САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4, часть 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

Научный журнал
2013 Том 13
ISSN 1814-733X
ISSN 1816-9791
Издается с 2001 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Механика

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки» Журнал выходит 4 раза в год.

Адрес редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета
Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

Подписано в печать 15.12.13.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 16,74 (18,00).
Тираж 500 экз. Заказ 80.

Отпечатано в типографии Издательства Саратовского университета

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: http://mmi.sgu.ru. Статьи бóльшего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: http://mmi.sgu.ru.

Более подробную информацию о правилах оформления статей можно найти по адресу: http://mmi.sgu.ru.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

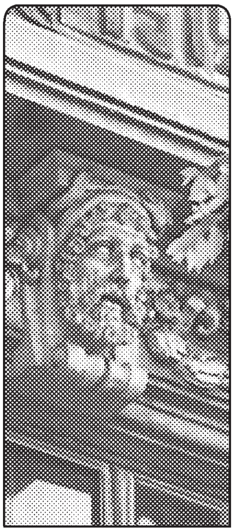
Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

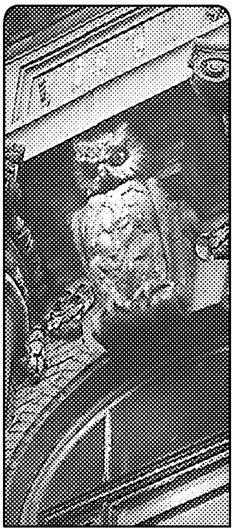


РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ. СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA SARATOVSKOGO UNIVERSITETA. NEW SERIES. SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»

МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 511.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ Г. И. АРХИПОВА

В. Н. Чубариков

Доктор физико-математических наук, декан механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, chubarik1@mech.math.msu.su

В статье приводятся основные научные открытия выдающегося математика Г. И. Архипова за период с конца 1960-х гг. до середины 2000-х гг.

Ключевые слова: суммы Г. Вейля, оценки простых тригонометрических сумм, проблема Гильберта–Камке.

Геннадий Иванович Архипов родился 12 декабря 1945 г. в г. Ельце Липецкой области. В семье было еще двое детей, старше его, сестра Светлана и брат Александр. Родители, Иван Филиппович и Елена Михайловна, были служащими, во время войны находились в эвакуации в Ельце, после войны вернулись в родной г. Орел. На формирование характера маленького Гены большое влияние оказали бабушка Марфа Давыдовна, сестра Светлана и первый учитель математики и физики Геннадий Николаевич Плотников, к которым Геннадий Иванович сохранил горячую любовь, уважение и искреннюю признательность.

С раннего детства Геннадия окружала послевоенная обстановка почти полностью разрушенного Орла, которая оказала сильное влияние на формирование характера. Это и направило его душу на служение обществу, людям. Отсюда — открытость к их заботам и глубокое сопереживание человеческому горю и невзгодам, резкое неприятие несправедливости, готовность без промедления прийти на помощь и добиваться истины. Геннадий Иванович с участием относился не только к несчастьям, но еще в большей степени — к радостям и успехам окружавших его людей. Он обладал редким чувством неподдельного искреннего сопереживания, и поэтому помощь и советы Геннадия Ивановича воспринимались с благодарностью.

С 1953 г. по 1963 г. Г. И. Архипов успешно учился в 24-й средней школе г. Орла, побеждал в областных школьных олимпиадах по математике и физике и представлял Орловскую область на Всероссийских математических олимпиадах. В 1964 г. он окончил специализированную школу-интернат № 18 физико-математического профиля при МГУ в составе ее первого выпуска. В том же году он стал победителем Международной математической олимпиады школьников и был зачислен студентом механико-математического факультета МГУ. В 1969 г. Г. И. Архипов окончил его и поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, которую закончил в 1972 г. В 1975 г. он защитил там блестящую кандидатскую диссертацию на тему «Кратные тригонометрические суммы и приложения» (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба).

С 1983 г. — по приглашению академика И. М. Виноградова — до последних дней жизни (2013 г.) Г. И. Архипов работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. В 1984 г. он защитил выдающуюся докторскую диссертацию на тему «Исследования по проблеме Гильберта–Камке». В 1992 г. эти исследования были отмечены премией имени А. А. Маркова Российской академии наук. Его научные работы неоднократно признавались лучшими по РАН и по Математическому институту им. В. А. Стеклова РАН.

С 1985 г. Г. И. Архипов начинает работать по совместительству сначала доцентом, а затем профессором кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, являясь одним из ведущих лекторов по основному курсу математического анализа.

В 1999 г. Г. И. Архипов в соавторстве с В. А. Садовничим и автором этой статьи подготовил отвечающий современному уровню преподавания учебник «Лекции по математическому анализу», выдержавший уже 6 изданий. Его первое издание в 2000 г. удостоено диплома Ассоциации книгоиздателей России за создание нового учебника. Недавно этот учебник переведен на китайский язык.

Геннадий Иванович является соавтором оригинальных монографий «Кратные тригонометрические суммы»(1980), «Теория кратных тригонометрических сумм»(1987), «Тригонометрические суммы в теории чисел и анализе»(2004), которые стали настольными руководствами для специалистов по аналитической теории чисел в России и за рубежом.

Геннадий Иванович принимал активное участие в организации и проведении научных школ, семинаров и конференций по теории чисел и алгебре. Много сил и энергии им отдано студентам, аспирантам и стажерам. Он оказал огромное влияние на многих известных математиков, работающих в разных странах мира. Среди его учеников доктора и кандидаты наук. Г. И. Архипов обладал поистине энциклопедическими знаниями во многих областях науки и культуры.

Г. И. Архипов скончался в Москве 14 марта 2013 г.

Перейдем к обзору научного творчества Геннадия Ивановича. Оно отражает черту характера его личности — глубоко, до мельчайших деталей, изучить исследуемое явление и изложить найденное решение задачи наиболее простым и понятным образом, поэтому его научные работы читаются очень легко и имеют определенную завершенность.

1. КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

Постановка проблемы принадлежит И. М. Виноградову. В монографии [1, введение] он пишет: «Одною из важнейших для теории чисел проблем является установление различного рода закономерностей в распределении значений функции $f(x_1,\dots,x_r)$ от одной или более переменных... Из весьма разнообразных более частных видов этой в столь общей формулировке поставленной проблемы, получаемых при тех или иных ограничениях, налагаемых как на функцию $f(x_1,\dots,x_r)$, так и на совокупность Ω, мы выделим три достаточно большие и весьма важные для теории чисел проблемы.

1. Весьма важной является проблема распределения значений показательной функции

$$f(x_1,\dots,x_r)=e^{2\pi iF(x_1,\dots,x_r)},$$

где $F(x_1,\dots,x_r)$ — вещественная функция; наиболее существенным в этой проблеме является установление верхней границы модуля суммы

$$S=\sum_{\Omega} f(x_1,\dots,x_r)=\sum_{\Omega} e^{2\pi iF(x_1,\dots,x_r)}$$

всех значений функции $f(x_1,\dots,x_r)$ в том случае, когда число T точек совокупности Ω конечно.

2. С рассмотренной проблемой 1 самым тесным образом связана проблема распределения значений дробных частей

$$f(x_1,\dots,x_r)=\{F(x_1,\dots,x_r)\}$$

вещественной функции $F(x_1, \ldots, x_r)$. Как и в проблеме 1, мы ограничимся здесь лишь рассмотрением случая, когда число T точек совокупности Ω конечно.

3. Особый интерес представляют законы распределения значений функции $f(x_1, \ldots, x_r)$, принимающей для точек $(x_1, \ldots, x_r)$ совокупности Ω целочисленные значения. Здесь в отношении каждого данного целого N возникает вопрос: для скольких точек совокупности Ω это N будет служить значением функции $f(x_1, \ldots, x_r)$; иными словами: каково будет число $I(N)$ решений неопределенного уравнения:

$$f(x_1, \ldots, x_r) = N. \tag{17}$$

В некоторых случаях здесь речь идет только об установлении неравенства $I(N) > 0$, показывающего, что уравнение (17) разрешимо; в других случаях оказывается возможным установить для $I(N)$ асимптотическую формулу; наконец, иногда вопрос ставится о разыскании точного значения $I(N)$, и т. д.»

Г. И. Архипов внёс большой вклад в решение каждой из трёх проблем (см. [2–5]). Так, в своей кандидатской работе он получил первые существенные результаты теории кратных тригонометрических сумм, являющиеся решением первых двух приведенных выше проблем И. М. Виноградова. Эти исследования были отмечены как лучшие по Академии наук СССР за 1976–1980 гг.

Сначала Г. И. Архипов решил проблему моментов теории кратных тригонометрических сумм, составившую первый шаг в решении проблемы 1 И. М. Виноградова. Приведем ее формулировку в виде, данном в оригинальных работах Г. И. Архипова.

Рассмотрим множество пар целых чисел (m,t) с условиями $0 \le t \le m \le n$, где n — натуральное, $n > 4$. Всего таких пар будет

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Занумеруем эти пары числами $0, 1, \ldots, \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ так, чтобы разные пары имели разные номера и номер пары (m_1, t_1) был больше номера (m_2, t_2), если или $m_1 > m_2$, или $m_1 = m_2, t_1 > t_2$. В дальнейшем символ $l = l(m,t)$ всегда будет обозначать определенный таким образом номер пары (m,t). Очевидно, что $l = \frac{m(m+1)}{2} + t$. Обратно, если l — номер пары (m,t), то m является наибольшим целым числом с условием $\frac{m(m+1)}{2} \le l$, а $t = l - \frac{m(m+1)}{2}$.

Пусть K — натуральное, τ — неотрицательное целое,

$$K \ge 2n^3 + n^2\tau, \qquad N = \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1,$$

$\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ — действительные числа;

$$f(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \cdots + \alpha_N y^N = \sum_{m=0}^{n} \sum_{t=0}^{m} \alpha_l x^{m-t} y^t,$$

где $l = \frac{m(m+1)}{2} + t$. Положим $S(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) = \sum\limits_{x=1}^{P} \sum\limits_{y=1}^{P} e^{2\pi i f(x,y)}$.

Теорема 1.1. *При* $P \ge (2n)^{2n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^\tau}$ *имеет место оценка*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)|^{2K}\, d\alpha_0 \ldots d\alpha_N \le K^{2n^2\tau} 2^{3n^3\tau} P^{4K - \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau}.$$

В основе доказательства этой теоремы лежат два оригинальных вспомогательных утверждения.

Рассмотрим систему сравнений в кольце классов вычетов по модулю p^n, p — простое,

$$\sum_{k=1}^{2n^2} (-1)^k z_k^{m-t} v_k^t \equiv \lambda_l \pmod{p^m},$$

где λ_l при $l = 0, 1, \ldots, N$ — фиксированные целые, z_k, v_k при $k = 1, 2, \ldots, 2n^2$ — неизвестные. Обозначим эту систему сравнений буквой W, а число ее решений символом $T(W)$.

Лемма 1.1. *Пусть строки матрицы B, соответствующей набору $(z_1, v_1, \ldots z_{2n^2}, v_{2n^2})$, (т. е. $B = (b_{l,k})$, $b_{l,k} = z_k^{m-t} v_k^t$ при $l = 0, 1, \ldots, N$ и $k = 1, 2, \ldots, 2n^2$) линейно независимы над Z_p — полем вычетов по модулю p. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$T(W) \le n^{2n^2} p^{4n^3 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}.$$

Уточним обозначения. Пусть A — $(N+1)$-мерный вектор, $A = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$, Ω обозначает $(N+1)$-мерный единичный куб. Положим

$$f_A(x, y) = f(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{t=0}^{m} \alpha_l x^{m-t} y^t, \qquad l = \frac{m(m+1)}{2} + t,$$

$$S_Q(A) = S_Q(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) = \sum_{1 \le x \le Q} \sum_{1 \le y \le Q} e^{2\pi i f_A(x,y)},$$

где $Q > 0$ — произвольное действительное число.

Пусть $\Lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_N)$ — целочисленный вектор размерности $N + 1$; (A, Λ) — скалярное произведение векторов A и Λ. Обозначим

$$J(n, K, Q, \Lambda) = \int_{\Omega} |S_Q(A)|^{2K} e^{-2\pi i (A,\Lambda)} dA.$$

При $\Lambda = 0$ величину $J(n, K, Q, \Lambda)$ будем обозначать символом $J_0(n, K, \Lambda)$.

Лемма 1.2. *Пусть $Q > 0$, p — простое, $\frac{2}{3} Q^{1/n} \le p \le Q^{1/n}$, $p \ge n^2$. Тогда*

$$J_0(n, K, Q) \le K^{2n^2} 2^{3n^3 - 1} p^{4K - 4n^2 + 4n^3 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}} J_0\left(n, K - n^2, \frac{Q}{p} + 1\right).$$

2. ОЦЕНКА ДВОЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

Пусть, как и раньше, многочлен

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{t=0}^{m} \alpha_l x^{m-t} y^t$$

с вещественными коэффициентами α_l имеет степень n, причем $0 \le t \le m \le n$ и $l = \dfrac{m(m+1)}{2} + t$. Далее, пусть

$$S_P(A) = \sum_{x=1}^{P} \sum_{y=1}^{P} e^{2\pi i f(x,y)}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\alpha_l = \alpha_{m,t} = u\beta_{m,t}$, $l = 0, \ldots, N = n(n+3)/2$, и пусть для некоторого коэффициента $\beta_{r,s}$ справедливы соотношения*

$$\beta_{r,s} = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{qQ}, \qquad (p, q) = 1, \qquad |\theta| < 1,$$

и, кроме того,

$$P^{1/2} \le q \le Q, \qquad Q = P^{r-1/2}, \qquad P \ge 1.$$

Положим $\rho^{-1} = 25n^3(1 + \ln n)$. Тогда при натуральном u, не превосходящем $P^{2\rho}$, имеет место оценка

$$|S_P(A)| < 2^{5n} P^{2-\rho}.$$

В основе доказательства теоремы 2, кроме теоремы Г. И. Архипова о среднем значении двойной тригонометрической суммы, лежит следующая оригинальная комбинаторная лемма.

