T C x + \dot{x}^T A \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x},$$

и в силу системы (4) получим:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T C x + \dot{x}^T (-M - M' - M'' - A\ddot{r} + Q_{\text{вн}} + Q_u) + \frac{1}{2} \dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x}.$$

Обозначим

$$-\dot{x}^T M + \frac{1}{2} \dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{x} = \frac{1}{2} \dot{x}^T N,$$

где символ N — вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j \quad (i = \overline{1,3}).$$

Учитывая, что

$$M' = \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{x}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} = \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} - \frac{1}{2} \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x},$$

перепишем полученное выражение для производной следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{x} \right) \dot{r} - \frac{1}{2} \dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} + \dot{x}^T \left(\dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x^T} \right) \dot{x} + \dot{x}^T (C x - M'' - A\ddot{r} + Q_{\text{вн}} + Q_u) + \frac{1}{2} \dot{x}^T N.$$

Пусть существует положительно определенная матрица D такая, что выполняется условие

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r} \frac{\partial A}{\partial x} + L + D \right) \geq d_0 E \quad (d_0 > 0 - \text{const}), \quad (7)$$

где L — матрица, задающая квадратичную форму $\dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial x^T} \right) \dot{r}$, т.е. матрица с элементами $\{l_{ik}\}$, вычисляемая через элементы матрицы A по правилу

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_j \quad (i, k = \overline{1,3}).$$

Выберем стабилизирующее управление согласно равенству

$$Q_{\text{ст}} = -C x - D \dot{x} + M'' + A\ddot{r} - Q_{\text{вн}} - Q_{\text{пр}}. \quad (8)$$

При управлении (8) полная производная от функции (6) по времени в силу системы (4) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r} \frac{\partial A}{\partial x} + L + D \right) \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T N, \quad (9)$$



где последнее слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей \dot{x} . При управлении (8) и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения $x = \dot{x} = 0$) производная (9) согласно условию (7) будет иметь оценку

$$\frac{dV}{dt} \simeq -\dot{x}^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \dot{x}^T} \dot{r} - \dot{r} \frac{\partial A}{\partial x} + L + D \right) \dot{x} \leq -d_0 \|\dot{x}\|^2 \leq 0$$

и тем самым будет определено отрицательной по скоростям функцией. Пусть вектор-функции M и M' удовлетворяют условию Липшица равномерно по x относительно t , и предельная система существует, имеет аналогичный вид, и множество $\{\dot{x} = 0\}$ не содержит решений предельной системы, кроме $x = \dot{x} = 0$. Тогда на основе теоремы из [8] об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы можно сделать вывод, что управление (8) при выполнении условия (7) решает задачу стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (4). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

4. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть движение происходит в поле силы тяжести без внешних возмущающих воздействий, т.е.

$$Q_{\text{вн}}^1 = 0, \quad Q_{\text{вн}}^2 = \frac{1}{2} l_1 m_1 \sin \psi + g m_2 \left(\frac{l_2}{2} + x \right) \sin \psi + g m_3 (l_2 + x) \sin \psi, \quad Q_{\text{вн}}^3 = -g m_2 \cos \psi - g m_3 \cos \psi.$$

Для программного движения $r(t) = (\varphi^*(t), \psi^*(t), x^*(t))^T$ и отклонений $\varphi = x_1 + \varphi^*$, $\psi = x_2 + \psi^*$, $x = x_3 + x^*$ согласно (7) имеем, что управление $Q_u = Q_{\text{пр}} + Q_{\text{ст}}$ с компонентами $Q_u = (Q_u^1, Q_u^2, Q_u^3)$ (явный вид опущен ввиду громоздкости) реализует и стабилизирует выбранное программное движение.

В качестве иллюстрации численно проинтегрируем и представим графики величин x_i , \dot{x}_i ($i = 1, 2, 3$) для системы. Зададим параметры системы: $l_1 = 0.5$ м, $R = 0.1$ м, $r = 0.09$, $m_1 = 0.5$ кг, $l_2 = 0.5$ м, $m_2 = 0.15$ кг, $m_3 = 0.2$ кг, $A_3 = 1$ кг·м², $B_3 = 1$ кг·м², $C_3 = 4$ кг·м².

В качестве программного движения зададим равномерное вращение вокруг вертикальной оси первого цилиндра с постоянным углом наклона и выдвигающимся по периодическому закону вторым цилиндром:

$$\begin{cases} \varphi^*(t) = t, \\ \psi^*(t) = \pi/2, \\ x^*(t) = \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{4} \cos t. \end{cases}$$

Для матриц C и D выбраны $c_{ii} = d_{ii} = 35$, $i = 1, 2, 3$.

На рис. 2, а-в изображены зависимости отклонений x_1 , x_2 , x_3 от времени при следующих начальных условиях: $x_1(0) = 0.2$, $\dot{x}_1(0) = 0.01$, $x_2(0) = 0.04$, $\dot{x}_2(0) = 0.02$, $x_3(0) = 0.1$, $\dot{x}_3(0) = 0.03$.

На рис. 2, г-е изображены зависимости величин \dot{x}_1 , \dot{x}_2 , \dot{x}_3 от времени при тех же начальных условиях.

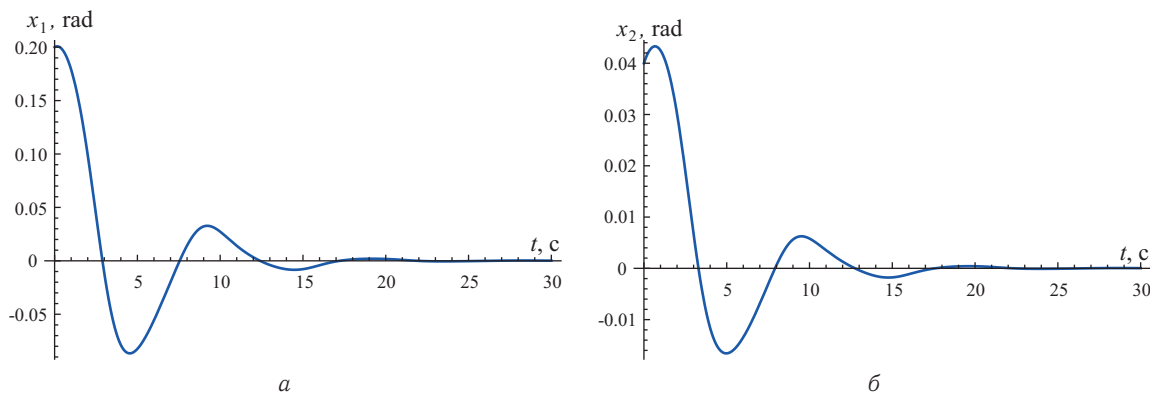


Рис. 2. Графики поведения отклонений $x_1(t)$ (а), $x_2(t)$ (б)

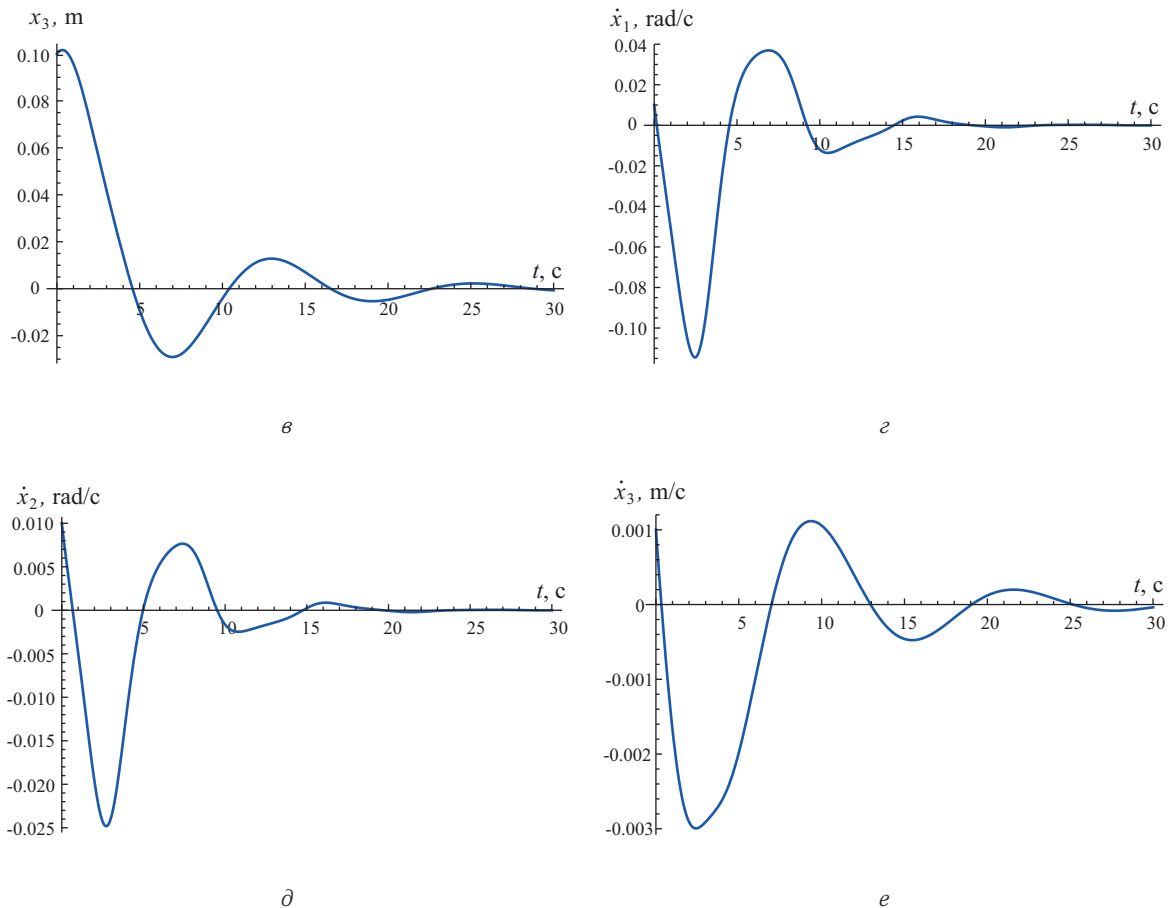


Рис. 2. Окончание. Графики поведения отклонения $x_3(t)$ (а) и скоростей отклонений $\dot{x}_1(t)$ (б), $\dot{x}_2(t)$ (в), $\dot{x}_3(t)$ (г)

Поведение решений иллюстрирует асимптотическую устойчивость реализованного движения.

В работе синтезированы произвольные асимптотически устойчивые программные движения модели руки робота-манипулятора с помощью активного двухуровневого управления. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Итоги работы развивают соответствующие результаты из [5, 9, 10].

Библиографический список

1. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М. : Высш. шк., 1989. 447 с.
2. Летов А. М. Динамика полета и управления. М. : Наука, 1969. 359 с.
3. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. Построение систем программного движения. М. : Наука, 1971. 352 с.
4. Зубов В. И. Проблема устойчивости процессов управления. Л. : Судостроение, 1980. 375 с.
5. Смирнов Е. Я., Павликов И. Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В. Управление движением механических систем. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. 347 с.
6. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М. : Мир, 1980. 301 с.
7. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. P. 216–223.
8. Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 2. С. 225–232.
9. Bezglasnyi S. P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math. 2004. Vol. 14, № 1–2. P. 251–266.
10. Безгласный С. П., Мысина О. А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 44–52.



Synthesis of Asymptotically Stable Motion of a Robot Arm Manipulator

S. P. Bezglasnyi¹, E. S. Batina¹, A. S. Vorobyov²

¹S. P. Korolyov Samara State Aerospace University, Russia, 443086, Samara, Moskovskoe sh., 34 bezglasnsp@rambler.ru, katja4-2@mail.ru

²State Research and Production Space-Rocket Center «TsSKB-Progress», Russia, 443009, Samara, Zemets str., 18, svirex.hide@gmail.com

The paper is about an active control problem. It solves the inverse problem of dynamics and concerns with construction of program motions of non-autonomous mechanical systems. This study is important and necessary in software design of automated systems for control of mechanisms. In particular, it is used in various modeling problems of robot-manipulators. Here, we construct all possible asymptotically stable program motions for a model of robots arm-manipulator, which is simulated by a mechanical system with three degrees of freedom. The control force is obtained in the form of closed form solution in the class of continuous functions. The stabilization problem is solved by the direct Lyapunov's method with the use of limiting functions and systems. In this case, we are able to restrict ourselves to Lyapunov's functions having constant sign derivatives. Our results are a valuable contribution to development of control mechanisms in robotics and engineering.

Key words: programm motion, stabilizing control, the method of Lyapunov's functions.

References

1. Afanasyev V. N., Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya* [The mathematical theory of design of control systems]. Moscow, Vyssh. shk., 1989, 447 p. (in Russian).
2. Letov A. M. *Dinamika poleta i upravleniya* [Flight Dynamics and Control]. Moscow, Nauka, 1969, 359 p. (in Russian).
3. Galiullin A. S., Mukhametzhanov I. A., Mukharlyamov R. G., Furasov V. D. *Postroenie sistem programm-nogo dvizheniya* [Building Systems software movement]. Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russian).
4. Zubov V. I. *Problema ustoychivosti protsessov upravleniya* [Stability problem management processes]. Leningrad, Shipbuilding, 1980, 375 p. (in Russian).
5. Smirnov E. Y., Pavlikov I. J., Shcherbakov P. P., Jurkov A. V. *Upravlenie dvizheniem mekhanicheskikh sistem* [Motion control of mechanical systems]. Leningrad, Leningrad State University, 1985. 347 p. (in Russian).
6. Rush N., Abets P., Laloy M. *Priamoi metod Liapunova v teorii ustoychivosti* [Direct method of Lyapunov stability theory]. Moscow, Mir, 1980, 301 p. (in Russian).
7. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations. *J. Differ. Equat.*, 1977, vol. 23, pp. 216–223.
8. Andreev A. S. The asymptotic stability and instability of the zeroth solution of a non- autonomous system. *J. Appl. Math. Mech.*, 1984, vol. 48, no. 2, pp. 225–232. (in Russian)
9. Bezglasnyi S. P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems. *Korean J. Comput. and Appl. Math.*, 2004, vol. 14, no. 1–2, pp. 251–266.
10. Bezglasnyi S. P., Mysina O. A. Stabilization of program motions of a rigid body on a moving platform. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 44–52 (in Russian).

УДК 539.3+612.311

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКЦИИ ОРТОДОНТИЧЕСКОГО АППАРАТА НА РАСШИРЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ЧЕЛЮСТИ

С. М. Босяков¹, А. Н. Доста², А. В. Винокурова³

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет, Минск, bosiaikov@bsu.by

²Кандидат медицинских наук, доцент кафедры ортопедической стоматологии, Белорусский государственный медицинский университет, Минск, dostastom75@mail.ru

³ Аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет, Минск, janeraven@mail.ru

В работе представлены результаты конечно-элементного расчета напряженно-деформированного состояния верхнечелюстного комплекса человека, возникающего при активации ортодонтического аппарата HYRAX. Модели черепа и опорных зубов верхнего зубного ряда получены на основании томографических данных для сухого интактного черепа взрослого человека. Конструкции ортодонтического аппарата отличаются расположением винта и стержней относительно неба. Определены эквивалентные напряжения и перемещения костей верхней челюсти и опорных зубов. Показано, что при расположении стержней и винта ортодонтического аппарата в горизонтальной плоскости в верхнечелюстном комплексе



возникают наиболее высокие напряжения, но наблюдается наклонно-вращательное перемещение зубов и перемещение вверх костей верхней челюсти. При активации ортодонтического аппарата с винтом, расположенным у неба, возникают нежелательные напряжения в костях черепа; перемещения костей и опорных зубов направлены вниз. Определены положения винта ортодонтического аппарата, обуславливающие поступательное перемещение костей верхней челюсти.

Ключевые слова: быстрое верхнечелюстное расширение, ортодонтический аппарат HYRAX, конечно-элементный анализ, напряженно-деформированное состояние, черепно-лицевой комплекс.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство методик коррекции сужений верхней челюсти применяют поперечные силы, которые развивают съемные или несъемные ортодонтические аппараты [1]. Технология верхнечелюстного расширения имеет долгую историю, развитие которой можно проследить по работам [2–5]. Влияние быстрого расширения верхней челюсти у пациентов без расщелины неба достаточно хорошо исследовано клинически [6–10] с использованием фотоупругости и голографии [1, 11–14]. Реакция костей черепа на верхнечелюстное расширение исследована цефалометрически [15], а также посредством тензометрических измерений [16, 17]. Для лучшего понимания влияния быстрого расширения неба выполнено достаточно много конечно-элементных исследований [2–5, 18–31]. В указанных клинических, экспериментальных и теоретических исследованиях показано, что использование ортодонтических аппаратов, развивающих трансверсальные силы, позволяет увеличить верхнечелюстной поперечный размер, но является достаточно сложной процедурой, вызывающей значительные побочные эффекты, в частности вывих опорных зубов и связанную с этим фенестрацию кортикальной пластины, резорбцию корня и рецессию десны [31]. Расширение верхней челюсти может ассоциироваться с ощущениями давления в различных областях ее сочленения, в частности, в области скуловых костей и переносицы, а также может сопровождаться рядом осложнений [32]. Для прогнозирования изменений в костях и хрящевых соединениях верхнечелюстного комплекса, а также представления о конечном терапевтическом эффекте в первую очередь необходимы сведения о нагрузке, развиваемой ортодонтическим аппаратом [2, 3, 5, 18, 22, 23, 27, 28, 30]. В то же время в большинстве конечно-элементных исследований, связанных с расчетом напряженно-деформированного состояния черепа или верхней челюсти при быстром верхнечелюстном расширении, не рассматривается реальная конструкция ортодонтического аппарата. Нагружение осуществляется за счет приложения сосредоточенных трансверсальных сил (от 1 Н до 300 Н) к зубам, в частности, премолярам и молярам [2, 4, 21–23, 27], или посредством перемещений зубов на расстояния, соответствующие определенным количествам оборотов ортодонтического винта (от 0.2 мм до 5 мм) [18, 22, 24, 28, 30]. В работе [3] выполняется моделирование ортодонтического аппарата типа HYRAX, но, тем не менее, нагружение зубов осуществляется перемещением группы зубов верхнего зубного ряда, а не активацией винта аппарата. Важные результаты в этом направлении получены в исследовании [5], где, помимо высокоточной модели черепа человека, выполнено построение модели ортодонтического аппарата, и нагружение осуществляется как при смещении пружин аппарата, так и посредством приложения сосредоточенной нагрузки. После проведения сравнительного анализа авторами сделан вывод о том, что простые подходы, основанные на приложении сосредоточенной силы или перемещения, не отражают реальной ситуации и дают некачественные результаты при моделировании верхнечелюстного расширения. В настоящей работе проведен анализ влияния конструкции ортодонтического аппарата HYRAX на возникающее после его начальной активации напряженно-деформированное состояние верхнечелюстного комплекса.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧЕРЕПА И ОРТОДОНТИЧЕСКОГО АППАРАТА

Стереолитографическая модель черепа получена с применением программы для обработки медицинских изображений MIMICS 14.12 (Materialise's Interactive Medical Image Control Systems, Materialise BV, Leuven, Belgium) на основании 210 томографических изображений высушенного трупного интактного черепа взрослого человека с хорошо сохранившимися альвеолярными отростками и зубами. Отметим, что использование для томографии сухого черепа взрослого человека представляется достаточным для разработки твердотельной трехмерной геометрической модели [2, 21, 22, 24], тем более, что согласно исследованию [13] при действии ортодонтических сил на сухой череп начальная реакция аналогична реакции черепа в естественных условиях. Шаг томографических срезов составляет 1 мм.



При генерации стереолитографической (STL) модели удалены первые и вторые премоляры верхней челюсти (14, 15 и 24, 25 зубы), а также постоянные моляры (16 и 26 зубы), на которые устанавливается ортодонтический аппарат. Конечно-элементная модель получена после обработки STL-модели в модуле 3-matic 6.1 пакета MIMICS. Импортрование дискретной модели черепа в программную среду пакета ANSYS Workbench 13 (ANSYS Inc., USA) выполнено с помощью компонента Finite Element Modeler. Полученная модель содержит 26445 узлов и 91731 элемент типа Solid72. Конечно-элементное разбиение выполнялось в автоматическом режиме. Результат импортрования и STL-модель показаны на рис. 1, а, б.

Моделирование периодонтальной связки не выполнялось, поскольку согласно работе [34] наличие периодонта практически не влияет на распределение напряжений в костях челюстно-лицевого комплекса при действии различных типов нагрузок. Шовные соединения верхнечелюстного комплекса также не учитывались в конечно-элементной модели. Это обусловлено тем, что в черепе взрослого человека швы частично или полностью окостеневают [18].

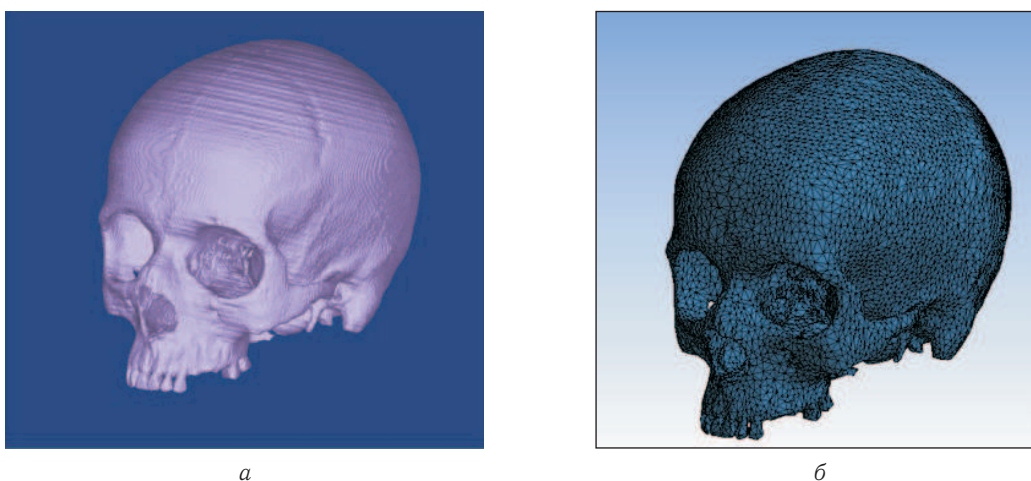


Рис. 1. Стереолитографическая (а) и конечно-элементная (б) модели интактного черепа человека без нижней челюсти

Твердотельные модели премоляров и первого моляра черепа человека также получены на основании томографических данных черепа человека с применением CAD-пакета SolidWorks 2010 (SolidWorks Corporation, USA). С помощью графических примитивов этого пакета построена модель ортодонтического аппарата HYRAX с коронками, устанавливаемыми на премоляры (14 и 24 зубы) и постоянные моляры (16 и 26 зубы), а также стержнями, соединяющими коронки и действующими на премоляры (15 и 25 зубы). Отметим, что в ортодонтическом аппарате HYRAX, используемом для раскрытия небного шва, активная часть (винт) фиксируется к пассивной (коронке или кольцу) посредством проволочных элементов, припаянных к небной поверхности колец или коронок, укрепляемых цементом на моляры и премоляры [1]. Реальная конструкция ортодонтического аппарата и его модель в пакете SolidWorks представлены на рис. 2, а, б.

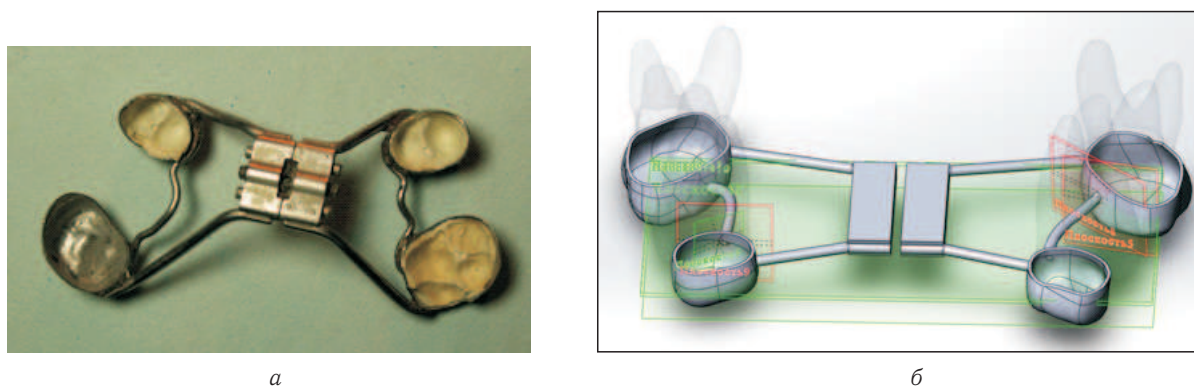


Рис. 2. Ортодонтический аппарат (а) и его геометрическая модель (б), установленная на четвертые премоляры и постоянные моляры



Длина и ширина пластинок модели ортодонтического аппарата, представленного на рис. 2, б, составляют 10 и 4 мм соответственно; радиус поперечного сечения стержней равен 1 мм, длина большего стержня составляет 11.05 мм, меньшего стержня — 8.15 мм, толщина коронок — 0.2 мм. Генерация конечно-элементной модели ортодонтического аппарата, премоляров и первого моляра выполнена с применением компонента Mechanical Model пакета Ansys Workbench 13. Общее количество элементов и узлов составляет 13320 и 26375 соответственно; максимальный размер полученных элементов для аппарата равен 1 мм, тип элемента — Mesh200. Модель аппарата и зубов после импортирования в модуль Finite Element Modeler добавлена в конечно-элементную модель черепа. При этом контакт между коронками ортодонтического аппарата и зубами верхней челюсти задан с помощью контактных элементов CONTA174 и TARGE170. Контакт между черепом и зубами задан с помощью контактных элементов CONTA173 и TARGE170. При описании контактного взаимодействия между коронками и зубами, а также между верхней челюстью и зубами выбран тип Bonded, соответствующий отсутствию скольжения и проникновения. Также отметим, что все щели между контактирующими поверхностями при таком типе контакта закрыты, то есть выполняется «склеивание» поверхностей.

Граничные условия, накладываемые на череп, соответствовали жесткой заделке узлов, находящихся в окрестности большого затылочного отверстия [2, 3, 5]. Перемещение каждой пластинки составляет 0.25 мм (соответствует активации винта ортодонтического аппарата на полоборота [4, 27]) и направлено только трансверсально (в направлении оси Ox). Конечно-элементная модель верхнечелюстного комплекса с установленным ортодонтическим аппаратом и накладываемые граничные условия показаны на рис. 3, а, б.

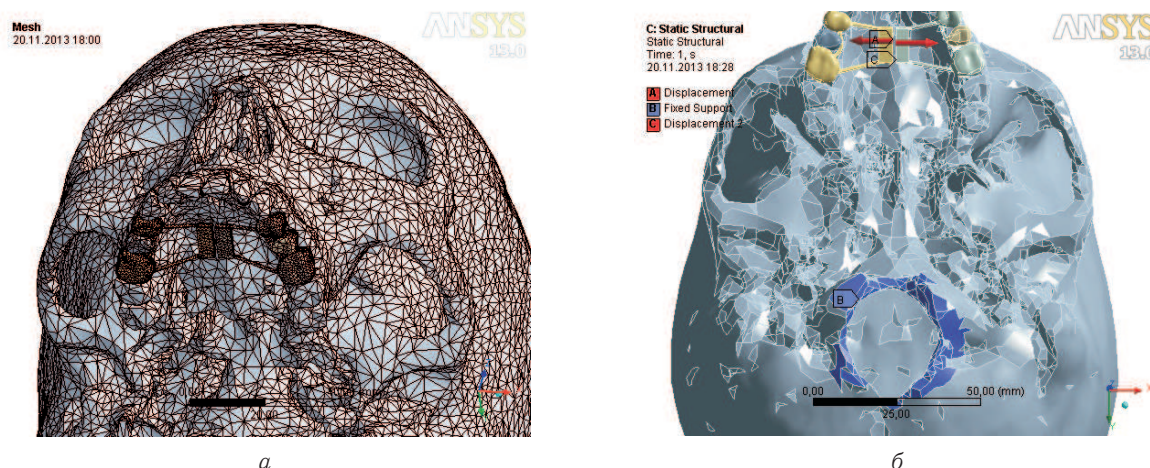


Рис. 3. Конечно-элементная модель верхней челюсти с установленным ортодонтическим аппаратом (а) и граничные условия, накладываемые на конечно-элементную модель (б); граничные условия, отмеченные маркерами А и С, соответствуют перемещению пластинок ортодонтического аппарата в трансверсальном направлении (вдоль оси Ox); граничное условие, отмеченное маркером В соответствует жесткому закреплению узлов черепа в окрестности большого затылочного отверстия

Конечно-элементный расчет напряженно-деформированного состояния черепа с установленным ортодонтическим аппаратом проводился для случая, когда модуль упругости материала, из которого изготовлены пластинка и стержни аппарата, составлял $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Модуль упругости компактной (кортикальной) костной ткани и зубов равен $E = 15$ ГПа и $E = 20$ ГПа соответственно, коэффициент Пуассона как для кортикальной костной ткани, так и для зубов $\nu = 0.3$ [28]. Рассматривались конструкция ортодонтического аппарата с расположением стержней и винта в горизонтальной плоскости, а также конструкции, в которых винт аппарата смещен ближе к небу относительно горизонтальной плоскости на 0.5, 1, 2 и 8 мм. Геометрические размеры ортодонтических аппаратов остаются прежними, за исключением длин стержней, соединяющих винт аппарата с премолярами и винт с молярами. Для первого случая длина стержня изменяется от 8.15 до 12.20 мм, во втором случае длина изменяется от 11.05 до 16.45 мм.

3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

На рис. 4 и 5 показано распределение эквивалентных (по Мизесу) напряжений в лицевой части верхнечелюстного комплекса и в основании черепа соответственно для двух различных конструкций



ортодонтического аппарата. Случай *a* соответствует конструкции аппарата с горизонтальным расположением винта и стержней, случай *б* — конструкции, в которой винт смещен на 8 мм относительно горизонтальной положения аппарата ближе к небу.

Из распределений напряжений, показанных на рис. 4, *a* и 5, *a* видно, что значительные напряжения возникают, в основном, в области верхней челюсти; максимальные эквивалентные напряжения составляют ≈ 74.3 МПа. Достаточно высокие напряжения наблюдаются в средней и нижней части носового хода. Присутствуют напряжения в нижней области левой глазницы. То обстоятельство, что напряженное состояние испытывает только одна глазница можно объяснить асимметрией верхнечелюстного комплекса. Этим также обусловлено возникновение более высоких напряжений в области левого подглазничного отверстия по сравнению с правым (33.0 и 16.5 МПа соответственно).

Из рис. 4, *б* видно, что в случае установки винта аппарата у неба, верхняя челюсть нагружается фрагментарно, и наибольшие эквивалентные напряжения равны 20.12 МПа. В частности, напряжения наблюдаются в области альвеолярных и лобных отростков верхней челюсти, а также в области лобно-носового шва. Также следует отметить возникновение незначительных напряжений в клиновидной и затылочной костях.

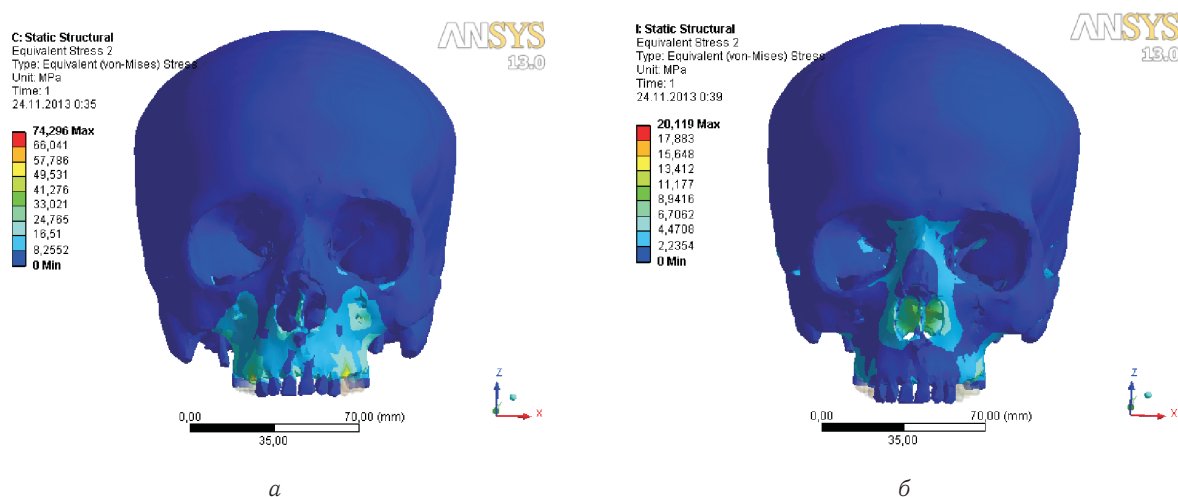


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений в лицевой части черепа после активации ортодонтического аппарата (значения напряжений приведены в МПа): *a* — стержни и пластинки ортодонтического аппарата расположены в горизонтальной плоскости; *б* — пластинки ортодонтического аппарата смещены к верхнему небу на 8 мм по отношению к горизонтальному положению

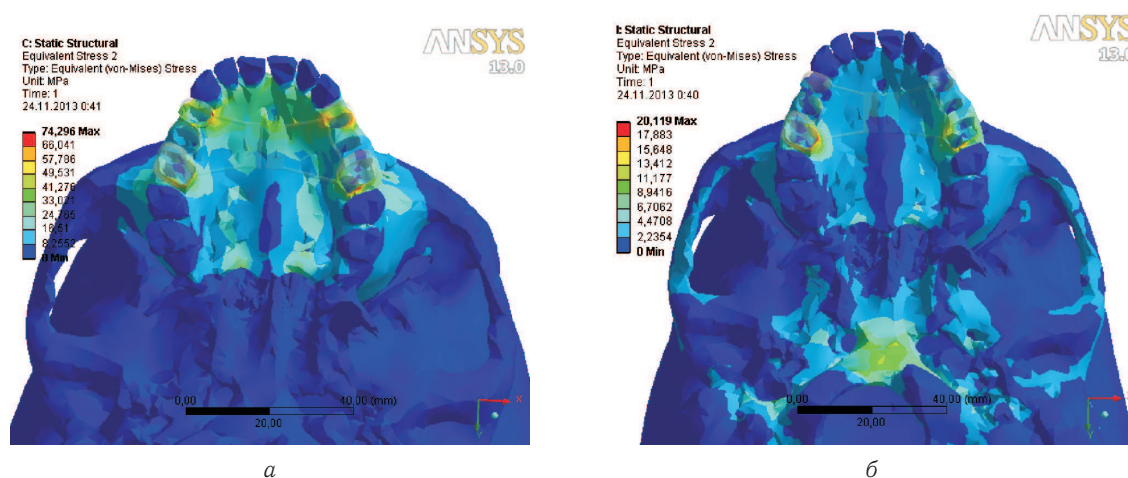


Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений в основании черепа после активации ортодонтического аппарата (значения напряжений приведены в МПа): *a* — стержни и пластинки ортодонтического аппарата расположены в горизонтальной плоскости; *б* — пластинки ортодонтического аппарата смещены к верхнему небу на 8 мм по отношению к горизонтальному положению



Как показывает рис. 5, б, практически не нагружается срединный небный шов, посредством раскрытия которого, как правило, осуществляется расширение верхней челюсти. Поэтому случай *а* установки ортодонтического аппарата более предпочтителен, чем вариант *б*, для быстрого раскрытия срединного небного шва. Однако следует учитывать, что при горизонтальной установке ортодонтического аппарата будут возникать значительные, по сравнению со случаем *б*, ортодонтические силы, действие которых при активации винта может сопровождаться сильными болевыми ощущениями.

Другим важным обстоятельством является то, что наибольшие напряжения, как случае *а*, так и в случае *б*, возникают в костной ткани, окружающей зубы, на которые устанавливается ортодонтический аппарат. Это обстоятельство подтверждают диаграммы распределения эквивалентных напряжений в основании черепа, показанные на рис. 5, *а*, *б*. Значения напряжений в костной ткани, с которой контактируют опорные зубы, находятся в диапазоне от 30.02 до 74.30 МПа (случай *а*) и от 8.94 до 20.12 МПа (случай *б*). В то же время кости черепа по-разному нагружаются в случаях *а* и *б* установки ортодонтического аппарата. Так, в случае *а* высокие напряжения возникают в резцовой кости (33.02 МПа), верхней челюсти и небной кости (8.26 – 33.02 МПа). В случае *б* напряжения в верхней челюсти (6.71 МПа) меньше напряжений, возникающих в затылочной кости, в частности в области большого затылочного отверстия (11.18 МПа). Кроме того, в случае *б* ненулевые напряжения возникают в скуловых дугах, а также в крыловидной пластинке.

4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК ЧЕРЕПА И ОПОРНЫХ ЗУБОВ

Векторные поля суммарных перемещений точек верхнечелюстного комплекса и опорных зубов для случаев *а* и *б* установки ортодонтического аппарата показаны на рис. 6 и 7 соответственно.

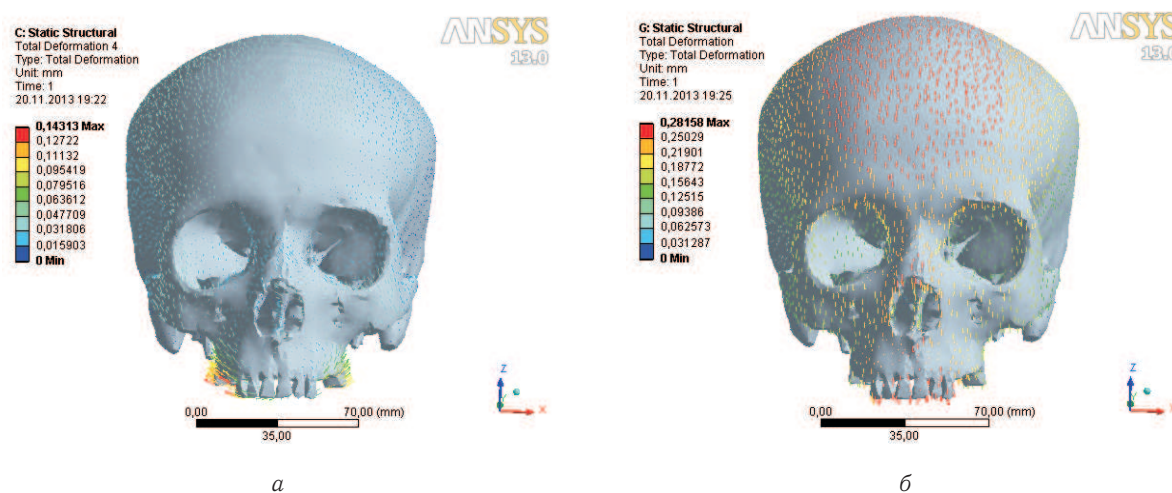


Рис. 6. Полные перемещения точек черепа (значения перемещений приведены в миллиметрах) после активации ортодонтического аппарата: *а* — стержни и пластинки ортодонтического аппарата расположены в горизонтальной плоскости; *б* — пластинки ортодонтического аппарата смещены к верхнему небу на 8 мм по отношению к горизонтальному положению

Видно, что направление перемещений существенно изменяется при установке пластинок ортодонтического аппарата у верхнего неба (см. рис. 6, *б*) по сравнению с направлениями перемещений при горизонтальном положении стержней и пластинок аппарата (см. рис. 6, *а*). В случае *а* составляющая вектора полных перемещений верхней челюсти, коллинеарная оси аппликат (оси Oz), направлена вдоль положительного направления этой оси. В случае *б* вектора суммарных перемещений (в том числе и составляющая коллинеарная оси аппликат) направлены вдоль отрицательного направления оси Oz . В случае *а* наибольшие суммарные перемещения наблюдаются для точек верхней челюсти и составляют 0.1432 мм. Суммарные перемещения других костей черепа существенно меньше, в частности, наибольшие перемещения скуловой кости ≈ 0.048 мм; для остальных костей черепа величины перемещений не превышают этого значения. В случае *б* наибольшие перемещения составляют ≈ 0.2816 мм и наблюдаются у большинства костей лицевой части черепа, в частности, у верхней челюсти, носовой кости, лобной кости и других костей. Наибольшие суммарные перемещения в случае *б* по сравнению со случаем *а* увеличиваются почти в два раза.