Пусть

$$f(x+a, y+b) - f(x+a_0, y+b_0) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r} B_{r,s}x^{r-s}y^s,$$

$$F_{r,s,m} = \sum_{t=s}^{m-r+s} \alpha_{m,t}\binom{m-t}{r-s}\binom{t}{s}(a^{m-1-r+s}b^{t-s} - a_0^{m-1-r+s}b_0^{t-s}).$$

Лемма 2.1. *Справедливы следующие равенства:*

$$a) \quad B_{r,s} = \sum_{m=r}^{n} F_{r,s,m} = \sum_{m=r+1}^{n} F_{r,s,m},$$

$$b) \quad B_{r,s} = \sum_{m=r+1}^{n}\sum_{t=s}^{m-r+s-1} \frac{(m-t-1)!t!}{(r-s)!s!(m-r)!} Q_{m,t}^{(r,s)} F_{m-1,t,m},$$

где $Q_{m,t}^{(r,s)} = Q(m,t,r,s,a,b,a_0,b_0)$ *— коэффициент при* z^t *в разложении по степеням* z *функции*

$$g(z) = \sum_{t=s}^{m-r+s-1} Q_{m,t}^{(r,s)} z^t = z^s \frac{(a+bz)^{m-1} - (a_0+b_0z)^{m-1}}{(a+bz)-(a_0+b_0z)}.$$

3. ДРОБНЫЕ ДОЛИ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Завершает исследования в кандидатской диссертации Г. И. Архипова решение проблемы 2 И. М. Виноградова о равномерном распределении по модулю 1 значений многочленов от двух переменных с хотя бы одним иррациональным коэффициентом.

Теорема 3.1. *Пусть* $P \geq 1$ *и для некоторого коэффициента* $\alpha_{r,s}$ *многочлена* $f(x,y)$ *справедливы соотношения*

$$\alpha_{r,s} = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{qQ}, \qquad (p,q)=1, \qquad |\theta|<1, \qquad P^{1/2} \leq q \leq Q, \qquad Q = P^{r-1/2}.$$

Пусть, далее, σ *— любое число, заключенное в промежутке* $0 < \sigma \leq 1$, *и* $D(\sigma)$ *— количество пар* $(x,y), \quad x,y = 1,2,3,\ldots,P$ *с условием* $\{f(x,y)\} < \sigma$. *Представим* $D(\sigma)$ *в следующем виде:*

$$D(\sigma) = P^2\sigma + \lambda(\sigma).$$

Тогда имеет место оценка

$$|\lambda(\sigma)| \leq P^{2-\rho_1}, \rho_1^{-1} = 26n^3(1+\ln n).$$

4. ИНТЕГРАЛ И. М. ВИНОГРАДОВА

Получены точные оценки моментов тригонометрических сумм Г. Вейля при малых значениях степени осреднения.

Пусть буква S обозначает тригонометрическую сумму Г. Вейля вида

$$S = S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{x=1}^{P} \exp\{2\pi i f(x)\},$$

где $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Интеграл J вида

$$J = J(P;k,n) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|^{2k}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

называется интегралом И. М. Виноградова.

Теорема 4.1. *Пусть $\tau, r_1, \dots, r_\tau, k$ — натуральные числа, где $\tau \geq 1$ и $1 = r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_\tau \leq n$. Далее, положим*

$$\Delta(\tau) = \left(n - \frac{r_\tau - 1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(n - \frac{r_{\tau-1} - 1}{2}\right) + \dots +$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{r_{\tau-1}}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{r_2}\right)\left(n - \frac{r_1 - 1}{2}\right),$$
$$\kappa_\tau = \sum_{j=1}^{\tau}(r_j^2 + \Delta(j)).$$

Тогда при $k \geq n\tau$ и $P \geq 1$ справедлива следующая оценка:

$$J = J(P; n, k) \leq n^{2\Delta(\tau) r_\tau} 2^{\kappa_\tau} (8k)^{2n\tau} P^{2k - \Delta(\tau)}.$$

В частности, отсюда следует, что для любого ε с условием $0 < \varepsilon < 1/2$, $k \leq \varepsilon^2$ и $k = mn$, m — натуральное число, справедлива следующая оценка:

$$J = J(P; n, k) \ll P^{k(1+\varepsilon)}.$$

5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. ПРОБЛЕМА ХУА ЛО-КЕНА

Решена проблема Хуа Ло-Кена о показателе сходимости особого интеграла $\theta = \theta(k)$ проблемы Терри, который имеет вид

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 \exp\{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)\} \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_1.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Интеграл $\theta = \theta(k)$ сходится при $2k > 0,5(n^2 + n) + 1$ и расходится при $2k \leq 0,5(n^2 + n) + 1$.*

Далее сформулируем теорему о показателе сходимости особого интеграла, отвечающего неполной системе уравнений в проблеме Гильберта–Камке.

Теорема 5.2. *Пусть натуральные числа $r, m, \dots, n$ удовлетворяют условиям $r < \dots < m < n$ и $r + \dots + m + n < n(n+1)/2$,*

$$\theta' = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 \exp\{2\pi i(\alpha_n x^n + \alpha_m x^m + \dots + \alpha_r x^r)\} \right|^{2k} d\alpha_n d\alpha_m \dots d\alpha_r.$$

Тогда интеграл θ' сходится при $2k > n + m + \dots + r$ и расходится при $2k \leq n + m + \dots + r$.

6. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

Тригонометрические суммы с многочленом в экспоненте, следуя И. М. Виноградову, будем называть суммами Г. Вейля. Они имеют вид

$$S = S(A) = \sum_{x_1=1}^{P_1} \dots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp\{2\pi i F_A(x_1, \dots, x_r)\},$$

где $F_A(x_1, \dots, x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами $\alpha(t_1, \dots, t_r)$, которые являются координатами точки A в m-мерном единичном кубе Ω, $m = (n_1 + 1) \dots (n_r + 1)$.

Г. И. Архипов совместно с В. Н. Чубариковым решил задачу И. М. Виноградова оценки сумм Г. Вейля при всевозможных значениях коэффициентов многочлена от нескольких переменных, стоящего в экспоненте. Здесь, как и в методе И. М. Виноградова, оценка индивидуальной тригонометрической суммы сводится к оценке ее среднего значения.

Пусть $J = J(\bar{P};\bar{n},k,r)$ обозначает среднее значение степени $2k$ модуля тригонометрической суммы $S(A)$ по кубу Ω, т. е.

$$J = \int \dots \int_{\Omega} |S(A)|^{2k}\, dA.$$

Имеет место следующая теорема о среднем значении.

Теорема 6.1. *Пусть $\tau \geq 0$ — целое число и $n_1,\dots,n_r$ — натуральные числа. Тогда при $k_1 \geq k = m\tau$ для величины интеграла $J = J(\bar{P};\bar{n},k,r)$ справедлива оценка*

$$J \leq k^{2m\tau}\kappa^{4\kappa^2\Delta(\tau)}2^{8m\kappa\tau}(P_1\dots P_r)^{2k_1}P^{-\kappa\Delta(\tau)},$$

где $\kappa = n_1\nu_1+\dots+n_r\nu_r$, $\gamma\kappa = 1$, и $P_1 = \min\{P_1,\dots,P_r\}$, $\Delta(\tau) = 0.5m(1-(1-\gamma)^\tau)$, $P = (P_1^{n_1}\dots P_r^{n_r})^\gamma$, причем $\nu_1,\dots,\nu_r$ — натуральные числа такие, что $-1 < \dfrac{\log P_s}{\log P_1} - \nu_s \leq 0$, $s = 1,\dots,r$.

7. ОЦЕНКИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ. КОМБИНАТОРНАЯ ЛЕММА

Отметим, что вывод оценки суммы существенно зависит от леммы комбинаторного характера, имеющей и самостоятельный научный интерес. Для ее формулировки необходимы следующие обозначения.

Пусть $F(x_1,\dots,x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами,

$$F(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\dots\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}.$$

Определим функции $B = B(u_1,\dots,u_r) = B(\bar{u})$ из равенства

$$F(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r) - F(x_1+z_1,\dots,x_r+z_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\dots\sum_{t_r=0}^{n_r}B(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r},$$

где

$$B(t_1,\dots,t_r) = \sum_{u_1=t_1}^{n_1}\dots\sum_{u_r=t_r}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)\binom{u_1}{t_1}\dots\binom{u_r}{t_r}(y_1^{u_1-t_1}\dots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1}\dots z_r^{u_r-t_r}).$$

Положим $n = n_1+\dots+n_r, t = t_1+\dots+t_r, u = u_1+\dots+u_r$. Пусть функция $A = A(\bar{t};s)$ обозначает форму степени s многочлена $B(\bar{t})$, т. е.

$$A(t_1,\dots,t_r;s) = \sum_{\substack{u_1=t_1\\u=t+s}}^{n_1}\dots\sum_{u_r=t_r}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)\binom{u_1}{t_1}\dots\binom{u_r}{t_r}(y_1^{u_1-t_1}\dots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1}\dots z_r^{u_r-t_r}).$$

Тогда получим $B(\bar{t}) = \sum\limits_{s=0}^{n-u}A(\bar{t};s)$. Заметим, что линейная форма имеет вид

$$A(\bar{t};1) = \sum_{j=1}^{r}(u_j+1)\alpha(u_1,\dots,u_{j-1},u_j+1,u_{j+1},\dots,u_r)(y_j-z_j).$$

Лемма 7.1. *Существуют многочлены $H(\bar{t},\bar{u};s)$ с целыми неотрицательными коэффициентами от переменных $\bar{y},\bar{z}$ такие, что*

$$A(\bar{t};s) = \frac{1}{t_1!\dots t_r!s!}\sum_{\substack{u_1=t_1\\u=t+s-1}}^{n_1}\dots\sum_{u_r=t_r}^{n_r}v_1!\dots v_r!H(\bar{t},\bar{u};s)A(\bar{u};1),$$

причем сумма коэффициентов каждого из многочленов $H(\bar{t},\bar{u};s)$ не превосходит sr^{s-1} и сумма степеней переменных $y_j,z_j (j = 1,\dots,r)$, содержащаяся в любом мономе многочлена H, не превосходит $u_j - t_j (j = 1,\dots,r)$.

Далее, пусть A точка m-мерного единичного куба Ω, координаты которой удовлетворяют условиям $0 \le \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1 \quad (0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r)$, $\alpha(0, \dots, 0) = 0$. Разобьем все точки A куба Ω на два класса Ω_1 и ω_2. Сначала определим области $\Omega(\bar{a}, \bar{q})$, состоящие из всех точек A, координаты которых имеют вид

$$\alpha(t_1, \dots, t_r) = \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \beta(t_1, \dots, t_r),$$

где

$$0 \le a(t_1, \dots, t_r) < q(t_1, \dots, t_r), \quad (a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)) = 1$$

и

$$|\beta(t_1, \dots, t_r)| \le P_1^{-t_1} \dots P_r^{-t_r} P^{0,1}, \qquad 0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r.$$

Пусть Q обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1, \dots, t_r)$, $0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r$, $t_1 + \dots + t_r \ge 1$. Каждой области $\Omega(\bar{a}, \bar{q})$ отвечает свое значение Q. Первый класс Ω_1 состоит из всех областей $\Omega(\bar{a}, \bar{q})$, для которых $Q < P^{0,1}$. Второй класс Ω_2 содержит оставшиеся точки куба Ω. В следующей теореме дана оценка тригонометрической суммы Г.Вейля $S(A)$ для каждой точки A единичного куба Ω.

Теорема 7.1. *Пусть точка A принадлежит первому классу Ω_1, $\nu \max\{n_1, \dots, n_r\} = 1$. Тогда справедлива оценка*

$$|S(A)| \le 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)} (\tau(Q))^{r-1} P_1 \dots P_r Q^{-\nu}.$$

Более того, если $\delta(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1} \dots P_r^{t_r} \beta(t_1, \dots, t_r)$, $\delta = \max\limits_{t_1, \dots, t_r} |\delta(t_1, \dots, t_r)|$, то при $\delta > 1$ справедлива оценка

$$|S(A)| \le 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)} (\tau(Q))^{r-1} P_1 \dots P_r (\delta Q)^{-\nu} (\log(\delta + 2))^{r-1}.$$

Теорема 7.2. *Пусть, далее, точка A принадлежит второму классу Ω_2. Положим $\tau(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1} \dots P_r^{t_r} P^{-1/3}$ и координаты $\alpha(t_1, \dots, t_r)$ точки A представим в виде*

$$\alpha(t_1, \dots, t_r) = \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \frac{\theta(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)\tau(t_1, \dots, t_r)},$$

$$(a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)) = 1, \qquad 1 \le q(t_1, \dots, t_r) \le \tau(t_1, \dots, t_r),$$

$$|\theta(t_1, \dots, t_r)| \le 1, \qquad 0 \le t_1 \le n_1, \dots 0 \le t_r \le n_r.$$

Теорема 7.3. *Пусть Q_0 обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1, \dots, t_r)$ при условии, что $t_1 + \dots + t_r \ge 2$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$|S(A)| \le 2^{32\kappa} P_1 \dots P_r P^{-\rho},$$

где $\rho = (32m\kappa \log(8m\kappa))^{-1}$. Если же $Q_0 \le P^{1/6}$, то для суммы $S(A)$ имеем оценку

$$|S(A)| \le (5n^{2n})^{r\nu(Q_0)} (\tau(Q_0))^{r-1} P_1 \dots P_r P^{-0,1\nu} + 2^{8r} (r\nu^{-1})^{r-1} P_1 \dots P_r P^{-\nu/16}.$$

8. ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА–КАМКЕ. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

Решена классическая проблема Гильберта — Камке об одновременном представлении системы чисел суммами степеней и установлен точный порядок для количества слагаемых.

Более точно проблема Гильберта–Камке состоит в том, чтобы доказать разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = N_1, \\ \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = N_n \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1,\ldots,x_k$ в случае, когда число неизвестных k ограниченно и возрастающие параметры $N_1,\ldots,N_n$ удовлетворяют некоторым естественным условиям.

Другими словами, следует получить наилучшую возможную оценку $r(n)$ для количества переменных k, при котором эта система уравнений разрешима.

Пусть P — натуральное число, переменные $x_1,\ldots,x_k$ системы уравнений Гильберта–Камке лежат в пределах от 1 до P и $I=I(P;n,k;N_1,\ldots,N_n)$ обозначает число ее решений.

Теорема 8.1. *При $k\geq n^2(4\log n+2\log\log n+9)$, $k\leq P^{0,1}$ и при $P\to\infty$ справедлива асимптотическая формула:*

$$I=\sigma\gamma P^{k-0,5n(n+1)}+\theta n^{30n^3}P^{k-0,5n(n+1)-(30(2+\log n))^{-1}},$$

кроме того, имеет место оценка $I\leq n^{30n^3}P^{k-0,5n(n+1)}$. Здесь θ — вещественное число, $|\theta|\leq 1$, и σ, γ — неотрицательные числа.

Теорема 8.2. *Значение величины σ равно сумме «особого ряда в проблеме Гильберта–Камке», значение величины γ равно значению величины «особого интеграла в проблеме Гильберта–Камке», а именно*

$$\sigma=\sum_{q_1}^{\infty}\cdots\sum_{q_n}^{\infty}\sum_{\substack{0\leq a_1<q_1\\(a_1,q_1)=1}}\ldots\sum_{\substack{0\leq a_n<q_n\\(a_n,q_n)=1}}q^{-k}V^k\exp-2\pi iA,$$

$$\gamma=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W^k\exp-2\pi iB\;d\beta_1\ldots d\beta_n,$$

где $q=q_1\ldots q_n$,

$$V=\sum_{x=1}^{q}\exp\left\{2\pi i\left(\frac{a_1x}{q_1}+\cdots+\frac{a_nx}{q_n}\right)\right\},\qquad A=\frac{a_1N_1}{q_1}+\cdots+\frac{a_nN_n}{q_n},$$

$$W=\int_0^1\exp\{2\pi i(\beta_1x+\cdots+\beta_nx^n)\}\,dx,\qquad B=\frac{\beta_1N_1}{P}+\cdots+\frac{\beta_nN_n}{P^n}.$$

Показатель сходимости $k=k_0$ особого ряда $\sigma=\sigma(k)$ равен $0.25n(n+1)+1$, а особого интеграла $\gamma=\gamma(k)$ равен $0.25n(n+1)+0.5$.

Заметим, что полученная асимптотическая формула нетривиальна тогда и только тогда, когда особый ряд σ и особый интеграл γ положительны. Более того, если $\sigma=0$, то система уравнений Гильберта–Камке не имеет решений вообще, а если $\gamma=0$, то число ее решений остается ограниченным при растущих числах $N_1,\ldots,N_n$. Необходимое условие арифметического характера для разрешимости системы уравнений Гильберта–Камке состоит в том, что система линейных уравнений

$$\begin{cases}t_1\cdot 1+\cdots+t_n\cdot n=N_1,\\ \ldots\qquad\ldots\\ t_1\cdot 1^n+\cdots+t_n\cdot n^n=N_n\end{cases}$$

разрешима в целых числах $t_1,\ldots,t_n$. Обозначим его через (H). В несколько иной форме это условие впервые было сформулировано К. К. Марджанишвили.

Теорема 8.4. *Пусть $k\geq T=\min\{n^22^{2n-1},3n^32^n-n\}$. Тогда при условии (H) для особого ряда σ справедливо неравенство*

$$\sigma\geq n^{-20n^42^n}.$$

Если же для наборов $(N_1,\ldots,N_n)$ выполняется условие (H) и $\sigma=0$, то $k<2^n-1$.

Для исследования особого интеграла γ Г.И.Архипов вводит понятие характеристики числового множества на отрезке $[0,1]$. Пусть $l \geq n$ и множество $\{0 \leq y_1,\dots,y_l \leq 1\}$. Произвольным способом κ выбираем из них n чисел с различными индексами. Пусть это будут $z_1,\dots,z_n$ и полагаем $z_0 = 0, z_{n+1} = 1$. Тогда величина

$$\Delta(y_1,\dots,y_l) = \max_{\kappa} \min_{0\leq i<j\leq n+1} |z_i - z_j|$$

называется характеристикой множества $\{y_1,\dots,y_l\}$. Характеристика множества $\{x_1,\dots,x_k\}$, которое является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = \beta_1, \\ \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = \beta_n, \end{cases}$$

где $\beta_s = N_s P^{-s}$, $s = 1,\dots,n$ и неизвестные $x_1,\dots,x_k$ могут принимать значения из отрезка $[0,1]$, называется характеристикой этого решения. Обозначим через ε максимальное значение характеристики решений указанной системы уравнений.

Теорема 8.5. *Справедливы следующие неравенства:*

$$2^{2n(n-k)} k^{n-k} n^{-k-n} \varepsilon^{n(k-n)} \leq \gamma \leq 2^{2n^2} k^{2n} n^{k-2n} \varepsilon^{k-3n-n^2}.$$

Заметим, что если особый интеграл γ равен 0, то $\varepsilon = 0$. Это означает, что среди чисел решения $x_1,\dots,x_k$ найдется не более $n-1$ различных. То же самое можно сказать и о решениях системы уравнений Гильберта–Камке с правыми частями $N_1,\dots,N_n$.

9. ГИПОТЕЗА АРТИНА

Дано принципиальное опровержение гипотезы Артина о представлении нуля формой и системой форм в поле p-адических чисел. Это исследование продолжает работу по проблеме Гильберта–Камке.

Пусть p — простое число, $F(x_1,\dots,x_k)$ — форма степени n от k переменных $x_1,\dots,x_k$ с целыми коэффициентами над полем p-адических чисел Q_p. Если существуют целые p-адические числа $x_1,\dots,x_k$, хотя бы одно из которых не равно нулю, и $F(x_1,\dots,x_k) = 0$, то говорят, что существует нетривиальное представление нуля формой F в поле Q_p. Гипотеза Артина предполагала, что для любого простого числа p, $n \geq 1$ и $k > n^2$, форма $F(x_1,\dots,x_k)$ степени n нетривиально представляет нуль в поле Q_p. Эта гипотеза была опровергнута Г. Тержаньяном и Д. Бровкиным. После чего возникло предположение о том, что величину n^2 в формулировке гипотезы Артина следует заменить на n^3. Подобное утверждение для системы форм было опровергнуто в докторской диссертации Г. И. Архипова. Оказалось, что количество переменных в этом случае имеет порядок не менее 2^n. Той же силы результаты были получены и для одной формы.

Говорят, что форма F не представляет нуль по модулю p, если для некоторого натурального числа r из сравнения

$$F(x_1,\dots,x_r) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

следует, что

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Теорема 9.1. *Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_0 = n_0(r)$ такое, что для любого $n \geq n_0$ найдется форма $F(x_1,\dots,x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю 2; число ее переменных k,*

$$k > 2^u, \qquad u = \frac{n}{\log_2 n \cdot \log_2\log_2 n \dots \underbrace{\log_2 \dots \log_2 n}_{} \cdot \underbrace{\log_2 \dots \log_2^2 n}_{}}.$$

Теорема 9.2. *Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_1 = n_1(r)$ такое, что для любого $n \geq n_1$ найдется форма $F(x_1, \ldots, x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю p; число ее переменных k,*

$$k > p^u, \qquad u = \frac{n}{\log_p n \cdot \log_p \log_p n \ldots \underbrace{\log_p \ldots \log_p n}\cdot \underbrace{\log_p \ldots \log_p^2 n}}.$$

10. АДДИТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ С НЕЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Найден новый метод оценок тригонометрических сумм, основанный на оценке величин производных функции, стоящей в экспоненте, что позволило получить новую оценку показателя нецелой степени в асимптотической формуле для количества простых чисел в задаче Пятецкого–Шапиро.

Пусть $x \geq 1$ — вещественное число, $c > 0$ — произвольная постоянная и $\pi_c(x)$ — количество простых чисел вида $[n^c]$ при $n \leq x$, где символ $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Теорема 10.1. *При $1 < c < \dfrac{149}{129} = 1\dfrac{1}{6.45} = 1.1550\ldots$ и при $x \to \infty$ имеет место асимптотическая формула:*

$$\pi_c(x) = \frac{x}{c \log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Теорема 10.2. *При $1 < c < \dfrac{149}{129}$ и при $x \to \infty$ имеет место асимптотическая формула:*

$$\sum_{n \leq T} \tau_k(n) = TQ_{k-1}(\log T) + O\left(\frac{T}{\log T}\right),$$

где $\tau_k(n)$ — количество решений в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ уравнения $x_1 \ldots x_k = n$, $Q_{k-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $k-1$.

Одним из обобщений проблемы Варинга является задача о представлении натурального числа N ограниченным количеством слагаемых вида $[n^c]$, где n принимает значения натуральных чисел и $c > 1$ — фиксированное нецелое число.

Пусть $W_{k,c}(N)$ обозначает количество решений в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ уравнения

$$[x_1^c] + \cdots + [x_k^c] = N.$$

В 1972 г. Ж. М. Дезуйе вывел асимптотику при $N \to \infty$ величины $W_{k,c}(N)$ для k порядка $c^3 \log c$. Заметим, что в классической проблеме Варинга при натуральном c данная асимптотика найдена И. М. Виноградовым при k порядка $c^2 \log c$. Результат той же силы, что и при натуральном c, получен Г. И. Архиповым и А. Н. Житковым.

Теорема 10.3. *Пусть $k > 22c^2 \log(c+4)$, $\gamma c = 1$. Тогда для величины $W_{k,c}(N)$ при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула:*

$$W_{k,c}(N) \asymp \frac{\Gamma^k(1+\gamma)}{\Gamma(k\gamma)} N^{k\gamma - 1}.$$

11. РЯДЫ ВИНОГРАДОВА

Доказана сходимость тригонометрических рядов Виноградова. В частности, доказано, что для любого вещественного числа α сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\alpha n^3)}{n}.$$

Пусть r — натуральное число, $P(x)$ — алгебраический многочлен степени r с вещественными коэффициентами и $\mathscr{P}_r$ обозначает множество всех многочленов степени r с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим симметрическую частичную сумму:

$$h_N(P) = \sum_{1\le|n|\le N} \frac{e^{2\pi i P(n)}}{n}, \qquad N \ge 1,$$

ряда $h(P) = v.p. \sum\limits_{n\ne 0} \dfrac{e^{2\pi i P(n)}}{n}$.

Теорема 11.1. *Пусть $r \ge 2$. Тогда*

$$\sup_{N\ge 1} \sup_{P\in\mathscr{P}_r} |h_N(P)| = g_r < \infty.$$

Далее, для каждого многочлена $P \in \mathscr{P}_r$ последовательность $h_N(P)$ сходится при $N \to \infty$ и сумма ряда $h(P)$, рассматриваемая в смысле главного значения, ограничена на $\mathscr{P}_r$.

12. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В БИНАРНЫХ ПРОБЛЕМАХ ГОЛЬДБАХОВА ТИПА

Получены принципиально новые оценки мощности исключительного множества в аддитивных задачах типа проблемы Гольдбаха.

Теорема 12.1. *Пусть λ_1, λ_2 — положительные вещественные числа такие, что λ_2/λ_1 — иррациональное алгебраическое число. Пусть, далее, $T_2(x)$ обозначает количество натуральных чисел $n \le x$, для которых не существует решений уравнения*

$$[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2] = n,$$

где p_1 и p_2 — простые неизвестные. Тогда для любого ε справедлива оценка

$$T_2(x) \ll_\varepsilon x^{2/3+\varepsilon}.$$

Константа в знаке $\ll_\varepsilon$ неэффективная.

В основу доказательства этого утверждения положены явные формулы в теории дзета-функции Римана и следующая лемма о совместном приближении двух чисел.

Лемма 12.1. *Пусть $1 \le Q \le X^{1/2}$, a — целое число, q — натуральное число, $(a, q) = 1$, $q \in [1, Q]$ и интервал $I_{a,q}$ вида*

$$I_{a,q} = \left(\frac{a}{q} - \frac{Q}{X}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{X}\right).$$

Далее, пусть β — иррациональное алгебраическое вещественное число, α, t — вещественные числа, $|t| \gg X^{-1/3}, \alpha, \beta \in (1, 2), k$ — целое число, $|k| \le \log X$. Обозначим через μ меру множества T точек $\{t\}$ таких, что оба числа $\nu_1 = t\alpha\beta$ и $\nu_2 = (t + k)\alpha$ лежат в некоторых промежутках из указанной выше совокупности $\{I_{a,q}\}$, т. е. $\nu_1 \in I_{a,q}$ при некотором значении $a = a_1, q = q_1$ и с параметром $Q = Q_1$ (т. е. $q_1 \le Q_1$); $\nu_2 \in I_{a,q}$ при значениях $a = a_2, q = q_2$ с параметром $Q = Q_2$ (т. е. $q_2 \le Q_2$).

Тогда для величины μ имеет место оценка сверху вида

$$\mu \ll_\varepsilon X^{-2+\varepsilon} Q_1^2 Q_2^2,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно мало.

13. ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ В ОБЛАСТЯХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА–БЕЛЬТРАМИ

Впервые получены эффективные оценки первого собственного значения оператора Лапласа–Бельтрами для дискретной подгруппы движений в трехмерном пространстве Лобачевского.

Получено уточнение формулы Левитана для количества целых точек в круге на плоскости Лобачевского, а также степенное улучшение оценок Эстермана и Хис-Брауна для среднего значения функции делителей от квадратичного многочлена.

Для любых двух точек $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$ из верхней полуплоскости $(y, y' > 0)$ определим расстояние между ними $d = d(z, z')$. Положим

$$u = u(z, z') = \frac{|z - z'|^2}{yy'}.$$

Тогда расстояние d задается равенством

$$d = \ln\left(\frac{u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u}}{2}\right).$$

Круг $K(z_0, T)$ с центром в точке z_0 и радиусом T состоит из точек z, удовлетворяющих неравенству $d(z_0, z) \leq T$. Обозначим символом $N(z_0, T)$ количество элементов γ модулярной группы $PSL_2(Z) = SL_2(Z)/\pm I$ таких, что точка γz_0 попадает в круг $K(z_0, T)$. Положим $N(T) = N(i, T)$.