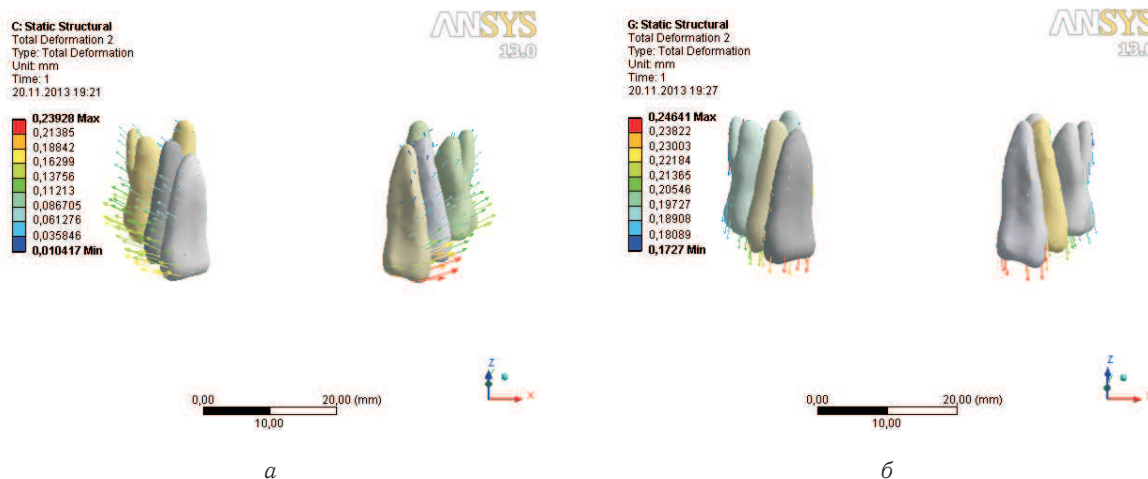


Рис. 7. Полные перемещения опорных зубов верхней челюсти (значения перемещений приведены в миллиметрах) после активации ортодонтического аппарата: *а* — стержни и пластинки ортодонтического аппарата расположены в горизонтальной плоскости; *б* — пластинки ортодонтического аппарата смещены к верхнему небу на 8 мм по отношению к горизонтальному положению

Полные перемещения опорных зубов в случае *а* установки ортодонтического аппарата, так же как и полные перемещения точек верхней челюсти, в основном направлены латерально и вверх (см. рис. 7, *а*). Наблюдаемое направление перемещений указывает на наклонно-вращательное смещение зубов верхнего зубного ряда. Кроме того, направления полных перемещений премоляра левой стороны (см. рис. 7, *а*) таковы, что зуб поворачивается относительно центра вращения, находящегося на самом зубе, что может привести к выворачиванию зуба в ходе ортодонтического лечения. Сравнение рис. 6, *а* и 7, *а* показывает, что значения наибольших перемещений опорных зубов превышают величины максимальных перемещений точек черепа. Это объясняется тем, что центры вращения зубов, на которые опирается ортодонтический аппарат, находятся на корне зуба или на черепе. Поворачиваясь относительно своего центра вращения, зуб получает перемещения, которые увеличиваются при удалении от центра вращения. Перемещения внешней поверхности корня зуба и внутренней поверхности зубной альвеолы совпадают. Указанное отличие перемещений зубов и черепа при горизонтальном расположении ортодонтического аппарата можно трактовать таким образом, что на опорные зубы оказывается более значительное воздействие, чем на кости черепа.

В случае установки ортодонтического аппарата у неба полные перемещения практически полностью направлены вниз (см. рис. 7, *б*). В отличие от случая *а*, максимальное значение перемещений опорных зубов меньше, чем наибольшее значение полных перемещений точек верхнечелюстного комплекса. Учитывая это обстоятельство, а также направление перемещений зубов и черепа, показанные на рис. 6, *б* и 7, *б* соответственно, можно сделать вывод, что зубы перемещаются за счет перемещения всего верхнечелюстного комплекса. Аналогичное векторное поле для полных перемещений наблюдается при конструкциях ортодонтического аппарата с расположением винта на 0,5, 1 и 2 мм выше по сравнению с горизонтальной плоскостью, в которой находится винт и стержни аппарата в случае *а*. В большинстве конечно-элементных исследований указывается на вращение верхнечелюстного комплекса в сагитальной плоскости [2, 23], а также на незначительную экстрюзию нагружаемых зубов [2], что согласуется с полученными результатами для перемещений.

Отметим, что в ходе конечно-элементного анализа напряженно-деформированного верхнечелюстного комплекса при активации ортодонтического аппарата исследование сеточной сходимости выполнялось для черепа с горизонтальным расположением аппарата следующим образом. На первом этапе проведен конечно-элементный расчет при автоматическом конечно-элементном разбиении (принятым по умолчанию в пакете ANSYS Workbench) с количеством узлов и элементов, указанным в статье. На втором и третьем этапах выполнен конечно-элементный расчет черепа с аппаратом при измененной вычислительной сетке для черепа с количеством узлов, увеличенным в два и четыре раза соответственно. Увеличение узлов для модели ортодонтического аппарата не выполнялось, поскольку работа не была направлена на конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния аппарата. Изменение вычислительной сетки осуществлялось в пакете MIMICS. Сравнительный анализ полученных результатов расчета проводился для определенной области черепа, охватывающей



часть верхней челюсти и неба. Анализ показал, что значения перемещений не изменяются; значения эквивалентных напряжений практически не изменяются, в частности максимальное значение эквивалентных напряжений в рассматриваемой области на первом, втором и третьем этапах составило $\approx 59,98$ МПа, $\approx 60,01$ МПа и $\approx 60,012$ МПа соответственно. Поэтому, чтобы избежать многократного увеличения времени расчета модели при мелкой сетке, расчеты проводились при автоматическом режиме конечно-элементного разбиения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подход к конечно-элементному исследованию поведения верхнечелюстного комплекса при верхнечелюстном расширении, основанный на приложении нагрузки непосредственно от ортодонтического аппарата, позволяет более полно и точно смоделировать действие ортодонтических сил, объяснить клинически наблюдаемые последствия [6–10] и систематизировать результаты вычислительных экспериментов [18–31].

Расчет напряженно-деформированного состояния верхнечелюстного комплекса при активации ортодонтического аппарата с винтом HYRAX показал, что конструкции с винтом, расположенным в одной горизонтальной плоскости со стержнями, и винтом, расположенным у неба, не являются оптимальными. В первом случае возникают необходимые напряжения в области срединного небного шва, но появляется существенное наклонно-вращательное перемещение опорных зубов и латерально-верхнее смещение верхней челюсти. Во втором случае, а также для случаев расположения винта аппарата на 0,5, 1 и 2 мм выше горизонтального расположения аппарата, в области срединного небного шва возникают незначительные напряжения и, наоборот, напряжения испытывают те области черепа, воздействие на которые нежелательно. Анализ зависимостей эквивалентных напряжений и компонент полных перемещений, направленных вдоль координатных осей, от расстояния винта до окклюзионной плоскости для черепа и опорных зубов показал, что трансверсальное перемещение верхней челюсти наблюдается в случаях, когда винт ортодонтического аппарата расположен на расстоянии 0,20–0,22 мм от горизонтального положения ближе к небу. При таком расположении возникают достаточно высокие напряжения в верхней челюсти и в области срединного небного шва и практически отсутствуют вертикальные перемещения опорных зубов и черепа.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (Задание 1.8.01).

Библиографический список

1. Chaconas S. J., Caputo A. A. Observation of orthopedic force distribution produced by maxillary orthodontic appliances // Am. J. Orthod. 1982. Vol. 82. P. 492–501.
2. Iseri H., Tekkaya A. E., Oztan O., Bilgic S. Biomechanical effects of rapid maxillary expansion on the craniofacial skeleton, studied by the finite element method // Eur. J. Orthod. 1998. Vol. 20. P. 347–356.
3. Provatidis C., Georgiopoulos B., Kotinas A., McDonald J. P. On the FEM modeling of craniofacial changes during rapid maxillary expansion // Med. Eng. Phys. 2007. Vol. 29. P. 566–579.
4. Wang D., Cheng L., Wang C., Qian Y., Pan X. Biomechanical analysis of rapid maxillary expansion in the UCLP patient // Med. Eng. Phys. 2009. Vol. 31. P. 409–417.
5. Ludwig B., Baumgaertel S., Zorkun B., Bonitz L., Glasl B., Wilmes B., Lisson J. Application of a new viscoelastic finite element method model and analysis of miniscrew-supported hybrid hyrax treatment // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2013. Vol. 143. P. 426–435.
6. Chung C. H., Font B. Skeletal and dental changes in the sagittal, vertical, and transverse dimensions after rapid palatal expansion // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2004. Vol. 126. P. 569–575.
7. Cozzani M., Rosa M., Cozzani P., Siciliani G. Deciduous dentition anchored rapid maxillary expansion in crossbite and non-crossbite mixed dentition patients: reaction of the permanent first molar // Prog. Orthod. 2003. Vol. 4. P. 15–22.
8. Wertz R. A. Skeletal and dental changes accompanying rapid midpalatal suture opening // Am. J. Orthod. 1970. Vol. 58. P. 41–46.
9. Timms D. J. A study of basal movement with rapid maxillary expansion // Am. J. Orthod. 1980. Vol. 77. P. 500–507.
10. Baccetti T., Franchi L., Cameron C. G., McNamara J. A. Jr. Treatment timing for rapid maxillary expansion // Angle Orthod. 2001. Vol. 71. P. 343–350.
11. Shetty V., Caridad J. M., Caputo A. A., Chaconas S. J. Biomechanical rationale for surgical-orthodontic expansion of the adult maxilla // J. Oral Maxillofac. Surg. 1994. Vol. 52. P. 742–749.
12. Pavlin D., Vukicevic D. Mechanical reactions of facial skeleton to maxillary expansion determined by laser holography // Am. J. Orthod. 1984. Vol. 85. P. 498–507.
13. Kragt G., Duterloo H. S., Ten Bosch J. J. The initial reaction of a macerated human skull caused



- by orthodontic cervical traction determined by laser metrology // *Am. J. Orthod.* 1982. Vol. 81. P. 49–56.
14. Braun S., Bottrel J. A., Lee K. G., Lunazzi J. J., Legan H. L. The biomechanics of maxillary sutural expansion // *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.* 2000. Vol. 118. P. 257–261.
15. Book D., Lavelle C. Changes in craniofacial size and shape with two modes of orthodontic treatment // *J. Craniofac. Genet. Dev. Biol.* 1988. Vol. 8. P. 207–223.
16. Tanne K., Miyasaka J., Yamagata Y., Sakuda M., Burstone C. J. Biomechanical changes in the craniofacial skeleton by the rapid expansion appliance // *J. Osaka Univ. Dental Soc.* 1985. Vol. 30. P. 345–356.
17. Nakagawa M., Ichikawa K. Biomechanical effects of maxillary protraction on the craniofacial complex on the strain gauge measurements // *J. Japan Orthod. Soc.* 1986. Vol. 45. P. 109–118.
18. Boryor A., Geigera M., Hohmann A., Wunderlich A., Sander C., Sander F. M., Sander F. G. Stress distribution and displacement analysis during an intermaxillary disjunction A three-dimensional FEM study of a human skull // *J. Biomech.* 2008. Vol. 41. P. 376–382.
19. Capelozza Filho L., De Almeida A. M., Ursi W. J. Rapid maxillary expansion in cleft lip and palate patients // *J. Clin. Orthod.* 1994. Vol. 28. P. 34–39.
20. Cattaneo P., Dalstra M., Melsen B. The transfer of occlusal forces through the maxillary molars: a finite element study // *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.* 2003. Vol. 123. P. 367–373.
21. Gautam P., Valiathan A., Adhikari R. Stress and displacement patterns in the craniofacial skeleton with rapid maxillary expansion: a finite element method study // *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.* 2007. Vol. 132. P. 5.e1–5.e11.
22. Holberg C., Holberg N., Schwenzler K., Wichelhaus A., Rudzki-Janson I. Biomechanical analysis of maxillary expansion in CLP patients // *Angle Orthod.* 2007. Vol. 77. P. 280–287.
23. Jafari A., Shetty K. S., Kumar M. Study of stress distribution and displacement of various craniofacial structures following application of transverse orthopedic forces—a three dimensional FEM study // *Angle Orthod.* 2003. Vol. 73. P. 12–20.
24. Lee H., Ting K., Nelson M., Sun N., Sung S. J. Maxillary expansion in customized finite element method models // *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.* 2009. Vol. 136. P. 367–374.
25. Miyasaka-Hiraga J., Tanne K., Nakamura S. Finite element analysis for stresses in the craniofacial sutures produced by maxillary protraction forces applied at the upper canines // *Br. J. Orthod.* 1994. Vol. 21. P. 343–348.
26. Nicholson P. T., Plint D. A. A long-term study of rapid maxillary expansion and bone grafting in cleft lip and palate patients // *Eur. J. Orthod.* 1989. Vol. 11. P. 186–192.
27. Pan X., Qian Y., Yu J., Wang D., Tang Y., Shen G. Biomechanical effects of rapid palatal expansion on the craniofacial skeleton with cleft palate: a three-dimensional finite element analysis // *Cleft Palate Craniofac J.* 2007. Vol. 44. P. 149–154.
28. Tanne K., Hiraga J., Kakiuchi K., Yamagata Y., Sakuda M. Biomechanical effect of anteriorly directed extraoral forces on the craniofacial complex: a study using the finite element method // *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.* 1989. Vol. 95. P. 200–207.
29. Tindlund R. S., Rygh P., Boe O. E. Intercanine widening and sagittal effect of maxillary transverse expansion in patients with cleft lip and palate during the deciduous and mixed dentitions // *Cleft Palate Craniofac. J.* 1993. Vol. 30. P. 195–207.
30. Yu H. S., Baik H. S., Sung S. J., Kim K. D., Cho Y. S. Three-dimensional finite-element analysis of maxillary protraction with and without rapid palatal expansion // *Eur. J. Orthod.* 2007. Vol. 29. P. 118–125.
31. Landes C. A., Laudermann K., Petruchin O., Mack M. G., Kopp S., Ludwig B., Sader R. A., Seitz O. Comparison of bipartite versus tripartite osteotomy for maxillary transversal expansion using 3-dimensional preoperative and postexpansion computed tomography data // *J. Oral. Maxillofac. Surg.* 2009. Vol. 67. P. 2287–2301.
32. Zimring J. F., Isaacson R. J. Forces produced by rapid maxillary expansion III. Forces present during retention // *Angle Orthod.* 1965. Vol. 35. P. 178–186.
33. Wood S. A., Strait D. S., Dumont E. R., Ross C. F., Grosse I. R. The effects of modeling simplifications on craniofacial finite element models: The alveoli (tooth sockets) and periodontal ligaments // *J. Biomech.* 2011. Vol. 44. P. 1831–1838.

Finite Element Analysis of the Influence of the Orthodontic Appliance Design on the Maxillary Expansion

S. M. Bosiakov¹, A. N. Dosta², A. V. Vinokurova¹

¹ Belarusian State University, Belarus, 220030, Minsk, Nezavisimosti ave., 4, bosiakov@bsu.by, janeraven@mail.ru

² Belarusian State Medical University, Belarus, 220116, Minsk, Dzerzhinskogo ave., 83, dostastom75@mail.ru

In present paper the results of the stress-strain state finite element analysis of the human maxillary complex after activating orthodontic appliance are performed. Skull and abutment teeth models are obtained on the basis of the tomographic data of the dry intact adult skull. Orthodontic appliance designs are differ in the arrangement of rods and screws relative to the sky. The equivalent stresses and displacements of the maxillary bones and supporting the teeth are evaluated. It is shown that the horizontal location of orthodontic appliance screw and rods in the skull bones having the highest stresses, but there tipping teeth and upward movement of the maxillary



bones are observed. For orthodontic appliance activating with a screw located near the palate, there are decreased stresses on the maxillary bone complex, and bones and supporting teeth are moved down. The positions screw orthodontic appliance to translation the upper jaw bones are assessed.

Key words: rapid maxillary expansion, orthodontic device HYRAX, finite-element analysis, stress-strain state, craniofacial complex.

References

1. Chaconas S. J., Caputo A. A. Observation of orthopedic force distribution produced by maxillary orthodontic appliances. *Am. J. Orthod.*, 1982, vol. 82, pp. 492–501.
2. Iseri H., Tekkaya A. E., Oztan O., Bilgic S. Biomechanical effects of rapid maxillary expansion on the craniofacial skeleton, studied by the finite element method. *Eur. J. Orthod.*, 1998, vol. 20, pp. 347–356.
3. Provatidis C., Georgiopoulos B., Kotinas A., McDonald J. P. On the FEM modeling of craniofacial changes during rapid maxillary expansion. *Med. Eng. Phys.*, 2007, vol. 29, pp. 566–579.
4. Wang D., Cheng L., Wang C., Qian Y., Pan X. Biomechanical analysis of rapid maxillary expansion in the UCLP patient. *Med. Eng. Phys.*, 2009, vol. 31, pp. 409–417.
5. Ludwig B., Baumgaertel S., Zorkun B., Bonitz L., Glasl B., Wilmes B., Lisson J. Application of a new viscoelastic finite element method model and analysis of miniscrew-supported hybrid hyrax treatment. *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.*, 2013, vol. 143, pp. 426–435.
6. Chung C. H., Font B. Skeletal and dental changes in the sagittal, vertical, and transverse dimensions after rapid palatal expansion. *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.*, 2004, vol. 126, pp. 569–575.
7. Cozzani M., Rosa M., Cozzani P., Siciliani G. Deciduous dentition anchored rapid maxillary expansion in crossbite and non-crossbite mixed dentition patients: reaction of the permanent first molar. *Prog. Orthod.*, 2003, vol. 4, pp. 15–22.
8. Wertz R. A. Skeletal and dental changes accompanying rapid midpalatal suture opening. *Am. J. Orthod.*, 1970, vol. 58, pp. 41–46.
9. Timms D. J. A study of basal movement with rapid maxillary expansion. *Am. J. Orthod.*, 1980, vol. 77, pp. 500–507.
10. Baccetti T., Franchi L., Cameron C. G., McNamara J. A. Jr. Treatment timing for rapid maxillary expansion. *Angle Orthod.*, 2001, vol. 71, pp. 343–350.
11. Shetty V., Caridad J. M., Caputo A. A., Chaconas S. J. Biomechanical rationale for surgical-orthodontic expansion of the adult maxilla. *J. Oral Maxillofac. Surg.*, 1994, vol. 52, pp. 742–749.
12. Pavlin D., Vukicevic D. Mechanical reactions of facial skeleton to maxillary expansion determined by laser holography. *Am. J. Orthod.*, 1984, vol. 85, pp. 498–507.
13. Kragt G., Duterloo H. S., Ten Bosch J. J. The initial reaction of a macerated human skull caused by orthodontic cervical traction determined by laser metrology. *Am. J. Orthod.*, 1982, vol. 81, pp. 49–56.
14. Braun S., Bottrel J. A., Lee K. G., Lunazzi J. J., Legan H. L. The biomechanics of maxillary sutural expansion. *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.*, 2000, vol. 118, pp. 257–261.
15. Book D., Lavelle C. Changes in craniofacial size and shape with two modes of orthodontic treatment. *J. Craniofac. Genet. Dev. Biol.*, 1988, vol. 8, pp. 207–223.
16. Tanne K., Miyasaka J., Yamagata Y., Sakuda M., Burstone C. J. Biomechanical changes in the craniofacial skeleton by the rapid expansion appliance. *J. Osaka Univ. Dental Soc.*, 1985, vol. 30, pp. 345–356.
17. Nakagawa M., Ichikawa K. Biomechanical effects of maxillary protraction on the craniofacial complex on the strain gauge measurements. *J. Japan Orthod. Soc.*, 1986, vol. 45, pp. 109–118.
18. Boryor A., Geigera M., Hohmann A., Wunderlich A., Sander C., Sander F. M., Sander F. G. Stress distribution and displacement analysis during an intermaxillary disjunction – A three-dimensional FEM study of a human skull. *J. Biomech.*, 2008, vol. 41, pp. 376–382.
19. Capelozza Filho L., De Almeida A. M., Ursi W. J. Rapid maxillary expansion in cleft lip and palate patients. *J. Clin. Orthod.*, 1994, vol. 28, pp. 34–39.
20. Cattaneo P., Dalstra M., Melsen B. The transfer of occlusal forces through the maxillary molars: a finite element study. *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.*, 2003, vol. 123, pp. 367–373.
21. Gautam P., Valiathan A., Adhikari R. Stress and displacement patterns in the craniofacial skeleton with rapid maxillary expansion: a finite element method study. *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.*, 2007, vol. 132, pp. 5.e1–5.e11.
22. Holberg C., Holberg N., Schwenzer K., Wichelhaus A., Rudzki-Janson I. Biomechanical analysis of maxillary expansion in CLP patients. *Angle Orthod.*, 2007, vol. 77, pp. 280–287.
23. Jafari A., Shetty K. S., Kumar M. Study of stress distribution and displacement of various craniofacial structures following application of transverse orthopedic forces—a three dimensional FEM study. *Angle Orthod.*, 2003, vol. 73, pp. 12–20.
24. Lee H., Ting K., Nelson M., Sun N., Sung S. J. Maxillary expansion in customized finite element method models. *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.*, 2009, vol. 136, pp. 367–374.
25. Miyasaka-Hiraga J., Tanne K., Nakamura S. Finite element analysis for stresses in the craniofacial sutures produced by maxillary protraction forces applied at the upper canines. *Br. J. Orthod.*, 1994, vol. 21, pp. 343–348.
26. Nicholson P. T., Plint D. A. A long-term study of rapid maxillary expansion and bone grafting in cleft lip and palate patients. *Eur. J. Orthod.*, 1989, vol. 11, pp. 186–192.
27. Pan X., Qian Y., Yu J., Wang D., Tang Y., Shen G. Biomechanical effects of rapid palatal expansion on the craniofacial skeleton with cleft palate: a three-dimensional finite element analysis. *Cleft Palate Craniofac. J.*, 2007, vol. 44, pp. 149–154.
28. Tanne K., Hiraga J., Kakiuchi K., Yamagata Y., Sakuda M. Biomechanical effect of anteriorly directed extraoral forces on the craniofacial complex: a study



using the finite element method *Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop.*, 1989, vol. 95, pp. 200–207.

29. Tindlund R. S., Rygh P., Boe O. E. Intercanine widening and sagittal effect of maxillary transverse expansion in patients with cleft lip and palate during the deciduous and mixed dentitions. *Cleft Palate Craniofac. J.*, 1993, vol. 30, pp. 195–207.

30. Yu H. S., Baik H. S., Sung S. J., Kim K. D., Cho Y. S. Three-dimensional finite-element analysis of maxillary protrusion with and without rapid palatal expansion. *Eur. J. Orthod.*, 2007, vol. 29, pp. 118–125.

31. Landes C. A., Laudermann K., Petrushin O., Mack M. G., Kopp S., Ludwig B., Sader R. A., Seitz O.

Comparison of bipartite versus tripartite osteotomy for maxillary transversal expansion using 3-dimensional preoperative and postexpansion computed tomography data. *J. Oral. Maxillofac. Surg.*, 2009, vol. 67, pp. 2287–2301.

32. Zimring J. F., Isaacson R. J. Forces produced by rapid maxillary expansion III. Forces present during retention. *Angle Orthod.*, 1965, vol. 35, pp. 178–186.

33. Wood S. A., Strait D. S., Dumont E. R., Ross C. F., Grosse I. R. The effects of modeling simplifications on craniofacial finite element models: The alveoli (tooth sockets) and periodontal ligaments. *J. Biomech.*, 2011, vol. 44, pp. 1831–1838.

УДК 539.3

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОЙ СВЯЗАННОЙ УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ СЛОЯ

А. Р. Гачкевич¹, А. В. Земсков², Д. В. Тарлаковский³

¹Доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов, dept13@iapmm.lviv.ua

²Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), azemskov1975@mail.ru

³Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов и деталей машин, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), tdvhome@mail.ru

Рассматривается задача об определении напряжённо-деформированного состояния упругой среды с учётом структурных изменений, обусловленных наличием диффузионных потоков. Влияние диффузионных процессов на напряжённо-деформированное состояние среды учитывается с помощью локально равновесной модели упругой диффузии, включающей в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнения массопереноса. Для решения используется разложение искомых функций в ряды Фурье с последующим применением интегрального преобразования Лапласа по времени. Строится фундаментальное решение задачи. Рассмотрены примеры для случаев, когда диффузионный поток на границе постоянен или затухает по экспоненциальному закону.

Ключевые слова: упругая диффузия, нестационарные задачи, ряды Фурье, преобразование Лапласа.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях необходимо учитывать эффекты связанности полей различной природы с целью получения, например, более точного описания воздействия статических и динамических нагрузок и диффузии на упругие среды и элементы современных конструкций, в том числе объектов авиационной и ракетно-космической техники. При этом переменное по времени поле деформаций инициирует диффузионные потоки, наличие которых приводит к перераспределению компонентов вещества. Поэтому в диффузионной зоне возникает напряжённо-деформированное состояние, которое, в свою очередь, влияет на величину диффузионного потока.

Соотношения между параметрами, характеризующими такую систему, строятся с помощью метода потенциалов, разработанного Дж. Гиббсом. При этом в качестве потенциалов выступают внутренняя энергия, свободная энергия и химический потенциал (или удельный потенциал Гиббса). Основополагающими законами, позволяющими выразить термодинамические потенциалы через термодинамические параметры, являются первый и второй законы термодинамики. Для вывода уравнений, описывающих физико-механические процессы в деформируемой среде, применяются уравнения движения упругого тела и законы массопереноса [1–4]. При этом используются следующие предположения:

- 1) изменения концентрации, сопутствующие деформированию, малы;
- 2) возрастание концентрации не приводит к существенным изменениям упругих и диффузионных характеристик материала, поэтому эти константы рассматриваются как величины, не зависящие от концентраций;
- 3) деформации малы.



В известных публикациях практически отсутствуют решения нестационарных задач для указанных сред. Ниже приводится решение одномерной задачи этого класса.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается однородный плоский слой, ограниченный плоскостями $x = 0$ и $x = L$. Предполагается, что физико-механические процессы в среде являются одномерными и описываются геометрически линейной моделью упругой диффузии без учёта температурных эффектов [1, 4]. Соответствующие уравнения имеют следующий вид (компоненты векторов и тензоров указаны в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, для которой $x_3 = x$):

$$C_{3333} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_{33} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad D_{33} g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (1)$$

а диффузионный поток в направлении оси Ox задаётся соотношением

$$J = \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{33} g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \Lambda = \frac{n_0 \alpha_{33} D_{33}}{RT_0}, \quad (2)$$

где t — время, u — перемещение в направлении оси Ox ; $\eta = n - n_0$ — приращение концентрации; n_0 — начальная концентрация вещества, n — текущая концентрация вещества; C_{3333} — соответствующая компонента тензора упругих постоянных; ρ — плотность среды; α_{33} — коэффициент, определяемый типом кристаллической решётки таким образом, что величина $\alpha_{33} \varepsilon_{33} n$ есть относительное объёмное изменение, выражающее зависимость объёма вещества от состава (концентрации исходного вещества); ε_{ij} — компоненты тензора деформации; D_{33} — коэффициент самодиффузии; g — термодинамический множитель Даркена; R — универсальная газовая постоянная; T_0 — температура.

Полагается, что на поверхностях слоя заданы перемещения и диффузионные потоки:

$$u|_{x=0} = f_1(t), \quad u|_{x=L} = f_2(t), \quad (3)$$

$$J|_{x=0} = f_3(t), \quad J|_{x=L} = f_4(t). \quad (4)$$

а начальные условия однородные:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Используются следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены символом « \sim », который в дальнейшем изложении опускается):

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{L}, & \tilde{u} &= \frac{u}{L}, & \tau &= \frac{ct}{L}, & c^2 &= \frac{C_{3333}}{\rho}, & \alpha &= \frac{n_0 \alpha_{33}}{C_{3333}}, \\ \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{n_0}, & D &= \frac{D_{33} g}{cL}, & \tilde{\Lambda} &= \frac{\Lambda}{cLn_0}, & \tilde{J} &= \frac{J}{cn_0}, & \tilde{f}_k(\tau) &= \frac{f_k(\tau)}{cn_0}. \end{aligned}$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(5) записывается так (здесь и далее штрихи обозначают производные по координате, а точки — производные по безразмерному времени τ):

$$u'' = \ddot{u} + \alpha \eta', \quad D \eta'' = \dot{\eta} + \Lambda u''', \quad (6)$$

$$J = \Lambda u'' - D \eta', \quad (7)$$

$$u|_{x=0} = f_1(\tau), \quad u|_{x=1} = f_2(\tau), \quad J|_{x=0} = f_3(\tau), \quad J|_{x=1} = f_4(\tau). \quad (8)$$

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \eta|_{\tau=0} = 0. \quad (9)$$

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $G_{uk} = u$, $G_{\eta k} = \eta$ — функции Грина задачи (6)–(9), а именно решения четырех задач ($k = \overline{1, 4}$ — их номер), включающих в себя уравнения (6), соотношение (7), начальные условия (9) и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} G_{uk}|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), & G_{uk}|_{x=1} &= \delta_{2k} \delta(\tau), \\ \left(\Lambda G''_{uk} - D G'_{\eta k} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{3k} \delta(\tau), & \left(\Lambda G''_{uk} - D G'_{\eta k} \right) \Big|_{x=1} &= \delta_{4k} \delta(\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, δ_{ij} — символ Кронекера.



Тогда решение задачи (6)–(9) имеет вид (звездочка обозначает свертку по времени):

$$u = \sum_{k=1}^4 G_{uk}(x, \tau) * f_k(\tau), \quad \eta = \sum_{k=1}^4 G_{\eta k}(x, \tau) * f_k(\tau). \quad (11)$$

Отметим, что из (6), (7) и (8) с использованием замены пространственной переменной $y = 1 - x$ следует следующая связь функций Грина:

$$\begin{aligned} G_{u2}(x, \tau) &= G_{u1}(1 - x, \tau), & G_{u4}(x, \tau) &= G_{u3}(1 - x, \tau), \\ G_{\eta2}(x, \tau) &= -G_{\eta1}(1 - x, \tau), & G_{\eta4}(x, \tau) &= -G_{\eta3}(1 - x, \tau). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что формулы (11) можно записать так:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^2 [G_{u,2k-1}(x, \tau) * f_{2k-1}(\tau) + G_{u,2k-1}(1 - x, \tau) * f_{2k}(\tau)], \\ \eta &= \sum_{k=1}^2 [G_{\eta,2k-1}(x, \tau) * f_{2k-1}(\tau) - G_{\eta,2k-1}(1 - x, \tau) * f_{2k}(\tau)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, для определения перемещения и приращения концентрации достаточно найти только функции G_{uk} и $G_{\eta k}$ при $k = 1, 3$.

3. ИЗОБРАЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Рассмотрим задачу (6)–(9) при $f_2 = f_4 \equiv 0$, и применим к ней преобразование Лапласа по времени [4, 5] (s — параметр преобразования, индекс L обозначает трансформанту):

$$s^2 u^L - u^{L''} + \alpha \eta^{L'} = 0, \quad s \eta^L - D \eta^{L''} + \Lambda u^{L''} = 0, \quad (13)$$

$$u^L|_{x=0} = f_1^L, \quad u^L|_{x=1} = 0, \quad (\Lambda u^{L''} - D \eta^{L'})|_{x=0} = f_3^L, \quad (\Lambda u^{L''} - D \eta^{L'})|_{x=1} = 0. \quad (14)$$

Для решения краевой задачи (13), (14) будем использовать разложения искомых функций в ряды собственным функциям. Для этого редуцируем краевую задачу к однородным краевым условиям. С этой целью положим

$$u^L = U^L + \varphi, \quad \eta^L = H^L + \psi, \quad (15)$$

где функции φ и ψ выбираются так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (14):

$$\varphi(x, s) = \varphi^*(x) f_1^L(s), \quad \psi(x, s) = \psi^*(x) f_3^L(s), \quad \varphi^*(x) = 1 - x, \quad \psi^*(x) = \frac{1}{D} \left(\frac{x^2}{2} - x \right). \quad (16)$$

Тогда для функций U^L и H^L получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} s^2 U^L - U^{L''} + \alpha H^{L'} &= F_1, & s H^L - D H^{L''} + \Lambda U^{L''} &= F_3, \\ F_1(x, s) &= \varphi^*(x) \left[-s^2 f_1^L(s) + \frac{\alpha}{D} f_3^L(s) \right], & F_3(x, s) &= [1 - s \psi^*(x)] f_3^L(s), \\ U^L|_{x=0} &= 0, & U^L|_{x=1} &= 0, \\ (\Lambda U^{L''} - D H^{L'})|_{x=0} &= 0, & (\Lambda U^{L''} - D H^{L'})|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Ее решение представляем в виде рядов по собственным функциям:

$$U^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^L(s) \sin \lambda_n x, \quad H^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^L(s) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n. \quad (18)$$

При этом записываем в виде аналогичных рядов функции φ^* , ψ^* и правые части уравнений в (17):

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^L \sin \lambda_n x, & \psi^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cos \lambda_n x, \\ F_1(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{1n}(s) \sin \lambda_n x, & F_3(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{3n}(s) \cos \lambda_n x, \end{aligned} \quad (19)$$



где

$$\begin{aligned}
 D\psi_0 &= \int_0^1 D\psi^*(x) dx = -\frac{1}{3}, & F_{30}(s) &= \int_0^1 F_3(x, s) dx = (1 - s\psi_0) f_3^L(s), \\
 D\psi_n &= 2 \int_0^1 D\psi^*(x) \cos \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n^2}, & \varphi_n &= 2 \int_0^1 \varphi^*(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n}, \\
 F_{1n}(s) &= 2 \int_0^1 F_1(x, s) \sin \lambda_n x dx = \left[-s^2 f_1^L(s) + \frac{\alpha}{D} f_3^L(s) \right] \varphi_n, \\
 F_{3n}(s) &= 2 \int_0^1 F_3(x, s) \cos \lambda_n x dx = -s\psi_n f_3^L(s), & n &\geq 1.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя ряды (18) и (19) в (17), получаем следующие алгебраические уравнения для коэффициентов U_n^L и H_n^L :

– при $n = 0$

$$sH_0^L = F_{30}, \tag{21}$$

– при $n \geq 1$

$$(s^2 + \lambda_n^2)U_n^L - \alpha\lambda_n H_n^L = F_{1n}, \quad -\Lambda\lambda_n^3 U_n^L + (s + D\lambda_n^2)H_n^L = F_{n3}.$$

Решение последней системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 U_n^L &= \frac{s + D\lambda_n^2}{P_{3n}} F_{1n} + \frac{\alpha\lambda_n}{P_{3n}} F_{n3}, & H_n^L &= \frac{\Lambda\lambda_n^3}{P_{3n}} F_{1n} + \frac{s^2 + \lambda_n^2}{P_{3n}} F_{n3}, \\
 P_{3n}(s) &= (s^2 + \lambda_n^2)(s + D\lambda_n^2) - \alpha\Lambda\lambda_n^4.
 \end{aligned}$$

Учитывая равенства (20), для изображений U_n^L и H_n^L получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
 U_n^L &= -\varphi_n f_1^L + \frac{2\lambda_n(s + (D - \alpha\Lambda)\lambda_n^2)}{P_{3n}} f_1^L + \frac{2\alpha\lambda_n}{P_{3n}} f_3^L, \\
 H_n^L &= -\psi_n f_3^L - \frac{2\Lambda\lambda_n^2 s^2}{P_{3n}} f_1^L + \frac{2(s^2 + \lambda_n^2)}{P_{3n}} f_3^L.
 \end{aligned} \tag{22}$$

После подстановки (16) и (18) в (15) с учетом формул (19), (21) и (22) получаем решение задачи (13), (14):

$$\begin{aligned}
 u^L &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[(s + (D - \alpha\Lambda)\lambda_n^2) f_1^L + \alpha f_3^L \right] \frac{\sin \lambda_n x}{P_{3n}}, \\
 \eta^L &= \frac{1}{s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Lambda\lambda_n^2 s^2 f_1^L - (s^2 + \lambda_n^2) f_3^L \right] \frac{\cos \lambda_n x}{P_{3n}}.
 \end{aligned}$$

Сравнивая его с (11) с учетом равенства (20) и свойств преобразования Лапласа, находим изображения функций G_{uk} и $G_{\eta k}$ при $k = 1, 3$:

$$\begin{aligned}
 G_{u1}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{u1n}^L(s) \sin \lambda_n x, & G_{u3}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{u3n}^L(s) \sin \lambda_n x, \\
 G_{\eta 1}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 1n}^L(s) \cos \lambda_n x, & G_{\eta 3}^L(x, s) &= G_{\eta 30}^L(s) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 3n}^L(s) \cos \lambda_n x,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{u1n}^L(s) &= \frac{2(s + (D - \alpha\Lambda)\lambda_n^2)}{P_{3n}}, & G_{\eta 1n}^L(s) &= -\frac{2\Lambda\lambda_n^2 s^2}{P_{3n}}, \\
 G_{\eta 30}^L(s) &= \frac{1}{s}, & G_{\eta 3n}^L(s) &= \frac{2(s^2 + \lambda_n^2)}{P_{3n}}, & G_{u3n}^L(s) &= \frac{2\alpha\lambda_n}{P_{3n}}, & n &\geq 1.
 \end{aligned} \tag{23}$$



4. ОРИГИНАЛЫ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Наиболее просто вычисляется оригинал функции $G_{\eta 30}^L$ [5]:

$$G_{\eta 30}(\tau) = H(\tau), \tag{24}$$

где $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Остальные функции в (23) являются рациональными функциями параметра s . Их оригиналы вычисляются достаточно просто с использованием разложений на элементарные дроби. Для этого необходим анализ нулей их знаменателя, т. е. корней кубического уравнения:

$$P_{3n}(s) = 0. \tag{25}$$

Поскольку для большинства реальных сред имеют место неравенство [1–3]

$$0 < \alpha\Lambda \ll D < 1,$$

то анализ проведем асимптотически, раскладывая корни s_{1n} , s_{2n} , s_{3n} этого уравнения в степенные ряды по малому параметру $\varepsilon = \alpha\Lambda$ (ограничиваемся первыми двумя членами):

$$s_{kn} = s_{kn}^{(0)} + \varepsilon s_{kn}^{(1)} + \dots, \quad k = 1, 2, 3.$$

Подставляя эти равенства в (25) и приравнивая коэффициенты при нулевой и первой степенях малого параметра, получаем следующие уравнения относительно $s_{kn}^{(0)}$ и $s_{kn}^{(1)}$:

$$\left(s_{kn}^{(0)2} + \lambda_n^2\right) \left(s_{kn}^{(0)} + D\lambda_n^2\right) = 0, \quad \left(3s_{kn}^{(0)2} + 2D\lambda_n^2 s_{kn}^{(0)} + \lambda_n^2\right) s_{kn}^{(1)} - \lambda_n^4 = 0.$$

Их решения имеют вид

$$s_{1n}^{(0)} = i\lambda_n, \quad s_{2n}^{(0)} = -i\lambda_n, \quad s_{3n}^{(0)} = -D\lambda_n^2, \quad s_{kn}^{(1)} = \frac{\lambda_n^4}{P_{2n}(s_{kn}^{(0)})}, \quad P_{2n}(s) = 3s^2 + 2D\lambda_n^2 s + \lambda_n^2.$$

Отсюда следует, что уравнение (25) имеет два комплексно сопряженных корня s_{1n} и s_{2n} , один действительный корень $s_{3n} < 0$. Поскольку

$$P_{2n}(s_{1n}^{(0)}) = -3\lambda_n^2 + 2iD\lambda_n^3 + \lambda_n^2 = -2\lambda_n^2 + 2iD\lambda_n^3 = 2\lambda_n^2(-1 + iD\lambda_n),$$

то $\text{Re } s_{1n} < 0$, что в совокупности с отрицательностью s_{3n} соответствует затуханию решений.

Теперь можем построить разложения рациональных функций, входящих в формулы (23), на элементарные дроби:

$$\begin{aligned} \frac{s + (D - \alpha\Lambda)\lambda_n^2}{P_{3n}} &= \frac{A_{11n}s + A_{12n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{A_{13n}}{s - s_{3n}}, & \frac{s^2}{P_{3n}} &= \frac{A_{21n}s + A_{22n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{A_{23n}}{s - s_{3n}}, \\ \frac{1}{P_{3n}} &= \frac{A_{31n}s + A_{32n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{A_{33n}}{s - s_{3n}}, & \frac{s^2 + \lambda_n^2}{P_{3n}} &= \frac{A_{41n}s + A_{42n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{A_{43n}}{s - s_{3n}}, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11n} &= -\frac{s_{3n} + (D - \alpha\Lambda)\lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{12n} &= \frac{z_n^2 - s_{3n}(D - \alpha\Lambda)\lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{13n} &= \frac{s_{3n} + (D - \alpha\Lambda)\lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \\ A_{21n} &= \frac{z_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{22n} &= \frac{s_{3n}z_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{23n} &= \frac{s_{3n}^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \\ A_{31n} &= -\frac{1}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{32n} &= -\frac{s_{3n}}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{33n} &= \frac{1}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \\ A_{41n} &= \frac{z_n^2 - \lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{42n} &= s_{3n} \frac{z_n^2 - \lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, & A_{43n} &= \frac{s_{3n}^2 + \lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$



Подставляя теперь разложения (26) в (23) и учитывая (24), с использованием таблиц обратного преобразования Лапласа (см., например, [5]) получаем оригиналы функций влияния:

$$G_{u1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [A_{11n} \cos z_n \tau + A_{12n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{13n} e^{s_{3n} \tau}],$$

$$G_{\eta 1} = -2\Lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 [A_{21n} \cos z_n \tau + A_{22n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{23n} e^{s_{3n} \tau}],$$

$$G_{u3} = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [A_{31n} \cos z_n \tau + A_{32n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{33n} e^{s_{3n} \tau}],$$

$$G_{\eta 3} = H(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [A_{41n} \cos z_n \tau + A_{42n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{43n} e^{s_{3n} \tau}].$$

5. ПРИМЕРЫ

Положим, что материал слоя имеет следующие безразмерные характеристики: $D = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\Lambda = 0.001$. Рассмотрим два варианта граничных условий (8):

А. Обе поверхности слоя зафиксированы, на границе $x = 1$ диффузионный поток отсутствует, а при $x = 0$ он задан в виде функции Хевисайда, что соответствует следующим правым частям равенств (8):

$$f_1(\tau) = f_2(\tau) = f_4(\tau) \equiv 0, \quad f_3(\tau) = H(\tau).$$

Тогда, вычисляя интегралы в (12), получаем, что перемещения и концентрация определяются равенствами

$$u(x, \tau) = G_{u3}(x, \tau) * f_3(\tau) =$$

$$= 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [A_{31n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{32n} z_n^{-2} (1 - \cos z_n \tau) - A_{33n} s_{3n}^{-1} (1 - e^{s_{3n} \tau})] \sin \lambda_n x,$$

$$\eta(x, \tau) = G_{\eta 3}(x, \tau) * f_3(\tau) =$$

$$= \tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [A_{41n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{42n} z_n^{-2} (1 - \cos z_n \tau) - A_{43n} s_{3n}^{-1} (1 - e^{s_{3n} \tau})] \cos \lambda_n x.$$

Результаты расчётов по этим формулам продемонстрированы на рис. 1, а, б, где представлены графики зависимостей перемещений и концентрации от времени в различных точках (сплошная линия соответствует $x = 0.1$, линия с точками — $x = 0.5$, пунктирная — $x = 0.9$).

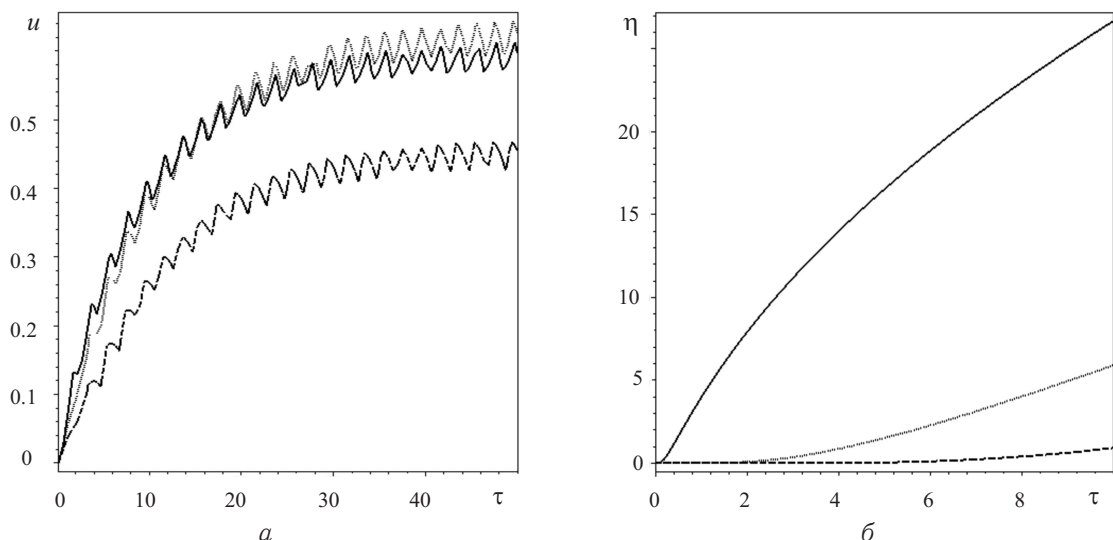


Рис. 1. Зависимость перемещений (а) и приращения концентрации (б) от времени. Вариант А



Б. Положим, что $f_1(\tau) = f_2(\tau) = f_4(\tau) \equiv 0$, $f_3(\tau) = e^{-\tau}$. Тогда для искомых функций получаем следующие формулы:

$$u(x, \tau) = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_{33n} (e^{-\tau} - e^{s_{3n}\tau}) \frac{\sin \lambda_n x}{1 + s_{3n}} +$$

$$+ 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [(A_{31n} - A_{32n}) \cos z_n \tau + (A_{31n} z_n + A_{32n} z_n^{-1}) \sin z_n \tau + (A_{32n} - A_{31n}) e^{-\tau}] \frac{\sin \lambda_n x}{1 + z_n^2},$$

$$\eta(x, \tau) = 1 - e^{-\tau} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{43n} (e^{-\tau} - e^{s_{3n}\tau}) \frac{\cos \lambda_n x}{1 + s_{3n}} +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} [(A_{41n} - A_{42n}) \cos z_n \tau + (A_{41n} z_n + A_{42n} z_n^{-1}) \sin z_n \tau + (A_{42n} - A_{41n}) e^{-\tau}] \frac{\cos \lambda_n x}{1 + z_n^2}.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 2, а, б (сплошная линия соответствует $x = 0.1$, линия с точками — $x = 0.5$, пунктирная — $x = 0.9$).

Все указанные выше результаты получены при учёте 50 членов рядов. При учёте большего количества членов ряда максимальная относительная погрешность составляет менее 1%.

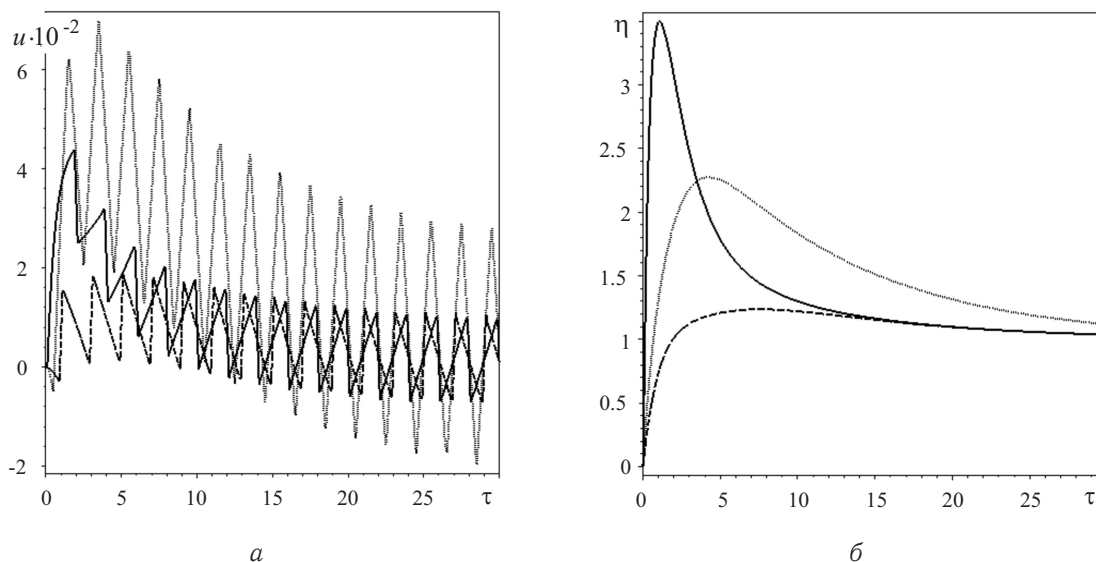


Рис. 2. Зависимость перемещений (а) и приращения концентрации (б) от времени. Вариант Б

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-08-00064-а и 11-08-90453-Укр_ф_а).

Библиографический список

1. Еремеев В. С. Диффузия и напряжения. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
2. Князева А. Г. Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах. Томск : Томский гос. ун-т, 1996. 146 с.
3. Подстригач Я. С., Павлина В. С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n -компонентном твёрдом растворе // Физико-химическая механика материалов. 1965. № 4. С. 383–389.
4. Бугаев Н. М., Гачкевич А. Р., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Приближённое решение одномерной задачи связанной термоупругой диффузии для полупространства // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. Дніпропетровськ : ІМА-прес, 2011. Вип. 16. С. 60–68.
5. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М. : Физматлит, 2004. 472 с.



The One-dimensional Problem of Unsteady-related Elastic Diffusion Layer

A. R. Gachkevich¹, A. V. Zemskov², D. V. Tarlakovsky²

¹Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukraine, 79060, L'vov, Naukova st., 3 b, dept13@iapmm.lviv.ua

²Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), Russia, 125993, Moscow, GSP-3, A-80, Volokolamskoe Shosse, 4, azemskov1975@mail.ru, tdvhome@mail.ru

The problem of determining the stress strain state of an elastic medium, taking into account the structural changes caused by the presence of diffusion fluxes. The influence of diffusion processes on the stress-strain state of the environment is taken into account by using the locally equilibrium model of thermoelastic diffusion, which includes the coupled system of equations of motion of an elastic body and the equations of heat and mass transfer. For solutions used decompositions of the unknown functions in Fourier series and then applying the integral Laplace transform with respect to time. We construct a fundamental solution of the problem. For examples the cases where the diffusion flux at the boundary is constant, or decays exponentially are considered.

Key words: elastic diffusion, time-dependent problems, Fourier series, Laplace transform.

References

1. Eremeev V. S. *Diffuziia i napriazheniia* [Diffusion and stresses]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978, 287 p. (in Russian).
2. Knjazeva A. G. *Vvedenie v lokal'no-ravnovesnuiu termodinamiku fiziko-khimicheskikh prevrashchenii v deformiruemykh sredakh* [Introduction to the locally-equilibrium thermodynamics of physical and chemical transformations in deformable environments]. Tomsk, 1996, 146 p. (in Russian).
3. Podstrigach Ja. S., Pavlina V. S. Differential equation of thermodynamic processes in the n -component solid solution. *Fiziko-himicheskaja mehanika materialov*, 1965, no. 4, pp. 383–389. (in Russian).
4. Bugaev N. M., Gachkevych A. R., Zemskov A. V., Tarlakovsky D. V. Approximated solution of one-dimensional bound thermo elastic diffusion problem for half space. *Problemi obchisljuval'noi mehaniki i micnosti konstrukcij: zbirnik naukovih prac'*, Dnipropetrovs'kij nacional'nij universitet, Dnipropetrovs'k, IMA-pres, 2011, iss. 16, p. 60–68. (in Russian).
5. Gorshkov A. G., Medvedsky A. L., Rabinsky L. N., Tarlakovsky D. V. *Volny v sploshnykh sredakh* Waves in Continuous Media. Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p. (in Russian).

УДК 51-73

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ, ТРЕБУЮЩИХ КВАНТОВОГО ОПИСАНИЯ В РАМКАХ ГИБРИДНОГО МЕТОДА (КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА / МОЛЕКУЛЯРНАЯ МЕХАНИКА)

О. Е. Глухова¹, А. С. Колесникова², М. М. Слепченков³, Г. В. Савостьянов⁴

¹ Доктор физико-математических наук, заведующий кафедры радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, oeglukhova@yandex.ru

² Программист отдела математического моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского), kolesnikova.88@mail.ru

³ Ассистент кафедры радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского), slepchenkovm@mail.ru

⁴ Аспирант кафедры радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского), follow.a.white.rabbitt@gmail.com

В рамках гибридного метода (QM/MM) разработана новая модель, определяющая активную область структуры, т. е. ту область, для описания которой нужно применить высокоточные квантовые методы. В основе модели лежит решение задачи определения атомов с критическими значениями напряжения. Потенциальная энергия этих атомов и их ближайшего окружения рассчитывалась квантово-химическим методом, а потенциальная энергия оставшейся части структуры молекулярно-механическим методом. Гибридный метод (QM/MM) позволяет выявить с высокой точностью оптимальную топологию структуры и увеличить скорость нахождения ее равновесного состояния, а также исследовать динамику поведения деформированной структуры во времени.

Ключевые слова: квантово-химические методы, молекулярно-механические методы, поле локальных напряжений, силы, углеродные наноструктуры.



1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ QM/MM

В настоящее время известны четыре класса методов расчета полной энергии наноструктур: методы *ab initio* (первопринципные методы) [1, 2], методы функционала плотности [3], полуэмпирические [4–7] и эмпирические методы [8–11]. Последнее десятилетие развивается еще один класс методов, называемый классом гибридных методов (QM/MM), сочетающих молекулярно-механический и квантово-химический методы [12–15]. Преимущество гибридного метода по сравнению с методами *ab initio* (первопринципные методы), функционала плотности и полуэмпирического заключается в том, что с помощью него можно исследовать структуру, состоящую из большего количества атомов. В отличие от эмпирического метода гибридный метод позволяет более точно учитывать изменения в атомном каркасе наноструктур.

Большинство гибридных методов основаны на разбиении исследуемых систем на три локализованные области (активная, буферная области и окружающая область) и отличаются способом расчета потенциальной энергии. Активной областью наноструктуры называется область, в которой наблюдается изменение структуры нанокластера, например, образование дефекта, допирование или адсорбция атомов и т. д. Потенциальная энергия, описывающая химическое взаимодействие между атомами, которые располагаются в активной области, рассчитывается квантово-химическим методом. Вокруг активной области имеется буферная область с расстоянием от края активной области до края буферной области порядка 0.02 нм [12, 13]. Потенциальная энергия буферной области рассчитывается комбинацией квантово-химического и молекулярно-механического методов. Потенциальная энергия оставшейся области, которая называется окружающей областью, находится молекулярно-механическим методом.

Rode и его коллеги [12, 13] рассчитали потенциальную энергию молекулярной системы гибридным методом, в котором используются молекулярно-механический метод (ММ) и квантово-химический метод (QM), по формуле

$$V = V^{entire}(MM) + (V^{A+B}(QM) - V^{A+B}(MM)), \quad (1)$$

где $V^{entire}(MM)$ — потенциальная энергия всей системы, рассчитанная при помощи ММ метода, $V^{A+B}(QM)$ — потенциальная энергия молекулярной системы, состоящей из атомов, расположенных в активной и буферной областях, рассчитанная при помощи QM метода, $V^{A+B}(MM)$ — потенциальная энергия молекулярной системы, составленной из атомов, попавших в активную и буферную области, рассчитанная при помощи молекулярно-механического метода. Для выбранных потенциалов нулевой уровень энергии выбирается так, чтобы энергия молекулярной системы в равновесном состоянии для обоих методов равнялась нулю.

Kerdcharoen и Mookume's [14, 15] предложили находить потенциальную энергию молекулярной системы гибридным методом QM/MM по формуле

$$V = PV^{A+B} + (1 - P)V^A,$$

где V^A — потенциальная энергия молекулярной системы, состоящей из атомов, расположенных в активной области, рассчитанной при помощи потенциала QM, V^{A+B} — потенциальная энергия молекулярной системы, состоящей из атомов, расположенных в активной и буферной областях, рассчитанной при помощи потенциала QM, P — арифметическое среднее сглаживающих функций $P_i(\alpha_i)$.

Heyden и Lin [16] записывают потенциальную энергию системы в следующем виде:

$$V = V^A + \sum_{i=1, \dots, N} P_i(V_i^A - V^A) + \sum_{i=1, \dots, N-1; j=i+1, \dots, N} P_i P_j (V_{i,j}^A - [V^A + \sum_{r=i,j} (V_r^A - V^A)]) + \\ + \sum_{(p,q)=(i,j), (i,k), (j,k)} (V_{p,q}^A - [V^A + \sum_{r=i,j} (V_r^A - V^A)]) + \dots,$$

где V^A — потенциальная энергия молекулярной системы, состоящей из атомов, расположенных в активной области, рассчитанной при помощи потенциала QM, V_i^A — потенциальная энергия молекулярной системы, состоящей из атомов, расположенных в активной области, и одного атома i из



буферной области, рассчитанной при помощи потенциала QM, $V_{i,j}^A$ — потенциальная энергия молекулярной системы, состоящей из атомов, расположенных в активной области, и двух атомов i и j из буферной области, рассчитанной при помощи потенциала QM, P_i — сглаживающая функция i -го атома.

При исследовании с помощью гибридных методов различных свойств наноструктур остается нерешенной проблема корректного с физической точки зрения обоснования местоположения активной области и динамики её изменения с течением времени. В связи с этим целью данной работы является разработка концепции определения зависимости геометрии активной области от геометрии наноструктуры. Потенциальная энергия активной области рассчитывается квантово-химическими методами в рамках метода QM/MM.

Метод QM/MM может быть реализован в рамках молекулярной динамики, что позволит осуществить численный эксперимент с многоатомными структурами в режиме реального времени с учетом внешних условий: постоянных и переменных электрических полей, теплового воздействия, постоянной и изменяющиеся механической нагрузки, плазма, адсорбирующиеся атомы.

2. КОНЦЕПЦИЯ РАСЧЕТА МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ ГИБРИДНЫМ МЕТОДОМ (QM/MM) НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПОЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим основные особенности реализации молекулярной динамики гибридным методом (QM/MM) на основе анализа поля локальных напряжений. В качестве квантово-химического метода используется метод сильной связи, представленный в работе [17], в качестве молекулярно-механического метода используется метод REBO [18].

Каждый шаг молекулярно-динамического расчета гибридным методом основывается на анализе поля локальных напряжений. Потенциальная энергия гибридным методом находится по формуле (1). Для текущего состояния атомного каркаса рассчитывается поле локальных напряжений с помощью оригинальной методики [19], с целью выявления наиболее деформированных и/или дефектных участков атомной сетки.

Методика расчета поля локальных напряжений основана на эмпирическом подходе в расчете энергии одного атома [19]. Расчет поля локальных напряжений для некоторого неравновесного состояния наноструктуры осуществлялся по следующему алгоритму.

1. Оптимизация исходной атомной структуры.
2. Вычисление распределения объемной плотности энергии по атомам.
3. Вычисление распределения объемной плотности энергии по атомам структуры, подвергнутой внешнему воздействию.
4. Расчет поля локальных напряжений атомного каркаса по разности значений объемных плотностей энергии атомов структуры, подвергнутой внешнему воздействию, и структуры в равновесном состоянии.

В результате сканирования карты локальных напряжений выделяются атомы, которые испытывают критические напряжения, такие атомы называются «горячими» атомами. Относительно каждого из этих атомов строится сфера радиусом r_{in} , который, например, для углерода может быть выбран равным 0.2 нм, поскольку для углерода при увеличении длины связи до 0.2 нм происходит её разрыв. Радиус буферной зоны r_{out} выбирается на 0.02 нм больше [12, 13] радиуса активной области. В общем случае имеем несколько активных областей с соответствующими им буферными областями, поскольку «горячие» атомы могут образовываться в разных участках структуры.

В процессе молекулярно-динамического расчета одним из основных моментов является расчет сил, действующих на атомы молекулярной системы. При использовании потенциала (1) сила, действующая на выделенный атом, рассчитывается по формуле

$$f_i = f_i^{entire}(MM) + S(r_i)(f_i^{A+B}(QM) - f_i^{A+B}(MM)),$$

где $f_i^{entire}(MM)$ — сила, действующая на атом со стороны всей структуры и определяющаяся потенциалом Бреннера [18], $f_i^{A+B}(QM)$ — сила, действующая на атом со стороны активной и буферной областей, рассчитанная с помощью квантово-химического метода сильной связи [17], $f_i^{A+B}(MM)$ —



сила, действующая на атом со стороны в активной и буферной области, рассчитанная при помощи потенциала Бреннера, $S(r_i)$ — масштабирующая функция, которая находится по формуле

$$S(r_i) = \begin{cases} 1, & r_i \leq r_{in} \\ \frac{(r_{out}^2 - r_i^2)^2 (r_{out}^2 - 2r_i^2 - 3r_{in}^2)}{(r_{out}^2 - r_{in}^2)^3}, & r_{in} < r < r_{out} \\ 0, & r_i \geq r_{out}, \end{cases}$$

где r_{in} и r_{out} — внутренний и внешний радиусы буферной области, а r_i — расстояние от ближайшего «горячего» атома до i -го атома.

В общем случае при заданной потенциальной функции силы, действующие на каждый атом, рассчитываются через градиент потенциальной энергии:

$$f_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i},$$

где r_i — координаты i -го атома.

Расчет градиента потенциальной энергии для потенциала REBO не составляет особой сложности. Остановимся подробно на расчете градиента потенциальной энергии в рамках квантово-химического метода сильной связи.

Энергия в рамках метода сильной связи [17] определяется соотношением

$$E_{tot} = E_{bond} + E_{rep},$$

где E_{bond} — энергия занятых электронных состояний, E_{rep} — энергия отталкивания, которая является результатом электронного взаимодействия между атомами.

Энергия отталкивания определяется формулой

$$E_{rep} = \sum_{i < j} V_{rep}(|r_i - r_j|),$$

где

$$V_{rep}(r) = p_5 \left(\frac{p_3}{r}\right)^{p_6} \exp \left\{ p_6 \left[\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{p_4} - \left(\frac{r}{p_2}\right)^{p_4} \right] \right\}.$$

Энергия занятых электронных состояний определяется по формуле

$$E_{bond} = 2 \sum_m \varepsilon_n, \quad (2)$$

где m — число занятых орбиталей, ε_n — энергии молекулярных орбиталей, которые соответствуют собственным значениям матрицы гамильтониана системы [17]. Элементы матрицы гамильтониана определяются формулой

$$V_{ij \alpha}(r) = V_{ij \alpha}^0 \left(\frac{p_3}{r}\right)^{p_1} \exp \left\{ p_1 \left[\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{p_4} - \left(\frac{r}{p_2}\right)^{p_4} \right] \right\},$$

где α — тип перекрытия атомных орбиталей, значения параметров $V_{ij \alpha}^0, p_1, \dots, p_6$ приведены в [17].

Остановимся подробно на процедуре нахождения градиента энергии E_{bond} :

$$\frac{\partial E_{bond}}{\partial r_i} = 2 \sum_m \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r_i}.$$

Для определения $\partial \varepsilon_n / \partial r_i$ необходимо определить зависимость между изменением собственных значений и изменением элементов матрицы гамильтониана.

В разработанной Дж. Х. Уилкинсоном матричной теории возмущений [20], возмущение матрицы A , зависящее от параметра малости возмущений δ , представляется в виде

$$A(\delta) = A + A_1 \delta,$$

где A_1 — некоторая матрица.



В рамках алгебраического подхода Уилкинсон получил выражение для возмущенных собственных значений в виде сходящегося в некоторой окрестности ряда:

$$\lambda_i(\delta) = \lambda_i + k_1^i \delta + k_2^i \delta^2 + \dots, \quad (3)$$

где λ_i — собственное значение матрицы A , $\lambda_i(\delta)$ — собственное значение, соответствующее возмущенной матрице $A(\delta)$. Здесь k_1^i, k_2^i, \dots — коэффициенты, определяющиеся соотношением

$$k_j^i = \frac{1}{s_i} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m t_{jm-1}^i \beta_{ji}, \quad (4)$$

где

$$t_{jm}^i = \frac{t_{jm-1}^i (k_1^i - \beta_{jj}) + \dots + t_{j1}^i k_{m-1}^i}{(\lambda_j - \lambda_i) s_j}, \quad (5)$$

$$s_i = y_i^T x_i, \quad (5)$$

$$\beta_{ij} = y_i^T A_1 x_j, \quad (6)$$

где y_i, x_i — соответственно левые и правые собственные векторы.

Пусть $H(r)$ — матрица гамильтониана для некоторого фиксированного состояния молекулярной системы, где $r = [r_1, r_2, \dots, r_N]$, здесь N — число атомов системы, r_i — радиус-вектор i -го атома. Обозначим через e_{il} аналогичный r набор векторов, у которого компоненты всех векторов равны нулю, за исключением l -й компоненты i -го вектора, равной единице.

Будем рассматривать возмущение матрицы гамильтониана $H(r)$, соответствующее сдвигу l -й компоненты i -го радиус-вектора системы на величину δ , в виде

$$H_\delta^{il}(r) \delta = H(r + e_{il} \delta) - H(r). \quad (7)$$

Элементы матрицы гамильтониана имеют обобщенный вид

$$H_{pq}(r) = h_{pq}(r_1, \dots, r_N),$$

где $h_{pq}(r_1, \dots, r_N)$ — дифференцируемы. Тогда элементы матрицы $H_\delta^{il}(r)$ можно записать в виде

$$H_{pq \delta}^{il}(r) = \frac{h_{pq}(r_1, \dots, r_i + e_{il} \delta, \dots, r_m) - h_{pq}(r_1, \dots, r_m)}{\delta},$$

где e_l — вектор, направленный вдоль l -й оси декартовой системы координат. Используя разложение в ряд Тейлора, получаем:

$$H_{pq \delta}^{il}(r) = \left(\frac{\partial h_{pq}(r_1, \dots, r_m)}{\partial r_{il}} \delta + O(\delta^2) \right) / \delta.$$

При делении на δ окончательно получаем в матричном виде:

$$H_\delta^{il}(r) = \frac{\partial H(r)}{\partial r_{il}} + EO(\delta),$$

где $\partial H(r) / \partial r_{il}$ — поэлементное частное дифференцирование матрицы $H(r)$ по l -й координате радиус-вектора i -го атома, а E — единичная матрица.

Применяя формулу (3), получаем:

$$\varepsilon_n(r + e_{il} \delta) = \varepsilon_n(r) + k_1^n (H_\delta^{il}(r)) \delta + k_2^n (H_\delta^{il}(r)) \delta^2 + \dots$$

или

$$\varepsilon_n(r + e_{il} \delta) - \varepsilon_n(r) = k_1^n (H_\delta^{il}(r)) \delta + k_2^n (H_\delta^{il}(r)) \delta^2 + \dots \quad (8)$$

Разделим выражение (8) на δ и устремим δ к нулю

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(r + e_{il} \delta) - \varepsilon_n(r)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ k_1^n (H_\delta^{il}(r)) + k_2^n (H_\delta^{il}(r)) \delta + \dots \}.$$



Поскольку k_i^n — коэффициенты аналитически-сходящегося ряда, то они ограничены. Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial \varepsilon_n(r)}{\partial r_{il}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} k_1^n(H_\delta^{il}(r)),$$

Из формулы (4) получаем:

$$k_1^n(H_\delta^{il}(r)) = \frac{\beta_{nn}(H_\delta^{il}(r))}{s_n}.$$

Поскольку матрица гамильтониана является симметричной, то левый и правый собственные векторы совпадают и имеют норму, равную 1. Поэтому из формулы (5) получаем, что $s_n = 1$.

Итого

$$k_1^n(H_\delta^{il}(r)) = \beta_{nn} = x_n^T \left(\frac{\partial H(r)}{\partial r_{il}} + EO(\delta) \right) x_n,$$

откуда

$$\frac{\partial \varepsilon_n(r)}{\partial r_{il}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ x_n^T \frac{\partial H(r)}{\partial r_{il}} x_n + x_n^T E x_n O(\delta) \right\},$$

так как $x_n^T E x_n = x_n^T x_n = s_n = 1$, получаем:

$$\frac{\partial \varepsilon_n(r)}{\partial r_{il}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ x_n^T \frac{\partial H(r)}{\partial r_{il}} x_n + O(\delta) \right\}.$$

Первое выражение под пределом не зависит от δ , а второе стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, поэтому

$$\frac{\partial \varepsilon_n(r)}{\partial r_{il}} = x_n^T \frac{\partial H(r)}{\partial r_{il}} x_n. \quad (9)$$

Таким образом, для нахождения градиента E_{bond} достаточно знать собственные векторы и поэлементные частные производные гамильтониана в точке r .

Несмотря на квадратичную асимптотику формулы (9), расчет производной для собственных значений по этой формуле в методе сильной связи весьма эффективен в силу большой разреженности матрицы гамильтониана.

3. ВЫВОДЫ

В данной работе впервые изложена концепция динамического определения активной области в рамках гибридного метода (QM/MM), основанная на расчете поля локальных напряжений. Сканирование карты локальных напряжений позволяет динамически определять активные, буферные и окружающие области, в то время как в существующих моделях [12–16] эти области фиксированы. В связи с этим представленная в данной работе модель позволяет во времени определять изменения или перестройки связей атомного каркаса структуры, например, в области деформации структуры. Следует отметить, что описанный алгоритм определения активных областей применим и для моделей, представленных в работах [14–16]. Изложены основные особенности реализации молекулярной динамики гибридным методом, с применением квантово-химического метода сильной связи. Разработанная гибридная молекулярно-динамическая модель MM/QM обеспечивает моделирование работы наноразмерных устройств, изучение свойств материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-31036, 12-02-00807, 13-08-00986) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», XLI очередь мероприятия 1.2.1, технические науки, номер соглашения «14.В37.21.1094», Президентской стипендии 2013–2016 (проект СП–2302.2013.1).

Библиографический список

1. Хурсан С. Л. Квантовая механика и квантовая химия. Конспекты лекций. Уфа : ЧП Раянов, 2005. 164 с.
2. Аминова Р. М. Основы современной квантовой химии / Казан. гос. ун-т. Казань, 2004. 106 с.
3. Сатанин А. М. Введение в теорию функционала плотности : учеб.-метод. пособие / Нижегород. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. Н. Новгород, 2009. 64 с.
4. Блатов В. А., Шевченко А. П., Пересыпкина Е. В. Полуэмпирические расчетные методы квантовой химии : учеб. пособие. Самара : Универс-групп, 2005. 32 с.
5. Глухова О. Е., Жбанов А. И. Равновесное состоя-



- ние нанокластеров C_{60} , C_{70} , C_{72} и локальные дефекты молекулярного остова // Физика твердого тела. 2003. Т. 45, вып. 1. С. 189–196.
6. Goodwin L. A. New tight-binding parametrization for carbon // J. Phys. : Condens. Matter. 1991. Vol. 3. P. 3869–3878.
7. Харрисон У. Электронная структура и свойства твердых тел. М. : Мир, 1983. 381 с.
8. Tersoff J. Modeling solid-state chemistry : Interatomic potentials for multicomponent systems // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 39, № 8. P. 5566–5568.
9. Brenner D. W. Empirical potential for hydrocarbons for use in simulating the chemical vapor deposition of diamond films // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42, № 15. P. 9458–9471.
10. Stuart S. J., Tutein A. B., Harrison J. A. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions // J. Chem. Phys. 2000. Vol. 112, № 14. P. 6472–6486.
11. Глухова О. Е. Изучение механических свойств углеродных нанотрубок стручкового типа на молекулярно-механической модели // Физика волновых процессов и РС. 2009. Т. 12, № 1. С. 69–75.
12. Kerdcharoen T., Liedl K. R., Rode B. M. A QM/MM simulation method applied to the solution of Li^+ in liquid ammonia // Chem. Phys. 1996. Vol. 211. P. 313–323.
13. Hofer T. S., Pribil A. B., Randolph B. R., Rode B. M. Structure and Dynamics of Solvated $Sn(II)$ in Aqueous Solution : An ab Initio QM/MM MD Approach // J. Am. Chem. Soc. 2005. Vol. 127. P. 14231–14238.
14. Kerdcharoen T., Morokuma K. J. Combined QM/MM Simulation of Ca^{2+} /Ammonia Solution based on ONIOM-XS Method : Octahedral Coordination and Implication to Biology // Chem. Phys. 2003. Vol. 118. P. 8856–8863.
15. Kerdcharoen T., Morokuma K. ONIOM-XS : an extension of the ONIOM method for molecular simulation in condensed phase // Chem. Phys. Lett. 2002, Vol. 355. P. 257–262.
16. Heyden A., Lin H., Truhlar D. G. Adaptive partitioning in combined quantum mechanical and multiscale simulations // J. Phys. Chem. B. 2007. Vol. 111. P. 2231–2241.
17. Glukhova O. E., Kolesnikova A. S., Kossovich E. L., Zhnichkov R. Y. Super strong nanoindentors for biomedical applications based on bamboo-like nanotubes // Proc. of SPIE. 2012. Vol. 8233. P. 823311(8).
18. Stuerta S. J., Tutein A. B., Harrison J. A. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions // J. Chem. Phys. 2000. Vol. 112, № 14. P. 6472–6486
19. Glukhova O. E., Slepchenkov M. M. Influence of the curvature of deformed graphene nanoribbons on their electronic and adsorptive properties : theoretical investigation based on the analysis of the local stress field for an atomic grid // Nanoscale. 2012. Vol. 11. P. 3335–3344.
20. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М. : Наука, Физматлит, 1970. 564 с.

Technique of Definition Areas Requiring a Quantum Description Within of the Hybrid Method (Quantum Mechanics / Molecular Mechanics)

O. E. Glukhova, A. S. Kolesnikova, M. M. Slepchenkov, G. V. Savostianov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, oeglukhova@yandex.ru, kolesnikova.88@mail.ru, slepchenkovm@mail.ru, follow.a.white.rabbitt@gmail.com

The new model, which determines the active area (the region for which high-precision quantum methods must be used) of the structure, was developed within the of the hybrid method (QM/MM). Problem of determining atoms with the critical tension values is the basis of this model. The potential energy of these atoms and its nearest neighbours was calculated by quantum-chemical method. The potential energy of the rest structure was calculated by molecular mechanical method. The Hybrid method (QM/MM) allows to reveal with high accuracy optimum topology structure and increase the speed of finding its equilibrium state.

Key words: the quantum-chemical methods, the molecular mechanics methods, the critical tension values, the force, the carbon nanostructures.

References

1. Khursan S. L. *Kvantovaj mekhanika i kvantovaj khimij* [Quantum mechanics and quantum chemistry. Lecture notes]. Ufa, PE, Rayanov, 2005, 164 p. (in Russian).
2. Aminova R. M. *Osnovy sovremennoj kvantovoj khimii* [The foundations of modern quantum chemistry]. Kazan, Kazan University Press, 2004, 106 p. (in Russian).
3. Satanin A. M. *Vvedenie v teoriyu funktsionala plotnosti. Uchebno-metodicheskoe posobie*. [Introduction to density functional theory. Teaching manual]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky, 2009, 64 p. (in Russian).
4. Blatov V. A., Shevchenko A. P., Peresyphkina E. V. *Poluempiricheskie raschetnye metody kvantovoj khimii. Uchebnoe posobie* [Semi-empirical calculation methods of quantum chemistry. Teaching manual]. Samara, Universal Group, 2005, 32 p. (in Russian).
5. Glukhova O. E., Zhbanov A. I. The equilibrium state of nanoclusters C_{60} , C_{70} , C_{72} and local defects of the



- molecular skeleton. *Physics of the Solid State* [Fizika tverdogo tela], 2003, vol. 45, iss. 1, pp. 189–196.
6. Goodwin L. A. New tight-binding parametrization for carbon. *J. Phys. : Condens. Matter.*, 1991, vol. 3, pp. 3869–3878.
7. Harrison U. *Elektronnaiia struktura i svoystva tverdyy tel.* [Electronic structure and properties of solids]. Moscow, Mir, 1983, 381 p. (in Russian).
8. Tersoff J. Modeling solid-state chemistry : Interatomic potentials for multicomponent systems. *Phys. Rev. B.*, 1989, vol. 39, no. 8, pp. 5566–5568.
9. Brenner D. W. Empirical potential for hydrocarbons for use in simulating the chemical vapor deposition of diamond films. *Phys. Rev. B.*, 1990, vol. 42, no. 15, pp. 9458–9471.
10. Stuart S. J., Tutein A. B., Harrison J. A. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions. *J. Chem. Phys.*, 2000, vol. 112, no. 14, pp. 6472–6486.
11. Glukhova O. E. The study of mechanical properties of carbon nanotubes cayenne-type molecular-mechanical model. *Physics of wave processes and PC.*, 2009, vol. 12, iss. 1, pp. 69–75. (in Russian).
12. Kerdcharoen T., Liedl K. R., Rode B. M. A QM/MM simulation method applied to the solution of Li* in liquid ammonia. *Chem. Phys.*, 1996, vol. 211, pp. 313–323.
13. Hofer T. S., Pribil A. B., Randolf B. R., Rode B. M. Structure and Dynamics of Solvated Sn(II) in Aqueous Solution : An ab Initio QM/MM MD Approach. *J. Am. Chem. Soc.*, 2005, vol. 127, pp. 14231–14238.
14. Kerdcharoen T., Morokuma K. J. Combined QM/MM Simulation of Ca^{2+} /Ammonia Solution based on ONIOM-XS Method : Octahedral Coordination and Implication to Biology. *Chem. Phys.*, 2003, vol. 118, pp. 8856–8863.
15. Kerdcharoen T., Morokuma K. ONIOM-XS : an extension of the ONIOM method for molecular simulation in condensed phase. *Chem. Phys. Lett.*, 2002, vol. 355, pp. 257–262.
16. Heyden A., Lin H., Truhlar D. G. Adaptive partitioning in combined quantum mechanical and multiscale simulations. *J. Phys. Chem. B.*, 2007, vol. 111, pp. 2231–2241.
17. Glukhova O. E., Kolesnikova A. S., Kossovich E. L., Zhnichkov R. Y. Super strong nanoindentors for biomedical applications based on bamboo-like nanotubes. *Proc. of SPIE.*, 2012, vol. 8233, pp. 823311(8).
18. Stuart S. J., Tutein A. B., Harrison J. A. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions. *Journal of chemical physics*, 2000, vol. 112, no. 14, pp. 6472–6486
19. Glukhova O. E., Slepchenkov M. M. Influence of the curvature of deformed graphene nanoribbons on their electronic and adsorptive properties : theoretical investigation based on the analysis of the local stress field for an atomic grid. *Nanoscale*, 2012, vol. 11, pp. 3335–3344.
20. Wilkinson J. X. *Algebraicheskaia problema sobstvennykh znachenij* [The algebraic eigenvalue problem]. Moscow, Nauka, FIZMATLIT, 1970, 564 p. (in Russian).

УДК 622.4:536.21

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ ПОЛОСТИ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПОЛОСТИ ГАЗА

О. И. Дударь¹, Е. С. Дударь², М. А. Осипенко³

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, olegdudar@yandex.ru

²Кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, elendudar@yandex.ru

³Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, oma@theormech.pstu.ac.ru

Найдено изменение температуры стенки цилиндрической полости в твердом теле как отклик на изменение температуры протекающего в полости газа. Рассмотрены 3 важных частных случая изменения температуры газа со временем: температура постоянна; температура изменяется по линейному закону; температура изменяется по гармоническому закону. Представлены графики пяти « θ -функций», через которые записываются решения. Графики получены с помощью квадратурной формулы Гаусса численным интегрированием несобственных интегралов, содержащих цилиндрические функции.

Ключевые слова: цилиндрическая полость, нестационарная теплопроводность, конвективный теплообмен, функции Бесселя и Неймана, несобственные интегралы.



ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач горной теплофизики и теплофизики подземных сооружений является задача распространения тепла в бесконечном твердом теле от цилиндрической полости, по которой движется газ (воздух). Решение этой задачи позволяет улучшить методику расчета теплового режима горных выработок и протяженных подземных сооружений (тоннелей, метрополитенов и др.). Простейшие методики по расчету теплового режима подземных сооружений основываются на решении уравнений теплового баланса и использовании коэффициента нестационарного теплообмена, с помощью которого тепло, выделяющееся из горного массива в воздух, выражается через разность средней температуры воздуха и естественной (то есть при отсутствующей полости) температуры горных пород [1–4]. Такие методики позволяют решать достаточно широкий класс инженерных задач, однако они обладают ограниченной точностью и не могут быть использованы при описании «тонких» эффектов, таких, например, как конденсация влаги на стенках горных выработок.

Поэтому получил распространение и другой подход, основанный на решении нестационарного дифференциального (в частных производных) уравнения теплопроводности, записываемого для твердого тела. Причем теплообмен с воздухом учитывается с помощью граничных условий третьего рода (закона Ньютона–Рихмана), выражающего тепловой поток на границе фаз, через разность средней температуры воздуха и температуры стенки полости. Впервые решение задачи в такой постановке получили Г. Карслоу [5], А. Н. Щербань и О. А. Кремнев [6] с помощью преобразования Лапласа для случая неизменной во времени температуры движущегося в полости газа. В работе А. С. Галицына, А. Н. Жуковского [7] и работе А. С. Галицына [8] решение было получено с использованием модифицированного преобразования Вебера при произвольном законе изменения температуры движущегося в полости газа и произвольном начальном условии. В работе [9] задача была решена в той же постановке, что и в работах [7, 8], но для решения применялся метод функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа. Это позволило обнаружить содержащуюся в работе [8] ошибку в знаке. Задача распространения тепла в пространстве от цилиндрической полости с граничными условиями второго рода, записываемого для движущегося источника тепла, рассмотрена в [10].