Теорема 13.1. *При $T \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$N(T) = 8 \operatorname{ch} T + O(e^{3T/4} T^4).$$

К этой задаче близка по формулировке классическая проблема Ингама о среднем значении количества делителей от разложимого квадратичного многочлена. Сам А. Ингам в 1927 г. выделил главный член его асимптотики. В 1931 г. Т.Эстерман получил оценку остатка $x^{11/12} \log^{17/3} x$. Последняя оценка была улучшена до значения $O(x^{5/6+\varepsilon})$ только в 1978 г. Д. Исмоиловым, в 1979 г. Хис-Брауном и в 1984 г. А. И. Виноградовым и Л. А. Тахтаджяном. В 2006 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков дали новое степенное понижение остаточного члена вида $O(x^{3/4+\varepsilon})$. Пусть символом $\tau(n)$ обозначается функция количества делителей числа n, а символом $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, и $\gamma = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. Положим

$$\xi_0 = \frac{6}{\pi^2}, \qquad \xi_j = (-1)^j \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) d^{-2} \ln^j d, \qquad j \geq 1.$$

Теорема 13.2. *При $x \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$I(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n)\tau(n+1) = \sum_{n \leq x} \tau(n^2 + n) = M(x) + R(x),$$

где главный член $M(x)$ асимптотической формулы имеет вид

$$M(x) = x(A_0 \ln^2 x + A_1 \ln x + A_2),$$
$$A_0 = \xi_0, \qquad A_1 = (4\gamma - 2)\xi_0 + 4\xi_1, \qquad A_2 = ((2\gamma - 1)^2 + 1)\xi_0 + 4(2\gamma - 1)\xi_1 + 4\xi_2,$$

а остаточный член оценивается следующим образом:

$$R(x) \ll x^{3/4} \ln^4 x.$$

14. МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРОБЛЕМ ГОЛЬДБАХА–ВАРИНГА И ГИЛЬБЕРТА–КАМКЕ

Получены оценки количества слагаемых в аддитивных задачах, являющихся многомерным обобщением проблем Гольдбаха–Варинга и Гильберта–Камке. Обнаружен ряд неожиданных эффектов. Оказалось, что если переменные пробегают значения:

а) натуральных чисел, то количество слагаемых возрастает экспоненциальным образом относительно степени и слабо зависит от размерности, б) простых чисел — зависимость для количества слагаемых факториальная от степени и экспоненциальная по размерности,

в) целых алгебраических чисел — скорость роста количества слагаемых существенно меньше показательной функции от степени системы уравнений.

Приведем результаты относительно асимптотически точной формулы для числа слагаемых в проблеме Гильберта–Камке в простых числах, состоящей в том, что при некоторых естественных условиях набор $\{N_1, \ldots, N_n\}$ из n растущих натуральных чисел представляется в виде ограниченного числа наборов $\{p, \ldots, p^n\}$, где p — простое число. Другими словами, найдется число $V(n)$ такое, что для любого набора $\{N_1, \ldots, N_n\}$, удовлетворяющего некоторым естественным условиям, существуют простые числа $p_1, \ldots, p_k$, где $k \leq V(n)$, такие, что имеем:

$$\begin{cases} p_1 + \cdots + p_k = N_1, \\ \ldots \qquad \ldots \\ p_1^n + \cdots + p_k^n = N_n. \end{cases}$$

Эту систему уравнений называют системой Марджанишвили–Хуа (МН-система).

Имеется два типа условий на набор $N_1, \ldots, N_n$ для его представимости в приведенном выше виде: вещественной и арифметической разрешимости. Набор $(N_1, \ldots, N_n)$, удовлетворяющий этим условиям, называется допустимым.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon > 0$ — постоянные, и пусть переменные $\theta_m = \theta_m(N_1, \ldots, N_m, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям $|\theta_m| \leq 1, m = 1, \ldots, n$. Далее, предположим, что при $N_1 \geq N_0(\varepsilon)$ справедливы следующие соотношения

$$N_m = N_1^m(\gamma_m + O(N_1^{-\varepsilon})), \qquad m = 1, \ldots, n.$$

Говорят, что набор $(N_1, \ldots, N_n)$ условию вещественной разрешимости, если система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = \gamma_1, \\ \ldots \qquad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = \gamma_n \end{cases}$$

разрешима в вещественных числах $0 \leq x_1, \ldots, x_k \leq 1$, где матрица Якоби

$$\|m x_s^{m-1}\| \qquad (m = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k)$$

решения $x_1, \ldots, x_k$ имеет максимальный ранг. При $k \geq m$ он равен m. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 14.1. *Пусть набор $(N_1, \ldots, N_n)$ удовлетворяет условию вещественной разрешимости. Тогда особый интеграл асимптотической формулы для количества решений МН-системы положителен. В противном случае особый интеграл равен нулю и МН-система имеет только конечное число решений.*

Далее представим натуральное число $n+1$ в виде

$$n + 1 = l_p(p-1) + r_p, 0 \leq r_p \leq p - 1, l_p = [(n+1)/(p-1)].$$

Теорема 14.2. *Для того чтобы МН-система была разрешима, необходимо, чтобы выполнялись арифметические условия следующего вида: для любого простого числа $p \leq n+1$ разрешимы системы сравнений*

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu,p}\nu^m \equiv N_m \pmod{p^{\delta_p}}, \qquad m = 1, \ldots, n,$$

где $\delta_p = n + l_p$ и неизвестные $t_{\nu,p}$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^{δ_p}.

Пусть символ k_p обозначает сумму

$$k_p = \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu,p}, \qquad p \le n+1$$

и $k_0 = k_0(N_1, \ldots, N_n)$ — наименьшее неотрицательное целое число, удовлетворяющее системе сравнений

$$k_0 \equiv k_p \pmod{p^{\delta_p}}, \qquad p \le n+1.$$

Теорема 14.3. *Для любого допустимого набора $(N_1, \ldots, N_n)$ число k слагаемых в МН-системе имеет вид $k = k_0 + tb(n)$, где t — неотрицательное целое число и $b(n) = \prod\limits_{p \le n+1} p^{\delta_p}$.*

Отсюда следует, что $V(n) \sim b(n)$ при $n \to \infty$.

15. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Найдены новые оценки абсциссы и показателя Карлсона в теории моментов дзета-функции Римана.

Абсциссой Ф. Карлсона называют величину σ_k, определяемую соотношениями вида

$$\sigma_k = \inf M,$$

где M — множество всех вещественных чисел σ, для которых справедлива оценка

$$I_k = I_k(\sigma, T) = T^{-1} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k}\, dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon,$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $k > 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные вещественные числа.

Теорема 15.1. *Пусть при некотором a, где $1 \le a \le 20, t \ge 1$ и всех $\sigma \in (1/2, 1)$ выполняется оценка*

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Пусть, далее, $k_0 = 44 - [22/a]$. Тогда для функции σ_k при всех $k \ge 45$ имеет место оценка

$$\sigma_k \le 1 - \frac{1}{(3a(k-k_0) + (3a(k-k_0))^{1/2})^{2/3}}\,.$$

Экспонентой Ф. Карлсона называют величину $m(\sigma)$, определяемую равенством $m(\sigma) = 2f(\sigma)$, где $f(\sigma)$ — функция, обратная к σ_k. Функцию $m(\sigma)$ можно определить как $\sup\{m\}$, где m таково, что при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\int\limits_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2m}\, dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon.$$

Теорема 15.2. *При всех $\beta \ge \beta_1 = \dfrac{2701}{2880}$ и $k_0 = 44 - [22/a]$ справедлива оценка*

$$\frac{m(\beta)}{2} \ge k_0 - 1 + \frac{1}{3a(1-\beta)^{3/2}} - \frac{1}{(3a)^{1/2}(1-\beta)^{3/4}}.$$

16. ОЦЕНКА ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА НА ЕДИНИЧНОЙ ПРЯМОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Дано улучшение современной оценки модуля дзета-функции Римана в критической полосе в окрестности единичной прямой.

Теорема 16.1. *Пусть для некоторого $\gamma \geq 3600^{-1}$ и для всех $1 \geq y \leq t^{0.5}$ справедлива оценка вида*

$$\left|\sum_{n\leq y} n^{it}\right| \leq cy \exp -\gamma \ln^3 y \cdot \ln^{-2} t,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Тогда при $1 \geq \sigma > 1 - 2\cdot 10^{-4}$, $t \geq 1, s = \sigma + it$ имеет место оценка

$$|\zeta(s)| \ll t^{a(1-\sigma)^{1,5}} (\ln t)^{2/3} \left((1-\sigma)^{1/4}(\ln t)^{1/6} + 1\right)^{-1},$$

где $a = 2\cdot 3^{-1.5}\gamma^{-0.5}$.

Доказательство основано на следующем утверждении, имеющем и самостоятельный интерес.

Теорема 16.2. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа, $n \geq 1$, $f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x$, $\beta_r(x) = f^{(r)}(x)/r!$, $r = 1, \ldots, n$. Далее, пусть $\beta_0 = (b-a)^{-1}$, $W(x) = |\beta_0| + \sum\limits_{r=1}^{n} |\beta_r(x)|^{1/r}$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$I = \int_a^b e^{f(x)}\, dx \leq e^{M+1} n(n+1) H^{-1},$$

где $H = \min\limits_{a\leq x\leq b} W(x)$, $M = \max\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$.

17. ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ ИСХОДНЫХ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Выполнен цикл исследований по вопросам общей теории сходимости, важных для обоснования исходных понятий математического анализа [6].

Пусть A — основное множество элементов. Определим множество B — базу его подмножеств. База B состоит из бесконечного числа окончаний $b \subset A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) любое окончание $b \in B$ непустое множество;

2) для любых двух окончаний $b_1 \in B$ и $b_2 \in B$ найдется окончание $b_3 \in B$ такое, что $b_3 \in b_1 \cap b_2$.

Далее ограничимся рассмотрением баз, для которых выполняются следующие три условия.

3) для любых двух окончаний $b_1 \in B$ и $b_2 \in B$ выполняется одно из следующих двух включений: $b_1 \subset b_2$ или $b_2 \subset b_1$.

Назовем последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in A$, фундаментальной по базе B, если для любого окончания $b \in B$ только конечное число ее членов не принадлежит b. Фундаментальную последовательность назовем монотонной по базе B, если для любого окончания $b \in B$ условие $x_n \in b$ влечет $x_{n+1} \in b$.

4) существует, по крайней мере, одна монотонная последовательность по базе B;

Наконец, пусть функция $f(x)$ определена на основном множестве A и пусть $D = \bigcap\limits_{b\in B} b$. Тогда последнее ограничение на базу B имеет следующий вид:

5) или D пустое множество, или функция $f(x)$ на множестве D.

Число l называют пределом функции $f(x)$ по базе B (в смысле Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b \in B$ такое, что для любого элемента x из b имеем $|f(x) - l| < \varepsilon$. Дадим теперь определение предела функции в смысле Гейне. Число l называют пределом функции $f(x)$ по базе B (в смысле Гейне), если для любой монотонной последовательности по базе B имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Теорема 17.1. *Понятия предела функции по базе в смысле Коши и в смысле Гейне эквивалентны.*

Число l называется частичным пределом по базе B, если существует монотонная по базе B последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Наибольший (наименьший) частичный предел функции

$f(x)$ по базе B называется верхним (нижним) пределом функции $f(x)$ по базе B. Функцию $f(x)$ называют финально ограниченной по базе B, если окончание базы, на котором функция ограничена.

Теорема 17.2. *Пусть функция финально ограничена по базе B. Тогда справедливы следующие равенства*

$$\overline{\lim_{B}} f(x) = \inf_{b \in B} \sup_{x \in b} f(x), \qquad \underline{\lim_{B}} f(x) = \sup_{b \in B} \inf_{x \in b} f(x).$$

Доказаны также теоремы о двойных, повторных и последовательных пределах по базам множеств.

18. УПРОЩЕНИЕ И УТОЧНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Дано простое доказательство формул Эйлера, Абеля и Пуассона суммирования значений функций по целым точкам отрезка на вещественной прямой. Получено уточнение теоремы ван дер Корпута о замене тригонометрической суммы на интеграл и теоремы И. М. Виноградова о замене тригонометрической суммы на более короткую с небольшой ошибкой (формула обращения для тригонометрических сумм).

Теорема 18.1. (Модификация метода «стаканчиков» И. М. Виноградова). *Пусть α и β — вещественные числа, $0 \le \alpha \le \beta \le 1$. Рассмотрим периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом единица такую, что она принимает значение 1 при $\alpha < x < \beta$, 0 — при $\beta < x < \alpha + 1$, и удовлетворяет условию $|\varphi(x)| \le 1$ при $x = \alpha$ и $x = \beta$. Тогда функция $\varphi(x)$ представляется в виде*

$$\varphi(x) = \beta - \alpha + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\pi n(x+\alpha) - \sin 2\pi n(x+\beta)}{\pi n} + R,$$

где $N \ge 10$ — произвольное натуральное число, $R = R(x) = R_N(x+\alpha) - R_N(x+\beta)$, и при всех x справедлива оценка $|R_N(x)| \le \psi_M(x)$.

Теорема 18.2. *Здесь $M = \pi\sqrt{3}(2N+1)/4$ и $\psi_M(x)$ — периодическая функция с периодом единица такая, что она разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вида*

$$\psi_M(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x},$$

коэффициенты которого оцениваются следующим образом:

$$|c_m| \le 3M^{-1}(2 + \ln M)e^{-|m|/M}.$$

Теорема 18.3. (Аналог формулы Виноградова–ван дер Корпута обращения для кратных тригонометрических сумм). *Пусть функция $f = f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в области Ω, выпуклой по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$ в прямоугольном параллелепипеде $a_k \le x_k \le b_k$, $1 \ll a_k < b_k \ll a_k$ и пусть $A_k > 1$, $1 \le k \le n$, — вещественные числа. Наконец, пусть все третьи частные производные $f(\bar{x})$ непрерывны в Ω и пусть в Ω выполняются условия*

$$f'_{x_k}(\bar{x}) \asymp a_k A_k^{-1}, \qquad f^{>>}_{x_k x_k}(\bar{x}) \asymp A_k^{-1}, \qquad f^{>>'}_{x_k x_k x_k}(\bar{x}) \asymp (a_k A_k)^{-1}.$$

Тогда кратная тригонометрическая сумма

$$S = \sum_{\bar{x} \in \Omega} e^{2\pi i f(\bar{x})}$$

может быть записана в виде

$$S = e^{-\pi i n/4} \sum_{\bar{\nu} \in \Omega_1} |G|^{-1/2} e^{-2\pi i g(\bar{\nu})} + R,$$

где $g(\bar{\nu}) = x_1\nu_1 + \cdots + x_n\nu_n - f(x_1, \ldots, x_n)$, и при целочисленных наборах $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ набор вещественных чисел $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ определяется из системы уравнений

$$f'_{x_k}(\bar{x}) = \nu_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Через $G = G(\bar{x})$ *обозначается определитель матрицы, составленной из всех вторых частных производных функции* $f(\bar{x})$ *(гессиан функции* $f(\bar{x})$*), а область* Ω_1 *есть образ области* Ω *при отображении* $F : \Omega \to \Omega_1$*, задаваемом системой уравнений*

$$f'_{x_k}(\bar{x}) = \nu_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

причем гессиан $G(\bar{x}) \neq 0$ *для всех* $\bar{x} \in \Omega$*. (Другими словами, набор* $(\bar{\nu}, g)$ *является преобразованием Лежандра набора* $(\bar{x}, f)$*). Для величины* R *справедлива оценка*

$$R \ll a_1 \ldots a_n (A_1^{1/2} a_1^{-1/2} + \cdots + A_n^{1/2} a_n^{-1/2}).$$

Теорема 18.4. (Уточнение остаточного члена в формуле ван дер Корпута замены тригонометрической суммы на интеграл). *Пусть* a *и* b *— полуцелые числа,* $f(x)$ *— вещественная функция на* (a, b)*, причем* $f'(x)$ *непрерывна и монотонна на* (a, b) *и* $|f'(x)| \leq \delta < 1$*. Тогда справедлива формула*

$$\sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx + R_0,$$

где $|R_0| \leq 4\delta/(1-\delta)$.

19. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ И РАБОТА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В студенческие и аспирантские годы Г. И. Архипов работал в математическом классе школы №179 и был членом оргкомитетов Московских математических олимпиад школьников, составителем сборников подготовительных задач. В его выступлениях на конференциях и статьях даны концепции развития школьного математического образования в России, а также освещено участие в этом процессе выдающихся российских математиков, представлено современное состояние математического образования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* НК 13-01-00835).

Библиографический список

1. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. МИАН СССР. М.; Л. : Изд-во АН СССР, 1947. Т. XXIII. 109 с.

2. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Кратные тригонометрические суммы // Тр. МИАН СССР. М. : Наука, 1980. Т. 151. 128 с.

3. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Теория кратных тригонометрических сумм. М. : Наука, 1987. Т. 151. 368 с.

4. *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. , Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis (De Gruyter expositions in mathematics; 39). Berlin; N. Y. : Walter de Gruyter, 2004. 554 p.

5. *Архипов Г. И.* Избранные труды. Орёл : Изд-во Орловск. ун-та, 2013. 437 с.

6. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу : учебник для вузов. 5-е изд., испр. М. : Дрофа, 2005. 640 с.

Mathematical life of G. I. Arkhipov

V. N. Chubarikov

M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia, 119991, Leninskie Gory, 1, chubarik1@mech.math.msu.su

This paper presents the most important discoveries made by outstanding mathematician G. I. Arhkipov since the end of 60s to the middle of 2000s.

Key words: exponential sums, simple trigonometric sums estimates, Hilbert–Kamke problem.

References

1. Vinogradov I. M. Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisell [Trigonometric sums method in number theory]. *Trudy Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR*. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR, 1947, vol. XXIII, 109 p. (in Russian).
2. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. Kratnye trigonometricheskie summy [Multiple trigonometric sums]. *Trudy Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR*. Moscow, Nauka, 1980, vol. 151, 128 p. (in Russian).
3. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. *Teoriia kratnykh trigonometricheskikh summ* [Theory of multiple trigonometric sums]. Moscow, Nauka, 1987, vol. 151, 368 p. (in Russian).
4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. *Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis (De Gruyter expositions in mathematics; 39)*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2004, 554 p.
5. Arkhipov G. I. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Orel State University Press, 2013, 437 p. (in Russian).
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. *Lektsii po matematicheskomu analizu : Uchebnik dlia vuzov. 5-e izd.,ispr.* [Lectures on calculus. University coursebook. 5th edition, corrected]. Moscow, Drofa, 2005, 640 p. (in Russian).

УДК 512.522

ПОЛУПРОСТЫЕ ГРАДУИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

И. Н. Балаба[1], Е. Н. Краснова[2]

[1]Доктор физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, ibalaba@mail.ru

[2]Аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, KrasnovaEN.ne@yandex.ru

Получен градуированный аналог теоремы Веддерберна–Артина, дающий описание полупростых G-градуированных колец для произвольной группы G. Дана гомологическая классификация полупростых градуированных колец.

Ключевые слова: градуированные кольца, градуированные модули, полупростые кольца.

В последнее время возрос интерес к алгебраическим объектам, снабженным градуировкой; активно развивается структурная теория градуированных колец. Важным направлением в этих исследованиях является описание простых и полупростых объектов. Ряд результатов, описывающих строение простых и полупростых градуированных колец, можно найти в монографии К. Настасеску (C. Năstăsescu) и Ф. ван Ойстайена (F. van Oystaeyen) [1]. В [2] изучались градуированные центральные простые алгебры, а в [3] дано описание конечномерных простых градуированных алгебр над алгебраически замкнутым полем.

Целью данной работы является описание полупростых градуированных колец.

Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей 1, все модули — унитарными, G — мультипликативная группа с единичным элементом e.

Кольцо A называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, где $\{A_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца A и $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества $h(A) = \bigcup_{g\in G} A_g$ называются *однородными элементами* кольца. Идеал I кольца A называется *градуированным*, если $I = \bigoplus_{g\in G}(I \bigcap A_g)$. *Изоморфизмом* градуированных колец называется сохраняющий градуировку кольцевой изоморфизм.

Правый A-модуль называется *G-градуированным*, если если $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$, где $\{M_g|g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в абелевой группе $(M, +)$ и $M_gA_h \subseteq M_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Аналогично определяется левый градуированный A-модуль. Обозначим через $\mathrm{gr.mod}-A$ категорию правых градуированных A-модулей, объектами которой являются правые градуированные A-модули, а морфизмами — сохраняющие градуировку гомоморфизмы.

Для правых градуированных модулей M_A и N_A обозначим через $\mathrm{HOM}_A(M, N)_g$ множество *однородных гомоморфизмов степени g*, т. е. A-линейных отображений, для которых $f(M_h) \subseteq N_{gh}$

для всех $h \in G$. Тогда $\mathrm{HOM}_A(M,N) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_A(M,N)_g$ — градуированная абелева группа, $\mathrm{END}_A(M) = \mathrm{HOM}_A(M,M)$ — градуированное кольцо, называемое *градуированным кольцом эндоморфизмов* модуля M_A. Если группа G конечна или модуль M_A конечно порожден, то $\mathrm{END}_A(M)$ совпадает с кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}_A(M)$ модуля M_A, рассматриваемого без градуировки [1, следствия 2.4.4–2.4.6]. В общем случае может иметь место строгое включение.

Определение. *Полулинейным σ-изоморфизмом ($\sigma \in G$) правых градуированных модулей M_A и N_B* называется пара отображений (α, γ), где $\alpha : M \to N$ — изоморфизм абелевых групп, $\beta : A \to B$ — изоморфизм колец таких, что

1) $(ma)^\alpha = m^\alpha a^\beta$ для всех $a \in A$, $m \in M$;

2) $(A_g)^\beta \subseteq B_{\sigma^{-1}g\sigma}$ и $(M_h)^\alpha \subseteq N_{h\sigma}$ для всех $g, h \in G$.

Всюду далее градуированные аналоги стандартных определений будем обозначать приставкой «gr-». Таким образом, градуированное кольцо A называется *gr-регулярным*, если для любого однородного элемента $a \in h(A)$ найдется такой элемент $x \in A$, что $axa = a$, *gr-простым*, если оно не содержит нетривиальных градуированных идеалов, и *градуированным телом*, если обратим каждый его ненулевой однородный элемент.

Будем говорить, что кольцо матриц $R = M_n(A)$ над градуированным кольцом A снабжено *хорошей* (*элементарной*) градуировкой, если $R = M_n(A)(\bar g)$ для некоторого $\bar g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, где

$$M_n(A)_h(\bar g) = \begin{pmatrix} A_{g_1hg_1^{-1}} & A_{g_1hg_2^{-1}} & \ldots & A_{g_1hg_n^{-1}} \\ A_{g_2hg_1^{-1}} & A_{g_2hg_2^{-1}} & \ldots & A_{g_2hg_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{g_nhg_1^{-1}} & A_{g_nhg_2^{-1}} & \ldots & A_{g_nhg_n^{-1}} \end{pmatrix}.$$

В этом случае R изоморфно $\mathrm{END}_A(F)$ для некоторого конечно порожденного gr-свободного левого (или правого) градуированного A-модуля F [1, предложение 2.10.5].

Так как gr-свободный A-модуль является gr-проективным, то из [4, теоремы 3.2–3.3] следует, что любой изоморфизм матричных колец, снабженных хорошими градуировками, индуцируется либо градуированной эквивалентностью Мориты, либо некоторым полулинейным σ-изоморфизмом.

В [3] было установлено, что конечномерные gr-простые G-градуированные алгебры над алгебраически замкнутым полем F, характеристика которого либо равна нулю, либо не делит порядки любых конечных подгрупп группы G, изоморфны матричным алгебрам (снабженным хорошими градуировками) над конечномерным градуированным телом [3, теорема 3].

Следующая теорема, анонсированная в [5], дает описание gr-простых gr-артиновых колец и уточняет результаты [1, теорема 2.10.10] и [2, предложение 1.3].

Теорема 1. *Пусть $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ — gr-простое gr-артиново кольцо. Тогда кольцо A изоморфно кольцу матриц с хорошей градуировкой над некоторым градуированным телом D. При этом если $A \cong M_n(D)(\bar g) \cong M_m(E)(\bar h)$, то $n = m$ и существуют элемент $\sigma \in G$ и изоморфизм колец $\beta : D \to E$, для которого $\beta(D_g) = E_{\sigma^{-1}g\sigma}$.*

Доказательство. Так как кольцо A gr-артиново, то его градуированный радикал Джекобсона $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$, а так как A — gr-простое кольцо, то оно gr-примитивно. В силу предложения 2.8 из [6] имеем $A \cong \mathrm{END}_D(V)$ для некоторого градуированного тела D и конечно порожденного модуля V_D. Таким образом, $A \cong M_n(D)(\bar g)$.

Пусть $A \cong M_m(E)(\bar h)$, тогда $A \cong \mathrm{END}_E(W)$ для некоторого конечно порожденного модуля W_E над градуированным телом E. Из теоремы [7, теорема 3.1] следует существование элемента $\sigma \in G$ и полулинейного σ-изоморфизма модулей V_D и W_E, индуцирующего изоморфизм градуированных колец $\varphi : \mathrm{END}_D(V) \to \mathrm{END}_E(W)$. Таким образом, $n = m$ и существует изоморфизм колец $\beta : D \to E$, для которого $\beta(D_g) = E_{\sigma^{-1}g\sigma}$. $\square$

Важное место в теории градуированных колец занимает проблема описания градуировок. В [8] дано описание всех $\mathbb{Z}_2$-градуировок алгебры матриц $M_2(k)$. В [9] были полностью описаны все абелевы градуировки на матричной алгебре над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, а в [10] этот результат был обобщен на случай неабелевых градуировок. Следующая теорема утверждает, что любая градуировка на кольце матриц над телом будет изоморфна хорошей над некоторым градуированным телом.

Теорема 2. *Пусть $M_n(K)$ — кольцо матриц над телом K, градуированное группой G, тогда существуют натуральное число m, являющееся делителем числа n, градуированное тело D и $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_m) \in G^m$ такие, что $M_n(K) \cong M_m(D)(\bar{g})$.*

Доказательство. Поскольку кольцо матриц над телом является артиновым простым кольцом, то оно является также gr-простым gr-артиновым кольцом. Применяя теорему 1, получим требуемое утверждение. □

Определение. Градуированное кольцо A называется *gr-полупростым справа*, если оно является прямой суммой минимальных правых градуированных идеалов. Другими словами, кольцо A — gr-полупросто справа, если модуль A_A является полупростым объектом категории правых градуированных модулей $\mathrm{gr.mod}\text{-}A$.

Известно, что кольцо A является gr-полупростым справа в том и только том случае, если оно A — gr-полупросто слева [1, предложение 2.9.5], а потому будем называть такие кольца gr-полупростыми. Заметим, что по аналогии с классической теорией колец можно также называть их *классически gr-полупростыми* или *вполне gr-приводимыми*.

Теорема 3. *Градуированное кольцо является gr-полупростым в том и только том случае, если каждый его градуированный правый (левый) идеал выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. Пусть A — gr-полупростое кольцо, т. е. $A = \bigoplus_{i\in I} L_i$, где $L_i \quad (i \in I)$ — минимальные градуированные правые идеалы, и $H \neq A$ — градуированный правый идеал в A. Если $L_i \bigcap H \neq 0$ для некоторого $i \in I$, то $L_i \subseteq H$. Так как $H \neq A$, то $L_j \bigcap H = 0$ для некоторого индекса $j \in I$. Пусть $\mathscr{P}$ — совокупность всех подмножеств $J \subset I$, для которых $H \bigcap \bigoplus_{j\in J} L_j = 0$, и P — максимальный элемент в $\mathscr{P}$, существующий в силу леммы Цорна. Если $H' = H \bigoplus (\bigoplus_{j\in P} L_j) \neq A$, то $L_k \bigcap H' = 0$ для некоторого $k \in I$. Тогда $P' = P \bigcup \{k\} \in \mathscr{P}$ и P' строго содержит множество P, что приводит к противоречию. Следовательно, $A = H \bigoplus (\bigoplus_{j\in J} L_j)$.