А. Ф. Галкин и Ю. А. Хохолов [11] решали задачу численно, в сопряженной постановке, то есть одновременно для твердой и газовой фазы. В настоящее время такого рода решение несложно получить и с помощью такого программного комплекса, как SolidWorks Flow Simulation (COSMOSFloWorks), являющегося модулем газодинамического анализа в среде SolidWorks [12]. Однако такой способ анализа становится весьма трудоемким при расчете сети выработок или подземных сооружений.

Очевидно, что анализ теплового режима сети значительно упростится, если для расчета использовать аналитические выражения, приведенные в работах [5–10]. Однако проблема состоит в том, что в этих работах решение получено в виде несобственного интеграла от выражения, содержащего функции Бесселя и Неймана.

Данная статья является продолжением работы [9]. Но если в [9] выражение функции, описывающей изменение температуры воздуха в полости, не конкретизировано, то в настоящей статье рассмотрены следующие важные с точки зрения практического применения частные случаи изменения со временем температуры воздуха в горной выработке:

- температура воздуха постоянна;
- температура воздуха изменяется по линейному закону;
- температура воздуха изменяется по гармоническому закону.

Первое решение удобно применять для анализа усредненных по времени процессов (например, для анализа влияния среднегодовой температуры воздуха). Кроме того, оно входит как составная часть в два других решения. Второе решение может быть использовано для кусочно-линейной интерполяции зависимости, задающей закон изменения температуры воздуха в выработке со временем. Третье решение пригодно для приближенного анализа влияния годового колебания температуры воздуха в выработке.

Отметим, что случай постоянной температуры воздуха рассматривался в работах [5–8], и приведенное в этих работах решение совпадает с полученным в данной работе. Третий случай — гармонических колебаний температуры воздуха — исследовался в работе [6], однако записанное в этой



работе решение содержит много опечаток и неточностей, так что воспользоваться им не представляется возможным.

В данной работе для трех упомянутых выше случаев изменения температуры воздуха со временем записаны аналитические выражения изменения со временем температуры стенки цилиндрической полости. Для записи всех решений используются 3 универсальные функции $\Theta_1(Fo)$, $\Theta_2(Fo)$, $\Theta_3(Fo)$, где Fo — число Фурье, по своему смыслу представляющее безразмерное время, и две универсальные «константы» Θ_4 и Θ_5 . Все функции и «константы» параметрически зависят от Bi — числа Био, по своему смыслу представляющего безразмерный коэффициент теплоотдачи. Приведены выражения универсальных функций и констант через несобственные интегралы от выражений, содержащих функции Бесселя и Неймана, а также графики их зависимостей от числа Фурье и (или) числа Био, полученные численным интегрированием с использованием квадратурных формул Гаусса.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Математическая постановка данной задачи приведена в работах [5–9] с той или иной степенью общности. Здесь воспроизводится постановка из работы [9].

Будем полагать, что подземная горная выработка представляет собой цилиндрическую полость радиуса r_0 . Задача распространения тепла в горном массиве от этой полости при движении по ней воздуха описывается следующим нестационарным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > 0, \quad (1)$$

при начальном условии

$$T|_{t=0} = T_0(r), \quad r > r_0, \quad (2)$$

причем

$$T_0|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty, \quad (3)$$

и при граничных условиях:

$$T|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty, \quad (4)$$

$$\left(-\frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T_a(t)) \right) \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (5)$$

В формулах (1)–(4): T — температура; a — коэффициент температуропроводности твердого тела; T_∞ — естественная температура горного массива (то есть температура горного массива при отсутствующей выработке).

Уравнение (5) представляет собой закон Ньютона–Рихмана, записанный с учетом закона теплопроводности Фурье. В уравнении (5): $T|_{r=r_0} = T_w$ — температура на границе раздела фаз (температура стенки); T_a — усредненная в некотором смысле по сечению полости температура воздуха; $h = \alpha/\lambda$, где λ — коэффициент теплопроводности твердого тела; α — коэффициент теплоотдачи. Очевидно, что значение коэффициента теплоотдачи α зависит от того, что понимается под средней температурой воздуха T_a . В соответствии с работами [13, 14] под T_a будем понимать среднемассовую по поперечному сечению полости температуру воздуха.

Для определения коэффициента теплоотдачи чаще всего применяют экспериментальный метод. Но для условий горных выработок его использование связано с большими затруднениями. В то же время в некоторых случаях для коэффициента α можно получить аналитическое выражение. Например, в работах [13, 15] приведено следующее выражение для коэффициента теплоотдачи α , полученное с помощью решения Лайона для цилиндрической полости (трубы):

$$\alpha = \frac{\lambda_a}{4r_0 \int_0^1 I_T(R) \frac{w(R)}{w} R dR}, \quad (6)$$



где выражение

$$I_T(R) = \int_R^1 \frac{\int_0^R \frac{w(R)}{\bar{w}} R dR}{\left(1 + \frac{\varepsilon_q(R)}{a_a}\right) R} dR \quad (7)$$

называется интегралом Лайона. В формулах (6), (7): $R = r/r_0$ — безразмерная радиальная координата; λ_a и a_a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности воздуха соответственно, a_q — коэффициент турбулентной температуропроводности воздуха; $w(R)$ — функция, задающая профиль скорости течения воздуха в поперечном сечении полости, а \bar{w} — среднее по сечению полости значение этой скорости. Формулы (6), (7) позволяют оценить, как те или иные параметры потока влияют на величину коэффициента теплоотдачи.

В работе [9] методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа получено решение задачи (1)–(5) в виде

$$T(r, t) = T_\infty + \frac{2ah}{\pi} \int_0^\infty \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \left\{ \int_0^t e^{-a\xi^2(t-\tau)} [T_a(\tau) - T_\infty] d\tau \right\} \xi d\xi + \\ + \int_{r_0}^\infty \int_0^\infty \frac{[N_0(\xi r')J(\xi r_0) - J_0(\xi r')N(\xi r_0)][N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)]}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \times \\ \times e^{-a\xi^2 t} \xi d\xi [T_0(r') - T_\infty] r' dr', \quad (8)$$

где $J(\xi r_0) = \xi J_1(\xi r_0) + hJ_0(\xi r_0)$, $N(\xi r_0) = \xi N_1(\xi r_0) + hN_0(\xi r_0)$, а J_0, J_1, N_0, N_1 — функции Бесселя и Неймана с индексом нуль и один соответственно [16, 17].

Если в качестве начального момента времени выбран момент прохождения шахтной выработки, то можно принять начальную температуру горного массива величиной постоянной по r и равной естественной температуре пород T_∞ : $T_0(r) = T_\infty$. В этом случае решение (8) принимает вид

$$T(r, t) = T_\infty + \frac{2ah}{\pi} \int_0^\infty \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \left\{ \int_0^t e^{-a\xi^2(t-\tau)} [T_a(\tau) - T_\infty] d\tau \right\} \xi d\xi. \quad (9)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА В ПОЛОСТИ

В данной работе нас интересует значение температуры стенки цилиндрической полости $T_w(t) = T(r_0, t)$. Поэтому, принимая $r = r_0$ и учитывая значение определителя Вронского [16]

$$N_0(x)J_1(x) - J_0(x)N_1(x) = \frac{2}{\pi x},$$

получим из (9)

$$T_w(t) = T_\infty + \frac{4ah}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{\int_0^t e^{-a\xi^2(t-\tau)} [T_a(\tau) - T_\infty] d\tau}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \xi d\xi. \quad (10)$$

Формула (10) позволяет определить температуру стенки полости при произвольном законе изменения температуры воздуха, протекающего по полости.

Далее рассмотрим три упомянутых выше случая изменения температуры воздуха в полости.

а. *Температура воздуха постоянна*: $T_a(t) = T_{a0} = \text{const}$. В этом случае

$$T_w(t) = T_\infty + (T_{a0} - T_\infty) \frac{4h}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-a\xi^2 t})}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Введем безразмерные числа Фурье и Био:

$$Fo = \frac{at}{r_0^2}, \quad Bi = hr_0, \quad (11)$$



и обозначим

$$\mu = \xi r_0 \quad f(Bi, \mu) = \left\{ \left[\frac{\mu}{Bi} J_1(\mu) + J_0(\mu) \right]^2 + \left[\frac{\mu}{Bi} N_1(\mu) + N_0(\mu) \right]^2 \right\} \mu. \quad (12)$$

Тогда температура стенки полости вычисляется по формуле

$$T_w(Fo) = T_\infty + (T_{a0} - T_\infty) \frac{4h}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)} d\mu.$$

Если в соответствии с работой [6] ввести безразмерную температуру стенки $\Theta_1 = \frac{T_w - T_{a0}}{T_\infty - T_{a0}}$, то получим выражение для Θ_1 , совпадающее с приведенным в [6]:

$$\Theta_1(Fo) = 1 - \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)} d\mu = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2 Fo}}{f(Bi, \mu)} d\mu. \quad (13)$$

В свою очередь температура стенки для случая постоянной температуры воздуха в цилиндрической полости может быть определена через Θ_1 по формуле

$$T_w(Fo) = T_{a0} + (T_\infty - T_{a0})\Theta_1(Fo). \quad (14)$$

б. Температура воздуха изменяется по линейному закону:

$$T_a(t) = T_{a0} + kt, \quad k = \frac{\Delta T_a}{\Delta t}.$$

В этом случае из формулы (10) имеем:

$$T_w(t) = T_\infty + \frac{4h}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{kt + (1 - e^{-a\xi^2 t})(T_{a0} - T_\infty - \frac{k}{a\xi^2})}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Учитывая (11), (12), а также, определяя число Фурье, соответствующее интервалу времени Δt , формулой

$$Fo_1 = \frac{a\Delta t}{r_0^2},$$

приходим к выражению

$$T_w(Fo) = T_\infty + \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{\Delta T_a \frac{Fo}{Fo_1} + (1 - e^{-a\xi^2 t})(T_{a0} - T_\infty - \frac{\Delta T_a}{Fo_1 \mu^2})}{f(Bi, \mu)} d\mu.$$

Обозначая

$$\Theta_2(Fo) = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)\mu^2} d\mu, \quad (15)$$

получаем формулу, позволяющую определить температуру стенки полости при линейном законе изменения температуры воздуха в этой полости

$$T_w(Fo) = T_{a0} + (T_\infty - T_{a0})\Theta_1(Fo) + \frac{\Delta T_a}{Fo_1} [Fo - \Theta_2(Fo)]. \quad (16)$$

в. Температура воздуха изменяется по гармоническому закону:

$$T_a(t) = T_{a0} + \Delta T_a \cos(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{t_Y}.$$



В этом случае в соответствии с формулой (10) имеем:

$$T_w(t) = T_\infty + \frac{4h}{\pi^2 r_0} \int_0^\infty \frac{(T_{a0} - T_\infty)(1 - e^{-a\xi^2 t}) + \frac{\Delta T_a}{1 + \omega_1^2} (\cos \omega t + \omega_1 \sin \omega t - e^{-a\xi^2 t})}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \frac{d\xi}{\xi},$$

где $\omega_1 = \frac{\omega}{a\xi^2}$.

Учитывая (11), (12), а также, определяя число Фурье, соответствующее периоду колебания t_Y , формулой

$$Fo_2 = \frac{at_Y}{r_0^2},$$

приходим к выражению

$$T_w(Fo) = T_\infty + \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{(T_{a0} - T_\infty)(1 - e^{-\mu^2 Fo}) + \frac{\Delta T_a}{1 + \omega_1^2} (\cos \varphi + \omega_1 \sin \varphi - e^{-\mu^2 Fo})}{f(Bi, \mu)} d\mu,$$

где

$$\varphi = 2\pi \frac{Fo}{Fo_2}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{Fo_2 \mu^2}.$$

Вводя обозначения

$$\Theta_3(Fo) = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2 Fo}}{(1 + \omega_1^2) f(Bi, \mu)} d\mu, \quad (17)$$

$$\Theta_4(Fo) = \frac{4}{\pi^2 Bi} \int_0^\infty \frac{d\mu}{(1 + \omega_1^2) f(Bi, \mu)}, \quad (18)$$

$$\Theta_5(Fo) = \frac{8}{\pi Bi Fo_2} \int_0^\infty \frac{d\mu}{(1 + \omega_1^2) \mu^2 f(Bi, \mu)}, \quad (19)$$

приходим к формуле, позволяющей определить температуру стенки полости при гармоническом законе изменения температуры воздуха в этой полости

$$T_w(Fo) = T_{a0} + (T_\infty - T_{a0})\Theta_1(Fo) - \Delta T_a \Theta_3(Fo) + \Delta T_a (\Theta_4 \cos \varphi + \Theta_5 \sin \varphi). \quad (20)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Согласно формулам (14), (16), (20) температура стенки полости для трех рассмотренных выше случаев определена, если известен вид функций $\Theta_1(Fo)$, $\Theta_2(Fo)$, $\Theta_3(Fo)$ и значения «констант» Θ_4 и Θ_5 . Как следует из формул (13), (15), (17)–(19), определение этих функций и «констант» сводится к вычислению несобственных интегралов. Значения интегралов определялись численно с использованием квадратурной формулы Гаусса [18].

Вид функций $\Theta_1(Fo)$, $\Theta_2(Fo)$ для ряда значений параметра Bi , функции $\Theta_3(Fo)$ для ряда значений параметров Bi и Fo_2 , зависимостей $\Theta_4(Bi)$ и $\Theta_5(Bi)$ для ряда значений параметра Fo_2 приведен на рис. 1 и рис. 2.

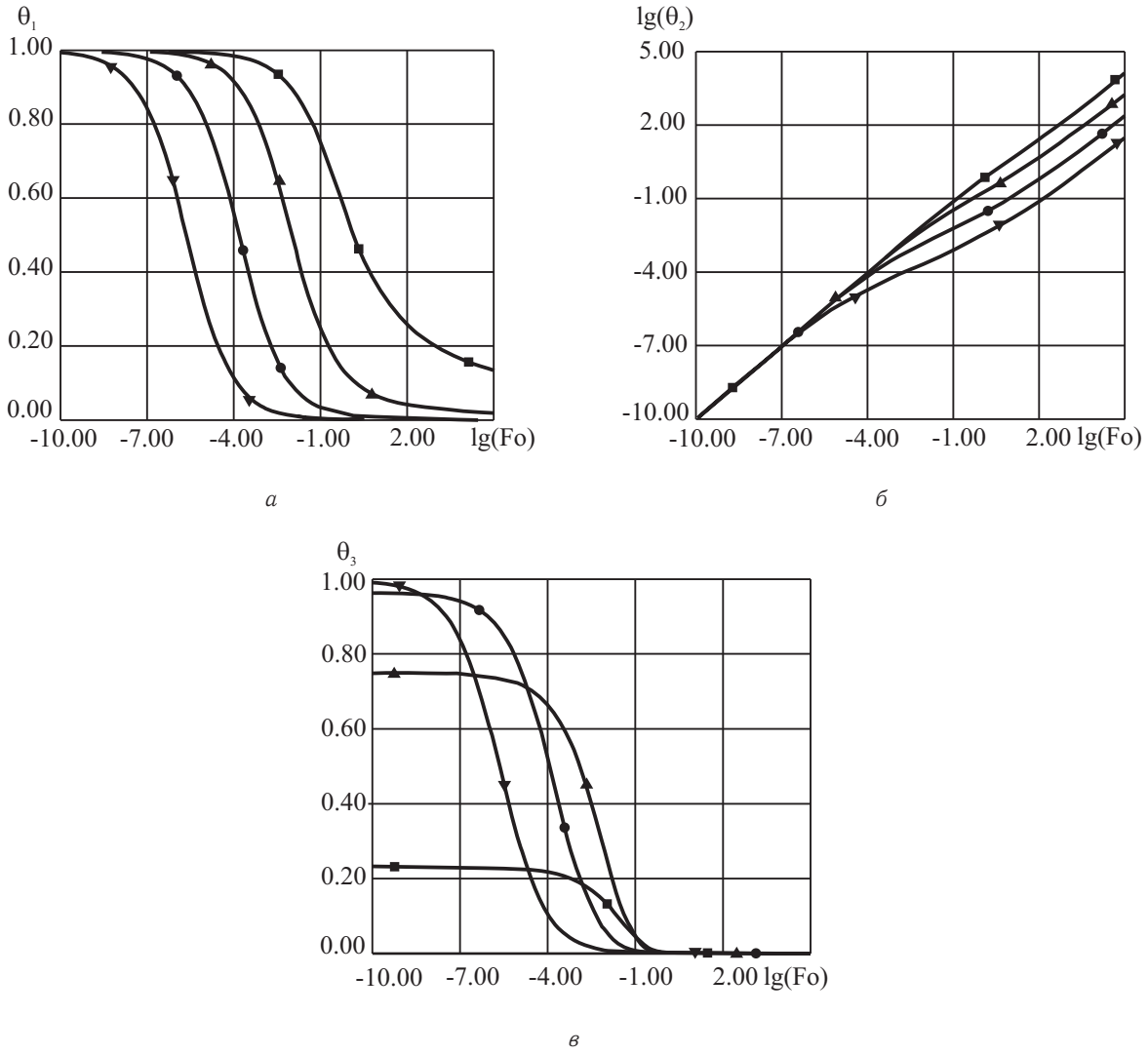


Рис. 1. Зависимость Θ_1 (а), $\lg \Theta_2$ (б), Θ_3 (в) от $\lg(Fo)$: \blacksquare — $Bi = 1.004$; \blacktriangle — $Bi = 7.94$; \bullet — $Bi = 63.00$; \blacktriangledown — $Bi = 500.00$

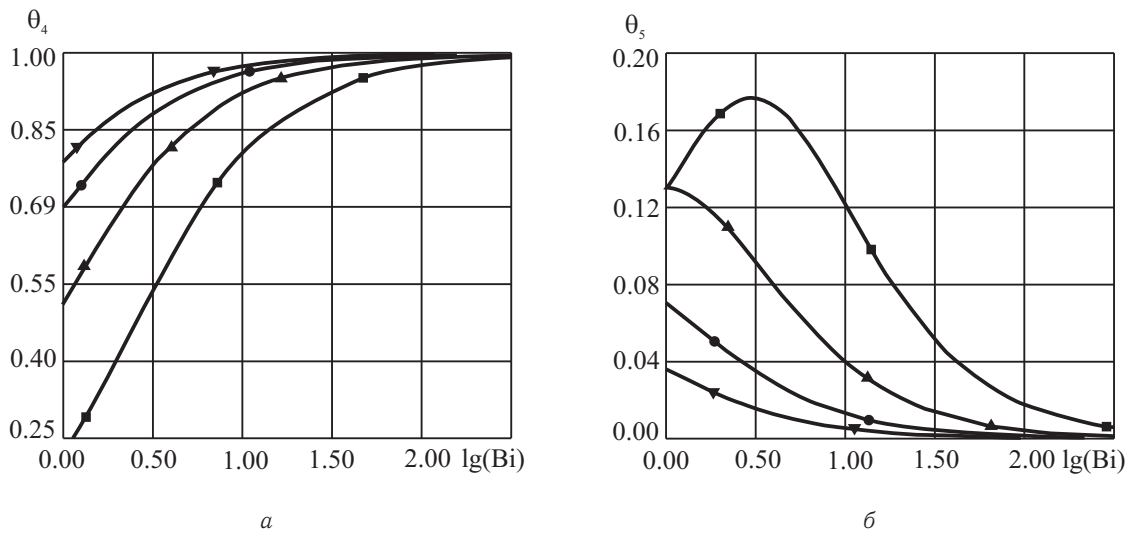


Рис. 2. Зависимость Θ_i ($i = 4, 5$) от $\lg(Bi)$: \blacksquare — $Fo_2 = 0.90$; \blacktriangle — $Fo_2 = 16.94$; \bullet — $Fo_2 = 318.80$; \blacktriangledown — $Fo_2 = 6000.00$



Из представленных результатов видно:

- во всех трех случаях изменения температуры воздуха затухающая функция $\Theta_1(Fo)$ описывает процесс перехода температуры стенки от начального значения T_∞ к постоянной составляющей температуры воздуха T_{a0} ;
- функция $\Theta_2(Fo)$ задает отклонение закона изменения температуры стенки от линейного;
- функция $\Theta_3(Fo)$ затухает очень быстро, и влиянием слагаемого, содержащего эту функцию, в большинстве случаев можно пренебречь;
- «константы» Θ_4 и Θ_5 определяют изменение амплитуды и фазы колебания температуры стенки по отношению к закону колебания температуры воздуха.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ранее полученное авторами методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа решение задачи о распространении тепла в бесконечном горном массиве от протекающего в цилиндрической полости потока воздуха [9] использовано для определения температуры стенки цилиндрической полости. Рассмотрены 3 важных с точки зрения горной теплофизики и теплофизики подземных сооружений частных случая изменения температуры протекающего воздуха:

- температура воздуха постоянна;
- температура воздуха изменяется по линейному закону;
- температура воздуха изменяется по гармоническому закону.

Численным интегрированием с использованием квадратурной формулы Гаусса определен вид пяти « θ -функций» числа Фурье и (или) числа Био, через которые записываются эти частные решения.

Библиографический список

1. Щербань А. Н., Кремнев О. А., Журавленко В. Я. Руководство по регулированию теплового режима шахт. М. : Недра, 1977. 359 с.
2. Воропаев А. Ф. Тепловое кондиционирование рудничного воздуха в глубоких шахтах. М. : Недра, 1979. 192 с.
3. Дядькин Ю. Д. Основы горной теплофизики для шахт и рудников Севера. М. : Недра, 1968. 256 с.
4. Гендлер С. Г. Тепловой режим подземных сооружений. Л. : Изд-во ЛГИ, 1987. 102 с.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М. : Наука, 1964. 488 с.
6. Щербань А. Н., Кремнев О. А. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт : в 2 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1959. Т. 1. 425 с.
7. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев : Наук. думка, 1976. 286 с.
8. Галицын А. С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. Киев : Наук. думка, 1983. 236 с.
9. Осипенко М. А., Дударь О. И., Дударь Е. С. Распространение тепла в бесконечном твердом теле от цилиндрической полости при конвективном теплообмене // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1, С. 89–93.
10. Пинскер В. А. Аналитическое решение нестационарного уравнения теплопроводности в пространстве, содержащем бесконечную круговую цилиндрическую полость с движущимся в ней источником тепла // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 5. С. 604–607.
11. Галкин А. Ф., Хохолов Ю. А. Теплоаккумулирующие выработки. Новосибирск : ВО «Наука», 1992. 133 с.
12. Алямовский А. А. Инженерные расчеты в SolidWorks Simulation. М. : Изд-во «ДМК-Пресс», 2010. 235 с.
13. Теория тепломассообмена / под ред. А. И. Леонтьева. М. : Высш. шк., 1979. 495 с.
14. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент : справочник / под ред. В. А. Григорьева, В. М. Зорина. М. : Энергоиздат, 1982. 512 с.
15. Дударь Е. С., Дударь О. И. Использование интеграла Лайона для решения задачи конденсации влаги из турбулентного потока бинарной смеси // Строительство и образование : сб. науч. тр. Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2005. Вып. 14 (66). С. 319–322.
16. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М. : Наука, 1971. 288 с.
17. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М. : Наука, 1984. 344 с.
18. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М. : ФИЗМАТГИЗ, 1963. 660 с.



Determination of the Wall Temperature Change for a Cavity in a Solid as a Result of the Temperature Change of the Gas Flow in a Cavity

O. I. Dudar, E. S. Dudar, M. A. Osipenko

Perm National Research Politechnic University, Russia, 614990, Perm, Komsomolsky Ave., 29, olegdudar@yandex.ru, elendudar@yandex.ru, oma@theormech.pstu.ac.ru

The wall temperature change for a cylindrical cavity in a solid was found as a response to the temperature change of the gas flowing in a cavity. Three important special cases of the gas temperature dependence on time are considered: temperature is constant; temperature changes according to the linear law; temperature changes according to the harmonic law. The plots of five « θ -functions» used to denote solutions are submitted. The plots are obtained by the means of the numerical integration of the Gauss quadrature formula applied to improper integrals containing cylindrical functions.

Key words: cylindrical cavity, nonstationary heat conductivity, convective heat transfer, Bessel's and Neumann's functions, improper integral.

References

1. Scherban' A. N., Kremnev O. A., Zhuravlenko V. Ia. *Rukovodstvo po regulirovaniu teplovogo rezhima shakht* [Manual for Heat Condition Regulation in Mines]. Moscow, Nedra Publ., 1977, 359 p. (in Russian).
2. Voropaev A. F. *Teplovoe konditsionirovanie rudnichnogo vozdukh v glubokikh shakhtakh* [Mine Air Thermal Conditioning in Deep Mines]. Moscow, Nedra Publ., 1979, 192 p. (in Russian).
3. Diad'kin Iu. D. *Osnovy gornoj teplofiziki dlia shakht i rudnikov Severa* [Bases of Mining Thermophysics for Northern Mines]. Moscow, Nedra Publ., 1968, 256 p. (in Russian).
4. Gendler S. G. *Teplovoi rezhim podzemnykh sooruzhenii* [Thermal Regimes of Underground Constructions]. Leningrad, LGI Press, 1987, 102 p. (in Russian).
5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, Clarendon Press, 1959, 450 p. (Rus. ed. : Carslaw H., Jaeger J. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka Publ., 1964, 488 p.)
6. Scherban' A. N., Kremnev O. A. *Nauchnye osnovy rascheta i regulirovaniia teplovogo rezhima glubokikh shakht : v 2 t.* [Scientific Bases of Calculation and Regulation of Thermal Regimes in Deep Mines: 2 vol.] Kiev, Acad. of Sci. Publ. House, 1959. Vol. 1. 425 p. (in Russian).
7. Galitsyn A. S., Zhukovskii A. N. *Integral'nye preobrazovaniia i spetsial'nye funktsii v zadachakh teploprovodnosti.* [Integral Transformations and Special Functions in Heat Conduction Problems.] Kiev, Nauk. dumka Publ., 1976, 286 p. (in Russian).
8. Galitsyn A. S. *Kraevye zadachi teplofiziki podzemnykh sooruzhenii* [Boundary value problems in thermal physics of underground constructions]. Kiev, Nauk. dumka Publ., 1983, 236 p. (in Russian).
9. Osipenko M. A., Dudar O. I., Dudar E. S. The Heat Conductivity in the Infinite Solid of the Convection in a Cylindrical Cavity. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012. vol. 12., iss. 1. pp. 89–93 (in Russian).
10. Pinsker V. A. Analytical Solution of the Non-stationary Heat Conductivity Equation in a Space Containing Infinite Cylindrical Cavity with a Moving Heat Source. *Doklady RAN* [Proc. Rus. Acad. Sci.], 2000. vol. 372, no. 5. pp. 604–607. (in Russian).
11. Galkin A. F., Khokholov Iu. A. *Teploakkumuliruiushchie vyrabotki* [Heat-retaining Workings]. Novosibirsk, VO «Nauka», 1992, 133 p. (in Russian).
12. Aliamovskii A. A. *Inzhenernye raschety v SolidWorks Simulation* [Engineering Calculations in SolidWorks Simulation]. Moscow, «DMK-Press» Publ., 2010, 235 p. (in Russian).
13. *Teoriia teplomassoobmena* [Heat and Mass Transfer Theory] / ed. A. I. Leont'ev. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979, 495 p. (in Russian).
14. *Teplo- i massobmen. Teplotekhnicheskii eksperiment : spravochnik* [Heat and Mass Transfer. Calorifics Experiment : Handbook] / Edit. V. A. Grigor'ev, V. M. Zorin. Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 512 p. (in Russian).
15. Dudar E. S., Dudar O. I. *Ispol'zovanie integrala Laiona dlia resheniia zadachi kondensatsii vlagi iz turbulentnogo potoka binarnoi smesi* [Use of Lyon's Integral for the Solution of a Problem of Wet Condensation from a Turbulent Stream of a Binary Mix] *Stroitel'stvo i obrazovanie* [Building and Education]. Ekaterinburg, UGTU-UPI Press, 2005, iss. 14 (66), pp. 319–322 (in Russian).
16. Korenev B. G. *Vvedenie v teoriu besselevykh funktsii* [Introduction to the Theory of Bessel functions]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 288 p. (in Russian).
17. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. *Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki.* [Special Functions of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 344 p. (in Russian).
18. Demidovich B. P., Maron I. A. *Osnovy vychislitel'noi matematiki* [Foundations of Numerical Mathematics]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1963, 660 p. (in Russian).



УДК 501.1

КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ВО ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

В. Ф. Кириченко¹, М. П. Мисник², П. А. Самаркин³

¹ Доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., v.f.kirichenko@gmail.com

² Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, MisnikMP@info.sgu.ru

³ Аспирант кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., SamarkinPA@gmail.com

В статье рассматривается краевая задача второго рода, для уравнений равновесия «в смешанной форме», определяющая неклассическую математическую модель для шарнирно закрепленной изотропной и однородной пластины в рамках обобщенных гипотез Тимошенко с учетом начальных неправильностей. Для указанной задачи впервые доказывается существование обобщенного решения и слабая компактность множества приближенных решений, получаемого с помощью метода Бубнова–Галеркина по схеме В. З. Власова. На базе функциональных пространств, в которых рассматривается существование обобщенного решения и исследуется сходимость метода Бубнова–Галеркина, определяется конфигурационное пространство соответствующее поставленной краевой задаче.

Ключевые слова: нелинейные системы уравнений с частными производными, неклассическая теория оболочек.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1–5], наиболее полному описанию состояний дискретных и распределенных механических систем соответствует описание состояний в рамках фазовых и конфигурационных пространств. При этом явный вид указанных пространств зависит от свойств математических моделей, используемых при исследовании реальных механических систем с помощью вычислительных экспериментов. В частности, если математическая модель распределенной механической системы формализуется некоторой краевой задачей, например, для уравнений равновесия упругой пластины, то соответствующее данной модели конфигурационное пространство определяется такими функциональными пространствами, по отношению к которым, во-первых, доказывается существование решения указанной краевой задачи и, во-вторых, доказывается сходимость численного метода, используемого при проведении вычислительных экспериментов над изучаемой моделью пластины.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В данной статье объектом исследования является следующая краевая задача второго рода для уравнений равновесия «в смешанной форме», определяющая неклассическую математическую модель для шарнирно закрепленной изотропной и однородной пластины в рамках обобщенных гипотез Тимошенко (модель Пелеха–Шереметьева) с учетом начальных неправильностей:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(-A \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} - A \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} + C \sigma_{i3} \right) dx_3 = 0, \quad i = \overline{1, 2}; \quad (1)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\sum_{i=1}^2 \left\{ -B \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial x_i^2} - B \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_{3-i} \partial x_i} - C \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} \right\} \right) dx_3 - L(u_{30}, F) - L(\omega_0, F) = g(x_1, x_2); \quad (2)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F = -\frac{1}{2} L(u_{30}, u_{30}) - L(u_{30}, \omega_0); \quad (3)$$

$$u_{30}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1^2} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_2^2} \Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad F|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad (4)$$

$$u_{11}(x_1, 0) = u_{11}(x_1, b) = 0, \quad \frac{\partial u_{11}(0, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{11}(a, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad (5)$$

$$u_{21}(0, x_2) = u_{21}(a, x_2) = 0, \quad \frac{\partial u_{21}(x_1, 0)}{\partial x_2} = \frac{\partial u_{21}(x_1, b)}{\partial x_2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \quad (6)$$



В задаче (1)–(6) и всюду далее приняты такие условные обозначения:

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta(\cdot)), \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}; \quad A = \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2}\right), \quad B = \frac{4x_3^3}{3h^2}, \quad C = 1 - \frac{4x_3^2}{h^2};$$

$$L(f_1, f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad (7)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(A \left[\frac{\partial u_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}}{\partial x_1} \right] - B \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right),$$

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{3-i}^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \left(A \left[\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_{3-i1}}{\partial x_{3-i}} \right] - B \left[\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_{3-i}^2} \right] \right), \quad (8)$$

$$\sigma_{i3} = \frac{E}{2(1+\nu)} C \left[u_{i1} + \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right], \quad i = \overline{1, 2}; \quad (9)$$

$$\Omega = (0, a) \times (0, b), \quad \Omega \subset R^2, \quad \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad D = \Omega \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right),$$

$$D \subset R^3, \quad (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, \quad x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \quad h > 0, \quad a > 0, \quad b > 0;$$

$\overline{D} = \overline{\Omega} \times [-h/2, h/2]$ — замкнутая односвязная область в евклидовом пространстве R^3 , занимаемая пластиной в недеформированном состоянии; Ω — измеримая односвязная область в евклидовом пространстве R^2 с границей $\partial\Omega$; область \overline{D} параметризована декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что область $\overline{\Omega}$ принадлежит координатной плоскости Ox_1x_2 и определяет серединную поверхность пластины; h — постоянная толщина пластины; функция $\omega_0 = \omega_0(x_1, x_2)$ определяет начальную неправильность пластины; функция $u_{30}(x_1, x_2)$ определяет дополнительный прогиб пластины в процессе ее деформирования, а функция $(u_{30}(x_1, x_2) + \omega_0(x_1, x_2))$ определяет полный прогиб; $F = F(x_1, x_2)$ — искомая функция усилий; $u_{30}(x_1, x_2)$, $u_{i1}(x_1, x_2)$, $i = \overline{1, 2}$, — искомые функции, определяющие коэффициенты в аппроксимации по переменной “ x_3 ” (согласно модели Пелеха–Шереметьева) вектора перемещений для точек пластины; $g = g(x_1, x_2)$ — интенсивность поперечной нагрузки; E, ν — упругие постоянные, $E > 0$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

Замечание. Краевая задача (1)–(6) является стационарным вариантом задач, исследованных в работах [6, 7].

Обозначения основных функциональных пространств, норм и скалярных произведений соответствуют данным в монографии [8], в частности, $L^2(\Omega)$ — лебегово пространство функций, интегрируемых с квадратом по измеримой области G , $|\cdot|_G$ — норма в $L^2(G)$, а $(\cdot, \cdot)_G$ — скалярное произведение в $L^2(G)$. Кроме того, используются следующие функциональные пространства [9, 10]:

$H^{2,0}(\Omega)$ — подпространство пространства $H^2(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $H^2(\Omega)$ функций из $C^2(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи границы $\partial\Omega$;

$H_i^{1,0}(\Omega)$ ($i = \overline{1, 2}$) — подпространство пространства $H^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи границы $\partial\Omega_i = \partial\Omega_i^1 \cup \partial\Omega_i^2$, где

$$\partial\Omega_1^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid (x_1, x_2)|_{x_1=a}, x_2 \in [0, b]\}, \quad \partial\Omega_1^2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid (x_1, x_2)|_{x_1=0}, x_2 \in [0, b]\},$$

$$\partial\Omega_2^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid (x_1, x_2)|_{x_2=b}, x_1 \in [0, a]\}, \quad \partial\Omega_2^2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid (x_1, x_2)|_{x_2=0}, x_1 \in [0, a]\}.$$

Далее, в теореме доказывается существование обобщенного решения для задачи (1) — (6), дается обоснование сходимости метода Бубнова–Галеркина (Б.–Г.) при получении приближенного решения для этой задачи и определяется явный вид соответствующего конфигурационного пространства.

При доказательстве указанной теоремы потребуются утверждения из следующей леммы.

Лемма. *Отображение*

$$(u, v, w) \in (H^{2,0}(\Omega))^3 \rightarrow (L(u, v), w)_\Omega \quad (10)$$

является трилинейным, непрерывным и не зависит от порядка следования аргументов, при этом имеет место равенство

$$\iint_\Omega L(u, v) w dx_1 dx_2 = \iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 -$$



$$- \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2. \quad (11)$$

Доказательство данной леммы проводится по схеме доказательства леммы 2.2.2 из работы [11, с. 85–86] с точностью до используемых пространств, в частности, на предварительном этапе равенство (11) легко доказывается для любых функций $(u, v, w) \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times (C^{2,0}(\bar{\Omega}))^2$, где $C^{2,0}(\bar{\Omega})$ — подпространство пространства $C^2(\bar{\Omega})$, состоящее из функций $C^2(\bar{\Omega})$, равных нулю вблизи границы $\partial\Omega$.

Теорема. Пусть выполняются такие условия:

$$g \in L^2(\Omega), \quad \omega_0 \in C^{2,0}(\bar{\Omega}), \quad \max_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_1^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_2^2} \right| \right) \leq d, \quad (12)$$

где $d > 0$ — достаточно малая вещественная постоянная.

Тогда:

1) существует хотя бы одно решение $\{\tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{30}, \tilde{F}\}$ задачи (1) — (6), при этом

$$\tilde{F}, \tilde{u}_{30} \in H^{2,0}(\Omega), \quad \tilde{u}_{i1} \in H_{3-i}^{1,0}(\Omega), \quad i = \overline{1, 2}, \quad (13)$$

и, кроме того, имеют место следующие интегральные тождества, определяющие согласно условиям (13) обобщенное решение задачи (1) — (6):

$$\iiint_D \left\langle A\tilde{\sigma}_{ii} \frac{\partial \eta_{i1}}{\partial x_i} + A\tilde{\sigma}_{12} \frac{\partial \eta_{i1}}{\partial x_{3-i}} + C\tilde{\sigma}_{i3} \eta_{i1} \right\rangle dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (14)$$

при любых $\eta_{i1} = \eta_{i1}(x_1, x_2) \in H_{3-i}^{1,0}(\Omega)$;

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\langle \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sum_{i=1}^2 \left\{ -B\tilde{\sigma}_{ii} \frac{\partial^2 \eta_{30}}{\partial x_i^2} - B\tilde{\sigma}_{12} \frac{\partial^2 \eta_{30}}{\partial x_i \partial x_{3-i}} + C\tilde{\sigma}_{i3} \frac{\partial \eta_{30}}{\partial x_i} \right\} \right) dx_3 - \right. \\ & \left. -L(\tilde{u}_{30}, \tilde{F})\eta_{30} - L(\omega_0, \tilde{F})\eta_{30} \right\rangle dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} g\eta_{30} dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (15)$$

при любых $\eta_{30} = \eta_{30}(x_1, x_2) \in H^{2,0}(\Omega)$;

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \eta_4}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \eta_4}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \eta_4}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 = \\ & = \iint_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} L(\tilde{u}_{30}, \tilde{u}_{30})\eta_4 - L(u_{30}, \omega_0)\eta_4 \right) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (16)$$

при любых $\eta_4 = \eta_4(x_1, x_2) \in H^{2,0}(\Omega)$;

(в тождествах (14)–(15) символы $\tilde{\sigma}_{12}, \tilde{\sigma}_{ii}, \tilde{\sigma}_{i3}, i = \overline{1, 2}$, обозначают функции вида (7)–(9), в которых вместо функций u_{30}, F, u_{i1} подставлены $\tilde{u}_{30}, \tilde{F}, \tilde{u}_{i1}$ соответственно);

2) приближенное решение задачи (1)–(6) может быть найдено с помощью метода Б.–Г. (по схеме В. З. Власова [12, с. 243]), при этом все множество приближенных решений слабо компактно в пространствах, соответствующих условиям (13), и его предельные точки определяют обобщенное решение задачи (1)–(6);

3) конфигурационное пространство T распределенной механической системы, определяемой математической моделью в виде краевой задачи (1)–(6) с обобщенным решением из условий (13), является бесконечномерным функциональным пространством следующего вида:

$$T = (H^{2,0}(\Omega))^2 \times H_2^{1,0}(\Omega) \times H_1^{1,0}(\Omega), \quad (17)$$

при этом

$$\{\tilde{u}_{30}, \tilde{F}, \tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{21}\} \in T.$$



Доказательство. 1. Построение приближенного решения с помощью метода Б.–Г. по схеме В. З. Власова. Пусть $\{\chi_{ik}\}$ – базис в $H_{3-i}^{1,0}(\Omega)$, $i = \overline{1,2}$, $\{\chi_{3k}\}$ и $\{\chi_{4k}\}$ – базисные системы в $H^{2,0}(\Omega)$. Определим приближенное решение $\{u_{30}^n, F^n, u_{i1}^n\}$ для задачи (1)–(6) в таком виде:

$$u_{30}^n = \sum_{k=1}^{n_3} \xi_{3k} \chi_{3k}, \quad F^n = \sum_{k=1}^{n_4} \xi_{4k} \chi_{4k}, \quad u_{i1}^n = \sum_{k=1}^{n_i} \xi_{ik} \chi_{ik}, \quad i = \overline{1,2}, \quad (18)$$

где постоянные $\xi_{3k}, \xi_{4k}, \xi_{ik}$ определяются из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left(A\sigma_{ii}^n, \frac{\partial \chi_{im_i}}{\partial x_i} \right)_D + \left(A\sigma_{12}^n, \frac{\partial \chi_{im_i}}{\partial x_{3-i}} \right)_D + (C\sigma_{i3}^n, \chi_{im_i})_D = 0, \quad m_i = \overline{1, n_i}; \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left\{ - \left(B\sigma_{ii}^n, \frac{\partial^2 \chi_{3m_3}}{\partial x_i^2} \right)_D - \left(B\sigma_{12}^n, \frac{\partial^2 \chi_{3m_3}}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right)_D + \left(C\sigma_{i3}^n, \frac{\partial \chi_{3m_3}}{\partial x_i} \right)_D \right\} - (L(u_{30}^n, F^n), \chi_{3m_3})_\Omega - (L(\omega_0, F^n), \chi_{3m_3})_\Omega = (g, \chi_{3m_3})_\Omega, \quad m_3 = \overline{1, n_3}; \quad (20)$$

$$\frac{2}{Eh} (\Delta F^n, \Delta \chi_{4m_4})_\Omega = - (L(u_{30}^n, u_{30}^n), \chi_{4m_4})_\Omega - 2 (L(u_{30}^n, \omega_0), \chi_{4m_4})_\Omega, \quad m_4 = \overline{1, n_4}, \quad (21)$$

(в (19)–(21) функции $\sigma_{ii}^n, \sigma_{i3}^n, i = \overline{1,2}, \sigma_{12}^n$, имеют вид функций (7)–(9), в которых вместо функций u_{30}, F, u_{i1} подставлены u_{30}^n, F^n, u_{i1}^n соответственно).

Разрешимость системы (20) следует из леммы «острого угла» [8, лемма 4.3, с. 66–67]. Действительно, введем в рассмотрение вектор

$$\bar{\xi} = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1n_1}, \xi_{21}, \dots, \xi_{2n_2}, \xi_{31}, \dots, \xi_{3n_3}, \xi_{41}, \dots, \xi_{4n_4}) \in R^l, \quad l = n_1 + n_2 + n_3 + n_4,$$

и оператор $P : R^l \rightarrow R^l$, определяемый по правилу

$$\forall \bar{\xi} \in R^l, \quad P(\bar{\xi}) = \bar{\eta}, \quad \bar{\eta} = (\eta_{11}, \dots, \eta_{1n_1}, \eta_{21}, \dots, \eta_{2n_2}, \eta_{31}, \dots, \eta_{3n_3}, \eta_{41}, \dots, \eta_{4n_4}) \in R^l,$$

где

$$\forall m_i = \overline{1, n_i}, \quad \eta_{im_i} = \left(A\sigma_{ii}^n, \frac{\partial \chi_{im_i}}{\partial x_i} \right)_D + \left(A\sigma_{12}^n, \frac{\partial \chi_{im_i}}{\partial x_{3-i}} \right)_D + (C\sigma_{i3}^n, \chi_{im_i})_D, \quad i = \overline{1,2}, \quad (22)$$

$$\forall m_3 = \overline{1, n_3}, \quad \eta_{3m_3} = \sum_{i=1}^2 \left\{ - \left(B\sigma_{ii}^n, \frac{\partial^2 \chi_{3m_3}}{\partial x_i^2} \right)_D - \left(B\sigma_{12}^n, \frac{\partial^2 \chi_{3m_3}}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right)_D + \left(C\sigma_{i3}^n, \frac{\partial \chi_{3m_3}}{\partial x_i} \right)_D \right\} - (L(u_{30}^n, F^n), \chi_{3m_3})_\Omega - (L(\omega_0, F^n), \chi_{3m_3})_\Omega - (g, \chi_{3m_3})_\Omega, \quad (23)$$

$$\forall m_4 = \overline{1, n_4}, \quad \eta_{4m_4} = \frac{2}{Eh} (\Delta F^n, \Delta \chi_{4m_4})_\Omega + (L(u_{30}^n, u_{30}^n), \chi_{4m_4})_\Omega + 2 (L(u_{30}^n, \omega_0), \chi_{4m_4})_\Omega. \quad (24)$$

Определим скалярное произведение $(\bar{\eta}, \bar{\xi})_{R^l}$ векторов $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ из пространства R^l следующим образом:

$$\forall \bar{\xi}, \bar{\eta} \in R^l, \quad (\bar{\eta}, \bar{\xi})_{R^l} = \sum_{m_1=1}^{n_1} \eta_{1m_1} \xi_{1m_1} + \sum_{m_2=1}^{n_2} \eta_{2m_2} \xi_{2m_2} + \sum_{m_3=1}^{n_3} \eta_{3m_3} \xi_{3m_3} + \sum_{m_4=1}^{n_4} \eta_{4m_4} \xi_{4m_4}, \quad (25)$$

при этом

$$|\bar{\xi}|_{R^l} = (\bar{\xi}, \bar{\xi})_{R^l}^{1/2}. \quad (26)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (P\bar{\xi}, \bar{\xi})_{R^l} = & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left(\sigma_{ii}^n, \left[A \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - B \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} \right] \right)_D + \left(\sigma_{12}^n, \left[A \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}} - B \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right] \right)_D + \right. \\ & \left. + \left(\sigma_{i3}^n, C \left[u_{i1}^n + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right] \right)_D \right\} - (L(u_{30}^n, F^n), u_{30}^n)_\Omega - (L(\omega_0, F^n), u_{30}^n)_\Omega + \\ & + \frac{2}{Eh} (\Delta F^n, \Delta F^n)_\Omega + (L(u_{30}^n, u_{30}^n), F^n)_\Omega + 2 (L(u_{30}^n, \omega_0), F^n)_\Omega - (g, u_{30}^n)_\Omega. \quad (27) \end{aligned}$$



В силу равенства (11)

$$-(L(u_{30}^n, F^n), u_{30}^n)_\Omega - (L(\omega_0^n, F^n), u_{30}^n)_\Omega + (L(u_{30}^n, u_{30}^n), F^n)_\Omega + 2(L(u_{30}^n, \omega_0), F^n)_\Omega = (L(\omega_0, u_{30}), F^n)_\Omega.$$

Равенство (27) принимает вид

$$\begin{aligned} (P\bar{\xi}, \bar{\xi})_{R^l} = & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left\langle A \left[\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_{3-i1}^n}{\partial x_{3-i}} \right] - B \left[\frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_{3-i}^2} \right] \right\rangle, \left[A \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - B \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} \right] \right\rangle_D + \right. \\ & + \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \left\langle A \left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right] - B \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\rangle, \left[A \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}} - B \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right] \right\rangle_D + \\ & \left. + \left(\frac{E}{2(1+\nu)} C \left[u_{i1}^n + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right], C \left[u_{i1}^n + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right] \right)_D \right\} + \frac{2}{Eh} |\Delta F^n|_\Omega^2 + (L(\omega_0, u_{30}^n), F^n)_\Omega - (g, u_{30}^n)_\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Имеют место следующие оценки:

$$1) \quad (g, u_{30}^n)_\Omega \leq |g|_\Omega \cdot |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}, \quad (29)$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, определяемая условием (12) для функции $g = g(x_1, x_2)$;

2) с учетом равенства (11) и неравенства Коши [9, с. 33] получаем:

$$\begin{aligned} (L(\omega_0, u_{30}^n), F^n)_\Omega = & \iint_\Omega \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1} \frac{\partial F^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2} \frac{\partial F^n}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2} \frac{\partial F^n}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_2^2} \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1} \frac{\partial F^n}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \leq \max_\Omega \left(\left| \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_1^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_2^2} \right| \right) \times \\ & \times \iint_\Omega \left(\left| \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1} \frac{\partial F^n}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2} \frac{\partial F^n}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2} \frac{\partial F^n}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1} \frac{\partial F^n}{\partial x_1} \right| \right) dx_1 dx_2 \leq \\ & \leq 2d \left(|u_{30}^n|_{H^2(\Omega)} + |F^n|_{H^2(\Omega)}^2 \right); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \left\langle A \left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right] - B \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\rangle, \left[A \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}} - B \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right] \right)_\Omega = \\ & = \frac{E}{2(1+\nu)} \iint_\Omega \left(\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right]^2 \int_{-h/2}^{h/2} A^2 dx_3 - 2 \left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right] \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \int_{-h/2}^{h/2} AB dx_3 + \right. \\ & \left. + \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^2 \int_{-h/2}^{h/2} B^2 dx_3 \right) dx_1 dx_2 = \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \iint_\Omega \left(\frac{68}{5} \left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right]^2 - \right. \\ & \left. - \frac{32}{5} \left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right] \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right] + \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^2 \right) dx_1 dx_2 \geq \\ & \geq \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{68}{5} - \frac{16\varepsilon}{5} \right) \left| \left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right] \right|_\Omega^2 + \left(1 - \frac{16}{5\varepsilon} \right) \left| \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right|_\Omega^2 \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

при получении последнего неравенства в (31) используется неравенство Коши с “ ε ” [9, с. 33], $\varepsilon > 0$;

4) подобно оценке (31) получается следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \left(\left\langle A \left[\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_{3-i1}^n}{\partial x_{3-i}} \right] - B \left[\frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_{3-i}^2} \right] \right\rangle, \left[A \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - B \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} \right] \right\rangle_D \right\} \geq \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{E}{1+\nu} \left| A \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - B \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} \right|_D^2 \right\} \geq \\ & \geq \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \sum_{i=1}^2 \left\{ \left(\frac{68}{5} - \frac{16\varepsilon}{5} \right) \left| \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} \right|_\Omega^2 + \left(1 - \frac{16}{5\varepsilon} \right) \left| \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} \right|_\Omega^2 \right\}; \end{aligned} \quad (32)$$



5) выбирая в (31) и (32) $\varepsilon \in (16/5, 17/4)$, получаем:

$$(68 - 16\varepsilon) > 0, \quad (5\varepsilon - 16) > 0. \quad (33)$$

Из (28)–(33) следует неравенство

$$\begin{aligned} (P\bar{\xi}, \bar{\xi})_{R^l} \geq & \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{68}{5} - \frac{16\varepsilon}{5} \right) \left\langle \left| \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right|_{\Omega}^2 + \left| \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_2} \right|_{\Omega}^2 + \left| \left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right] \right|_{\Omega}^2 \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{16}{5\varepsilon} \right) \left\langle \left| \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right|_{\Omega}^2 + \left| \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_2^2} \right|_{\Omega}^2 + \left| \left[2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right|_{\Omega}^2 \right\rangle + \frac{2}{Eh} |\Delta F^n|_{\Omega}^2 - \right. \\ & \left. - 2d \left(|u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |F^n|_{H^2(\Omega)}^2 \right) - C_1 |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \left| C \left[u_{i1}^n + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right] \right|_D^2 \right), \quad (34) \end{aligned}$$

где $u_{i1}^n \in H_{3-i}^{1,0}(\Omega)$, $u_{30}^n \in H^{2,0}(\Omega)$, $F^n \in H^{2,0}(\Omega)$.

На основании неравенства Корна [10, с. 283–285] и неравенств Фридрихса для функций из пространств $H_{3-i}^{1,0}(\Omega)$, $i = \overline{1, 2}$, $H^{2,0}(\Omega)$ [10, с. 344–345], преобразуем неравенство (34) к следующему виду:

$$\begin{aligned} (P\bar{\xi}, \bar{\xi})_{R^l} \geq & \frac{C_2 Eh^3}{504(1+\nu)} \left(\frac{68}{5} - \frac{16\varepsilon}{5} \right) \left(|u_{11}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + |u_{21}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right) + \\ & + \left[C_3 \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \left(1 - \frac{16}{5\varepsilon} \right) - 2d \right] |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + \left[\frac{C_4 2}{Eh} - 2d \right] |F^n|_{H^2(\Omega)}^2 - C_1 |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}, \quad (35) \end{aligned}$$

где $C_2, C_3, C_4 \in R$ – некоторые положительные постоянные, а постоянная d удовлетворяет условиям

$$C_3 \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \left(1 - \frac{16}{5\varepsilon} \right) - 2d > 0, \quad \frac{C_4 2}{Eh} - 2d > 0,$$

и, следовательно,

$$(P\bar{\xi}, \bar{\xi})_{R^l} \geq 0, \quad \text{если} \quad |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)} \geq C_1 \left(C_3 \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \left(1 - \frac{16}{5\varepsilon} \right) - 2d \right)^{-1}. \quad (36)$$

Так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то последнее неравенство из (36) будет выполняться, если $|\bar{\xi}|_{R^l} = \rho$, где ρ – достаточно большое число.

Итак, согласно лемме «острого угла», система уравнений (19)–(21) имеет по крайней мере одно решение $\bar{\xi}$, $|\bar{\xi}|_{R^l} \leq \rho$, такое, что $P(\bar{\xi}) = \bar{0}$, и, в силу (28), (35), найденное решение $\bar{\xi}$, а тем самым и функции $u_{30}^n, F^n, u_{i1}^n, i = \overline{1, 2}$, удовлетворяют неравенству:

$$\begin{aligned} & \frac{C_2 Eh^3}{504(1+\nu)} \left(\frac{68}{5} - \frac{16\varepsilon}{5} \right) \left(|u_{11}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + |u_{21}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right) + \\ & + \left[C_3 \frac{Eh^3}{504(1+\nu)} \left(1 - \frac{16}{5\varepsilon} \right) - 2d \right] |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + \left[\frac{2C_4}{Eh} - 2d \right] |F^n|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_1 |u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}. \quad (37) \end{aligned}$$

2. *Предельный переход.* Из (37) следует, что

$$\begin{aligned} & \text{множества } \{u_{30}^n\}, \{F^n\} \text{ ограничены в } H^{2,0}(\Omega), \\ & \text{множества } \{u_{i1}^n\}, i = \overline{1, 2}, \text{ ограничены в } H_{3-i}^{1,0}(\Omega). \quad (38) \end{aligned}$$

В силу слабой компактности множеств из условий (38) найдутся элементы $\tilde{u}_{30} \in H^{2,0}(\Omega)$, $\tilde{F} \in H^{2,0}(\Omega)$, $\tilde{u}_{i1} \in H_{3-i}^{1,0}(\Omega)$ и подпоследовательности $\{u_{30}^n\}, \{F^n\}, \{u_{i1}^n\}$ (оставляем для них прежнее обозначение) такие, что

$$\begin{aligned} u_{30}^n & \rightarrow \tilde{u}_{30} \text{ слабо в } H^{2,0}(\Omega), \\ u_{30}^n & \rightarrow \tilde{u}_{30} \text{ сильно в } L^2(\Omega), \\ F^n & \rightarrow \tilde{F} \text{ слабо в } H^{2,0}(\Omega), \\ F^n & \rightarrow \tilde{F} \text{ сильно в } L^2(\Omega), \\ u_{i1}^n & \rightarrow \tilde{u}_{i1} \text{ слабо в } H_{3-i}^{1,0}(\Omega), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (39) \end{aligned}$$



На основании условий (39) доказывается, подобно доказательству теоремы 4.3 [8, с. 67–68], истинность интегральных тождеств (14)–(16).

3. Явный вид конфигурационного пространства. Так как обобщенное решение задачи (1)–(6) принадлежит тем функциональным пространствам из условий (13), по отношению к которым установлена слабая компактность множества приближенных решений, то при проведении вычислительных экспериментов с помощью метода Б.–Г. конфигурационное пространство T для рассмотренной математической модели пластины определяется в виде (17).

Теорема доказана. \square

Замечание. Для обобщенного решения задачи (1)–(6) можно установить бóльшую гладкость по сравнению с той, которая гарантируется условиями из (13), однако, если сходимости численного метода, используемого при проведении вычислительных экспериментов, обоснована только по отношению к пространствам из условий (13), то при анализе результатов проведенных экспериментов в качестве конфигурационного пространства вновь следует рассматривать пространство в виде (17).

Библиографический список

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 432 с.
2. Вильке В. Г. Теоретическая механика. СПб. : Лань, 2003. 304 с.
3. Вильке В. Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М. : Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебания. М. : Наука, 1981. 568 с.
5. Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М. : Наука, 1990. 320 с.
6. Кириченко В. Ф., Самаркин П. А. Качественный анализ эволюционных уравнений в неклассической теории пологих оболочек с начальными неправильностями // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2011. № 3 (57), вып. 1. С. 33–40.
7. Кириченко В. Ф., Самаркин П. А. Использование норм из фазового пространства при исследовании динамической устойчивости пологих оболочек // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2011. № 4 (60), вып. 2. С. 70–76.
8. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. : Мир, 1972. 587 с.
9. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 408 с.
10. Редторис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М. : Мир, 1985. 590 с.
11. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. М. : Мир, 1983. 172 с.
12. Ворovich И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М. : Наука, 1989. 376 с.

Configuration Space in Second Boundary Value Problem of Non-classical Plate Theory

V. F. Kirichenko¹, M. P. Misnik², P. A. Samarkin¹

¹Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Politechnicheskaya st., 77, v.f.kirichenko@Gmail.com, SamarkinPA@Gmail.com

²Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, MisnikMP@info.sgu.ru

The article contains investigation of second boundary value problem for equilibrium equation «in mixed formulation» describing non-classical mathematical model for hinged isotropic and uniform plate under generalized Timoshenko hypothesis taking into account initial irregularities. For this problem for the first time were proved the existence of generalized solution and weak compactness of the set of approximate solutions obtained with Bubnov–Galerkin method using V. Z. Vlasov scheme. Basing on functional spaces used to study existence of generalized solution and to investigate convergence of Bubnov–Galerkin method, there was defined configuration space corresponding to the boundary value problem.

Key words: nonlinear partial differential equations, non-classical shell theory.

References

1. Arnold V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
2. Vilke V. G. *Theoretical Mechanics*. Saint Petersburg, Lan', 2003 (in Russian).
3. Vilke V. G. [Analytical and qualitative methods in the mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom]. Moscow, Izd-vo Moscow Univ. Press, 1986 (in Russian).
4. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Theory of Oscillators*. Dover Publ., Inc., 1987.



5. Shestakov A. A. *Obobshchennyi pryamoy metod Lyapunova dlya sistem s raspredelennymi parametrami*. Moscow, Nauka, 2007. (in Russian).
6. Kirichenko V. F., Samarkin P. A. Kachestvennyy analys evolucionnih uravneniy v neklassicheskoy teorii obolochek s nachalnymi nepravilnostyami [Qualitative analysis of the evolution equations in nonclassical theory of shallow shells with initial irregularities]. *Vestnik Saratov. gos. tekhn. univ.*, 2011, no. 3 (57). iss. 1, pp. 33–40 (in Russian).
7. Kirichenko V. F., Samarkin P. A. Ispolzovanie norm iz fazovogo prostranstva pri issledovanii dinamicheskoy ustoychivosti pologih obolochek [Application of the phase space norms in the analysis of dynamic buckling of shallow shells]. *Vestnik Saratov. gos. tekhn. univ.*, 2011, no. 4 (60), iss. 2, pp. 70–76 (in Russian).
8. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some methods for solving nonlinear boundary value problems, in French]. Paris, Dunod, 1969.
9. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences, 1985.
10. Rektoris K. *Variacionnye metody v matematicheskoy fizike i tehnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]. Moscow, Mir, 1985 (in Russian).
11. Ciarlet P. G., Rabier P. *Les Equations de von Kàrmàn* [Von Kàrmàn equations]. Springer, 1980 (in French).
12. Vorovich I. I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologih obolochek* [Mathematical problems of nonlinear theory of Shallow Shells]. Moscow, Nauka, 1989 (in Russian).

УДК 531.38, 681.5

ДУАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ НА ПРИМЕРЕ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА. I

Е. И. Ломовцева¹, Ю. Н. Челноков²

¹Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LomovtsevaEI@yandex.ru

²Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, chelnokovyun@info.sgu.ru

На примере стэнфордского манипулятора рассматривается методология решения прямой задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием винтовых методов механики (матриц дуальных направляющих косинусов, бикватернионов Клиффорда), выводятся кинематические уравнения движения манипулятора, необходимые для решения обратной задачи кинематики манипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления.

Ключевые слова: робот-манипулятор, прямая задача кинематики, матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион, кватернион, кинематические уравнения.

1. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Стэнфордский манипулятор [1] представляет собой манипулятор с шестью степенями свободы: пятью вращательными и одной поступательной. В качестве обобщенных координат выступают углы φ_i ($i = 1, 2, 4, 5, 6$) поворота i -го звена относительно $(i - 1)$ -го и величина d_3 — линейное поступательное перемещение 3 звена относительно 2. Схема манипулятора и вводимые системы координат приведены на рис. 1. На нем $X_0Y_0Z_0$ — система координат, связанная с основанием манипулятора, $X_iY_iZ_i$ — система координат, связанная с i -м звеном манипулятора, ось z_i направлена вдоль оси i -го сочленения; ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и направлена от нее; ось y_i дополняет оси x_i, z_i до правой декартовой системы координат.

Относительное положение звеньев стэнфордского манипулятора может быть описано с помощью трех соответствующих каждому звену конструктивных геометрических параметров Θ_i, α_i, d_i , приведенных в таблице.

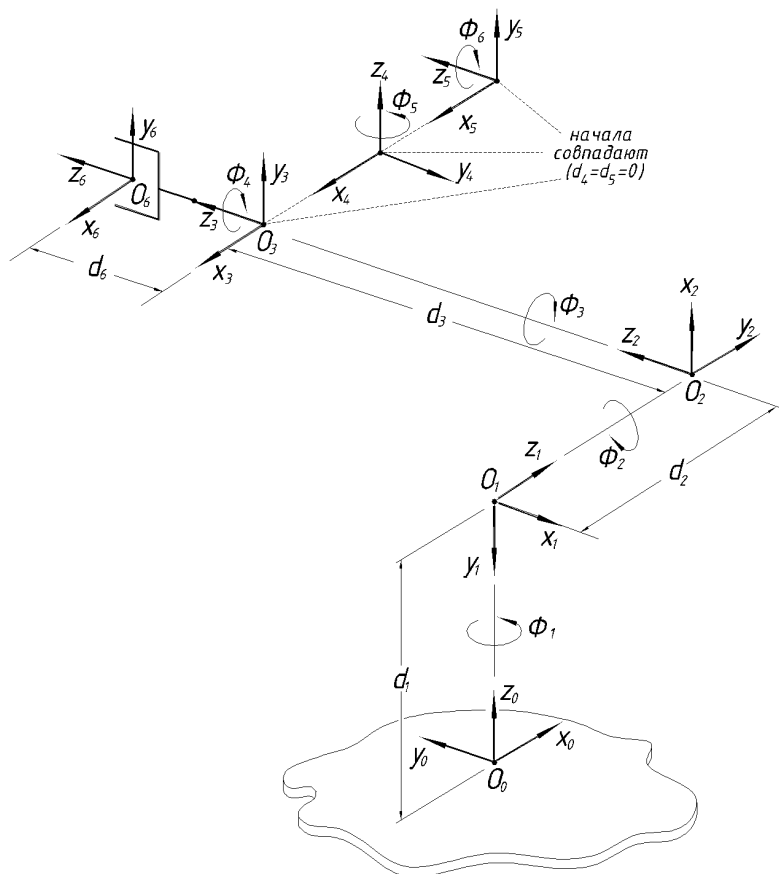


Рис. 1. Схема стэнфордского манипулятора

В таблице Θ_i — присоединенный угол (угол, на который надо повернуть ось x_{i-1} вокруг оси z_{i-1} , чтобы она стала сонаправлена с осью x_i); d_i — расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом $(i-1)$ -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси z_{i-1} ; d_1, d_2, d_6 — постоянные величины, d_3 — переменная величина; α_i — угловое смещение (угол, на который надо повернуть ось z_{i-1} вокруг оси x_i , чтобы она стала сонаправлена с осью z_i).

Обобщенная координата φ_i — угол поворота i -го звена относительно $(i-1)$ -го звена вокруг оси z_{i-1} , обобщенная координата d_3 — поступательное перемещение 3 звена относительно 2 вдоль оси $z_2(z_3)$. Отметим, что обобщенные координаты φ_i отсчитываются вокруг тех же осей, что и конструктивные параметры Θ_i . На рис. 1 $\Phi_i = \Theta_i + \varphi_i$.

Параметры систем координат звеньев стэнфордского манипулятора

Сочленение i	Θ_i	α_i	d_i
1	-90°	-90°	d_1
2	-90°	90°	d_2
3	-90°	0°	d_3
4	0°	-90°	0
5	0°	90°	0
6	0°	0°	d_6

2. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦ ДУАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ И БИКВАТЕРНИОНОВ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Прямая задача кинематики состоит в определении линейного положения и ориентации схвата манипулятора относительно абсолютной системы координат $X_0Y_0Z_0$ по известному вектору обобщенных координат $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_6(t)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), d_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t))$ и заданным геометрическим параметрам звеньев.

Для решения прямой задачи кинематики используется следующая схема конечных перемещений звеньев манипулятора:

$$X_0Y_0Z_0 \xrightarrow{C_1, \Lambda_1} X_1Y_1Z_1 \xrightarrow{C_2, \Lambda_2} X_2Y_2Z_2 \xrightarrow{C_3, \Lambda_3} X_3Y_3Z_3 \xrightarrow{C_4, \Lambda_4} X_4Y_4Z_4 \xrightarrow{C_5, \Lambda_5} X_5Y_5Z_5 \xrightarrow{C_6, \Lambda_6} X_6Y_6Z_6,$$

$$X_0Y_0Z_0 \xrightarrow{C, \Lambda} X_6Y_6Z_6.$$

Здесь C_i и Λ_i — матрица дуальных направляющих косинусов и бикватернион конечного перемещения i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го, C и Λ — матрица дуальных направляющих косинусов и бикватернион конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно основания.

Нахождение матрицы C и бикватерниона Λ в виде функций обобщенных координат манипулятора с помощью формул сложения конечных перемещений [2, 3] и составляет предмет решения прямой задачи кинематики. Уравнения для нахождения матрицы C и бикватерниона Λ в случае стэнфордского манипулятора имеют вид

$$C = c + sc^0 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} c_{11}^0 & c_{12}^0 & c_{13}^0 \\ c_{21}^0 & c_{22}^0 & c_{23}^0 \\ c_{31}^0 & c_{32}^0 & c_{33}^0 \end{pmatrix} =$$

$$= C_6 C_5 C_4 C_3 C_2 C_1, \quad C_i = c_i + sc_i^0, \quad (1)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda + s\lambda^0 = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 + s(\lambda_0^0 + \lambda_1^0 \mathbf{i}_1 + \lambda_2^0 \mathbf{i}_2 + \lambda_3^0 \mathbf{i}_3) =$$

$$= (\lambda_0 + s\lambda_0^0) + (\lambda_1 + s\lambda_1^0) \mathbf{i}_1 + (\lambda_2 + s\lambda_2^0) \mathbf{i}_2 + (\lambda_3 + s\lambda_3^0) \mathbf{i}_3 =$$

$$= \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_5 \circ \Lambda_6, \quad \Lambda_i = \lambda_i + s\lambda_i^0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; s — символ (комплексность) Клиффорда, обладающая свойством $s^2 = 0$; \circ — символ кватернионного умножения; C_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) и Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — дуальные направляющие косинусы и дуальные параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), характеризующие угловое и линейное положение схвата манипулятора в основной системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; c_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) и λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — вещественные направляющие косинусы и вещественные параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), характеризующие ориентацию схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$ (главные части дуальных величин C_{ik} и Λ_j), c_{ik}^0 и λ_j^0 — моментные части дуальных величин C_{ik} и Λ_j , характеризующие линейное положение схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; c и λ — вещественная матрица направляющих косинусов и кватернион поворота, описывающие ориентацию схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; c^0 и λ^0 — вещественная матрица и кватернион, описывающие поступательное перемещение схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; $c_i(\lambda_i)$ и $c_i^0(\lambda_i^0)$ — главная и моментная части матрицы дуальных направляющих косинусов C_i (бикватерниона Λ_i), характеризующие угловое и линейное положение i -го звена (системы координат $X_i Y_i Z_i$) в системе координат $X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$, связанной с $(i-1)$ -м звеном.

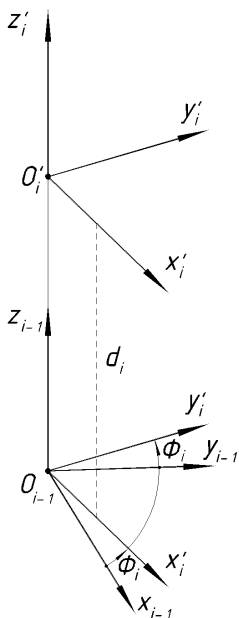


Рис. 2. Схема первого перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го

Конечное перемещение i -го звена относительно $(i-1)$ -го, описываемое матрицей C_i или бикватернионом Λ_i , представляет собой композицию двух перемещений: перемещения на дуальный угол $\Phi_i + sd_i = (\Theta_i + \varphi_i) + sd_i$ вокруг оси z_{i-1} (рис. 2) и поворота на угол α_i вокруг оси x'_i , полученной из оси x_{i-1} в результате первого перемещения (рис. 3).

Схема конечных перемещений имеет следующий вид:

$$X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1} \xrightarrow{C_i^1, \Lambda_i^1} X_i^1 Y_i^1 Z_i^1 \xrightarrow{C_i^2, \Lambda_i^2} X_i Y_i Z_i.$$

Матрица дуальных направляющих косинусов C_i^1 и бикватернион Λ_i^1 первого перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го имеют вид

$$C_i^1 = \begin{pmatrix} \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & 0 \\ -\sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_i^1 = \cos\left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s\frac{d_i}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s\frac{d_i}{2}\right) \mathbf{i}_3.$$

Второе конструктивное перемещение i -го звена относительно $(i-1)$ -го представляет собой поворот на угол α_i вокруг оси x'_i (см. рис. 3). За счет отсутствия линейного перемещения дуальные углы обра-



щаются в обычные. Матрица направляющих косинусов C_i^2 и кватернион Λ_i^2 второго конструктивного перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го в соответствии с рис. 3 имеют вид

$$C_i^2 = c_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_i^2 = \lambda_i^2 = \cos \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \mathbf{i}_1.$$

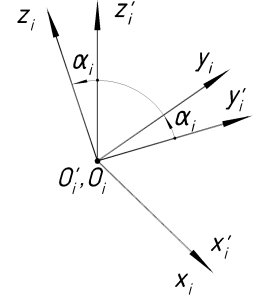


Рис. 3. Схема второго перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го

Матрица дуальных направляющих косинусов и бикватернион конечного перемещения i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го находятся с использованием формул сложения конечных перемещений [2, 3]:

$$C_i = C_i^2 C_i^1 = \begin{pmatrix} \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \cos \alpha_i \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & -\sin \alpha_i \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \cos \alpha_i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\Lambda_i = \Lambda_1^1 \circ \Lambda_1^2 = \cos \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \cos \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \cos \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_1 +$$

$$+ \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \sin \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_2 + \cos \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \sin \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_3. \quad (4)$$

При подстановке в уравнения (3), (4) геометрических параметров манипулятора, приведенных в таблице, получаем следующие матрицы дуальных направляющих косинусов и бикватернионы относительных конечных перемещений звеньев манипулятора:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 + sd_1 \cos \varphi_1 & -\cos \varphi_1 + sd_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \cos \varphi_1 - sd_1 \sin \varphi_1 & \sin \varphi_1 + sd_1 \cos \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \left(p_1 + s \frac{d_1}{2} q_1 \right) - \frac{1}{2} \left(p_1 + s \frac{d_1}{2} q_1 \right) \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} \left(q_1 - s \frac{d_1}{2} p_1 \right) \mathbf{i}_2 + \frac{1}{2} \left(-q_1 + s \frac{d_1}{2} p_1 \right) \mathbf{i}_3,$$

$$p_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad q_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad (6)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 + sd_2 \cos \varphi_2 & -\cos \varphi_2 + sd_2 \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos \varphi_2 + sd_2 \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_2 - sd_2 \cos \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \left(p_2 + s \frac{d_2}{2} q_2 \right) + \frac{1}{2} \left(p_2 + s \frac{d_2}{2} q_2 \right) \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} \left(-q_2 + s \frac{d_2}{2} p_2 \right) \mathbf{i}_2 + \frac{1}{2} \left(-q_2 + s \frac{d_2}{2} p_2 \right) \mathbf{i}_3,$$

$$p_2 = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad q_2 = \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad (8)$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} sd_3 & -1 & 0 \\ 1 & sd_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + s \frac{d_3}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-1 + s \frac{d_3}{2} \right) \mathbf{i}_3, \quad (10)$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_4 & \sin \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \varphi_4 & \cos \varphi_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_4}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_4}{2} \mathbf{i}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_4}{2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_4}{2} \mathbf{i}_3, \quad (12)$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_5 & \sin \varphi_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \varphi_5 & -\cos \varphi_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\Lambda_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_5}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_5}{2} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_5}{2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_5}{2} \mathbf{i}_3, \quad (14)$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_6 - sd_6 \sin \varphi_6 & \sin \varphi_6 + sd_6 \cos \varphi_6 & 0 \\ -\sin \varphi_6 - sd_6 \cos \varphi_6 & \cos \varphi_6 - sd_6 \sin \varphi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\Lambda_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi_6}{2} + s \frac{d_6}{2} \sin \frac{\varphi_6}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\varphi_6}{2} + s \frac{d_6}{2} \cos \frac{\varphi_6}{2} \right) \mathbf{i}_3. \quad (16)$$

Матрица дуальных направляющих косинусов C и бикватернион конечного перемещения Λ выходного звена манипулятора относительно неподвижного основания находятся через приведенные матрицы и бикватернионы по формулам (1), (2):

$$C = C_6 C_5 C_4 C_3 C_2 C_1, \quad (17)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_5 \circ \Lambda_6. \quad (18)$$

Подстановка выражений (3)–(16) в (17), (18) дает выражение матрицы дуальных направляющих косинусов и бикватерниона конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно неподвижного основания через обобщенные координаты $(\varphi_1, \varphi_2, d_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$ в явном виде. Формулы (17), (18) и (3)–(16) являются алгоритмами решения прямой задачи кинематики стэнфордского манипулятора в дуальных матрицах направляющих косинусов и в бикватернионах конечных перемещений.

3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Кинематические уравнения движения манипулятора получаются из векторных выражений для линейной и угловой скоростей движения выходного звена путем проектирования их на оси системы координат $X_6 Y_6 Z_6$, связанной с выходным звеном манипулятора.

В соответствии с кинематической схемой (см. рис. 1) вектор ω угловой скорости выходного звена манипулятора будет иметь вид

$$\omega = \dot{\varphi}_1 \mathbf{k}_0 + \dot{\varphi}_2 \mathbf{k}_1 + \dot{\varphi}_4 \bar{\mathbf{k}}_3 + \dot{\varphi}_5 \mathbf{k}_4 + \dot{\varphi}_6 \mathbf{k}_5, \quad (19)$$

Здесь \mathbf{k}_i — орт оси z_i системы координат, связанной с i -м звеном манипулятора, φ_i — обобщенные координаты манипулятора, верхняя точка обозначает производную по времени.

Радиус-вектор \mathbf{r} начала O_6 системы координат, связанной с выходным звеном, в соответствии с кинематической схемой (см. рис. 1) определяется соотношением

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_5} + \overrightarrow{O_5O_6}, \quad (20)$$

где O — начало системы координат, связанной с основанием манипулятора, O_i — начало i -й системы координат.

Дифференцирование уравнения (20) по времени и подстановка в него заданных геометрических параметров манипулятора дает выражение для вектора линейной скорости начала системы координат $X_6 Y_6 Z_6$, связанной с выходным звеном, относительно неподвижного основания:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{d}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{d}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{d}_3}{dt} + \frac{d\mathbf{d}_6}{dt}; \quad \mathbf{d}_i = d_i \mathbf{k}_i.$$

Векторы \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_6 постоянны по модулю, поэтому использование формулы Эйлера для постоянного по модулю вектора и дифференцирование переменного вектора \mathbf{d}_3 дает следующее выражение:

$$\mathbf{v} = \omega_1 \times \mathbf{d}_1 + (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{d}_2 + \dot{d}_3 \mathbf{k}_2 + (\omega_1 + \omega_2) \times (d_3 \mathbf{k}_2) + (\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6) \times \mathbf{d}_6, \quad (21)$$

где \times — символ векторного произведения, ω_i — относительные угловые скорости звеньев, которые выражаются через обобщенные координаты и орты осей z_i следующим образом:

$$\omega_i = \dot{\varphi}_i \mathbf{k}_{i-1} \quad (i = 1, 2, 4, 5, 6).$$



Для получения кинематических уравнений необходимо спроектировать векторные выражения (19) и (21) на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$, связанной с выходным звеном манипулятора. Необходимые для проектирования вещественные матрицы направляющих косинусов обозначим следующим образом:

$$c = c_6c_5c_4c_3c_2c_1, \quad c_{61} = c_6c_5c_4c_3c_2, \quad c_{62} = c_6c_5c_4c_3, \quad c_{63} = c_6c_5c_4, \quad c_{64} = c_6c_5, \quad c_{65} = c_6.$$

Здесь c_i — вещественная матрица направляющих косинусов поворота i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го.