Обратно, пусть каждый градуированный правый идеал кольца A выделяется прямым слагаемым. Покажем, что A содержит хотя бы один минимальный градуированный идеал. Пусть $0 \neq x \in h(A)$ и M — градуированный правый идеал, являющийся максимальным элементом множества $\mathscr{P}$ градуированных идеалов, не содержащих элемент x (он существует в силу леммы Цорна). По условию $A = M \bigoplus N$ для некоторого правого градуированного идеала N. Если N не является минимальным, то он содержит ненулевой правый градуированный идеал Q. Но $A = Q \bigoplus R$, откуда $N = Q \bigoplus (R \bigcap N) = Q \bigoplus S$. Ясно, что оба идеала $M + Q$ и $M + S$ строго содержат M и поэтому оба содержат x. Получим противоречие, поскольку $(M + Q) \bigcap (M + S) = M$, а $x \notin M$. Далее, пусть T — сумма всех минимальных градуированных правых идеалов кольца A, тогда $A = T \bigoplus U$. Если $U \neq 0$, то в силу доказанного он содержит минимальный градуированный идеал, который должен принадлежать множеству T, что невозможно. Таким образом, $A = T$. □

Теорема 4. *Следующие свойства градуированного кольца A эквивалентны:*

1) A — gr-полупростое кольцо;

2) A — gr-артиново справа (слева) с нулевым градуированным радикалом Джекобсона $\mathscr{J}_{gr}(A)$;

3) для каждого правого (левого) градуированного идеала L кольца A найдется такой однородный идемпотент $e \in A$, что $L = eA$ ($L = Ae$);

4) A — gr-артиново справа (слева) gr-регулярное кольцо;

5) A — gr-нётерово справа (слева) gr-регулярное кольцо;

6) A — gr-артиново справа (слева) gr-полупервичное кольцо;

7) A — прямая сумма снабженных хорошими градуировками матричных колец над градуированными телами.

Доказательство. Пусть выполнено 1). Тогда $L_1 \subset L_1 \bigoplus L_2 \subset \ldots \subset A$, где L_i — минимальные правые градуированные идеалы такие, что $A = L_1 \bigoplus L_2 \bigoplus \ldots \bigoplus L_n$. Следовательно, кольцо A является gr-артиновым и gr-нётеровым справа. Из теоремы 3 следует, каждый правый градуированный идеал, в частности, каждый главный градуированный идеал, выделяется прямым слагаемым, следовательно, A — gr-регулярное кольцо. Таким образом, 1) $\Rightarrow$ 4) и 1) $\Rightarrow$ 5).

4) $\Rightarrow$ 5) вытекает из градуированной версии теоремы Хопкинса, утверждающей, что если A — gr-артиново справа, то A и gr-нётерово справа [1, следствие 2.9.7].

5) $\Rightarrow$ 1). Поскольку A — gr–нётерово справа, то каждый правый градуированный идеал является конечно порожденным, а из gr-регулярности следует, что он порождается однородным идемпотентом, а значит, выделяется прямым слагаемым.

2) $\Rightarrow$ 1). Поскольку $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$, то пересечение всех максимальных градуированных правых идеалов кольца A равно нулю. В силу gr-артиновости нулю равно пересечение некоторого конечного числа таких идеалов: $M_1 \bigcap M_2 \bigcap \ldots \bigcap M_n = 0$. Пусть $N_i = \bigcap_{j \neq i} M_j$ и N_i не содержится в M_i (иначе M_i можно удалить). Ясно, что $M_i + N_i = A$ и $M_i \bigcap N_i = 0$. Следовательно, $N_i \cong A/M_i$ является gr-неприводимым модулем, и $N_i = e_i A$ для некоторого $e_i = e_i^2 \in h(A)$. Обозначим через $e = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. Тогда $e - 1 = (e_i - 1) + \sum\limits_{j \neq i}^{n} e_j \in M_i$ и, следовательно, $e - 1 \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i = 0$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i = 1$, а поскольку $N_i \bigcap N_j = 0$ при $i \neq j$, то $A = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$.

4) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathscr{J}_{gr}(A)$ — градуированный радикал Джекобсона gr-артинова справа gr-регулярного кольца и $0 \neq x \in \mathscr{J}_{gr}(A)$, тогда $xA = eA$, где $e^2 = e \in xA \subseteq \mathscr{J}_{gr}(A)$. Но тогда $e = 0$, а значит, и $x = 0$, получили противоречие, следовательно, $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$.

5) $\Rightarrow$ 3). Так как для gr-нётерова справа кольца каждый градуированный правый идеал конечно порожден, то импликация очевидна.

3) $\Rightarrow$ 5). Поскольку каждый градуированный правый идеал является главным, т. е. конечно порожденным, то кольцо A является gr-нётеровым, а так как каждый главный идеал порожден однородным идемпотентом, то A gr-регулярно.

1) $\Rightarrow$ 7). Пусть $A = L_1 \bigoplus L_2 \bigoplus \ldots \bigoplus L_n$, где L_i — минимальные правые градуированные идеалы кольца A.

Обозначим через S_k сумму всех идеалов L_j, для которых $HOM_A(L_k, L_j) \neq 0$, и покажем, что она является gr-простым кольцом. Действительно, поскольку любой ненулевой однородный элемент $a \in h(A)$ порождает ненулевой однородный автоморфизм модуля A_A, то либо $aL_k = 0$, либо $aL_k = L_j$ для некоторого $j = 1, \ldots, n$, следовательно, S_k является идеалом. Легко проверить, что S_k — gr-простое gr-артиново кольцо, которое в силу теоремы 1 является хорошо градуированным матричным кольцом над некоторым градуированным телом.

7) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^{k} S_i$ — прямая сумма хорошо градуированных матричных колец над градуированными телами, т. е. $S_i = M_{n_i}(D_i)(\bar{g}_i)$. Поскольку при такой градуировке все матричные единицы являются однородными элементами, то $S_i = e_{11} S_i \bigoplus \ldots \bigoplus e_{n_i n_i} S_i$ — прямая сумма левых идеалов, каждый из которых gr-неприводимый модуль. А поскольку каждый минимальный градуированный правым идеал кольца S_i является также минимальным градуированным правым идеалом в A, то A — классически gr-полупросто.

4) $\Rightarrow$ 6) непосредственно вытекает из того, что каждое gr-регулярное кольцо является gr-полупервичным.

6) $\Rightarrow$ 2). Так как градуированный радикал Джекобсона $\mathscr{J}_{gr}(A)$ gr-артинова справа кольца является нильпотентным, а gr-полупервичное кольцо не содержит ненулевых градуированных нильпотентных идеалов, то $\mathscr{J}_{gr}(A) = 0$. $\square$

Правый градуированный A-модуль называется *gr-проективным* (*gr-инъективным*), если он является проективным (инъективным) объектом категории градуированных модулей $\mathrm{gr.mod}\text{-}A$. Ясно, что всякий проективный (инъективный) градуированный модуль является также gr-проективным (gr-инъективным). Для gr-проективных модулей верно и обратное, а для gr-инъективных это не всегда так.

Следующая теорема дает гомологическую классификацию gr-полупростых колец.

Теорема 5. *Для градуированного кольца A эквивалентны утверждения:*

1) A — gr-полупростое кольцо;

2) каждый правый (левый) градуированный A-модуль gr-полупрост;

3) каждый правый (левый) градуированный A-модуль gr-проективен;

4) каждый правый (левый) градуированный A-модуль gr-инъективен.

Доказательство. $1) \Leftrightarrow 2)$ доказано [1, предложение 2.9.8].

$3) \Rightarrow 1)$ Пусть каждый правый градуированный A-модуль является gr-проективным. Тогда для любого правого градуированного идеала I кольца A модуль A/I является gr-проективным. Следовательно, точная последовательность $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ расщепляется, а значит, I выделяется прямым слагаемым.

$2) \Rightarrow 3)$ Любой градуированный модуль M является фактор-модулем некоторого gr-свободного (а значит, и gr-проективного) модуля P, т. е. $M \cong P/K$. Из полупростоты модуля P следует, что $P = K \bigoplus K'$, а значит, $M \cong K'$, откуда следует gr-проективность модуля M.

Импликации $4) \Rightarrow 1)$ и $2) \Rightarrow 4)$ доказываются аналогично. □

Заметим, что условие gr-полупросты, вообще говоря, слабее условия полупросты. Из теоремы 5 следует, что полупростое градуированное кольцо является также и gr-полупростым. В то же время групповое кольцо AG классически полупросто тогда и только тогда, когда кольцо A классически полупросто, а G — конечная группа, порядок которой обратим в A [11, теорема 12.2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 11-01-00571а).

Библиографический список

1. *Năstăsescu C., Oystaeyen F. van.* Method of graded rings. Berlin : Springer, 2004. 295 p.

2. *Hwang Y.-S., Wadsworth A. R.* Correspondences between valued division algebras and graded division algebras // J. Algebra. 1998. Vol. 220. P. 73–114.

3. *Бахтурин Ю. А., Зайцев М. В., Сегал С. К.* Конечномерные простые градуированные алгебры // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 7. С. 21—40. DOI: 10.4213/sm3873.

4. *Балаба И. Н., Михалёв А. В* Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. матемаематика. 2007. Т. 13, вып. 5. С. 3–18.

5. *Балаба И. Н.* Градуированные простые артиновы кольца // Алгебра и математическая логика : материалы междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения проф. В. В. Морозова. Казань : Изд-во Казан. федерал. ун-та, 2011. С. 43–44.

6. *Liu S.-X., Beattie M., Fang H.* Graded division rings and the Jacobson density theorem // J. Beijing Normal University (Natural Science). 1991. Vol. 27, № 2. P. 129–134.

7. *Балаба И. Н.* Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, вып. 4(16). С. 6–23.

8. *Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C., Rios Montes J.* Group gradings on full matrix rings // J. Algebra. 1999. Vol. 220. P. 709–728.

9. *Bahturin Yu. A., Sehgal S. K., Zaicev M. V.* Group graging on associative algebras // J. Algebra. 2001. Vol. 241. P. 677–698.

10. *Bahturin Ju. A., Zaicev M. V.* Group gradings on matrix algebras // Canad. Math. Bulletin. 2002. Vol. 45. P. 499–508.

11. *Залесский А. Е., Михалев А. В.* Групповые кольца // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. М. : ВИНИТИ, 1973. Т. 2. С. 5–118.

Semisimple Graded Rings

I. N. Balaba, E. N. Krasnova

Leo Tolstoy Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, Lenina pr., 125, ibalaba@mail.ru, KrasnovaEN.ne@yandex.ru

The graded version of Wedderburn–Artin theorem is obtained. It gives description of semisimple G-graded ring for arbitrary group G. Homological classification of graded semisimple rings is given.

Key words: graded rings, graded modules, semisimple rings.

References

1. Năstăsescu C., Oystaeyen F. van. *Method of graded rings*. Berlin, Springer, 2004, 295 p.

2. Hwang Y.-S., Wadsworth A. R. Correspondences between valued division algebras and graded division algebras. *J. Algebra*, 1998, vol. 220, pp. 73–114.

3. Bahturin Yu. A. Zaicev M. V., Sehgal S. K. Finite-dimensional simple graded algebras. *Sbornik : Mathematics*, 2008, vol. 199, no. 7, pp. 965–983. DOI:10.1070/SM2008v199n07ABEH003949

4. Balaba I. N. Mikhalev A. V. Isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 156, no. 2, pp. 209–218.

5. Balaba I. N. Graduirovannye prostye artinovy kol'tsa [Graded simple artinian rings]. *Algebra i matematicheskaia logika : materialy mezhdunar. konf., posviashch. 100-letiiu so dnia rozhdeniia prof. V. V. Morozova* [Algebra and Mathematical Logika : Trans. Intern. Confer., dedicated to 100th anniversary of V. V. Morozov]. Kazan, 2011, pp. 43–44 (in Russian).

6. Liu S.-X., Beattie M., Fang H. Graded division rings and the Jacobson density theorem. *J. Beijing Normal University (Natural Science)*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 129–134.

7. Balaba I. N. Izomorfizmy graduirovannykh kolets lineinykh preobrazovanii graduirovannykh vektornykh prostranstv [Isomorphisms of graded rings of linear transformations of graded vector spaces]. *Chebyshevckiy sbornik*, 2005, vol. 6. no. 4(16), pp. 6–23 (in Russian).

8. Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C., Rios Montes J. Group gradings on full matrix rings. *J. Algebra*, 1999, vol. 220, pp. 709–728.

9. Bahturin Yu. A., Sehgal S.K., Zaicev M.V. Group graging on associative algebras. *J. Algebra*, 2001, vol. 241, pp. 677–698.

10. Bahturin Ju. A., Zaicev M. V. Group gradings on matrix algebras. *Canad. Math. Bulletin*, 2002, vol. 45, pp. 499–508.

11. Zalesskii A. E., Mikhalev A. V. Group rings. *J. of Soviet Math.*, 1975, vol. 4, no. 1, pp. 1–78.

УДК 501.1

О МНОГООБРАЗИЯХ ГРУППОИДОВ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Д. А. Бредихин

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., bredikhin@mail.ru

В работе находятся базисы тождеств многообразий, порожденных классами группоидов бинарных отношений с диофантовыми операциями.

Ключевые слова: алгебры отношений, диофантовые операции, тождества, многообразия, группоиды.

ВВЕДЕНИЕ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах

А. Тарского (A. Tarski) [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется диофантовой [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описания с помощью графов [3–5]. Эквациональные и квазиэквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в работах [5–7].

Предметом нашего рассмотрения будут алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть группоиды бинарных отношений. Классификацию бинарных диофантовых операций над отношениями можно найти в [8]. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естественен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций, в частности, к свойствам, выразимым тождествами. Это приводит к необходимости изучения многообразий, порожденных различными классами группоидов бинарных отношений. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [8–10].

1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Группоидом называется алгебра $(A, \cdot)$ с одной бинарной операцией.

Сосредоточим свое внимание на следующей диофантовой операции над бинарными отношениями, определяемой формулой

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists\, z, w)(x, z) \in \rho \wedge (z, w) \in \sigma\},$$

где ρ и σ — бинарные отношения, заданные на множестве X. Заметим, что отношение $\rho * \sigma$ представляет собой результат применения операции цилиндрофикации [11] к произведению $\rho \circ \sigma$ бинарных отношений ρ и σ.

Алгебры отношений вида $(\Phi, *)$ является группоидом бинарных отношений.

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Теорема. *Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$(xy)x = xy, \tag{1}$$

$$(xy)y = xy, \tag{2}$$

$$(x^2y)z = (x^2z)y, \tag{3}$$

$$(xy^2)z = x(y^2z) \tag{4}$$

и для каждого натурального $k > 2$ тождеству:

$$(x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-2}}(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)(x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-3}}(x_{i_{k-2}}x_{i_{k-1}})\ldots) = x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots). \tag{5_k}$$

Заметим, что приведенный в теореме базис тождеств является бесконечным. В связи с этим естественно возникает следующая проблема, в настоящее время остающаяся открытой.

Проблема. *Является ли многообразие $Var\{*\}$ конечно базируемым?*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство теорем основывается на результатах работы [5]. Разобьем его на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении, и сформулируем необходимый результат из работ [5].