Тогда переход от одной системы координат к другой, учитывающий лишь повороты систем координат, осуществляется в соответствии со схемой поворотов:

$$\begin{aligned} X_0Y_0Z_0 &\xrightarrow{c} X_6Y_6Z_6, & X_1Y_1Z_1 &\xrightarrow{c_{61}} X_6Y_6Z_6, & X_2Y_2Z_2 &\xrightarrow{c_{62}} X_6Y_6Z_6, \\ X_3Y_3Z_3 &\xrightarrow{c_{63}} X_6Y_6Z_6, & X_4Y_4Z_4 &\xrightarrow{c_{64}} X_6Y_6Z_6, & X_5Y_5Z_5 &\xrightarrow{c_{65}} X_6Y_6Z_6. \end{aligned}$$

Найдем проекции единичных векторов \mathbf{k}_i на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$, связанной с выходным звеном. Обозначим через c^{ij} и c_{6k}^{ij} ($i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4, 5$) элементы матриц c и c_{6k} , а через $\mathbf{i}_6, \mathbf{j}_6, \mathbf{k}_6$ — орты системы координат $X_6Y_6Z_6$. Тогда будем иметь:

$$\mathbf{k}_0 = c^{13}\mathbf{i}_6 + c^{23}\mathbf{j}_6 + c^{33}\mathbf{k}_6, \quad \mathbf{k}_i = c_{6i}^{13}\mathbf{i}_6 + c_{6i}^{23}\mathbf{j}_6 + c_{6i}^{33}\mathbf{k}_6 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (22)$$

Запишем векторное уравнение (19) в матричном виде, учитывая соотношения (22) и обозначая через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$. Получим:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 c^{13} + \dot{\varphi}_2 c_{61}^{13} + \dot{\varphi}_4 c_{63}^{13} + \dot{\varphi}_5 c_{64}^{13} + \dot{\varphi}_6 c_{65}^{13} \\ \dot{\varphi}_1 c^{23} + \dot{\varphi}_2 c_{61}^{23} + \dot{\varphi}_4 c_{63}^{23} + \dot{\varphi}_5 c_{64}^{23} + \dot{\varphi}_6 c_{65}^{23} \\ \dot{\varphi}_1 c^{33} + \dot{\varphi}_2 c_{61}^{33} + \dot{\varphi}_4 c_{63}^{33} + \dot{\varphi}_5 c_{64}^{33} + \dot{\varphi}_6 c_{65}^{33} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Найдем проекции векторов \mathbf{d}_i на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$, связанной с выходным звеном. Имеем:

$$\mathbf{d}_1 = d_1 c^{13}\mathbf{i}_6 + d_1 c^{23}\mathbf{j}_6 + d_1 c^{33}\mathbf{k}_6, \quad \mathbf{d}_i = d_i c_{6i-1}^{13}\mathbf{i}_6 + d_i c_{6i-1}^{23}\mathbf{j}_6 + d_i c_{6i-1}^{33}\mathbf{k}_6 \quad (i = 2, 3, 6). \quad (24)$$

Запишем в координатной форме векторные произведения в уравнении (21):

$$\begin{aligned} \omega_1 \times \mathbf{d}_1 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как векторы коллинеарны,} \\ \omega_1 \times \mathbf{d}_2 &= \mathbf{i}_6(d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{61}^{33} - c^{33} c_{61}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{61}^{33} - c^{33} c_{61}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{61}^{23} - c^{23} c_{61}^{13})), \\ \omega_2 \times \mathbf{d}_2 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как векторы коллинеарны,} \\ d_3 \omega_1 \times \mathbf{k}_2 &= \mathbf{i}_6(d_3 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{62}^{33} - c^{33} c_{62}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_3 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{62}^{33} - c^{33} c_{62}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_3 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{62}^{23} - c^{23} c_{62}^{13})), \\ d_3 \omega_2 \times \mathbf{k}_2 &= \mathbf{i}_6(d_3 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{23} c_{62}^{33} - c_{61}^{33} c_{62}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_3 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{62}^{33} - c_{61}^{33} c_{62}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_3 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{62}^{23} - c_{61}^{23} c_{62}^{13})), \\ \omega_1 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{65}^{33} - c^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{65}^{33} - c^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{65}^{23} - c^{23} c_{65}^{13})), \\ \omega_2 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{23} c_{65}^{33} - c_{61}^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{65}^{33} - c_{61}^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{65}^{23} - c_{61}^{23} c_{65}^{13})), \\ \omega_3 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как } \omega_3 = \bar{0}, \\ \omega_4 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_4 (c_{63}^{23} c_{65}^{33} - c_{63}^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_4 (c_{63}^{13} c_{65}^{33} - c_{63}^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_4 (c_{63}^{13} c_{65}^{23} - c_{63}^{23} c_{65}^{13})), \\ \omega_5 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_5 (c_{64}^{23} c_{65}^{33} - c_{64}^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_5 (c_{64}^{13} c_{65}^{33} - c_{64}^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_5 (c_{64}^{13} c_{65}^{23} - c_{64}^{23} c_{65}^{13})), \\ \omega_6 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как векторы коллинеарны.} \end{aligned}$$

Проектирование векторного уравнения (21) на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$ с учетом приведенных выше соотношений для векторных произведений дает 3 скалярных уравнения для компонент v_i вектора \mathbf{v} линейной скорости выходного звена манипулятора относительно основания в системе координат $X_0Y_0Z_0$, имеющих вид

$$v_1 = d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{61}^{33} - c^{33} c_{61}^{23}) + d_3 c_{62}^{13} +$$



$$\begin{aligned}
 &+d_3\dot{\varphi}_1(c^{23}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{23}) + d_3\dot{\varphi}_2(c_{61}^{23}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{23}) + d_6\dot{\varphi}_1(c^{23}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{23}) + \\
 &+d_6\dot{\varphi}_2(c_{61}^{23}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{23}) + d_6\dot{\varphi}_4(c_{63}^{23}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{23}) + d_6\dot{\varphi}_5(c_{64}^{23}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{23}), \\
 &v_2 = -(d_2\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{13})) + \dot{d}_3c_{62}^{23} + \\
 &+d_3\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{13}) + d_3\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{13}) + \\
 &+d_6\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_4(c_{63}^{13}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_5(c_{64}^{13}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{13}), \\
 &v_3 = d_2\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{61}^{23} - c^{23}c_{61}^{13}) + \dot{d}_3c_{62}^{33} + \\
 &+d_3\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{62}^{23} - c^{23}c_{62}^{13}) + d_3\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{62}^{23} - c_{61}^{23}c_{62}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{65}^{23} - c^{23}c_{65}^{13}) + \\
 &+d_6\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{65}^{23} - c_{61}^{23}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_4(c_{63}^{13}c_{65}^{23} - c_{63}^{23}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_5(c_{64}^{13}c_{65}^{23} - c_{64}^{23}c_{65}^{13}).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Объединяя соотношения (23) и (25), получим выражения для проекций угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора на связанные с ним координатные оси:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} c^{13} \\ c^{23} \\ c^{33} \\ d_2(c^{23}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{23}) + d_3(c^{23}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c^{23}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_2(c^{13}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{13}) - d_3(c^{13}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c^{13}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{13}) \\ d_2(c^{13}c_{61}^{23} - c^{23}c_{61}^{13}) + d_3(c^{13}c_{62}^{23} - c^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c^{13}c_{65}^{23} - c^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \\
 &+ \dot{\varphi}_2 \begin{pmatrix} c_{61}^{13} \\ c_{61}^{23} \\ c_{61}^{33} \\ d_3(c_{61}^{23}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c_{61}^{23}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{13}) \\ d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{23} - c_{61}^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{23} - c_{61}^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \dot{d}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{62}^{13} \\ c_{62}^{23} \\ c_{62}^{33} \end{pmatrix} + \\
 &+ \dot{\varphi}_4 \begin{pmatrix} c_{63}^{13} \\ c_{63}^{23} \\ c_{63}^{33} \\ d_6(c_{63}^{23}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_6(c_{63}^{13}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{13}) \\ d_6(c_{63}^{13}c_{65}^{23} - c_{63}^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_5 \begin{pmatrix} c_{64}^{13} \\ c_{64}^{23} \\ c_{64}^{33} \\ d_6(c_{64}^{23}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_6(c_{64}^{13}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{13}) \\ d_6(c_{64}^{13}c_{65}^{23} - c_{64}^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_6 \begin{pmatrix} c_{65}^{13} \\ c_{65}^{23} \\ c_{65}^{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{26}
 \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$A = \|a_{ij}\|, \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= c^{13}, & a_{12} &= c_{61}^{13}, & a_{13} &= 0, & a_{14} &= c_{63}^{13}, & a_{15} &= c_{64}^{13}, & a_{16} &= c_{65}^{13}; \\
 a_{21} &= c^{23}, & a_{22} &= c_{61}^{23}, & a_{23} &= 0, & a_{24} &= c_{63}^{23}, & a_{25} &= c_{64}^{23}, & a_{26} &= c_{65}^{23}; \\
 a_{31} &= c^{33}, & a_{32} &= c_{61}^{33}, & a_{33} &= 0, & a_{34} &= c_{63}^{33}, & a_{35} &= c_{64}^{33}, & a_{36} &= c_{65}^{33}; \\
 a_{41} &= d_2(c^{23}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{23}) + d_3(c^{23}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c^{23}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{23}), \\
 a_{42} &= d_3(c_{61}^{23}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c_{61}^{23}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{23}), & a_{43} &= c_{62}^{13}, \\
 a_{44} &= d_6(c_{63}^{23}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{23}), & a_{45} &= d_6(c_{64}^{23}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{23}), & a_{46} &= 0; \\
 a_{51} &= -d_2(c^{13}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{13}) - d_3(c^{13}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c^{13}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{13}), \\
 a_{52} &= -d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{13}), & a_{53} &= c_{62}^{23}, \\
 a_{54} &= -d_6(c_{63}^{13}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{13}), & a_{55} &= -d_6(c_{64}^{13}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{13}), & a_{56} &= 0; \\
 a_{61} &= d_2(c^{13}c_{61}^{23} - c^{23}c_{61}^{13}) + d_3(c^{13}c_{62}^{23} - c^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c^{13}c_{65}^{23} - c^{23}c_{65}^{13}), \\
 a_{62} &= d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{23} - c_{61}^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{23} - c_{61}^{23}c_{65}^{13}), & a_{63} &= c_{62}^{33},
 \end{aligned}$$



$$a_{64} = d_6 (c_{63}^{13} c_{65}^{23} - c_{63}^{23} c_{65}^{13}), \quad a_{65} = d_6 (c_{64}^{13} c_{65}^{23} - c_{64}^{23} c_{65}^{13}), \quad a_{66} = 0.$$

Разрешая уравнение (26) относительно обобщенных скоростей с учетом обозначения (27), получим матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dot{d}_3 & \dot{\varphi}_4 & \dot{\varphi}_5 & \dot{\varphi}_6 \end{pmatrix}^T = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T, \quad (28)$$

где T — символ транспонирования.

Полученные уравнения (28), (27) — кинематические уравнения движения стэнфордского робота-манипулятора. Они представляют собой систему 6 нелинейных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $\varphi_1, \varphi_2, d_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$, являющихся обобщенными координатами манипулятора. Эти уравнения и полученные в п. 2 бикватернионные соотношения будут использованы для решения обратной задачи кинематики с использованием бикватернионной теории кинематического управления [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00165).

Библиографический список

1. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М. : Мир, 1989. 621 с.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия движения. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. 236 с.
3. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 512 с.
4. Челноков Ю. Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 38–58.

Dual Matrix and Biquaternion Methods of Solving Direct and Inverse Kinematics Problems of Manipulators, for Example Stanford Robot Arm. I

E. I. Lomovtseva, Yu. N. Chelnokov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, LomovtsevaEI@yandex.ru, chelnokovyun@info.sgu.ru

The methodology of solving the direct kinematics problem of manipulators by using screw mechanics methods (dual direction cosine matrices, Clifford biquaternions) is shown on the example of Stanford robot arm. Kinematic equations of motion of the manipulator are found. These equations will be used for solving the inverse kinematics problem with the help of biquaternion theory of kinematic control.

Key words: robot-manipulator, direct kinematics problem, dual direction cosine matrix, biquaternion, quaternion, kinematic equations.

References

1. Fu K. S., Gonzalez R. C., Lee C. S. G. *Robotics : Control, Sensing, Vision and Intelligence*. McGraw-Hill, Inc, 1987, 580 p.
2. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozhenija. Geometrija dvoizhenija* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry of Motion]. Saratov, Izd-vo Saratov. Univ., 2006, 236 p. (in Russian).
3. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozhenija. Geometrija i kinematika dvoizhenija* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry and Kinematics of Motion] Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).
4. Chelnokov Yu. N. Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics. *Mechanics of Solids* [Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela], 2013, vol. 48, no. 1. pp. 31–46.



УДК 616.728:51

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТА ВРАСТАНИЯ КОСТНЫХ ТКАНЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОСТЕОИНТЕГРАЦИИ БЕСЦЕМЕНТНОГО ЭНДОПРОТЕЗА

А. В. Никитин

Аспирант кафедры био- и наномеханики, Белорусский государственный университет, Минск, andy.nik@tut.by

Конечно-элементная модель пористого титана, используемого в качестве вставок эндопротеза бесцементной фиксации, реконструирована с помощью метода компьютерной томографии. Напряженно-деформируемое состояние рассчитано для модели с открытыми порами и композита кость/титан. Результаты исследований объясняют механизм разрушения пористой структуры и положительное влияние эффекта остеоинтеграции на прочностные характеристики. Численные расчеты подтверждаются экспериментальными данными тестирования пористых образцов на сжатие. Показано что кинетика деформационно-прочностных свойств пористого титана в процессе остеогенеза является актуальной областью биомеханических исследований.

Ключевые слова: конечно-элементный анализ, напряженно-деформированное состояние, остеоинтеграция, компьютерная томография.

ВВЕДЕНИЕ

Пористые структуры на основе титана сохраняют превосходные механические и биологические свойства присущие титану или его сплавам, а также обладают большим потенциалом применения этих структур в различных областях стоматологии и ортопедии для замещения костных тканей пористыми имплантатами [1]. Благодаря высокой статической и усталостной прочности, низкому модулю упругости, легкому весу и превосходной биосовместимости пористый титан становится наиболее используемым материалом, который позволяет достичь стабильного контакта между костной тканью и имплантатом [2]. Твердость таких структур прямо пропорциональна их плотности, что делает возможным изменение прочностных характеристик и модуля упругости в соответствии с физическими свойствами кости за счет изменения пористости материала. В свою очередь, открытые поры материала обеспечивают благоприятные условия для остеоинтеграции имплантата. Наличие взаимосвязанных пор в объеме пористого титана позволяет кровеносным сосудам образовать остеогенную ткань в толще материала и в последующем формирует костную ткань. Вростание полноценной кости в объемную пористую структуру имплантата обеспечивает не только прочную связь протеза с костной тканью, но и создает биомеханическую систему передачи напряжений, возникающих под воздействием внешних нагрузок, от имплантата к кости. Присутствие пористого титана в конструкции эндопротеза как передающей напряжения среды между костью и имплантатом позволяет снизить эффект «экранирования напряжений», достигая стабильной фиксации и длительного срока эксплуатации имплантата [3–5]. Чтобы обеспечить достаточное пространство для закрепления и распространения костных тканей, а также транспортировки жидкостей организма, структура должна обладать высокой пористостью [5, 6]. Исследования показывают, что оптимальный размер пор, необходимый для прочной фиксации имплантата, пока остается не определенным, но для оптимального вrostания минерализованной кости требуется размер пор от 100 до 500 мкм [7].

Под воздействием внешних нагрузок решетчатая морфология пористого титана является причиной образования концентраторов напряжений в отдельных его областях, что ухудшает прочностные характеристики имплантата в целом и, как следствие, ограничивает применение пористых структур. Степень пористости материала, распределение и ориентация пор оказывают существенное влияние на механические и биологические свойства имплантата. Поскольку внутреннее строение пористой структуры определяет место возникновения концентраторов напряжений, возможность изучения морфологии пор на микроуровне, является необходимым для понимания и прогнозирования реакции материала на механические нагрузки, а также позволяет оптимизировать внутреннюю структуру для лучшего вrostания костных тканей. Существующие аналитические модели способны предсказывать



общее поведение материала при довольно идеализированных условиях. В отличие от этого, конечно-элементное (КЭ) моделирование позволяет обеспечить наиболее полное соответствие микроструктуры исследуемого материала и математической модели.

Компьютерная томография с недавнего времени доказала свою эффективность в качестве действенного инструмента, позволяющего определить характеристики внутренней микроструктуры пористых материалов и изучить их сложную архитектуру неинвазивным и неразрушающим способом. С помощью данного метода осуществляется реконструкция трехмерного изображения микроструктуры исследуемого материала и изучение его прочностных характеристик методом конечных элементов [8]. Несмотря на сложности, связанные с триангуляцией поверхности и созданием правильной сетки конечных элементов, прямое моделирование пористой структуры вызывает все больший интерес у исследователей, так как сохраняет полную информацию о реальной морфологии имплантата и помогает выявлять наиболее слабые участки решетчатой структуры с целью усовершенствования конструкции. Результаты исследований, проведенных различными авторами, показывают, что вставание костных тканей может снизить концентрацию напряжений, возникающих из-за особенностей пористой морфологии имплантата [2]. Таким образом, чтобы оптимизировать конструкцию эндопротезов и прогнозировать их работоспособность, необходимо оценить кинетику изменения деформационно-прочностных свойств пористого титана в процессе остеогенеза и образования композита кость/титан. Весьма информативными представляются экспериментальные и теоретические методы механики композитов, в частности, анализ диаграмм деформирования, получаемых при механических испытаниях образцов имплантируемого пористого материала в различных фазах остеогенеза [9].

В приведенных ниже исследованиях описывается процесс построения КЭ моделей и оценка свойств пористого титана с открытыми порами, а также при завершеном процессе остеогенеза как упругопластического материала. Метод компьютерной томографии был применен для получения серии срезов испытываемых структур и создания трехмерных моделей. КЭ моделирование механической реакции при сжатии пористого титана производилось экспериментально-вычислительным методом. Для количественной оценки прогнозируемых изменений прочностных характеристик пористого титана проводились испытания на статическое сжатие, и полученные результаты сравнивались с результатами численных расчетов КЭ моделирования.

1. МАТЕРИАЛ И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве объекта исследования использовали ножку эндопротеза бесцементной фиксации со вставками из пористого титана производства ЗАО «Алтимед» (Беларусь, Минск). Геометрия имплантата спроектирована таким образом, что пористая структура находится в его верхней части и соответствует проксимальному отделу бедренной кости, состоящей в большей степени из губчатой костной ткани, которая хорошо снабжается кровью. Благодаря такому расположению обеспечивается высокая степень адгезионного соединения развитой поверхности вставок эндопротеза с костью в зоне максимальных растягивающих напряжений. Вставки размерами 300×200 мм, толщиной около 4 мм и величиной пор от 150 до 350 микрон, изготовленные из коммерческого титана (Grade 4, ISO5832-2) методом порошковой металлургии, использовались в этих исследованиях. Перед проведением механических испытаний на сжатие образцы были дополнительно обработаны для придания им правильной формы и выравнивания поверхностей, расположенных перпендикулярно направлению сжимающей нагрузки. Нагрузению подвергались две пластинки пористой структуры: одна изготовлена из титановой вставки эндопротеза до имплантации и имела первоначальную морфологию пористого материала с открытыми порами, а вторая пластинка вырезана из эндопротеза после его имплантации на срок, при котором завершился процесс остеогенеза, в результате чего поры образца были заполнены костной тканью. Тестирование производилось на машине Instron 5567 (ИММС НАНБ, Беларусь, Гомель) со скоростью 10 мм/мин при комнатной температуре. Напряжения рассчитывались исходя из поперечного сечения образца в недеформированном состоянии.

Аппарат компьютерной томографии применяли при создании трехмерного образа пористой структуры. При этом использовали неразрушающий метод лучевой диагностики для визуализации объектов со сложной внутренней геометрией. Помещенный в рабочую область томографа титановый образец подвергался рентгеновскому излучению вращающегося на 360° эмиттера с поступательным



шагом 0.1 мм. Полученные таким образом рентгенограммы были обработаны с помощью специального программного обеспечения, которое в результате сгенерировало серию аксиальных срезов исследуемой пористой структуры. Конечное трехмерное изображение численно реконструируется на основании двумерных изображений и может воспроизводиться в виде серии сечений или в виде объемного образа, состоящего из множества вокселей (трехмерных пикселей). В дальнейшем эти данные использовались для построения КЭ модели, геометрия которой представляет собой морфологию пористой структуры исследуемой титановой вставки.

Так как объемные цифровые изображения, полученные в результате компьютерной томографии, не могут напрямую использоваться для трехмерного моделирования, поверхность отсканированного образца изначально была представлена в виде множества точек (так называемое облако точек), которые, соединяясь между собой отрезками, формировали сетку треугольников. Образованный трехмерный каркас состоит из множества треугольных граней и может рассматриваться как искусственная поверхность для визуального и качественного анализа (рис. 1). Файлы формата *.stl (стереолитографии), полученные в результате конвертации объемного изображения пористой структуры, были вручную обработаны средствами САПР с целью уменьшения размера файла и снижения времени расчетов последующего КЭ анализа. Для упрощения численных расчетов модели производилась реконструкция не всего объема аксиальных срезов образца пористого титана, а только его отдельного сегмента размерами $3 \times 3 \times 4.5$ мм, состоящего из серии 45 срезов.

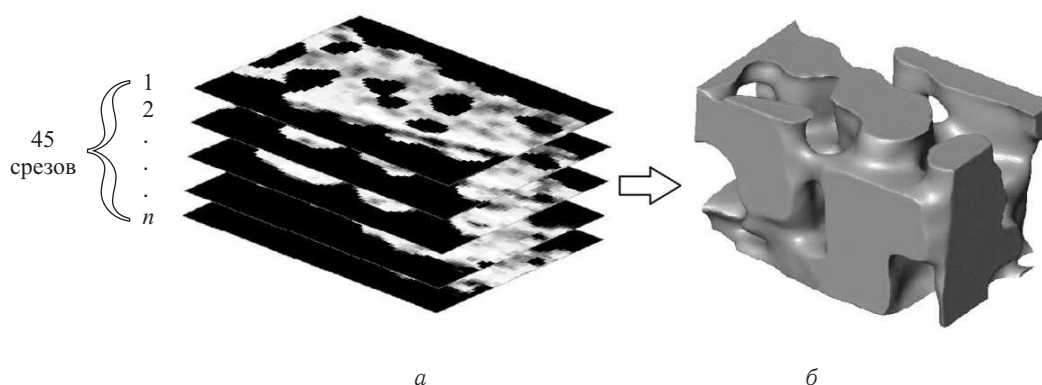


Рис. 1. Схема построения искусственной поверхности образца пористого титана: *а* — компьютерная томография образца пористого титана; *б* — создание искусственной поверхности формата STL

Чтобы повысить точность расчетов, поверхность модели, представленная множеством разносторонних треугольников, была заново триангулирована. Новая поверхность имела максимальное отклонение от исходной геометрии не более 0.015 мм и состояла из 31 000 равнобедренных треугольников (длина ребра 0.1 мм). Созданная модель титанового образца была экспортирована в формате *.inp (Abaqus input file) для дальнейшей обработки и расчета методом конечных элементов в пакете программного обеспечения ABAQUS. Таким же методом была создана и экспортирована модель костной ткани, заполняющей свободный объем пористой структуры.

Сетка конечных элементов высокого качества, состоящая из квадратичных 10 узловых тетраэдров (C3D10), была создана в результате дискретизации объемов двух моделей. Всего 284 955 элементов сгенерированы для модели пористого титана и 179 098 элементов — для модели костной ткани. Для данных исследований созданы две КЭ задачи: первая задача описывает реакцию на сжатие титанового образца с открытыми порами, а вторая дополнительно включает в модель материал, имитирующий костную ткань и заполняющий поровое пространство. Граничные условия, примененные к двум КЭ моделям, были идентичны в обоих случаях. Узлы модели пористого титана, принадлежащие нижней плоскости, жестко фиксировались (ENCASTRE), в то время как узлы противоположной грани одноосно смещались относительно оси X на 0,5мм, создавая усилие сжатия (рис. 2). Контакт между титаном и костной тканью осуществлялся по средствам связанного ограничения (tie constraint), исключающего относительное движение соприкасающихся поверхностей.

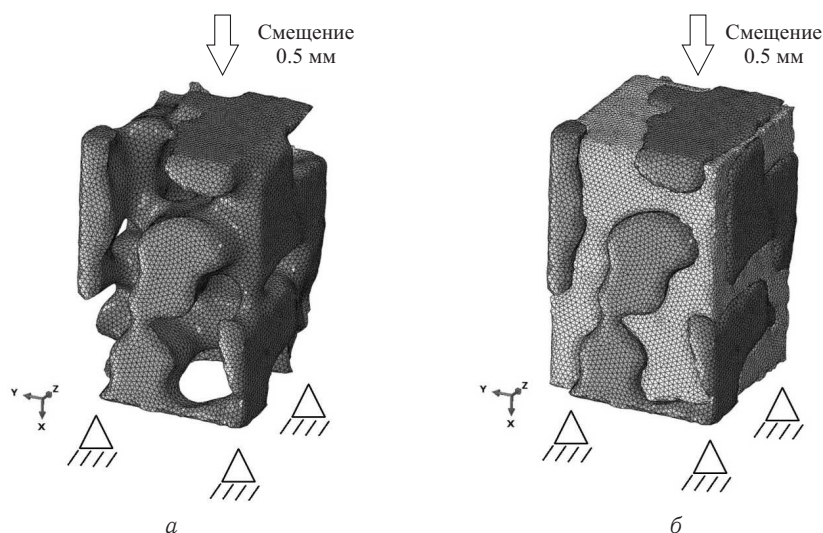


Рис. 2. Схема КЭ моделирования механических испытаний на сжатие образцов пористого титана: а — пористый титан; б — композит кость/титан

Для обеспечения упругопластических свойств КЭ модели пористого титана в качестве входных данных использовалась кривая зависимости деформации от напряжения (рис. 3).

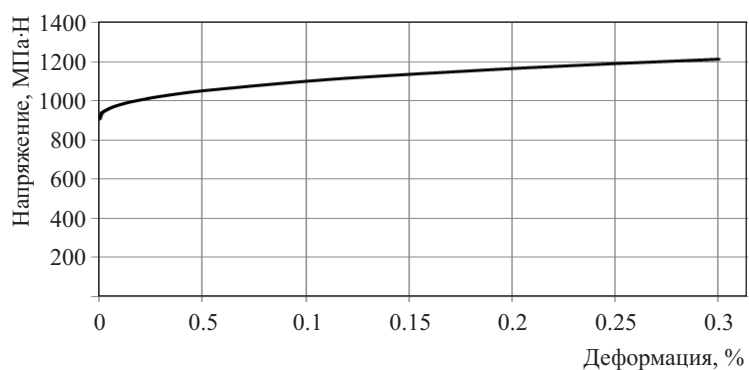


Рис. 3. Кривая зависимости деформации от напряжения

Значение модуля упругости и коэффициента Пуассона для титана и костной ткани были взяты из литературы и представлены в следующей таблице.

Входные характеристики материала для КЭ анализа

Материал	Коэффициент Пуассона	Модуль Юнга, ГПа
Титан (Grade 4)	0,34	112
Костная ткань	0,3	17

Расчет напряженно-деформированного состояния двух моделей методом конечных элементов проводили на четырех ядерном персональном компьютере, работающем на частоте 2.7 ГГц и оперативной памятью 8 Гб.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Результаты механических испытаний на сжатие образцов пористого титана со скоростью 10мм/мин представлены в виде диаграмм на рис. 4. На графике зависимости смещения от нагрузки для композита кость/титан выделяются 3 линейных участка. Искажения формы образцов в виде неплоскостности и шероховатости граней проявляются на начальном участке графика, который в дальнейшем исключался из рассмотрения. Из-за возрастающей погрешности расчета модуля упругости вследствие увеличения коэффициента Пуассона по мере вставления костных тканей, напряжения рассчитывались исходя из поперечного сечения образца в недеформированном состоянии по формуле

$$E = \frac{\Delta F}{\Delta U} \times \frac{H}{S}, \quad (1)$$



где E — модуль Юнга; ΔF — приращение усилия сжатия; ΔU — приращение перемещений сжатия; S , H — площадь поперечного сечения и высота образца соответственно.

Согласно вышесказанному модуль Юнга для композита кость/титан рассчитывался на втором линейном участке диаграммы в интервале сжимающего усилия 1000...2500 Н и составил 1.3 ГПа. Расчет модуля Юнга для пористого титана с открытыми порами производился на основании данных первого линейного участка диаграммы сжатия в интервале 0...850 Н и составил 1.06 ГПа.

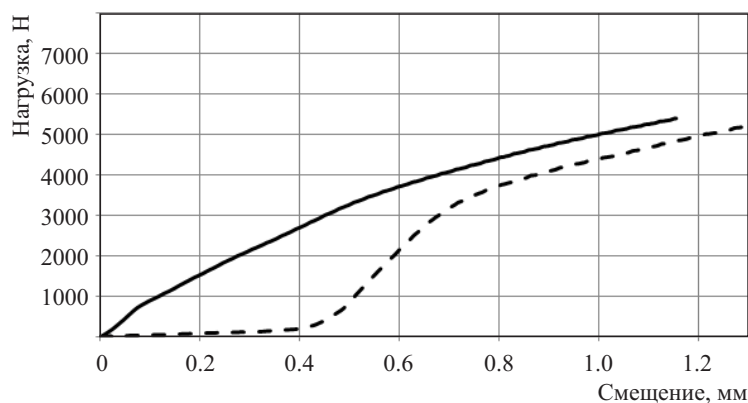


Рис. 4. Зависимость нагрузки от смещения: сплошная линия — пористый титан; пунктирная линия — композит кость/титан

КЭ анализ напряженно-деформируемого состояния пористого титана с открытыми порами показал, что под действием сжимающего усилия наибольшее напряжение испытывают перемычки структуры, расположенные параллельно оси нагружения. Такое распределение нагрузки является причиной пластических деформаций спаек материала и ведет к образованию в них микротрещин. Разрушение всего объема пористого образца представляется как прогрессирующее событие, при котором образование трещины происходит в одной наиболее слабой перемычке и, распространяясь от одной перемычке к другой, формируется общая линия разлома. В зоне разлома небольшие трещины отдельных спаек сливаются, образуя основную трещину, которая распространяется через всю пористую структуру и в которой концентрируется все пластические деформации. Максимальные напряжения по Мизесу, рассчитанные для пористого титана, относятся к конечным элементам, которые принадлежат перемычкам структуры (рис. 5, а) и составили 1.21 ГПа. Во второй модели, когда поры были заполнены костью, максимальные напряжения рассчитаны для элементов, находящихся вблизи граничных узлов (рис. 5, б).

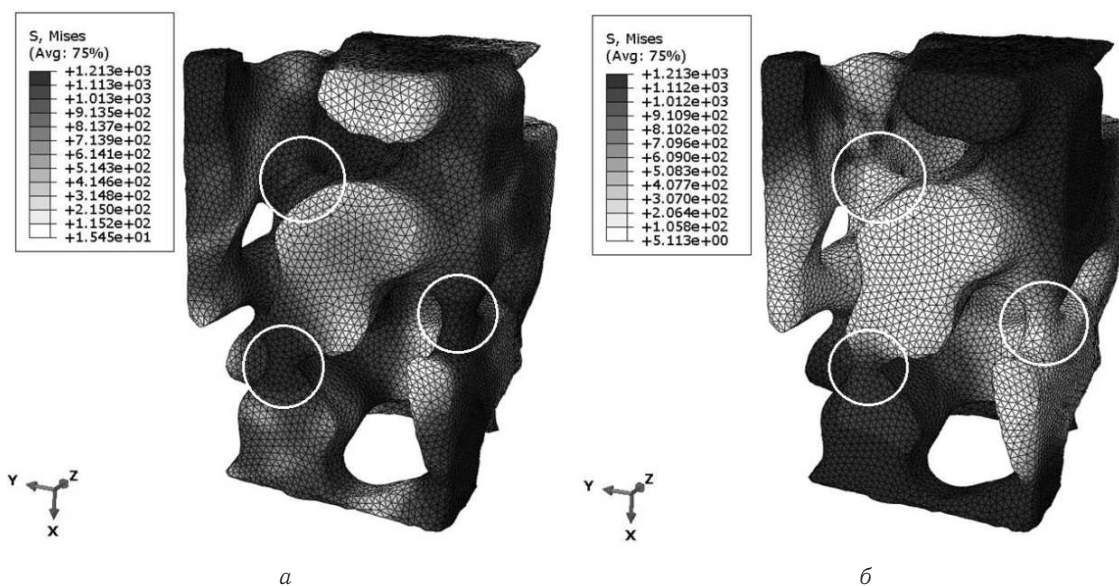


Рис. 5. Распределение напряжений по Мизесу при смещении узлов верхней грани относительно оси X на 0.5 мм: а — пористый титан; б — композит кость/титан



Как видно, титановые спайки испытывают меньшее напряжение, так как полости вокруг заполнены костной тканью. Можно предположить, что при небольшой площади сечения перемычки относительно объема окружающей полости напряжение передается посредством костной ткани, что, в свою очередь, объясняет повышенный модуль упругости, полученный в результате экспериментальных исследований на сжатие композита кость/титан.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в этой статье методология КЭ моделирования, основанная на данных компьютерной томографии, позволяет проводить исследования сложных пористых структур с целью изучения их прочностных свойств, а также механизма деформации и разрушения. Этот неразрушающий метод применяется для исследований внутренней морфологии образцов, полученных способом порошковой металлургии. Описание титанового материала как упругопластического, делает расчеты напряженно-деформируемого состояния наиболее точными, так как учитывает пластические деформации на микроуровне.

Испытания на сжатие и КЭ моделирование проведены с целью изучения эффекта остеоинтеграции костных тканей и его влияния на механические свойства пористого титана, применяемого в бесцементном эндопротезировании. Расчет напряженно-деформируемого состояния титановой структуры с открытыми порами показал, что наибольшее напряжение испытывают перемычки спеченного порошка, пластическая деформация которых приводит к разрушению образцов. После завершения процесса остеогенеза костная ткань, образующаяся вокруг спаек, служит для передачи усилий в обход этих элементов структуры, что в итоге улучшает прочностные характеристики пористого титана. Результаты расчетов подтверждаются экспериментальными данными, в результате которых величина модуля Юнга для пористого титана была на 30% меньше по своей величине, чем для композита кость/титан (1.06 ГПа и 1.3 ГПа соответственно).

Дальнейшие исследования будут направлены на изучение напряжений, возникающих в объеме бедренной кости при имплантации бесцементного эндопротеза, и понимание механизмов передачи усилий от имплантата к костной ткани посредством сформировавшегося биокомпозита кость/титан в результате законченного процесса остеогенеза.

Библиографический список

1. Shen H., Brinson L. C. Finite element modelling of porous titanium // Intern. J. of Solids and Structures, 2007. Vol. 44. P. 320-335.
2. Huanlong Li., Oppenheimer S. M., Stupp S. I., Dunand D. C., Brinson L. C. Effects of Pore Morphology and Bone Ingrowth on Mechanical Properties of Microporous Titanium as an Orthopaedic Implant Material // Materials Transactions. 2004. Vol. 45. P. 1124-1131.
3. Маслов А. П., Руцкий А. В., Никитин А. В. Переломы бедренного компонента эндопротезов тазобедренного сустава системы SLPS // Медицина. 2013. Т. 80. С. 7-13.
4. Никитин А. В., Михасев Г. И., Маслов А. П. Конечно-элементный анализ влияния области вставания на стабильность эндопротеза тазобедренного сустава // Механика машин механизмов и материалов. 2012. Т. 18. С. 86-90.
5. Esen Z., Tarhan Bor E., Bor E. Characterization of loose powder sintered porous titanium and Ti6Al4V alloy // Turkish J. Eng. Env. Science. 2009. Vol. 33. P. 207-219.
6. Thelen S., Barthelat F., Brinson L.C. Mechanics considerations for micro-porous titanium as an orthopaedic implant material // J. Biomed Mater Res A, 2004. Vol. 69. P. 601-610.
7. Vasconcellos L., Leite D., Nascimento F., Graca M., Carvalho Y., Cairo C. Porous titanium for biomedical applications : An experimental study on rabbits // Med. Oral. patol. Oral. Cir. Bucal. 2010. Vol. 2. P. 407-412.
8. Michailidis N., Stergioudi F., Omar H., Papadopoulou D., Tsiapas D. N. Experimental and FEM analysis of the material response of porous metals imposed to mechanical loading // J. Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects. 2011. Vol. 382. P. 124-131.
9. Никитин А. В., Шилько С. В. Оценка влияния остеогенеза на механические свойства пористого титана при сжатии // Теоретическая и прикладная механика, 2013. Т. 28. С. 127-129.
10. Michailidis N., Stergioudi F., Omar H., Tsiapas D. N. Investigation of the mechanical behaviour of open-cell Ni foams by experimental and FEM procedures // Advanced Engineering Materials, 2009. Vol. 10, № 12. P. 1122-1126.



Biomechanical Assessment of the Bone Ingrowth Effect During Cementless Endoprosthesis Osteointegration

A. V. Nikitsin

Belarusian State University, Republic of Belarus, 220030, Minsk, Nezavisimosti avenue, 4, andy.nik@tut.by

Finite element model of porous titanium inserts for cementless endoprosthesis was reconstructed using X-ray tomography. The stress distribution is calculated for a model with open-cell foam and composite bone / titanium. The results explain the mechanism of the porous structure destruction and positive influence of the osteointegration effect on the strength properties. Numerical calculations are confirmed by experimental data of the porous samples during compression testing. It is shown that changes in mechanical properties of porous titanium due to process of bone ingrowth is a topical area for biomechanical research.

Key words: FEA, stress-strain, osteointegration effect, X-ray tomography.

References

1. Shen H., Brinson L. C. Finite element modelling of porous titanium. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, pp. 320–335.
2. Huanlong Li., Oppenheimer S. M., Stupp S. I., Dunand D. C., Brinson L. C. Effects of Pore Morphology and Bone Ingrowth on Mechanical Properties of Microporous Titanium as an Orthopaedic Implant Material. *Materials Transactions*, 2004, vol. 45, pp. 1124–1131.
3. Maslov A. P., Ruckij A. V., Nikitsin A. V. Perelomy bedrennogo komponenta jendoprotezov tazobedrennogo sustava sistemy SLPS [Fractures of the femoral component of the endoprosthesis hip joint system of SLPS]. *Medicina*, 2013, vol. 80, pp. 7–13. (in Russian)
4. Nikitsin A. V., Mikhasev G. I., Maslov A. P. Konechno-jelementnyj analiz vlijaniya oblasti vrastaniya na stabil'nost' jendoproteza tazobedrennogo sustava [Finite element analysis of the influence of the field ingrown on the stability of the hip joint endoprosthesis]. *Mehanika mashin mehanizmov i materialov*, 2012, vol. 18, pp. 86–90. (in Russian).
5. Esen Z., Tarhan Bor E., Bor E. Characterization of loose powder sintered porous titanium and Ti6Al4V alloy. *Turkish J.Eng.Env.Science*, 2009, vol. 33, pp. 207–219.
6. Thelen S., Barthelat F., Brinson L.C. Mechanics considerations for micro-porous titanium as an orthopedic implant material. *J. Biomed. Mater. Res. A*, 2004, vol. 69, pp. 601–610.
7. Vasconcellos L., Leite D., Nascimento F., Graca M., Carvalho Y., Cairo C. . Porous titanium for biomedical applications: An experimental study on rabbits. *Med. Oral. patol. Oral. Cir. Bucal.*, 2010, vol. 2, pp. 407–412.
8. Michailidis N., Stergioudi F., Omar H., Papadopoulos D., Tsipas D. N. Experimental and FEM analysis of the material response of porous metals imposed to mechanical loading. *J. Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, 2011, vol. 382, pp. 124–131.
9. Nikitsin A. V., Shil'ko S. V. Ocenka vlijaniya osteogeneza na mehanicheskie svoystva poristogo titana pri szhatii [Estimation of influence of osteogenesis on mechanical properties porous titanium at compression]. *Teoreticheskaja i prikladnaja mehanika*, 2013, vol. 28, pp. 127–129. (in Russian).
10. Michailidis N., Stergioudi F., Omar H., Tsipas D. N. Investigation of the mechanical behaviour of open-cell Ni foams by experimental and FEM procedures. *Advanced Engineering Materials*, 2009, vol. 10, no. 12, pp. 1122–1126.

УДК 539.374

РОТАЦИОННАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ОБЪЕКТИВНЫЕ ФОРМЫ ЛАГРАНЖИАНОВ НЕЛИНЕЙНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА ВТОРОГО ТИПА

Ю. Н. Радаев¹, В. А. Ковалев²

¹Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

²Доктор физико-математических наук, зав. кафедрой прикладной математики и аналитической поддержки принятия решений, Московский городской университет управления Правительства Москвы, kovalev.kam@gmail.com

В работе излагаются новые результаты в области распространения лагранжева полевого формализма на нелинейные связанные микрополярные термоупругие среды. Рассматривается теоретико-полевая модель микрополярного (MP) термоупругого (TE) континуума второго типа (GNII). Приводятся формулировка принципа наименьшего термоупругого действия и вывод дифференциальных уравнений связанного микрополярного термоупругого поля в форме Эйлера–Лагранжа (EL). Обсуждаются вопросы, касающиеся инвариантности интегрального функционала действия относительно сдвигов эйлера-



вых полевых переменных, времени и температурного смещения, а также трехмерных вращений эйлеровой координатной системы. Исследуется проблема ротационной инвариантности «естественной» плотности микрополярного термоупругого действия. Получены функциональные условия ротационной инвариантности действия, независимые ротационно инвариантные аргументы и удовлетворяющая принципу объективности форма свободной энергии Гельмгольца.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость второго типа, поле, экстраполе, действие, лагранжиан, d -вектор, инвариантность, поворот, принцип объективности, деформация, экстрадеформация.

1. ДЕФОРМАЦИЯ И ЭКСТРАДЕФОРМАЦИЯ МИКРОПОЛЯРНОГО КONTИНУУМА. ПОЛЯРНЫЕ d -ВЕКТОРЫ

В математических теориях континуума с полярной микроструктурой (см., например, [1, 2]) предполагается, что произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

положения \mathbf{X} отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место \mathbf{x} пространства, сопровождается экстрадеформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некопланарных d -векторов \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\mathbf{X}, t). \quad (2)$$

Система трех пространственных полярных d -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, задает микрополярную структуру континуума. Эта система в самом общем случае предполагается «мягкой».

Переменные \mathbf{X} и \mathbf{x} (и позиционные координаты X^α , x^j) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [3, 4]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная метрика $g_{\alpha\beta}$ и пространственная метрика g_{ij} . Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и, в отличие от $g_{\alpha\beta}$ и g_{ij} , определяется деформацией (1). Как ясно из предложенных обозначений, эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы.

Деформация и экстрадеформация в координатах X^α , x^j имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \quad (3)$$

$$\mathbf{d}_a^j = \mathbf{d}_a^j(X^\alpha, t). \quad (4)$$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент «конечной» деформации (градиент места, position gradient), или «дисторсию» [5, 6]:

$$\partial_\alpha x^j \quad (j, \alpha = 1, 2, 3) \quad (5)$$

и соответствующий якобиан

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \quad (6)$$

Конвективная метрика вычисляется с помощью градиента деформации согласно формуле

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \quad (7)$$

и в силу своего определения ротационно инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы.

Заметим, что в рамках теоретико-полевого подхода лагранжевы переменные X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), дополненные четвертой временной координатой, выступают как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные x^j ($j = 1, 2, 3$) представляют собой физические поля. То же самое относится к «мягкой» системе полярных d -векторов \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$). Но они классифицируются в дальнейшем как



экстраполевые (сверхполевых переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент d_a^j ($\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$).

В качестве основной термической полевой переменной, следуя теориям термоупругости второго типа, примем температурное смещение ϑ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ . Переменной состояния считается также референциальный градиент температурного смещения (так называемая «быстрая» переменная термодинамического состояния).

Таким образом, определяющие полевые переменные микрополярного термоупругого континуума второго типа, помимо x^j ($j = 1, 2, 3$) и ϑ , включают:

- градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ ($j, \alpha = 1, 2, 3$);
- три пространственных d -вектора «нежесткой» микрополярной структуры континуума d_a^j ($\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$);
- референциальные градиенты d -векторов $\partial_\alpha d_a^j$ ($\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3$);
- референциальный градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$ ($\alpha = 1, 2, 3$);
- скорость температурного смещения $\partial_4 \vartheta$.

2. СВЯЗАННЫЙ МИКРОПОЛЯРНЫЙ ТЕРМОУПРУГИЙ КОНТИНУУМ ВТОРОГО ТИПА. ДЕЙСТВИЕ. ЛАГРАНЖИАНЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Теоретико-полевая модель подразумевает задание интегрального функционала действия и соответствующей плотности действия. В дальнейшем мы будем использовать «естественные» плотности (см., например, [7]), называемые еще «квазиплотностями». «Естественная» плотность действия (лагранжиан) микрополярного термоупругого континуума может быть, как это принято в теориях термоупругости второго типа [7], представлена в виде функции с явными вхождениями определяющих переменных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (8)$$

В теориях континуумов лагранжиан имеет несколько более специальную форму, чем (8), разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathfrak{J}}_a^i \dot{d}_b^j - \psi(X^\beta, x^j, d_a^j, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta), \quad (9)$$

где точкой (вместо оператора ∂_4) обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α ($\alpha = 1, 2, 3$); ρ_R — референциальная плотность; $\overset{ab}{\mathfrak{J}}$ — тензор инерции микроэлемента. Явная зависимость лагранжиана \mathcal{L} от времени исключается нами а priori.

Вариационный интеграл термоупругого действия с «естественной» плотностью действия (8) будет иметь следующий вид:

$$\text{Im} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta) d^4 X \quad (\alpha = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Соответствующие вариационному интегралу (10) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля могут быть представлены в стандартной форме Эйлера–Лагранжа (EL):

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{a}{M}_j^\alpha + \overset{a}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь принимаются следующие обозначения для полевых частных производных, которые вводятся с целью дать по возможности более компактную запись дифференциальных уравнений поля (11):

$$P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{a}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_a^j},$$



$$\begin{aligned}
 S_{\cdot j}^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} x^j)}, & \mathcal{M}_{\cdot j}^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} d^j)}, \\
 \mathcal{A}_j^{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j}, & s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, & j_{\mathbb{R}}^{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \vartheta)}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Поясним смысл символов, использованных в данных выше формулах (12) с целью сокращенного обозначения полевых частных производных:

P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы;

\mathcal{Q}_j^{α} — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным степеням свободы;

$S_{\cdot j}^{\alpha}$ — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа;

$\mathcal{M}_{\cdot j}^{\alpha}$ — «первые» тензоры экстранапряжений;

\mathcal{A}_j^{α} — обобщенные силы–моменты, сопряженные экстраполевым переменным d^j ($\alpha = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$);

s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии);

$j_{\mathbb{R}}^{\alpha}$ — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

3. РОТАЦИОННАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ И ПЛОТНОСТИ ДЕЙСТВИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВОРОТОВ ЭЙЛЕРОВОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЫ

«Естественная» плотность действия в форме (8) пока еще не позволяет вести речь о ее объективности в том смысле, что в разных эйлеровых координатных системах эта форма будет сохраняться. Ясно, что вывод объективных форм лагранжиана представляет собой первый и весьма важный шаг на пути построения объективных форм определяющих уравнений, первоначально задаваемых уравнениями (12).

Для изображения состояний и процессов в механике континуума используется трехмерное плоское пространство–время и независимое время. Поскольку выбор эйлеровых координат произволен и не должен никак сказываться на физических следствиях дифференциальных уравнений поля, то действие и лагранжиан обязаны обладать определенными свойствами инвариантности по отношению к выбору эйлеровой координатной системы и начала отсчета времени, т. е. по отношению к так называемым «движениям» эйлерова пространства. Существуют два принципиально различных вида «движений»: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в эйлеровом пространстве. Спинорные «движения» определяются заданием тензорных функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три (тензоры поворота).

Вводя в пространстве прямоугольные декартовы координаты x^j , заметим, что одно из таких свойств инвариантности проявляется в форме трансляционной инвариантности интегрального функционала действия (10) относительно произвольных сдвигов переменных x^j и времени t . Другое, как хорошо известно, — ротационной инвариантности относительно произвольных поворотов эйлеровой координатной системы x^j .

Инвариантность действия относительно поворотов эйлерова координатного репера является проявлением изотропии эйлерова координатного пространства, т. е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Инвариантность действия относительно преобразований лагранжевых переменных связана с симметрией физических свойств континуума. Так, трансляционная инвариантность действия (10) относительно произвольных сдвигов координат X^{α} означает, что континуум однороден. Ротационная инвариантность относительно произвольных поворотов лагранжевой координатной системы указывает на изотропность континуума.

Таким образом, действие, в частности, должно быть инвариантно относительно преобразований сдвигов и поворотов координатной системы наблюдателя (принцип объективности) и сдвигов времени:

$$\tilde{x}^i = R_j^i x^j + C^i, \quad \tilde{d}_a^i = R_j^i d_a^j, \quad \tilde{t} = t + C.
 \tag{13}$$



В приведенных выше формулах преобразования C^i , C есть произвольные постоянные; R_j^i — произвольная постоянная собственно ортогональная матрица.

Действие (10) и плотность действия \mathcal{L} инвариантны относительно преобразований (13) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0, \quad \partial_4^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{K}_{[ij]} = 0, \quad (14)$$

где тензор \mathcal{K}_{ij} определяется согласно

$$\mathcal{K}_{ij} = x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + d_i^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} + \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} + \dot{d}_i^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_a^j} + (\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)} + (\partial_\alpha d_i^a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_a^j)} \quad (15)$$

и в (14) по индексам, заключенным в квадратные скобки, выполняется антисимметризация.

Заметим, что в силу (14) и в обозначениях (12) тензор \mathcal{K}_{ij} сводится к

$$\mathcal{K}_{ij} = d_i^a \mathcal{A}_j + \dot{x}_i P_j + \dot{d}_i^a \mathcal{Q}_j - (\partial_\alpha x_i) S_{.j}^\alpha - (\partial_\alpha d_i^a) \mathcal{M}_{.j}^\alpha. \quad (16)$$

Ясно, что в том случае, когда плотность действия не зависит явно от директоров d_a^j , их производных по времени \dot{d}_a^j и референциальных градиентов $\partial_\alpha d_a^j$, последнее в группе условий (14) позволяет сразу же установить симметрию тензора напряжений Коши:

$$T_{.k}^l = -J^{-1} (\partial_\beta x^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta x^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Инвариантность действия относительно трансляций эйлеровых координат, известная как принцип галилеевой инвариантности действия (принцип относительности Галилея), мы дополним требованием инвариантности действия относительно сдвигов температурного смещения (C' — произвольная постоянная):

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta + C', \quad (18)$$

что обеспечивается выполнением следующего условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0. \quad (19)$$

Поскольку кинетическая составляющая плотности действия инвариантна относительно преобразований (13), (18), то плотность свободной энергии Гельмгольца ($\alpha, \beta=1,2,3$)

$$\psi = \psi(X^\beta, d_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta),$$

в свою очередь, обязана выдерживать преобразования вида (13), (18), т. е.

$$\psi(X^\beta, R_j^i d_a^j, \dot{\vartheta}, R_j^i \partial_\alpha x^j, R_j^i \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta) = \psi(X^\beta, d_a^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (20)$$

Последнее обстоятельство означает, что свободная энергия Гельмгольца является некоторой функцией от переменных

$$X^\beta, \quad \dot{\vartheta}, \quad \partial_\alpha \vartheta, \quad (21)$$

в запись которых не входят эйлеровы индексы, а также следующих инвариантных относительно вращений эйлеровой координатной системы аргументов:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{ij} (\partial_\alpha x^i) (\partial_\beta x^j), \\ \mathcal{R}_\alpha^a &= g_{ij} (\partial_\alpha x^i) d_a^j, \\ \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij} (\partial_\alpha x^i) (\partial_\beta d_a^j). \end{aligned} \quad (22)$$



т. е. относительный вектор экстрадеформации становится равным нулю:

$$\gamma_{\beta}^{\alpha} = 0.$$

Таким образом, окончательно ротационно инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(\epsilon_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{F}_{\alpha\beta}, \vartheta, \partial_{\alpha}\vartheta) \quad (\alpha = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

Библиографический список

1. Cosserat E. et F. *Théorie des corps déformables*. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
2. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964. Vol. 17, № 5. P. 85–112.
3. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М. : Физматгиз, 1962. 284 с.
4. Ильюшин А. А. Механика сплошных сред. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
5. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М. : Мир, 1965. 456 с.
6. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М. : Наука, 1983. 448 с.
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

Rotational Invariance of Non-Linear Lagrangians of Type-II Micropolar Thermoelastic Continuum

Y. N. Radayev¹, V. A. Kovalev²

¹Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia, 119526, Moscow, pr. Vernadskogo, 101, block 1, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

²Moscow City Government University of Management Moscow, Russia, 107045, Moscow, Sretenka st., 28, kovalev.kam@gmail.com

The paper contains new results related to extension of the field theoretical approach and its formalism to non-linear coupled micropolar thermoelastic media. A mathematical model of micropolar (MP) type-II (GNII) thermoelastic (TE) continuum is considered. A formulation of the least thermoelastic action principle is discussed. Partial differential equations subsequent to the least action principle are derived. The translational symmetries of non-linear Lagrangians are adopted. Those include an additional symmetry: translations of the thermal displacement. The rotational invariance of the action and corresponding Lagrangian is then studied. For micropolar type-II thermoelastic Lagrangians following the usual procedure independent rotationally invariant functional arguments are obtained. Objective forms of the Lagrangians satisfying the frame indifference principle are given.

Key words: type-II micropolar thermoelasticity, field, extra field, action, Lagrangian, d -vector, invariance, rotation, frame indifference principle, deformation, extra deformation.

References

1. Cosserat E. et F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909, 226 p.
2. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964, vol. 17, no. 5, pp. 85–112.
3. Sedov L. I. *Vvedenie v mekhaniku sploshnykh sred* [Introduction to Mechanics of Continuous Media]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 284 p. (in Russian).
4. Illyushin A. A. *Mekhanika sploshnykh sred* [Mechanics of Continuous Media]. Moscow, Moscow Univ. Press., 1978, 287 p. (in Russian).
5. Green A. E., Adkins J. E. *Bol'shie uprugie deformatsii i nelineinaya mekhanika sploshnoi sredy* [Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir, 1965, 456 p. (in Russian).
6. Berdichevskii V. L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational Principles of Mechanics of Continua]. Moscow, Nauka, 1983, 448 p. (in Russian).
7. Kovalev V. A., Radayev Y. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press., 2010, 328 p. (in Russian).



УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОСТОЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРАЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В. А. Халова¹, Ю. В. Шевцова²

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, HalovaVA@info.sgu.ru

²Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, yv-shevtsova@mail.ru

Целью данной работы является обобщение результатов, полученных для случаев круговой цилиндрической оболочки и оболочки со скошенным краем. Рассматривается нестационарный волновой процесс в цилиндрической оболочке с краем произвольной формы. На срединной поверхности оболочки вводится полугеодезическая система координат. Изучается динамический простой краевой эффект. Для нахождения решения применяется преобразование Лапласа, обращение которого осуществляется методом перевала.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, волновой процесс, преобразование Лапласа.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку толщины $2h$, выполненную из изотропного упругого материала. Положение точек зададим векторным равенством:

$$\bar{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \bar{n},$$

где (α_1, α_2) — криволинейные координаты на срединной поверхности, α_3 — расстояние по нормали, \bar{n} — единичный вектор нормали срединной поверхности. При рассмотрении круговых цилиндрических оболочек [1, 2] в качестве криволинейных координат (α_1, α_2) принято выбирать такую ортогональную систему, в которой край оболочки проходит вдоль линии $\alpha_1 = 0$, а процесс распространения волн рассматривается вдоль образующих цилиндрической поверхности, то есть вдоль линий $\alpha_2 = \text{const}$. Обычно в качестве координатных линий в этом случае выбираются линии кривизны. В статье [3] было предложено в случае оболочки произвольного очертания вводить на срединной поверхности полугеодезическую систему координат и рассматривать распространение волн вдоль геодезических. Данный подход был реализован в [4] для цилиндрических оболочек со скошенным краем. В этом случае край срединной поверхности оболочки представлял собой сечение кругового цилиндра некоторой плоскостью. В работе [5] были изложены основные геометрические вопросы, возникающие при учете формы края пластины и оболочки. В данной работе укажем метод построения полугеодезической системы криволинейных координат в случае круговой цилиндрической оболочки с торцом произвольной формы. А именно будем считать, что α_1 -линии — геодезические, ортогональные краю $\alpha_1 = 0$, причем параметр α_1 определяет длину геодезической. Будем изучать процесс распространения волн вдоль геодезических, причем в промежутки времени до момента отражения от противоположного торца, поэтому оболочка будет считаться полубесконечной. Рассмотрим динамический простой краевой эффект и укажем метод нахождения решения, учитывающего форму края оболочки.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Пусть положение точек срединной поверхности оболочки в пространстве определяется векторным уравнением:

$$\bar{r} = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2),$$

где α_1, α_2 — параметры координатных линий полугеодезической системы координат. При построении данной ортогональной криволинейной системы координат воспользуемся следующим фактом: любая кривая на поверхности, если ограничиться достаточно малым участком поверхности около какой-нибудь обыкновенной точки, может быть включена в семейство геодезически параллельных ей



кривых, причем существует такая система координат, в которой эти кривые служат координатными линиями.

Пусть уравнение цилиндрической поверхности записывается в виде

$$\bar{r} = \varphi(\alpha)\bar{i} + \psi(\alpha)\bar{j} + \beta\bar{k}. \quad (1)$$

В случае кругового цилиндра имеем:

$$\varphi(\alpha) = R \cos \frac{\alpha}{R}, \quad \psi(\alpha) = R \sin \frac{\alpha}{R},$$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi R$, $-\infty < \beta < +\infty$, R — радиус направляющей окружности.

Край срединной поверхности оболочки в дальнейшем будет играть роль базы полугеодезической системы координат. Пусть его уравнение задано следующим образом:

$$\bar{r} = \varphi(\alpha)\bar{i} + \psi(\alpha)\bar{j} + \chi(\alpha)\bar{k},$$

или в криволинейных координатах

$$\beta = \chi(\alpha).$$

Наложим ограничения на вид рассматриваемой кривой. Будем считать, что это замкнутая регулярная пространственная простая кривая. Потребуем, чтобы кручение кривой было отлично от нуля:

$$\chi' + R^2 \chi''' \neq 0.$$

Геодезическими линиями рассмотренной поверхности являются образующие, винтовые линии и нормальные направляющие. Векторное уравнение двухпараметрического семейства винтовых линий для цилиндрической поверхности (1) имеет вид

$$\bar{r} = \varphi(\alpha)\bar{i} + \psi(\alpha)\bar{j} + (d_1\alpha + d_2)\bar{k}. \quad (2)$$

Учтем, что через каждую точку поверхности в данном направлении можно провести геодезическую линию и притом единственную.

Зафиксируем значение параметра $\alpha = \alpha_2$. При каждом значении α_2 запишем уравнение геодезической в ортогональном направлении, т. е. определим параметры d_1 , d_2 . Они находятся из следующих условий: 1) геодезическая в данной точке пересекает базу, 2) в точке пересечения касательные векторы рассматриваемых кривых ортогональны. Разрешив полученную систему алгебраических уравнений, получим:

$$d_1 = -\frac{1}{\chi'(\alpha_2)}, \quad d_2 = \chi(\alpha_2) + \frac{1}{\chi'(\alpha_2)}.$$

Следовательно, геодезическая в ортогональном направлении задается уравнением

$$\beta = \chi(\alpha_2) + \frac{\alpha_2 - \alpha}{\chi'(\alpha_2)}.$$

Заметим, что в случае $\chi'(\alpha_2) = 0$ геодезическими являются образующие цилиндрической поверхности, которые не могут быть заданы уравнениями (2).

Отложим на построенной геодезической от заданной точки дугу, длину которой обозначим через α_1 . Вычислим длину дуги α_1 :

$$\alpha_1 = \pm \int_{\alpha_2}^{\alpha} \sqrt{1 + d_1^2} \, d\alpha'.$$

Поэтому

$$\alpha = -\frac{\alpha_1 \chi'(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)}} + \alpha_2, \quad \beta = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)}} + \chi(\alpha_2).$$



Таким образом, мы приходим в некоторую точку на поверхности, положение которой будет определяться значениями α_1, α_2 . Тогда уравнение поверхности в построенной полугеодезической системе координат запишется в виде

$$\bar{r} = \varphi \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1 \chi'(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)}} \right) \bar{i} + \psi \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1 \chi'(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)}} \right) \bar{j} + \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)}} + \chi(\alpha_2) \right) \bar{k}.$$

В силу выбора системы координат первая квадратичная форма срединной поверхности будет иметь вид $ds^2 = d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2$, где

$$A_2 = \sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)} - \alpha_1 \frac{\chi''(\alpha_2)}{1 + \chi'^2(\alpha_2)}.$$

Определяя нормальные кривизны срединной поверхности в направлении координатных линий, получим, в частности

$$\frac{1}{R_{22}} = -\frac{1}{1 + \chi'^2(\alpha_2)}.$$

Геодезическая кривизна α_2 -линии будет вычисляться следующим образом:

$$k = \frac{\chi''(\alpha_2)}{\alpha_1 \chi'' - (1 + \chi'^2)^{3/2}}.$$

2. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОСТОЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ

Рассмотрим ударное воздействие, для которого граничные условия на торце в терминах трехмерной теории упругости задаются в виде

$$\sigma_{11}(0, \alpha_2, \alpha_3, t) = \varphi(\alpha_2, \alpha_3)H(t), \quad \sigma_{1i}(0, \alpha_2, \alpha_3, t) = 0 \quad (i = 2, 3). \quad (3)$$

Здесь σ_{ij} — напряжения, t — время, $H(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(\alpha_2, \alpha_3)$ — амплитуда ударной нагрузки, являющаяся нечетной функцией по α_3 . Рассмотрим случай однородных начальных условий.

Для описания движения оболочки применим теорию Кирхгофа–Лява. В силу сделанных ограничений на вид краевой нагрузки воспользуемся уравнениями динамического простого краевого эффекта. Произведем растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$\alpha_1 = R\eta^{1/2}\xi_1, \quad t = Rc_2^{-1}t_1,$$

где $\eta = \frac{h}{R}$ — малый параметр, $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$ — скорость волны сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность.

Разрешающее уравнение простого краевого эффекта в безразмерных переменных $t_1, x_i = \alpha_i/R, r_{22} = R_{22}/R$, относительно прогиба w записывается следующим образом [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2Rk \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{3}{2}(1-\nu)\eta^{-2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2(1+\nu) \frac{w}{r_{22}^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Применим к уравнению (4) преобразование Лапласа по времени. Учитывая однородные начальные условия, запишем уравнение (4) в изображениях (s — параметр преобразования Лапласа)

$$\frac{\partial^4 w^L}{\partial x_1^4} + 2Rk \frac{\partial^3 w^L}{\partial x_1^3} + \frac{3}{2}(1-\nu)\eta^{-2}s^2 \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{r_{22}^2} \right) w^L = 0. \quad (5)$$

Будем искать решение уравнения (5) в следующем виде:

$$w^L = W \exp(-\eta^{1/2}\Psi).$$

Подставляя в (5), получим два дифференциальных уравнения относительно нулевого приближения искомых W и Ψ . Учитывая, что радиус кривизны R_{22} не зависит от α_1 , получим в первом приближении выражение для прогиба

$$w^L \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}} \sum_{m=1}^2 C_m(x_2, s) \exp((1 + (-1)^m i)f(x_1, x_2, s)), \quad (6)$$



$$f = -\frac{\sqrt{s}}{\eta^{1/2}} \mu x_1 \sqrt[4]{1 + \frac{2(1+\nu)}{r_{22}^2 s^2}}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3(1-\nu)}{2} \right)^{1/4}.$$

Здесь берутся главные значения радикалов на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси. Выбор ветвей степенной функции в (6) обусловлен требованием экспоненциального затухания решения вдоль геодезической в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} s > 0$).

Входящие в (6) функции $C_m(x_2, s)$ необходимо определить из двумерных граничных условий, являющихся следствием (3):

$$G_1^L(0, x_2, s) = -h^2 s^{-1} \int_{-1}^1 \varphi(x_2, \zeta) \zeta d\zeta, \quad N_1^L(0, x_2, s) = 0.$$

Здесь G_1^L — изображение изгибающего момента, N_1^L — изображение перерезывающей силы. Учитывая выражения момента и силы через прогиб и переходя к изображениям, получим систему линейных уравнений для определения искомых функций. Решения данной системы в главном имеют вид

$$C_m(x_2, s) = C(x_2, s)(1 - (-1)^m i),$$

где

$$C(x_2, s) = \sqrt{A_2(0, x_2)} \frac{3(1-\nu^2)R}{8E\mu^2 s^2 (1 + 2(1+\nu)r_{22}^{-2} s^{-2})^{1/2}} \int_{-1}^1 \varphi(x_2, \zeta) \zeta d\zeta.$$

Получим выражение для изображения изгибающего момента

$$G_1^L = -h^2 \frac{1}{2s} \int_{-1}^1 \varphi(x_2, \zeta) \zeta d\zeta \sqrt{\frac{A_2(0, x_2)}{A_2(x_1, x_2)}} ((1-i) \exp((1-i)f) + (1+i) \exp((1+i)f)). \quad (7)$$

Задача сводится к нахождению изгибающего момента по его изображению.

3. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ПЕРЕВАЛА

В некоторый начальный промежуток времени обращение (7) может быть выполнено методом разложения по отрицательным степеням корня из параметра преобразования Лапласа [1, 3]. Влияние формы края в решении, приведенном в [4], определяется наличием множителей, содержащих коэффициенты первой квадратичной формы и безразмерный радиус кривизны α_2 -линии. Рассмотрим случай обращения при больших значениях времени. Заметим, что при $t_1 \rightarrow \infty$ решение для G_1 стремится к решению, соответствующему статическому случаю

$$G_{1,st} = -h^2 \int_{-1}^1 \varphi(x_2, \zeta) \zeta d\zeta \sqrt{\frac{A_2(0, x_2)}{A_2(x_1, x_2)}} \exp(-y|\omega|^{1/2}) (\cos y|\omega|^{1/2} + \sin y|\omega|^{1/2}),$$

$$\omega^2 = \frac{2(1+\nu)}{r_{22}^2}, \quad y = \eta^{-1/2} \mu x_1.$$

Будем искать асимптотику интеграла Меллина:

$$G_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} G_1^L(s) e^{st_1} ds \quad (8)$$

методом перевала. Данный метод включает в себя два этапа: деформацию контура интегрирования в (8) в контур, наиболее удобный для получения асимптотических оценок, и вычисление асимптотики интеграла по новому контуру. Обоснование возможности такой деформации контура интегрирования для интегралов вида (8) описано в ряде работ, в том числе в [1]. Остановимся на получении асимптотики.

Воспользуемся теоремой о вкладе точки перевала. В качестве большого параметра выберем t_1 .



Введем в рассмотрение функцию $S(s) = (s - (1 \mp i)(\omega^2 + s^2)^{1/4} \mu \sqrt{x_1} \eta^{-1/2} t_1^{-1}) = S_1 + S_2$.

Функция $S(s)$ имеет мнимые седловые точки. Обозначим их $s_n = \mp i \Omega_n$. Эти точки являются корнями уравнения

$$S'(s_n) = 0.$$

Вычислим производную функции $S(s)$:

$$S'(s) = 1 - (1 \mp i) \mu \frac{x_1}{\eta^{1/2} t_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{s} \left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1 \right)^{3/4}} \right). \quad (9)$$

Для \sqrt{s} берется выделенная в решении главная ветвь. Поэтому $\sqrt{\mp i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp i)$. Из (9) получим уравнение для нахождения точек перевала

$$\frac{\Omega_n}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{3/4}} = \frac{\sqrt{2}}{\mu} \frac{\eta^{1/2} t_1}{x_1}.$$

Точки $s_n = \mp i \Omega_n$ являются точками перевала первого и второго слагаемого в (7) соответственно. Поскольку оба этих слагаемых комплексно сопряжены, то вклад точек перевала обоих слагаемых в решение равен удвоенной действительной части вклада точки перевала одного слагаемого. Имеем в силу выбора ветви корня в методе перевала:

$$S_1''(-i\Omega_n) = i\mu \frac{x_1}{2^{3/2} \eta^{1/2} t_1} \frac{2\omega^2 + \Omega_n^2}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{7/4}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{S_1''(-i\Omega_n)}} = \frac{1}{1-i} \frac{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{7/8}}{(\Omega_n^2 + 2\omega^2)^{1/2}} \frac{2^{5/4} \eta^{1/4} t_1^{1/2}}{\mu^{1/2} x_1^{1/2}}.$$

Вычислим значение $S_1(-i\Omega_n)$:

$$S_1(-i\Omega_n) = -i\Omega_n - (1-i)^2 \frac{\mu x_1}{\sqrt{2} \eta^{1/2} t_1} (\Omega_n^2 - \omega^2).$$

Тогда

$$G_{1,s} = -h^2 \int_{-1}^1 \varphi(x_2, \zeta) \zeta d\zeta \sqrt{\frac{A_2(0, x_2)}{A_2(x_1, x_2)}} \frac{2^{3/4} \eta^{1/4}}{\sqrt{\pi} \mu^{1/2} x_1^{1/2}} \frac{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{7/8}}{\Omega_n (\Omega_n^2 + 2\omega^2)^{1/2}} \cos T_n, \quad (10)$$

где

$$T_n = \Omega_n t_1 - \sqrt{2} \mu (\Omega_n^2 - \omega^2)^{1/4} \frac{x_1}{\eta^{1/2}}.$$

При $t_1 > 1$ решение строится в виде суперпозиции двух решений $G_1 = G_{1,st} + G_{1,s}$.

Как видно из (10), найденное решение учитывает форму торца оболочки за счет присутствия в нем множителя, связанного с геометрией края. Данное решение согласуется с решениями, полученными для цилиндрической оболочки, отнесенной к линиям кривизны [1].

Библиографический список

1. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
2. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. Academic Press, 1998.
3. Каплунов Ю. Д. Распространение нестационарных упругих волн в оболочке общего очертания // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91.
4. Шевцова Ю. В. Динамический простой краевой эффект в скошенной круговой цилиндрической оболочке // Механика деформируемых сред : сб. тр. Саратов, 1997. Вып. 13. С. 83–87.
5. Шевцова Ю. В., Парфенова Я. А. Геометрические аспекты задачи о распространении нестационарных волн в пластинах и цилиндрических оболочках с краем произвольной формы // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4, ч. 5. С. 2612–2615.



Dynamical Simple Edge Effect in the Cylindrical Shell with the Edge of Arbitrary Form

V. A. Khalova, Y. V. Shevtsova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, HalovaVA@info.sgu.ru, yv-shevtsova@mail.ru

The purpose of the article is to generalize the results derived in the cases of a circular shell and of a shell with a cut edge. Non-stationary wave process in a cylindrical shell with an arbitrary edge is considered. Half-geodesic frame is introduced on the middle surface of the shell and dynamical simple edge effect is studied. To find the solution Laplace transform is used while the inverse transform is realized via saddle-point method.

Key words: cylindrical shell, wave process, Laplace transform.

References

1. Kossovich L. Iu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Nonstationary problems of the theory of elastic thin shells]. Saratov, Izd-vo Sarat. Univ., 1986, 176 p. (in Russian).
2. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. Academic Press, 1998.
3. Kaplunov J. D. Rasprostranenie nestatsionarnykh uprugikh voln v obolochke obshchego ochertaniia. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1993, vol. 57, iss. 1, pp. 83–91 (in Russian).
4. Shevtsova Yu. V. Dinamicheskii prostoi kraevoi effekt v skoshennoi krugovoi tsilindricheskoi obolochke [Dynamic simple edge effect in the beveled circular cylindrical shell]. *Mekhanika deformiruemyykh sred : sb. tr.* [Mechanics of deformable media], Saratov, 1997, iss. 13, pp. 83–87 (in Russian).
5. Shevtsova Yu. V., Parfenova Ya. A. Geometric aspects of the problem of the propagation of nonstationary waves in plates and cylindrical shells with edge of an arbitrary. *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N. I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4, pt. 5, pp. 2612–2615 (in Russian).



ИНФОРМАТИКА

УДК 629.78

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Д. К. Андрейченко¹, К. П. Андрейченко², В. В. Кононов³

¹Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kр_andreichenko@renet.ru

²Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., kр_andreichenko@renet.ru

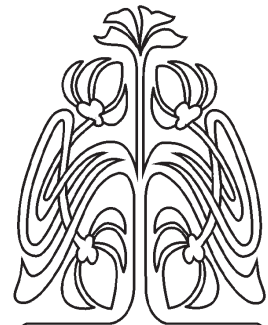
³Ассистент кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, valentin.kononov@gmail.com

На примере математического моделирования автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня развит параллельный алгоритм параметрического синтеза, позволяющий уменьшить время реагирования и ошибки стабилизации управляемых комбинированных динамических систем, некоторые конструктивные параметры которых непрерывно изменяются в фиксированном диапазоне.

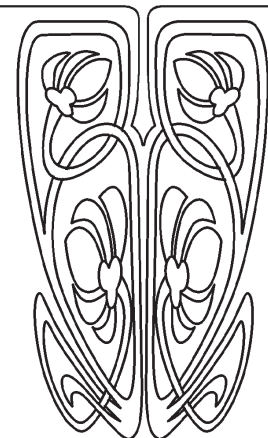
Ключевые слова: управляемые комбинированные динамические системы, математическое моделирование, параметрический синтез.

ВВЕДЕНИЕ

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой системы, связанные посредством граничных условий и условий связи обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях и служат математическими моделями ряда современных технических систем, например, автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня [1]. КДС с кусочно-непрерывной входной вектор-функцией $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{N_x}(t))^T$ и непрерывной выходной вектор-функцией $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_{N_y}(t))^T$, где $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y}$ рассмотрены в [2], и там же сформулированы и доказаны основные теоремы об устойчивости линейных и линеаризуемых КДС. Различные варианты параметрического синтеза, т. е. выбора значений параметров обратных связей управляемых КДС, обеспечивающих должное качество переходных процессов, рассмотрены в [3–5]. Выполнение параметрического синтеза требует значительных затрат машинного времени, и, следовательно, представляет интерес разработка параллельных алгоритмов параметрического синтеза. В работе [1] построены области устойчивости автономной системы стабилизации реактивного снаряда залпового огня. Однако при параметрическом синтезе системы стабилизации требуется обеспечить устойчивость и малое время регулирования для некоторого диапазона изменения угловой скорости вращения снаряда. В настоя-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





щей работе на примере системы стабилизации реактивного снаряда залпового огня с использованием стандартных средств Microsoft для параллельных вычислений на уровне задач [6], развит многопоточный алгоритм параметрического синтеза, позволяющий уменьшить время реагирования и ошибки стабилизации управляемых комбинированных динамических систем, некоторые конструктивные параметры которых изменяются в фиксированном диапазоне.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ КДС

После линеаризации и выполнения интегрального преобразования Лапласа по времени t ($f(t) \rightarrow f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$) динамическая модель КДС представляется в виде матрицы передаточных функций $\Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ с элементами в форме квазирациональных дробей [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(\lambda) &= \Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), & \Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) &= [\Phi_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})], \\ \Phi_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) &= \frac{Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})}{D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})}, & k &= 1, 2, \dots, N_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_x, \end{aligned} \quad (1)$$

где $D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ — характеристический квазимногочлен, $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ — возмущающие квазимногочлены, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_p})^T \in \mathbb{R}^{N_p}$ — параметры обратных связей, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{N_s})^T \in \Omega_s \subset \mathbb{R}^{N_s}$ — конструктивные параметры, от которых зависят передаточные функции линеаризованной системы. Учет малой, но конечной диссипации энергии в математических моделях элементов КДС с распределенными по пространству параметрами приводит к тому, что $D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ и $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ аналитичны по λ при $\text{Re } \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$. Под обобщенной степенью характеристического квазимногочлена понимается такое $n \in \mathbb{R}$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = C_a(\mathbf{p}, \mathbf{s}), \quad 0 < |C_a(\mathbf{p}, \mathbf{s})| < \infty, \quad \text{Re } \lambda < -\infty. \quad (2)$$

Пусть $\Omega_p^{(st)} = \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}) \subset \mathbb{R}^{N_p}$ — область устойчивости КДС в пространстве параметров обратных связей \mathbf{p} при некотором фиксированном значении набора параметров \mathbf{s} . Из теорем об устойчивости КДС следует, что проверка принадлежности параметров обратных связей \mathbf{p} области устойчивости сводится к проверке условия [1]

$$\mathbf{p} \in \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}) \Rightarrow \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{n\pi}{2}. \quad (3)$$

Применение адаптивного алгоритма изменения шага частоты ω позволяет достаточно быстро вычислить левую часть условия (3) при этом требуется вычислить характеристический определитель не более чем в нескольких десятках или сотнях точек мнимой оси. Фактически, условие (3) представляет собой быстрый алгоритм проверки устойчивости КДС. Если требуется улучшить качество переходных процессов при некотором фиксированном $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$, то в этом случае целесообразно выполнить параметрический синтез [5], т.е. выбор значений параметров обратных связей, на основе минимизации функции $F: \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}_0), & \mathbf{p} \in \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}_0) \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}_0), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{s})\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})\|^{-2} \right) \int_0^\infty f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) d\omega, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) &= \|R_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^*(\omega)\|^2 + c_1 \|R_A'(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A'^*(\omega)\|^2 + \\ &+ c_2 \|R_A''(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A''^*(\omega)\|^2, \quad (\cdot)' = d(\cdot)/d\omega, \\ R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) &= \begin{cases} \text{Re } \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} \text{Re } [\Psi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s})], & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$



$$R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} (1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2}(1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})|^2 \right]^{1/2},$$

$$\Psi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \Phi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})/\lambda, \quad \nu = 1, 2, \dots, N_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_x,$$

\mathbf{p}_0 — набор параметров обратных связей в момент старта параметрического синтеза, t_0 — желаемое время регулирования. Поскольку функция (4) является негладкой, а размерность N_p пространства параметров обратных связей обычно не превышает нескольких десятков, для минимизации (4) обычно используется безградиентный метод Нелдера–Мида [7]. Пусть, далее,

$$\Omega^{(st)} = \bigcap_{\mathbf{s} \in \Omega_s} \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}) \quad (7)$$

— пересечение областей устойчивости. Проверка принадлежности параметров обратных связей сводится к проверке условий (3), поскольку

$$\mathbf{p} \in \Omega^{(st)} \iff \forall \mathbf{s} \in \Omega_s \quad \mathbf{p} \in \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}). \quad (8)$$

В ряде случаев требуется реализовать выбор параметров обратных связей \mathbf{p} так, чтобы улучшить качество переходных процессов для всех значений конструктивных параметров $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{N_s})^T \in \Omega_s$. Например, при проектировании автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня требуется обеспечить устойчивость и малое время регулирования для некоторого диапазона изменения угловой скорости вращения снаряда. В данном случае обобщением (4) служит вариант параметрического синтеза, основанный на минимизации функции:

$$F: \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \int_{\Omega_s} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds_1 \dots ds_{N_s}, & \mathbf{p} \in \Omega^{(st)}, \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega^{(st)}, \end{cases} \quad (9)$$

где функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ определена согласно (5). Поскольку целевая функция (9) является негладкой, а размерность N_p пространства параметров обратных связей не превышает нескольких десятков, для минимизации (9) также целесообразно использовать безградиентный метод Нелдера–Мида. При выполнении параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации областей устойчивости, необходимо лишь, чтобы при старте параметрического синтеза начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости: $\mathbf{p}_0 \in \Omega^{(st)}$.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Рассмотрим возможности распараллеливания вычислений при выполнении параметрического синтеза на основе (9). Проверка входящего в (9) условия (8) сводится к проверкам условий (3) при различных фиксированных значениях $\mathbf{s} \in \Omega_s$, которые могут быть выполнены независимо. Поскольку при проверке условия (3) используется адаптивный алгоритм изменения шага частоты ω , априорно оценить время выполнения проверки (3) невозможно. Более того, вычисление какого-либо характеристического определителя $D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ требует решения некоторой вспомогательной краевой задачи, которое может выполняться на основе различных алгоритмов в различных диапазонах изменения параметра λ . При этом нарушение любого из условий (3) означает завершение проверки условия (8). Следовательно, распараллеливание проверки условия (8) целесообразно выполнять на основе создания набора задач, каждая из которых связывается с проверкой условия (3) и запускается на выполнение на свободном в текущий момент времени вычислителе (процессоре, ядре процессора и т.д.). В зависимости от величин параметров \mathbf{p} и \mathbf{s} , величина $f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega)$, рассматриваемая как функция частоты ω , может характеризоваться высокими достаточно узкими пиками. Следовательно, при численном интегрировании в (5) требуется использовать адаптивные методы численного интегрирования, например, на основе адаптивных вариантов метода Гаусса, и невозможно априорно оценить характерное время



вычисления значений $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ на основе (5). Более того, вычисление $f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega)$ согласно (6) требует решения вспомогательной линейной краевой задачи, которое может выполняться на основе различных алгоритмов в различных диапазонах изменения параметра ω . С другой стороны, при $\mathbf{p} \in \Omega^{(st)}$ функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ будет достаточно гладкой функцией своих аргументов, и при выполнении численно-интегрирования в (9) достаточно ограничиться некоторой квадратурной формулой с постоянным числом узлов, т. е.

$$\int_{\Omega_s} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds_1 \dots ds_{N_s} \approx \sum_{j=1}^{N_\Omega} C_j f(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j). \quad (10)$$

Например, при $\mathbf{s} = \{s\}$, $\Omega_s = [s_{\min}, s_{\max}]$

$$\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} f(\mathbf{p}, s) ds \approx \frac{s_{\max} - s_{\min}}{6N_\Omega} \left[f(\mathbf{p}, s_{\min}) + f(\mathbf{p}, s_{\max}) + 4 \sum_{j=0}^{N_\Omega-1} f(\mathbf{p}, s_{2j+1}) + 2 \sum_{j=1}^{N_\Omega-1} f(\mathbf{p}, s_{2j}) \right],$$

$$s_j = s_{\min} + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2N_\Omega} j. \quad (11)$$

Следовательно, при вычислении (10) целесообразно создать набор задач, связанных с вычислением значений $f(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j)$ и запускаемых на выполнение на свободном в текущий момент времени вычислителе (процессоре, ядре процессора и т.д.).

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

В качестве примера рассмотрим задачу параметрического синтеза автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня из работы [1]. После приведения к безразмерным переменным и параметрам в пренебрежении величинами высшего порядка малости модельные уравнения автономной системы угловой стабилизации при нулевых начальных условиях принимают вид

$$\begin{aligned} \tau_0 \dot{\beta} + \beta &= -\tau_0(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2), & \tau_0 \dot{\alpha} + \alpha &= -\tau_0(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2), \\ m_1 \ddot{x}_0 - b\beta_1 &= N_{x_1} + P_{x_1}, & m_1 \ddot{y}_0 + b\alpha_1 &= N_{y_1} + P_{y_1}, \\ J_1 \ddot{\beta}_1 &= L_{y_1} + \xi_1 N_{x_1}, & J_1 \ddot{\alpha}_1 &= L_{x_1} - \xi_1 N_{y_1}, \\ J_2(\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2) &= L_{y_2} - \xi_2 N_{x_2}, & J_2(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) &= L_{x_2} + \xi_2 N_{y_2}, \\ m_2[\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + (1 + \xi_1 + \xi_2)\ddot{\beta}_1] &= N_{x_2} + m_2 a_z \beta_2 + P_{x_2}, \\ m_2[\ddot{y}_0 + \ddot{y}_1 - (1 + \xi_1 + \xi_2)\ddot{\alpha}_1] &= N_{y_2} - m_2 a_z \alpha_2 + P_{y_2}, \\ P_{x_2} &= n[\beta(t - \tau) \cos(\Omega\tau - \theta) + \alpha(t - \tau) \sin(\Omega\tau - \theta)], \\ P_{y_2} &= n[\beta(t - \tau) \sin(\Omega\tau - \theta) - \alpha(t - \tau) \cos(\Omega\tau - \theta)], \\ \ddot{x} + x'''' + \gamma \dot{x}'''' + \gamma \Omega y'''' + a_z[(m_2 + 1 - z)x'' - x'] &= -\ddot{x}_0 - (z + \xi_1)\ddot{\beta}_1, \\ \ddot{y} + y'''' + \gamma \dot{y}'''' - \gamma \Omega x'''' + a_z[(m_2 + 1 - z)y'' - y'] &= -\ddot{y}_0 + (z + \xi_1)\ddot{\alpha}_1, \\ x(0, t) = y(0, t) &= 0, & x'(0, t) = y'(0, t) &= 0, \\ x(1, t) = x_1(t), & y(1, t) = y_1(t), & x'(1, t) = \beta_2(t), & y'(1, t) = -\alpha_2(t), \\ N_{x_1} = -x'''(0, t) - \gamma \dot{x}'''(0, t) - \gamma \Omega y'''(0, t), & N_{y_1} = -y'''(0, t) - \gamma \dot{y}'''(0, t) + \gamma \Omega x'''(0, t), \\ N_{x_2} = x'''(1, t) + \gamma \dot{x}'''(1, t) + \gamma \Omega y'''(1, t) & N_{y_2} = y'''(1, t) + \gamma \dot{y}'''(1, t) - \gamma \Omega x'''(1, t), \\ L_{x_1} = -y''(0, t) - \gamma \dot{y}''(0, t) + \gamma \Omega x''(0, t), & L_{y_1} = x''(0, t) + \gamma \dot{x}''(0, t) + \gamma \Omega y''(0, t), \\ L_{x_2} = y''(1, t) + \gamma \dot{y}''(1, t) - \gamma \Omega x''(1, t), & L_{y_2} = -x''(1, t) - \gamma \dot{x}''(1, t) - \gamma \Omega y''(1, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) образуют комбинированную динамическую систему (КДС), содержащую обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, граничные условия, условия связи и начальные условия. Здесь $\mathbf{x}(t) = (P_{x_1}(t), P_{y_1}(t))^T$ — входная вектор-функция КДС, $\mathbf{y}(t) = (-\beta_1(t), \alpha_1(t))^T$ — выходная вектор-функция КДС, величины $\mathbf{p} = (\theta, n, \tau_0)^T$ представляют собой набор параметров обратных связей. При $a_z \ll 1$ уравнения (12) переходят в уравнения (1.12) из



[8]. В задаче (12) роль набора параметров s играет угловая скорость вращения снаряда, т.е. $s = \{\Omega\}$, $\Omega_s = [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ После выполнения в 12 одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени t

$$\tilde{f}(\lambda) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt, \quad f(t) = L^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{\lambda t} dt \quad (13)$$

динамическая модель системы стабилизации сводится к матрицам $\Phi(\lambda)$ и $\Phi^0(\lambda)$ передаточных функций:

$$\tilde{y}(\lambda) = \Phi(\lambda)\tilde{x}(\lambda), \quad (\tilde{x}_0(\lambda), \tilde{y}_0(\lambda))^T = \Phi^0(\lambda)\tilde{x}(\lambda), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(\lambda) & \Phi_{12}(\lambda) \\ \Phi_{21}(\lambda) & \Phi_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \Phi^0(\lambda) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^0(\lambda) & \Phi_{12}^0(\lambda) \\ \Phi_{21}^0(\lambda) & \Phi_{22}^0(\lambda) \end{bmatrix}, \\ \Phi_{11}(\lambda) = \Phi_{22}(\lambda) &= \frac{1}{2}[\Pi(\lambda) + \overline{\Pi(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_1(\lambda)}{D(\lambda)}, \\ \Phi_{12}(\lambda) = -\Phi_{21}(\lambda) &= \frac{i}{2}[\Pi(\lambda) - \overline{\Pi(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_2(\lambda)}{D(\lambda)}, \\ \Phi_{11}^0(\lambda) = \Phi_{22}^0(\lambda) &= \frac{1}{2}[\Pi^0(\lambda) + \overline{\Pi^0(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_1^0(\lambda)}{\lambda D(\lambda)}, \\ \Phi_{12}^0(\lambda) = -\Phi_{21}^0(\lambda) &= \frac{i}{2}[\Pi^0(\lambda) - \overline{\Pi^0(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_2^0(\lambda)}{\lambda D(\lambda)}, \end{aligned} \quad (15)$$

причем характеристический и возмущающие квазимногочлены суть

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \Delta(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})}, \\ Q_1(\lambda) &= [\Delta_{\varphi_1}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} + \overline{\Delta_{\varphi_1}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ Q_2(\lambda) &= i[\Delta_{\varphi_1}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} - \overline{\Delta_{\varphi_1}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ Q_1^0(\lambda) &= [\Delta_{w_0}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} + \overline{\Delta_{w_0}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ Q_2^0(\lambda) &= i[\Delta_{w_0}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} - \overline{\Delta_{w_0}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ D(\bar{\lambda}) &= \overline{D(\lambda)}, \quad Q_\nu(\bar{\lambda}) = \overline{Q_\nu(\lambda)}, \quad Q_\nu^0(\bar{\lambda}) = \overline{Q_\nu^0(\lambda)}, \quad \nu = 1, 2, \\ \Pi(\lambda) &= \frac{\Delta_{\varphi_1}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \Pi^0(\lambda) = \frac{\Delta_{w_0}(\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \psi_{11}(\lambda) & \psi_{12}(\lambda) & \lambda\psi_{13}(\lambda) & \psi_{14}(\lambda) \\ \psi_{21}(\lambda) & \psi_{22}(\lambda) & \psi_{23}(\lambda) & \psi_{24}(\lambda) \\ \psi_{31}(\lambda) & \psi_{32}(\lambda) & \lambda\psi_{33}(\lambda) & \psi_{34}(\lambda) \\ \psi_{41}(\lambda) & \psi_{42}(\lambda) & \lambda\psi_{43}(\lambda) & \psi_{44}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi_1}(\lambda) &= -\det[\psi_{\nu j}(\lambda)], \quad \nu = 1, 3, 4; \quad j = 1, 2, 4, \\ \Delta_{w_0}(\lambda) &= -\det[\psi_{\nu j}(\lambda)], \quad \nu = 1, 3, 4; \quad j = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(1)}(\lambda) - L_1^{(1)}(\lambda)], \\ \psi_{12}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(2)}(\lambda) - L_1^{(2)}(\lambda)], \\ \psi_{13}(\lambda) &= \lambda[J_1 + (1 + \gamma(\lambda - i\Omega))(\xi_1 N_1^{(3)}(\lambda) - L_1^{(3)}(\lambda))], \\ \psi_{14}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(4)}(\lambda) - L_1^{(4)}(\lambda)], \\ \psi_{21}(\lambda) &= m_1 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(1)}(\lambda), \\ \psi_{22}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(2)}(\lambda), \\ \psi_{23}(\lambda) &= b - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]\lambda^2 N_1^{(3)}(\lambda), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \psi_{24}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(4)}(\lambda), \\
 \psi_{31}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(1)}(\lambda) + L_2^{(1)}(\lambda)], \\
 \psi_{32}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(2)}(\lambda) + L_2^{(2)}(\lambda)], \\
 \psi_{33}(\lambda) &= \lambda[J_2 - (1 + \gamma(\lambda - i\Omega))(\xi_2 N_2^{(3)}(\lambda) + L_2^{(3)}(\lambda))], \\
 \psi_{34}(\lambda) &= J_2 \lambda^2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(4)}(\lambda) + L_2^{(4)}(\lambda)], \\
 \psi_{41}(\lambda) &= (1 + \tau_0 \lambda)(m_2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(1)}(\lambda)), \\
 \psi_{42}(\lambda) &= (1 + \tau_0 \lambda)(m_2 \lambda^2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(2)}(\lambda)), \\
 \psi_{43}(\lambda) &= -m_2(1 + \xi_1 + \xi_2)\lambda(1 + \tau_0 \lambda) - n\tau_0 e^{-i\theta - \tau(\lambda - i\Omega)} - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]\lambda N_2^{(3)}(\lambda)(1 + \tau_0 \lambda), \\
 \psi_{44}(\lambda) &= m_2 a_z(1 + \tau_0 \lambda) - n\tau_0 e^{-i\theta - \tau(\lambda - i\Omega)} - (1 + \tau_0 \lambda)[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(4)}(\lambda).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Входящие в (15)–(17) вспомогательные функции $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, являются решением следующих вспомогательных линейных краевых задач:

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 u(z, \lambda) + [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]u''''(z, \lambda) + a_z[(m_2 + 1 - z)u''(z, \lambda) - u'(z, \lambda)] &= -\delta_j^1 + \delta_j^3(z + \xi_1), \\
 u(0, \lambda) = 0, \quad u'(0, \lambda) = 0, \quad u(1, \lambda) = \delta_j^2, \quad u'(1, \lambda) = -\delta_j^4, \\
 N_1^{(j)}(\lambda) = -u'''(0, \lambda), \quad N_2^{(j)}(\lambda) = u'''(1, \lambda), \\
 L_1^{(j)}(\lambda) = -u''(0, \lambda), \quad L_2^{(j)}(\lambda) = u''(1, \lambda), \quad j = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь δ_j^ν — символ Кронекера. При умеренных и средних значениях $|\lambda|$ линейные краевые задачи (18) решались численно [1] на основе проекционного метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций ортогональных полиномов Чебышева 1 рода. Вычисление вспомогательных функций $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, при этом сводится к решению вспомогательной системы линейных уравнений, коэффициенты которой зависят от λ . Проверка аналитичности приближенных выражений для функций $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, в той области изменения параметра λ , где применялся проекционный метод Галеркина, сводилась к проверке отсутствия в указанной области корней определителя вспомогательной системы линейных уравнений, что легко проверялось при помощи принципа аргумента. При $|\lambda| \gg 1$ выполнялось асимптотическое интегрирование (18) на основе метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна, и приближенные выражения для вспомогательных [1] функций $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, оказывались аналитическими в правой комплексной полуплоскости (λ) и вблизи мнимой оси.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим результаты параметрического синтеза системы стабилизации со следующими безразмерными расчетными параметрами: $m_1 = 0.06$, $m_2 = 0.1$, $J_1 = 0.015$, $J_2 = 0.02$, $\gamma = 0.01$, $\tau = 0.07$, $\xi_1 = 0.03$, $\xi_2 = 0.5$, $a_z = 10$, $\Omega_{\min} = 5$, $\Omega_{\max} = 9$. Параметрический синтез системы стабилизации выполнялся на основе (9) по матрице (15) для значений $t_0 = 1$ и $N_\Omega = 20$. На рис. 1, 2 приведены импульсные переходные функции системы угловой стабилизации, вычисленные до и после параметрического синтеза. Импульсные переходные функции соответствуют входному возмущению в форме $P_{x_1}(t) = 0$, $P_{y_1}(t) = p_{y_1} \delta(t - 0)$, где $\delta(t)$ — импульсная функция Дирака, определяются соотношениями $\alpha_1(t) = p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{22}(\lambda)]$, $\beta_1(t) = -p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{12}(\lambda)]$, $y_0(t) = p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{22}^0(\lambda)]$, $x_0(t) = p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{12}^0(\lambda)]$ и вычислялись на основе эффективного алгоритма [9] численного обращения одностороннего интегрального преобразования Лапласа. Импульсные переходные функции на рис. 1, 2 соответствуют значениям угловой скорости вращения снаряда $\Omega = 5$ и 9 соответственно. Пунктиром показаны импульсные переходные функции до выполнения параметрического синтеза, им соответствуют значения параметров обратных связей $\theta = 0.5$, $n = 0.06$, $\tau_0 = 7$. Сплошной линией показаны импульсные переходные функции после выполнения параметрического синтеза, им соответствуют значения параметров обратных связей $\theta = 0.342$, $n = 1.167$, $\tau_0 = 0.083$. Как видно, выполнение параметрического синтеза

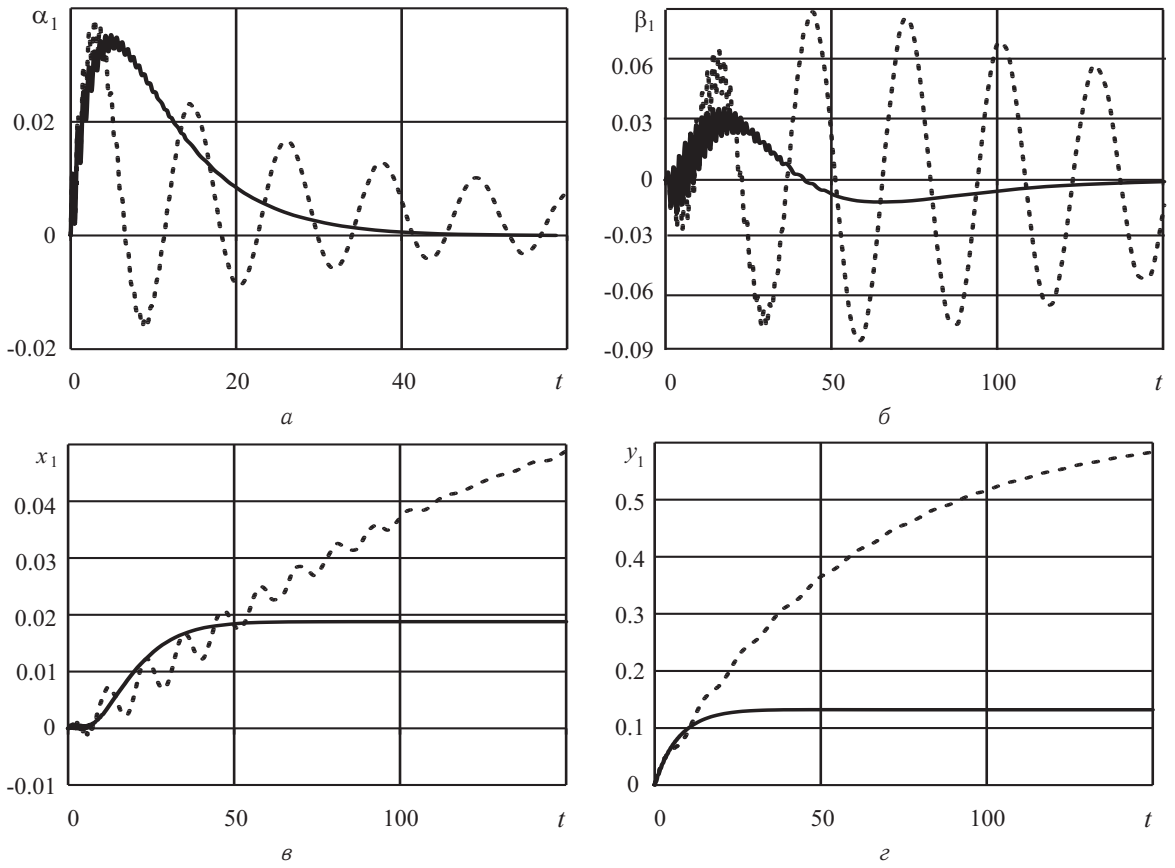


Рис. 1. Импульсные переходные функции для $\Omega = 5$

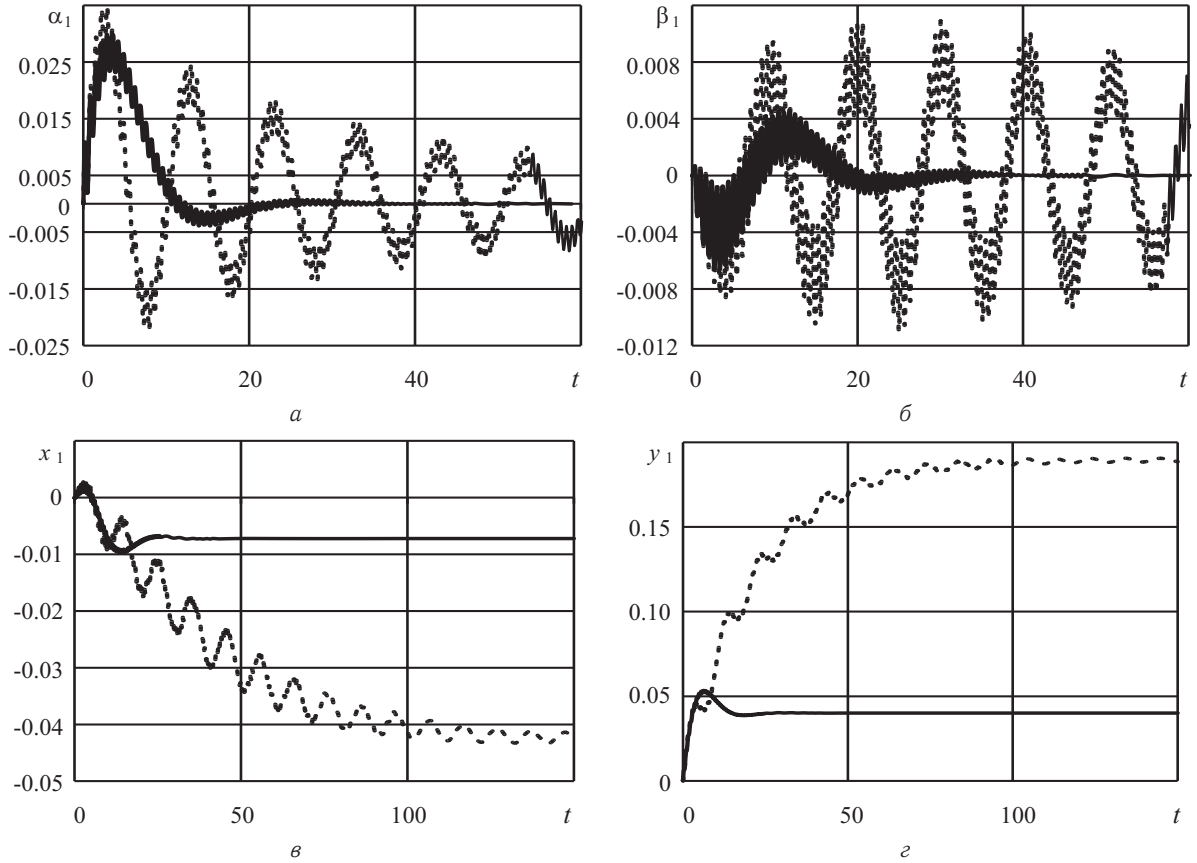


Рис. 2. Импульсные переходные функции для $\Omega = 9$



позволяет значительно уменьшить характерное время регулирования и улучшить качество переходных процессов на всем диапазоне изменения угловой скорости вращения снаряда $\Omega \in [5, 9]$.

Распараллеливание процедуры параметрического синтеза выполнялось на основе параллельных шаблонов Microsoft Concurrency Runtime [6], специально разработанных для поддержки параллельности на уровне задач. Эффективность распараллеливания для системы стабилизации с параметрами на четырехъядерном процессоре Intel Core2 i7 3610QM характеризуют данные в таблице, где приводится характерное время численного моделирования (в минутах):

№ теста	Последовательная версия	Многопоточная версия
1	787	222
2	788	220
3	782	223
4	789	221
5	785	223

Переход от последовательной версии к параллельной сокращает характерное время параметрического синтеза ориентировочно в 3,5 раза. Несколько меньшее, чем четырехкратное, ускорение вычислительного процесса объясняется интенсивным обменом данными с оперативной памятью, а также значительным объемом (6 МБ) общей для всех ядер кэш-памяти уровня 3.

Библиографический список

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В. О влиянии продольных перегрузок на устойчивость автономной системы угловой стабилизации реактивного снаряда залпового огня // Докл. Академии военных наук. 2012. № 5(54). С. 5–13.
2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
3. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 76–89.
4. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С. Выбор параметров систем и динамический анализ газореактивных систем стабилизации с упругими стержнями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 101–114.
5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С. Выбор оптимальных параметров комбинированных динамических систем // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратов. зимн. шк. Саратов : ООО «Изд-во «Научная книга», 2012. С. 8–9.
6. Campbell C., Miller A. Parallel programming with Microsoft Visual C++. Microsoft Press, 2011. 172 с.
7. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М. : Радио и связь, 1988. 128 с.
8. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории автономных систем угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 141–156.
9. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 1030–1044.

Parallel Algorithm of Optimal Parameters Calculation for the Single Channel Angular Stabilization System

D. K. Andreichenko¹, K. P. Andreichenko², V. V. Kononov¹

¹Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, kp_andreichenko@renet.ru, valentin.kononov@gmail.com

²Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Polytechnicheskaya st., 77, kp_andreichenko@renet.ru

On the instance of mathematical modeling of an independant angular stabilization system of rocket missiles of a volley fire developed a parallel algorithm for parametric synthesis, which allows to reduce the response time and stabilization errors of the operated combined dynamic systems, for which some design parameters change continuously in a fixed range.

Key words: operated hybrid dynamic systems, mathematical modeling, parametric synthesis.

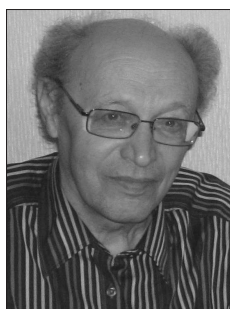


References

1. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. The effect of longitudinal forces on the stability of the autonomous system angular stabilization missile salvo fire. *Military Sciences Academy Reports*, 2012, no. 5(54), pp. 5–13 (in Russian).
2. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.* 2000, no. 3, pp. 54–69 (in Russian).
3. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. Dynamic analysis and the choice of model parameters gyroscopic integrator of linear accelerations on floating platform. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2008, no. 4, pp. 76–89 (in Russian).
4. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Choice of system parameters and dynamic analysis of the gas jet stabilization systems with elastic rods. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2012. № 4, pp. 101–114 (in Russian).
5. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Vybora optimal'nykh parametrov kombinirovannykh dinamicheskikh sistem [Choice of optimal parameters combination of dynamic systems]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia. Materialy 16 Saratovskoi zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and their applications. Materials of 16th Saratov Winter School], Saratov, 2012, pp. 8–9 (in Russian).
6. Campbell C., Miller A. *Parallel programming with Microsoft Visual C++*. Microsoft Press, 2011. 172 p.
7. Bunday B. *Basic optimization methods*. Edward Arnold, 1984. [Rus. ed. : Bandi B. *Metody optimizatsii. Vvodnyi kurs*. Moscow, Radio i sviaz', 1988, 128 p.]
8. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of autonomous angular stabilization systems of missiles for salvo firing. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2009, no. 3, pp. 141–156 (in Russian).
9. Andreichenko D. K. An efficient algorithm for numerical inversion of the Laplace transform. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, vol. 40, iss. 7, pp. 987–1000.

ХРОНИКА

ПАМЯТИ МАРКА ВОЛЬФОВИЧА ЛОСИКА



12 мая 2013 г. скончался выдающийся математик Марк Вольфович Лосик, профессор кафедры геометрии Саратовского государственного университета, замечательный педагог, добрый, отзывчивый человек.

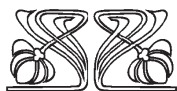
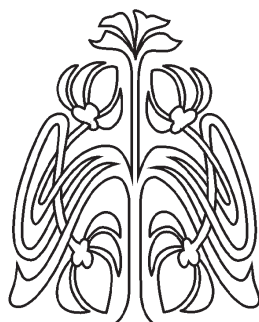
Марк Вольфович родился 27 января 1935 г. в Саратове в семье экономиста Вольфа Мееровича Лосика и врача Эсфирь Даниловны Бунешович. Интересно заметить, что в аттестате Эсфирь Даниловны об окончании гимназии в Царицыно стояла отметка «особые способности по геометрии».

Вольф Меерович погиб в 1941 г., и мать воспитывала двоих детей в тяжелые годы войны одна. Марк Вольфович рано научился читать, читал все подряд, любил играть в шахматы, ходил в шахматные кружки.

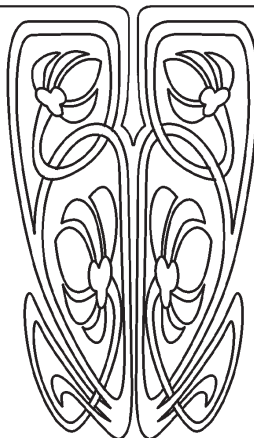
В 1952 г. Марк Вольфович закончил с серебряной медалью школу № 20 Саратова. Пытался поступить на физический факультет Саратовского госуниверситета, но не был туда зачислен и поступил на механико-математический факультет. Однако уже на первой лекции он понял, что математика — его призвание.

Окончив с отличием университет, Марк Вольфович поступает по рекомендации зав.кафедрой геометрии В.В.Вагнера в аспирантуру. Задачу, поставленную В.В.Вагнером для написания кандидатской диссертации, Марк Вольфович решил уже на первом курсе аспирантуры. В итоге оказалось, что написанная диссертация по геометрии пространств Кавагучи содержит более глубокие результаты, чем предполагал руководитель. В 1962 г. Марк Вольфович защищает кандидатскую диссертацию на тему «Геометрия Кавагучи и ее связь с вариационным исчислением» в Казанском государственном университете. Пространства Кавагучи являются обобщениями финслеровых пространств и характеризуются тем, что в них элемент длины дуги кривой $x(t)$ зависит не только от скорости $x'(t)$, но также от ускорения $x''(t)$ и высших ускорений вплоть до некоторого порядка k . Они позволяют использовать дифференциально-геометрический подход для изучения вариационного исчисления высших порядков и имеют различные применения в физике.

В. В. Вагнер был доволен полученными результатами и предложил М. В. Лосику продолжить научные исследования по этой теме. Марк Вольфович получает некоторые новые результаты по «классической» дифференциальной геометрии и вариационному исчислению. Однако после окончания аспирантуры Марк Вольфович решает расширить область исследований, он выходит за рамки дифференциальной геометрии и начинает изучать активно развивающуюся в то время алгебраическую топологию, в частности, теорию (ко)гомологий и теорию пучков. М. В. Лосик принимает участие в неформальном семинаре, на котором молодые ученые мехмата Саратовского университета, среди которых были также В. Е. Воскресенский, А. В. Гох-



ПРИЛОЖЕНИЯ





ман, В. Л. Израйлевич, Г. И. Перельмутер, А. Я. Сандлер, изучают актуальную в то время книгу Р. Годемана «Алгебраическая топология и теория пучков». Так Марк Вольфович самостоятельно приходит к задаче нахождения групп когомологий алгебры Ли векторных полей.

В начале 70-х гг. М. В. Лосик посещает семинар И. М. Гельфанда в Московском университете, на котором знакомится с И. М. Гельфандом, А. М. Габриэловым и Д. Б. Фуксом. Оказывается, что их научные интересы близки: московских ученых интересуют характеристические классы структур на многообразиях и тесно связанные с ними группы когомологий алгебр Ли, в частности алгебр Ли векторных полей. Характеристические классы представляют собой некоторые канонически определенные элементы групп когомологий и дают богатую информацию о геометрических структурах. Позднее они будут многократно появляться в работах М. В. Лосика. Марк Вольфович получает новые интересные результаты о группах когомологий алгебр Ли векторных полей. Совместно с Габриэловым и Гельфандом был написан цикл работ о комбинаторных вычислениях характеристических классов. Гельфанд высоко оценил Марка Вольфовича и полученные им результаты, в особенности он ценил то, что Лосик, занимаясь классической дифференциальной геометрией, смог быстро и эффективно освоить самые современные и активно развивающиеся области математики.

Особенно интересны характеристические классы слоений на многообразиях. Пространство слоев слоения не является гладким многообразием, но представляет собой некоторое его обобщение. Более того, это пространство обладает довольно «плохой» топологией, что не позволяет применять для его изучения классический подход. Для изучения таких обобщений Гельфанд предложил идеи формальной дифференциальной геометрии. Марк Вольфович активно развивает эти идеи в своих работах. Дифференциальная геометрия имеет дело с гладкими объектами на гладких многообразиях, однако условие гладкости — слишком сильное, во многих задачах естественным образом появляются «негладкие» многообразия, или многообразия с особенностями, такие как алгебраические многообразия, орбиформы, пространства орбит действия группы на многообразии, диффеологические пространства и уже упомянутые пространства слоев слоений. Подход М. В. Лосика состоит в систематическом использовании теории категорий, дающей общий метод изучения таких обобщенных многообразий. Лосик одним из первых осознал важность обобщения дифференциальной геометрии на случай «негладких» пространств и роль теории категории для описания таких обобщенных пространств. Для широкого класса подобных обобщенных пространств Марк Вольфович ввел и изучил основные дифференциально-геометрические понятия, такие как касательное расслоение, векторные и тензорные поля, дифференциальные формы, римановы структуры и характеристические классы. Он применил, в частности, эти результаты для изучения слоений и слоений с особенностями. Развитый М. В. Лосиком категорный подход имеет ряд преимуществ по сравнению с более классическими подходами.

М. В. Лосик был одним из пионеров применения теории категорий в дифференциальной геометрии. В настоящее время теория категорий широко используется в некоммутативной дифференциальной геометрии, в которой понятия и идеи дифференциальной геометрии используются для изучения некоммутативных колец, рассматриваемых как обобщение кольца гладких функций на многообразии.

На основе полученных результатов Марк Вольфович защищает в 1997 г. в Казанском университете докторскую диссертацию «Некоторые методы теории категорий и гомологической алгебры в дифференциальной геометрии». Эти результаты были применены позднее к пространствам орбит действий конечных групп на многообразиях и орбиформам.

В 1992 г. М. В. Лосик принимает участие в работе геометрической конференции в Вене, где знакомится с Д. В. Алексеевским, А. Криглем, П. В. Михором, В. П. Поповым и А. Райнером, с которыми он позднее наладил научные контакты и написал многочисленные работы. По приглашению П. В. Михора Марк Вольфович в течение 14 лет ежегодно работает по два месяца в Вене в Международном институте математики и физики имени Эрвина Шредингера. В работах Лосика с соавторами решается задача поднятия гладких кривых с пространства орбит неприводимого представления компактной группы Ли на пространство представления. С этой задачей напрямую связана задача нахождения гладких корней многочленов, чьи коэффициенты гладко зависят от параметра. Полученные результаты имеют применения к теории возмущений самосопряженных операторов в Гильбертовом пространстве и теории дифференциальных уравнений с частными производными для корректной постановки



гиперболических проблем Коши. В статье Лосика с соавторами дано доказательство слабой версии основной теоремы теории инвариантов для представлений конечных групп, этот результат применен к хорошо известной проблеме описания линейных подпространств в гильбертовом изотропном конусе. В других работах изучаются когомологии групп диффеоморфизмов. В статьях 1995, 1997 гг. приводится обобщение теоремы Картана о когомологиях однородных пространств.

Марк Вольфович многократно подчеркивал, что для решения действительно интересных математических и, в частности, геометрических, задач требуются знания из различных областей математики. Чтобы решить задачу, на нее не следует смотреть только в контексте области, в которой она сформулирована, нужно выходить за пределы этой области. Узкие направления, где применяется только определенная техника и ограниченные знания, быстро затухают, «загнивают». Сам Марк Вольфович обладал глубокими знаниями в таких областях математики, как дифференциальная геометрия, общая топология, дифференциальная топология, алгебраическая топология, гомологическая алгебра, алгебраическая геометрия, теория групп и алгебр Ли и их представлений, теория инвариантов, теория категорий, теория особенностей. Это отчетливо видно из его работ, очень глубоких, написанных с большой точностью и строгостью. Чтобы самостоятельно приобрести такие знания и перейти от классической дифференциальной геометрии к абстрактным современным разделам математики, безусловно, требовалось много усилий: обладать целеустремленностью, высокой самоорганизацией и большой трудоспособностью.

Марк Вольфович безгранично любил математику. Он был готов в любое время дня и ночи обсуждать математические вопросы с каждым заинтересованным собеседником. Он был равнодушен к приоритету и бескорыстно делился своими самыми сокровенными идеями, соображениями и планами.

Талант ученого очень органично сочетался у Марка Вольфовича с талантом педагога. На протяжении многих лет М. В. Лосик читал лекции по дифференциальной геометрии и топологии, римановой геометрии, группам Ли и однородным пространствам и др., он написал несколько замечательных пособий для студентов. Марку Вольфовичу удавалось удивительным образом сочетать в преподавании строгость и доступность изложения. В работе со студентами он проявлял доброжелательность и терпеливость. Для аспирантов Марк Вольфович был мудрым наставником, давал полезные советы, но никогда не навязывал своего мнения. Начинающие преподаватели всегда могли получить от него ценный совет и полезные рекомендации.

Марк Вольфович хорошо знал английский язык, читал на немецком, французском, польском. В молодости он любил туристические походы, сплавлился на лодках, в зрелом возрасте увлекался рыбалкой, водил моторный катер, мог его сам отремонтировать, собирать моторы. Шахматы были его любимым увлечением, он почти каждый день разгадывал шахматные этюды. Марк Вольфович вел здоровый образ жизни, вставал в пять тридцать утра: увлекался бегом, часто пробегал 10 километров в городском парке, позже много гулял в очень быстром темпе.

Марк Вольфович был удивительно мягок, открыт и доброжелателен с людьми, всегда был искренне готов помочь, позитивно и по-детски восторженно воспринимал окружающий мир. Общение с Марком Вольфовичем всегда воодушевляло и доставляло радость. Для тех, кому посчастливилось знать Марка Вольфовича, его уход является невосполнимой потерей.

Д. В. Алексеевский, А. С. Галаев, С. В. Галаев, А. В. Гохман

Список научных работ и учебных пособий М. В. Лосика

Геометрическая интерпретация некоторых условий обыкновенной вариационной задачи с высшими производными // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 11, № 4. С. 556–566.

О некотором классе пространств Кавагучи // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 6. С. 1299–1302.

Пространства Клейна как пространства Кавагучи // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 6. С. 1299–1301.

О пространствах Кавагучи, связанных с пространствами Клейна // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. 1963. Вып. 12. С. 213–237.

О связи пространств Клейна с пространствами с ареальной метрикой высшего порядка // Тр. молодых ученых. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1964. С. 55–59.

К вопросу о понятии нормализатора поверхностей однородного пространства // Материалы 2-й Прибалтийской геометрической конференции / Тартуский гос. ун-т. Тарту, 1965. С. 108–112.



Об инфинитезимальных связностях в касательных расслоенных пространствах // Изв. вузов. Математика. 1964, № 5. С. 54–60.

О построении линейной связности на поверхностях однородного пространства // Тез. докл. 3-й межвузовской научной конференции по проблемам геометрии. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1967. С. 99–100.

Об алгебре функций дифференцируемого многообразия // Тез. докл. 3-ей Прибалтийской геометрической конференции. Паланга; Вильнюс, 1968. С. 104–105.

О линейных связностях на поверхностях однородного пространства // Тр. молодых ученых. Математика и механика. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1969. С. 65–70.

О когомологиях бесконечномерных алгебр Ли векторных полей // Функцион. анализ и его прил. 1970. Т. 4, № 2. С. 43–53.

О когомологиях алгебры Ли векторных полей с коэффициентами в тривиальном единичном представлении // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 1. С. 24–36.

Топологическая интерпретация когомологий алгебры Ли векторных полей с коэффициентами в тривиальном единичном представлении // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 3. С. 79–80.

О когомологиях алгебры Ли векторных полей с нетривиальными коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 4. С. 44–46.

Об алгебре функций гладкого многообразия // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 85–88.

Сборник задач по векторной алгебре. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1974. 62 с. (в соавторстве с А. В. Гохманом, Н. И. Кабановым, Ю. К. Коноплевой и М. А. Спиваком).

Комбинаторное вычисление характеристических классов // Функцион. анализ и его прил. 1974. Т. 9, № 1. С. 54–56 (в соавторстве с А. М. Габриэловым и И. М. Гельфандом).

Комбинаторное вычисление характеристических классов. I // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 2. С. 12–28 (в соавторстве с А. М. Габриэловым и И. М. Гельфандом).

Комбинаторное вычисление характеристических классов. II // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 3. С. 5–36 (в соавторстве с А. М. Габриэловым и И. М. Гельфандом).

Функционалы Атья-Патоли-Сингера для характеристических классов касательного расслоения // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 2. С. 13–28 (в соавторстве с А. М. Габриэловым и И. М. Гельфандом).

Вычисление характеристических классов комбинаторного векторного расслоения. Препринт ИПМ АН СССР. 1976, № 99; Gelfand I. M. Collected papers. Vol. 3. P. 454–486 (в соавторстве с И. М. Гельфандом).

О теореме приведения для связностей высшего порядка // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1980. Вып. 5. С. 53–64.

Об инвариантной теории вариационных задач // Дифференциальная геометрия. Геометрия обобщенных пространств и ее приложения : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1981. Вып. 6. С. 49–58.

О теореме Атья-Патоли-Сингера // Дифференциальная геометрия. Тензорные методы в геометрии и механике : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. Вып. 7. С. 50–57.

О некотором инварианте гладкого многообразия // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 2. С. 167–168.

О гомологиях формального вариационного риманова комплекса // Дифференциальная геометрия. Структуры на многообразиях и их приложения : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1985. Вып. 8. С. 51–58.

Топология. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 59 с.

О характеристических классах структур на многообразиях // Функцион. анализ и его прил. 1987. Т. 21, № 3. С. 38–52.

О составном многообразии Вагнера. Формы связности и кривизны // Дифференциальная геометрия. Обобщенные пространства и их приложения : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1988. Вып. 9. С. 30–39.

О некотором обобщении многообразия и его характеристических классах // Функцион. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 1. С. 29–37.

О составном многообразии Вагнера. Абсолютное и абсолютное полное дифференцирование // Дифференциальная геометрия. Дифференциально-геометрические структуры и их приложения : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 9. С. 24–28.

О многообразиях Фреше как диффеологических пространствах // Изв. вузов. Математика. 1992, № 5. С. 36–42.

Characteristic classes of transformation groups // Diff. Geom. Appl. 1993. Vol. 3. P. 205–218.

Categorical differential geometry // Cahiers Topol. Geom. Diff. Categor. 1994. Vol. XXXV, № 4. P. 274–290.

The cohomology of the complex of G-invariant forms on G-manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1995. Vol. 13, № 4. P. 323–338.

Diagonal cohomology of the Lie algebra of vector fields // Diff. Geom. Appl. 1995. Vol. 8. P. 71–86.



- The cohomology of the complex of G-invariant forms on G-manifolds. II // Ann. Global Anal. Geom. 1997. Vol. 15. P. 141–152.
- Choosing roots of polynomials smoothly // Israel J. Math. 1998. Vol. 105. P. 203–233 (в соавторстве с Д. В. Алексеевским, А. Криглем и П. В. Михором).
- Lifting smooth curves over invariants for representations of compact Lie groups // Transformation Groups. 2000. Vol. 5, № 2. P. 103–110 (в соавторстве с Д. В. Алексеевским, А. Криглем и П. В. Михором).
- Lifts of diffeomorphisms of orbit spaces for representations of compact Lie groups // Geometriae Dedicata. 2001. Vol. 88. P. 21–36.
- Эквивариантные характеристические классы // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 167–183.
- The Riemannian geometry of orbit spaces — the metric, geodesics and integral systems // Publ. Math. Debrecen. 2003. Vol. 62. P. 247–276 (в соавторстве с Д. В. Алексеевским, А. Криглем и П. В. Михором).
- Invariant tensor fields and orbit varieties for finite transformation groups. A Tribute to C. S. Seshadri : A Collection of Articles on Geometry and Representation Theory, Trends in Math. Basel, Birkhäuser Verlag, 2003. P. 346–378 (в соавторстве с П. В. Михором и В. Л. Поповым).
- Tensor fields and connections on holomorphic orbit spaces of finite groups // J. Lie Theory. 2003. Vol. 13. P. 519–534 (в соавторстве с А. Криглем, П. В. Михором).
- Choosing roots of polynomials smoothly. II // Israel J. Math. 2004. Vol. 139. P. 183–188 (в соавторстве с А. Криглем, П. В. Михором).
- Lifting smooth curves over invariants for representations of compact Lie groups. II // J. Lie Theory. 2005. Vol. 15, № 1. P. 227–234 (в соавторстве с А. Криглем, П. В. Михором и А. Райнером).
- Reflection groups on Riemannian manifolds // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2006. Vol. 186, № 1. P. 25–58 (в соавторстве с Д. В. Алексеевским, А. Криглем и П. В. Михором).
- Lifting smooth curves over invariants for representations of compact Lie groups. III // J. of Lie Theory. 2006. Vol. 16, № 3. P. 579–600 (в соавторстве с А. Криглем, П. В. Михором и А. Райнером).
- A 2-cocycle on a group of symplectomorphisms // Moscow Math. J. 2006. Vol. 6, № 2. P. 307–315 (в соавторстве с Р. С. Исмагиловым и П. В. Михором).
- Cohomology for a group on a manifold preserving an exact form // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2006. Vol. 3, № 5–6. P. 1117–1130 (в соавторстве с П. В. Михором).
- On polarizations in invariant theory // J. of Algebra. 2006. Vol. 301, № 1. P. 406–424 (в соавторстве с П. В. Михором и В. Л. Поповым).
- Choosing roots of polynomials with symmetries smoothly // Revista Matematica Complutense. 2007. Vol. 20, № 2. P. 267–291 (в соавторстве с А. Райнером).
- Lifting mappings over invariants of finite groups // Acta Math. Comeniana. 2008. Vol. 77, № 1. P. 93–122 (в соавторстве с А. Криглем, П. В. Михором и А. Райнером).
- О геометрических работах В. В. Вагнера // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры : тез. докл. междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008.
- On the continuous cohomology of diffeomorphism groups // Moscow Math. J. 2010. Vol. 10, № 2. P. 377–397.
- A generalization of Puiseux's theorem and lifting curves over invariants // Revista Matematica Complutense. 2012. Vol. 25, № 1. P. 139–155 (в соавторстве с А. Криглем, П. В. Михором и А. Райнером).
- Addendum to : «Lifting smooth curves over invariants for representations of compact Lie groups, III [J. Lie Theory. 2006. Vol. 16, № 3. P. 579–600]» // J. Lie Theory. 2012. Vol. 20, № 1. P. 245–249 (в соавторстве с А. Криглем, П. В. Михором и А. Райнером).
- Лекции по векторному и тензорному анализу. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. 54 с.
- Сборник задач по топологии. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. 19 с.