Пусть $Rel(U)$ — множество всех бинарных отношений на U. Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1, определяет m-арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \ldots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $R_1, \ldots, R_m$ из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется диофантовой [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3–5].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $(V,\ E)$, где V — конечное множество, называемое множеством вершин, и $E \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \stackrel{k}{\rightarrow} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины u и v инцидентны ребру (u, k, v).

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма. Мы также будем отождествлять двухполюсники, различающиеся лишь числом изолированных вершин, отличных от его входа и выхода.

Пусть $F = F_\varphi$ — диофантова операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ; $in(G) = 0$, $out(G) = 1$; $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ, то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что двухполюсник, соответствующий операции $*$, задается следующим образом:

$$in = \cdot \stackrel{1}{\rightarrow} \cdot \stackrel{2}{\rightarrow} \cdot \quad \cdot = out.$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$, определяемый следующим образом [4]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}\}$ диофантовых операций над отношениями, и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ – универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1)$, $\ldots$, $G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$:

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in\cdot \stackrel{k}{\rightarrow} \cdot out$;

2) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Обозначим через pr(E) множество всех вершин помеченного графа, которые инцидентны хотя бы одному ребру. Пусть даны два помеченных графа (V_1, E_1) и (V_2, E_2). Отображение $f : pr(E_2) \rightarrow pr(E_1)$ называется гомоморфизмом E_2 в E_1, если $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Мы будем писать $E_1 \prec E_2$ ($G_1 \prec G_2$), если существует гомоморфизм из E_2 в E_1 (из G_2 в G_1), и $E_1 \cong E_2$ ($G_1 \cong G_2$), если $E_1 \prec E_2$ и $E_2 \prec E_1$ ($G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1$).

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$. Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы [5]: *тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$.*

Шаг 2. Рассмотрим счетное множество индивидуальных переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Напомним, что термы группоида определяются следующим индуктивным образом: всякая индивидуальная переменная является термом; если p_1 и p_2 — термы, то выражение (p_1p_2) является термом, называемым произведением термов p_1 и p_2. В дальнейшем внешние скобки в записи термов, как правило, будут опускаться. Множество Ξ всех термов относительно операции произведения термов образует счетно порожденную свободную алгебру в классе всех группоидов.

Обозначим через Σ эквациональную теорию класса группоидов, удовлетворяющих тождествам (1)–(4) и (5_k). Для термов p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \cong p_2$, когда тождество $p_1 = p_2$ принадлежит Σ. Отношение $\cong$ является отношением конгруэнции группоида Ξ, а фактор группоид $\Xi/\cong$ является свободным счетно порожденным группоидом в многообразии, задаваемым тождествами (1)–(4) и (5_k).

Пусть $(A, \cdot)$ — группоид, удовлетворяющий тождествам (1)–(4). Тогда он удовлетворяет тождествам:

$$(xy) = (xy)^2, \tag{6}$$

$$((xy)z)t = ((xy)t)z, \tag{7}$$

$$(x(yz))t = x((yz)t). \tag{8}$$

Действительно, используя тождество (1), получаем $(xy) = (xy)x = ((xy)x)(xy) = (xy)(xy) = (xy)^2$. Используя тождества (3), (6), получаем $((xy)z)t = ((xy)^2z)t = ((xy)^2t)z = ((xy)t)z$. Используя тождества (4), (6), получаем $(x(yz))t = (x(yz)^2)t = x((yz)^2t) = x((yz)t)$.

Замечание 1. Из тождества (8) следует, что подгруппоид $(A^2, \cdot)$, где $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$ — множество разложимых элементов, является полугруппой и, следовательно, скобки, указывающие порядок выполнения действий в произведении элементов из A^2, могут быть расставлены произвольным образом или просто опущены. В дальнейшем мы будем пользоваться этим свойством без особых упоминаний.

Обозначим через Λ_k, где $k \geq 1$, множество термов вида $x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)$. Положим

$$\tilde{\Lambda}_k = \bigcup\{\Lambda_i : i \geq k\}.$$

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$ существуют такие термы $p_1, p_2, \ldots, p_m$ из $\tilde{\Lambda}_1$ ($m \geq 1$), что $p \cong (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m$, и $p_1 \in \tilde{\Lambda}_2$,* если $p \notin \Lambda_1$.

Доказательство. Покажем сначала, что если $p \cong (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m$ и $p \notin \Lambda_1$, то без ограничения общности можно считать, что $p_1 \in \tilde{\Lambda}_2$. Действительно, если $p \notin \Lambda_1$ и $p_1 \in \Lambda_1$, то $m > 1$ и $p_1p_2 \in \tilde{\Lambda}_2$. Тогда, пологая $\tilde{p}_1 = p_1p_2$, получим требуемое представление $(\ldots(\tilde{p}_1p_3)p_4)\ldots)p_{n-1})p_m$ терма p.

Утверждение очевидно для $p \in \Lambda_1$. Пусть теперь $p = (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m$ и $q = (\ldots(q_1q_2)q_3)\ldots)q_{n-1})q_n$.

Если $n = 1$, то $pq = (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)q_1$, то есть произведение pq имеет требуемое представление. Если $n > 1$, то, учитывая, что $q_1 \in \tilde{\Lambda}_2$, и, используя тождества (8), получаем:

$$pq = (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)(\ldots(q_1q_2)q_3)\ldots)q_{n-1})q_n) \cong$$

$$(\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)(\ldots(q_1q_2)q_3)\ldots)q_{n-1}))q_n \cong$$
$$(\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)(\ldots(q_1q_2)q_3)\ldots))q_{n-1})q_n \cong \ldots$$
$$\cong (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)q_1)q_2)q_3)\ldots)q_{n-1})q_n.$$

Таким образом, и в этом случае произведение pq имеет требуемое представление. Лемма 1 доказана.

Шаг 3. Двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$ для терма p из леммы 1 согласно определению может быть построен следующим образом.

Пусть $p \in \Lambda_k$, то есть $p = x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)$. Тогда $V(p) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots v_{k+1}\}$, $E(p) = \{(v_{i-1}, i, v_i) : i = 1, \ldots k\}$, и $in(p) = v_0$, $out(p) = v_{k+1}$:

$$in(p) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{i_k} \cdot v_k \quad \cdot v_{k+1} = out(p).$$

Пусть $p = (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m$, где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ из $\tilde{\Lambda}_1$ $(m > 1)$. Мы будем предполагать, что множества $V(p_1), V(p_2), \ldots, V(p_m)$ попарно не пересекаются. Тогда $V(p) = V(p_1) \cup pr(E(p_2)) \cup \ldots \cup pr(E(p_m))$, $E(p) = E(p_1) \cup E(p_2) \cup \ldots \cup E(p_m)$ и $in(p) = in(p_1)$, $out(p) = out(p_1)$. Заметим, что в этом случае $G(p)$ содержит $m+1$ компоненту связности.

Следующая лемма непосредственно вытекает из строения соответствующих графов и определения гомоморфизма.

Лемма 2. *Пусть* $p = x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)$, $q = x_{j_1}(x_{i_j}(\ldots(x_{j_{l-1}}x_{j_l})\ldots)$ *и* $E(p) \prec E(q)$. *Тогда* $l \le k$ *и* $j_1 = i_t$, $j_2 = i_{t+1}, \ldots, j_l = i_{t+l-1}$ *для некоторого* $t \in \{1, \ldots, k\}$. *В частности, если* $E(p) \cong E(q)$, *то* $p = q$.

Лемма 3. *Пусть* $p \in \tilde{\Lambda}_2$, $q \in \tilde{\Lambda}_1$ *и* $E(p) \prec E(q)$. *Тогда* $p \cong pq$ *и* $\tilde{p}p \cong (\tilde{p}p)q$ *для любого терма* $\tilde{p}$.

Доказательство. Пусть $p = x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)$, $q = x_{j_1}(x_{i_j}(\ldots(x_{j_{l-1}}x_{j_l})\ldots)$ и $E(p) \prec E(q)$. Используя лемму 2 и тождества (1), (2), (5_k), получаем:

$$p = (x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots) \cong (x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)(x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\ldots) \cong$$
$$\cong (x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)((x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\ldots)(x_{i_2}(x_{i_3}(\ldots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\ldots) \cong$$
$$\cong ((x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)(x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\ldots)(x_{i_2}(x_{i_3}(\ldots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\ldots) \cong$$
$$\cong ((x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)(x_{i_2}(x_{i_3}(\ldots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\ldots) \cong \ldots \cong$$
$$\cong ((x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)(x_{i_t}(x_{i_{t+1}}(\ldots(x_{i_{t+l-2}}x_{i_{t+l-1}})\ldots) =$$
$$= ((x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{k-1}}x_{i_k})\ldots)(x_{j_1}(x_{i_j}(\ldots(x_{j_{l-1}}x_{j_l})\ldots) = pq.$$

Далее, используя тождество (8), получаем $\tilde{p}p \cong \tilde{p}(pq) \cong (\tilde{p}p)q$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $p \in \Lambda_1$, $q \in \tilde{\Lambda}_1$ *и* $E(p) \prec E(q)$. *Тогда* $p = q$ *и* $\tilde{p}p \cong (\tilde{p}p)q$ *для любого терма* $\tilde{p}$.

Доказательство. Так как $p \in \Lambda_1$, то $p = x_i$, следовательно, согласно лемме 2 имеем $q = p = x_i$. Отсюда, используя тождество (2), получаем $\tilde{p}p \cong (\tilde{p}p)p = (\tilde{p}p)q$. Лемма 4 доказана.

Шаг 4. Легко проверить, что операции $*$ удовлетворяют тождествам (1)–(4) и (5_k). Отсюда следует, что $\Sigma \subset Eq\{*\}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что всякое тождество из $Eq\{*\}$ принадлежит Σ. Согласно лемме 1 мы можем предположить, что $p = (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m$ и $q = (\ldots(q_1q_2)q_3)\ldots)q_{n-1})q_n$.

Предположим, что тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем $G(p) \cong G(q)$, то есть существуют гомоморфизмы f_1 из $G(q)$ в $G(p)$ и f_2 из $G(p)$ в $G(q)$. Поскольку всякая компонента связности графа $E(q)$ при гомоморфизмеf_1 будет отображаться в компоненту связности графа $E(p)$ и всякая компонента связности графа $E(p)$ при гомоморфизме f_2 будет отображаться в компоненту связности графа $E(q)$, существуют отображения ϕ из $\{1, \ldots, m\}$ в $\{1, \ldots, n\}$ и φ из $\{1, \ldots, n\}$ в $\{1, \ldots, m\}$ такие, что $f(E(q_k)) \subset E(p_{\phi(k)})$ для $k = 1, \ldots, m$ и $f(E(p_k)) \subset E(q_{\varphi(k)})$ для $k = 1, \ldots, n$. Учитывая, что $f_1(in(q_1)) = f_1(in(q)) = in(p) = in(p_1)$, имеем $\phi(1) = 1$. Аналогично, $\varphi(1) = 1$. Следовательно, $G(p_1) \cong G(q_1)$, отсюда согласно лемме 4 имеем $p_1 \cong q_1$.

Далее, используя леммы 3, 4 и тождества (6), (7), получаем:

$$p = (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m \cong (\ldots(p_1)^2)p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m \cong$$
$$\cong (\ldots(p_1p_1)p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m \cong (\ldots(p_1p_1)p_2)p_3)\ldots)p_{\phi(1)})\ldots)p_{m-1})p_m \cong$$
$$\cong (\ldots(p_1p_1)p_2)p_3)\ldots)p_{\phi(1)})q_1)\ldots)p_{m-1})p_m \cong (\ldots(p_1p_1)p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)q_1 \cong \ldots \cong$$
$$\cong (\ldots(p_1p_1)p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)q_1)q_2)\ldots)q_n \cong (\ldots(p_1p_2)p_3)\ldots)p_{m-1})p_m)q_1)q_2)\ldots)q_n.$$

Аналогично получаем $q = (\ldots(q_1q_2)q_3)\ldots)q_{n-1})q_n)p_1)p_2)\ldots)p_m$. Отсюда, учитывая, что $p_1 \cong q_1$, используя тождество (7), получаем $p \cong q$, то есть тождество $p = q$ принадлежит Σ. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188–189.
3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
4. *Böner P., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
5. *Бредихин Д. А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
6. *Andreka H., Bredikhin D. A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 516–532.
7. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
8. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 11–124.
9. *Bredikhin D. A.* Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–192.
10. *Бредихин Д. А.* О многообразии группоидов бинарных отношений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93–98.
11. *Henkin L., Monk J. D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971. 311 p.

On Classes of Groupoids of Relations with Diophantine Operations

D. A. Bredikhin

Saratov State Technical University, Russia, 410054, Politechnicheskaya st., 77, bredikhin@mail.ru

In the paper the bases of identities of varieties generated by classes of groupoids of the binary relations with diophantine operations are found.

Key words: algebra of relations, diophantine operations, identities, varieties, groupoids.

References

1. Tarski A. On the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1941, vol. 4, pp. 73–89.
2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1953, vol. 18. pp. 188–189.
3. Bredikhin D. A. On algebras of relations with Diophantine operations. *Doklady Mathematics*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 435–436.
4. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to general algebras*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
5. Bredikhin D. A. The equational theory of algebras of relations with positive operations. *Rus. Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1993, vol. 37, no. 3, pp. 21–28.
6. Andreka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations. *Alg. Univers.*, 1994, vol. 33, pp. 516–532.
7. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with diophantine operations. *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 23–33
8. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions. *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 1994, vol. 54, pp. 11–124.

9. Bredikhin D. A. Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations. *Semigroup Forum*, 1992, vol. 44. pp. 87–192.
10. Bredikhin D. A. On varieties of groupoids of binary relations. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 13–21 (in Russian).
11. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. *Cylindric Algebras*. North-Holland, Amsterdam, 1971, 311 p.

УДК 511

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ И ИХ СЛЕДСТВИЯХ

А. Н. Васильев

Преподаватель кафедры математики и информатики, Казахстанский филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Астана, Республика Казахстан, antonvassilyev@mail.ru

В работе изучены некоторые свойства распределения членов обобщенной последовательности Фибоначчи по бесквадратному модулю и получены следствия из этих свойств.

Ключевые слова: обобщенная последовательность Фибоначчи, тригонометрические суммы, плотность множества.

1. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ

Последовательность Фибоначчи, как известно, задается следующим образом: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Обобщенная последовательность Фибоначчи задается тем же рекуррентным соотношением и двумя начальными натуральными членами, т. е. $G_1 = a$, $G_2 = b$, $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$, где a, b — натуральные числа. Вторую последовательность на протяжении всей работы будем считать наперед заданной.

Пусть, на протяжении всей работы, d — бесквадратное (не делящееся ни на какой квадрат простого) натуральное число, большее 1 и взаимно простое с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$ (это экзотическое условие будет мотивировано позже). Через p будем обозначать, как обычно, простое число. В первой части это будут простые, взаимно простые с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$. Во второй части простые, выступающие делителями какого-нибудь d, также будут предполагаться удовлетворяющими этому дополнительному условию.

Введем малый d-период последовательности Фибоначчи $t(d) = \min\{\tau : \tau \geq 1,\ d\,|\,F_\tau\}$ и большой d-период последовательности Фибоначчи $T(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, F_{n+\mathrm{T}} \equiv F_n (\operatorname{mod} d)\ \forall\ n\}$. Аналогично, большой d-период обобщенной последовательности Фибоначчи есть $T'(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, G_{n+\mathrm{T}} \equiv G_n (\operatorname{mod} d)\ \forall\ n\}$ (периодичность по любому модулю доказывается просто). Аналога малого d-периода может не существовать (например, если $a = 2$, $b = 1$, $d = 5$).

Выделим необходимые нам свойства последовательности Фибоначчи в следующую лемму.

Лемма 1.1.

А) $F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ *(формула Бине).*

Б) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

В1) $d\,|\,F_n \ \Leftrightarrow\ t(d)\,|\,n$.

В2) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} d), \\ F_{\alpha+1} \equiv F_{\beta+1} (\operatorname{mod} d) \end{cases} \Leftrightarrow\ T(d)\,|\,(\alpha - \beta)$.

Г) $T(d)/t(d) \in \{1, 2, 4\}$.

Д) $d = p_1 p_2 \dots p_s \ \Rightarrow\ t(d) = [t(p_1), t(p_2), \dots, t(p_s)]$.

Е1) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} p), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p) \end{cases} \Rightarrow \ t(p) \,|\, (\alpha-\beta) \quad \text{или} \quad t(p)\,|\,\gamma \ \Rightarrow \ t(p)\,|\,(\alpha-\beta)\gamma.$

Е2) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} d), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} d) \end{cases} \Rightarrow \quad t(d)\,|\,(\alpha-\beta)\gamma.$

Доказательство: Свойства А, Б, В1, В2, Г, Д хорошо известны (см., например, [1] и [2]). Докажем два оставшихся свойства. Начнем с Е1. По свойству Б имеем:

$$F_{\alpha+\gamma} = F_\alpha F_{\gamma-1} + F_{\alpha+1} F_\gamma, \qquad F_{\beta+\gamma} = F_\beta F_{\gamma-1} + F_{\beta+1} F_\gamma,$$

поэтому из сравнений $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} p), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p) \end{cases}$ следует, что $p\,|\,(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})F_\gamma$, откуда $p\,|\,F_\gamma$ или $p\,|\,(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$. Из $p\,|\,F_\gamma$ согласно свойству В1 следует, что $t(p)\,|\,\gamma$, а из $p\,|\,(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$ согласно свойству В2 следует, что $T(p)\,|\,(\alpha-\beta)$, откуда согласно свойству Г $t(p)\,|\,(\alpha-\beta)$.

Теперь докажем свойство Е2. Пусть $d = p_1 p_2 \dots p_s$. Из сравнений $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} d), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} d) \end{cases}$ для любого $p_i\,|\,d$ следуют сравнения $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} p_i) \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p_i) \end{cases}$, откуда для всякого $p_i\,|\,d$ по свойству Е1 имеем: $t(p_i)\,|\,(\alpha-\beta)\gamma$, что согласно свойству Д означает, что $t(d)\,|\,(\alpha-\beta)\gamma$. Лемма доказана.

Теперь докажем некоторые свойства обобщенной последовательности Фибоначчи.

Лемма 1.2.

А) $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$.

Б) $T'(d)\,|\,T(d)$.

В) $t(d)\,|\,T'(d)$.

Г) $t(d) \le T'(d) \le T(d) \le 4t(d)$.

Д1) $\begin{cases} G_\alpha \equiv G_\beta (\operatorname{mod} p), \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p) \end{cases} \Rightarrow \ t(p)\,|\,(\alpha-\beta) \text{ или } t(p)\,|\,\gamma \ \Rightarrow t(p)\,|\,(\alpha-\beta)\gamma.$

Д2) $\begin{cases} G_\alpha \equiv G_\beta (\operatorname{mod} d) \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} d) \end{cases} \Rightarrow \ t(d)\,|\,(\alpha-\beta)\gamma.$

Доказательство: Первое соотношение хорошо известно, соотношение Б доказывается тривиально. Соотношение Г следует из соотношений Б, В и соотношения Г леммы 1.1. Соотношение Д2 вытекает из соотношения Д1. Докажем пункт Д1. Используя соотношение А, имеем:

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (\operatorname{mod} p), \\ aF_{\alpha+\gamma-2} + bF_{\alpha+\gamma-1} \equiv aF_{\beta+\gamma-2} + bF_{\beta+\gamma-1} (\operatorname{mod} p). \end{cases}$$

Далее, используем соотношение Б леммы 1.1 и получаем:

$$aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (\operatorname{mod} p)$$

и

$$\begin{gathered} a(F_{\alpha-2}F_{\gamma-1} + F_{\alpha-1}F_\gamma) + b(F_{\alpha-1}F_{\gamma-1} + F_\alpha F_\gamma) \equiv \\ \equiv a(F_{\beta-2}F_{\gamma-1} + F_{\beta-1}F_\gamma) + b(F_{\beta-1}F_{\gamma-1} + F_\beta F_\gamma) (\operatorname{mod} p), \end{gathered}$$

что преобразуется к виду

$$aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (\operatorname{mod} p)$$

и $\quad F_{\gamma-1}(aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1})+F_\gamma(aF_{\alpha-1}+bF_\alpha)\equiv F_{\gamma-1}(aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1})+F_\gamma(aF_{\beta-1}+bF_\beta)(\operatorname{mod} p)$,
откуда

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1}\equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1}(\operatorname{mod} p),\\ F_\gamma(aF_{\alpha-1}+bF_\alpha)\equiv F_\gamma(aF_{\beta-1}+bF_\beta)(\operatorname{mod} p).\end{cases}$$

Отсюда либо $p\,|\,F_\gamma$, что согласно пункту B1 леммы 1.1 означает $t(p)\,|\,\gamma$, либо

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1}\equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1}(\operatorname{mod} p),\\ aF_{\alpha-1}+bF_\alpha\equiv aF_{\beta-1}+bF_\beta(\operatorname{mod} p),\end{cases}$$

что преобразуется к виду

$$\begin{cases} a(F_{\alpha-2}-F_{\beta-2})+b(F_{\alpha-1}-F_{\beta-1})\equiv 0(\operatorname{mod} p)\\ b(F_{\alpha-2}-F_{\beta-2})+(a+b)(F_{\alpha-1}-F_{\beta-1})\equiv 0(\operatorname{mod} p)\end{cases}$$

и приводится с помощью правила Крамера в поле вычетов по модулю p к виду

$$\begin{cases} F_{\alpha-2}-F_{\beta-2}\equiv 0(\operatorname{mod} p)\\ F_{\alpha-1}-F_{\beta-1}\equiv 0(\operatorname{mod} p)\end{cases}$$

(поскольку $\det\begin{pmatrix} a & b\\ b & a+b\end{pmatrix}=a^2+ab-b^2\not\equiv 0(\operatorname{mod} p)$), откуда по свойству B2 леммы 1.1 $T(p)\,|\,(\alpha-\beta)$ и, следовательно, $t(p)\,|\,(\alpha-\beta)$. Теперь докажем пункт В. Поскольку $G_1\equiv G_{1+T'(d)}(\operatorname{mod} d)$ и $G_2\equiv G_{2+T'(d)}(\operatorname{mod} d)$, то по свойству Д2 $t(d)\,|\,T'(d)$. Лемма доказана.

Далее, рассмотрим $A(d,u)=a_1^2+a_2^2+\dots+a_d^2$, где a_k — количество членов конечной последовательности $G_1,G_2,\dots,G_u$, сравнимых с k по модулю d. Используя аппарат тригонометрических сумм, нетрудно вывести соотношение

$$A(d,u)=\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u}e^{2\pi i\frac{aG_n}{d}}\right|^2.$$

Следующая теорема является конечной целью первой части. Для краткости $t(d)=t$, $T(d)=T$, $T'(d)=T'$.

Теорема 1.1. *Для $u\le T'$ имеет место оценка*

$$A(d,u)\le B(d,u),$$

где

$$B(d,u)=\begin{cases} 3u-2, \text{ если } u<\sqrt{t}+1,\\ 7u^2t^{-1/4}, \text{ если } \sqrt{t}+1\le u\le t^{3/4},\\ 14u^2t^{-1/8}, \text{ если } t^{3/4}<u\le T'.\end{cases}$$

Если $u>T'$, то

$$A(d,u)\le 56u^2t^{-1/8}.$$

Доказательство. Для удобства разобьем доказательство на несколько шагов.

1. Зафиксируем k, $1\le k\le d$. Пусть $1\le j_1<\dots<j_{a_k}\le u$ — все j, для которых $G_j\equiv k(\operatorname{mod} d)$. Обозначим $b_h=j_{h+1}-j_h$, $1\le h\le a_k-1$, $b_h\ge 1$. Тогда $b_1+\dots+b_{a_k-1}=j_{a_k}-j_1\le u-1$.

Пусть $1\le\rho_1<\dots<\rho_s$ – все различные числа, встречающиеся в последовательности $b_1,\dots,b_{a_k-1}$. Имеем:

$$\sum_{v=1}^{s}c_v\rho_v\le u-1,\qquad \sum_{v=1}^{s}c_v=a_k-1.$$

2. Зафиксируем v. Пусть $1 \le h_1 < \dots < h_{c_v} \le a_k - 1$ — все индексы h такие, что $b_k = \rho_v$. Согласно пункту Д2 леммы 1.2, поскольку $\begin{cases} G_{j_{h_i}} \equiv G_{j_{h_i+1}} (\operatorname{mod} d), \\ G_{j_{h_{i+1}}} \equiv G_{j_{h_{i+1}+1}} (\operatorname{mod} d) \end{cases}$ и $j_{h_i+1} - j_{h_i} = j_{h_{i+1}+1} - j_{h_{i+1}}$, то $t|(j_{h_i+1} - j_{h_i})(j_{h_{i+1}} - j_{h_i})$, откуда $\rho_v(j_{h_{i+1}} - j_{h_i}) \ge t$ для всех $1 \le i \le c_v - 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{c_v-1} \frac{t}{\rho_v} \le \sum_{i=1}^{c_v-1} (j_{h_{i+1}} - j_{h_i}) \le u - 1,$$

и, значит,

$$c_v \le \frac{(u-1)\rho_v}{t} + 1.$$

3. Итак, имеем:

$$\begin{cases} c_v \le (u-1)\rho_v/t + 1, \\ \sum\limits_{v=1}^{s} c_v \rho_v \le u - 1, \\ a_k = 1 + \sum\limits_{v=1}^{s} c_v. \end{cases}$$

Пусть теперь $w(q)$ — количество таких v, что $c_v = q$. Поскольку все ρ_v различны, то

$$u - 1 \ge \sum_{v=1}^{s} c_v \rho_v \ge \sum_{v:\ c_v = q} c_v \rho_v \ge q(1 + 2 + \dots + w(q)),$$

откуда $w(q) \le (2(u-1)/q)^{1/2}$. С другой стороны,

$$u - 1 \ge \sum_{v=1}^{s} c_v \rho_v \ge \sum_{v=1}^{s} t(c_v - 1)c_v/(u-1),$$

поэтому

$$\sum_{v=1}^{s} c_v(c_v - 1) \le (u-1)^2/t.$$

4. а) Рассмотрим случай, когда $u < \sqrt{t} + 1$. Рассмотрим все пары индексов (n_1, n_2), такие, что $1 \le n_1 < n_2 \le u$ и $G_{n_1} \equiv G_{n_2} (\operatorname{mod} d)$. Если среди них найдутся две различные пары (n_1, n_2), (n'_1, n'_2), для которых $n_2 - n_1 = n'_2 - n'_1$, то, согласно пункту Д2 леммы 1.2, $t \,|\, (n_2 - n_1)(n'_1 - n_1)$, откуда $t \le |(n_2 - n_1)(n'_1 - n_1)| \le (u-1)^2 < t$ — противоречие. Значит, все разности индексов в таких парах различны. А теперь посчитаем количество всех таких пар, и, соответственно, всех разностей индексов в них. Таких разностей ровно $\sum\limits_{k=1}^{d} a_k(a_k - 1)/2$. Но всех возможных значений разности индексов в указанном промежутке ровно $u - 1$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{d} a_k(a_k - 1)/2 \le u - 1$, откуда $A(d, u) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_d^2 \le 3u - 2$.

б) Теперь рассмотрим случай, когда $u \ge \sqrt{t} + 1$. Тогда все $c_v \le (u-1)/\sqrt{t} + 1$, откуда

$$s = \sum_{1 \le q \le (u-1)/\sqrt{t}+1} w(q) \le \sum_{1 \le q \le (u-1)/\sqrt{t}+1} \sqrt{(2u-2)/q} \le 4ut^{-1/4}.$$

Далее, $a_k = 1 + \sum\limits_{v=1}^{s} c_v$, $\left(\sum\limits_{v=1}^{s} c_v\right)^2 \le s \left(\sum\limits_{v=1}^{s} c_v^2\right) \le s(u-1)^2/t + s \sum\limits_{v=1}^{s} c_v$, отсюда

$$\left(\sum_{v=1}^{s} c_v - s/2\right)^2 \le s^2/4 + s(u-1)^2/t$$

и, значит,

$$\sum_{v=1}^{s} c_v \le s + u\sqrt{s/t} \le 4ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8}.$$

Получаем для всякого k: $a_k = 1 + \sum\limits_{v=1}^{s} c_v \le 5ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8}$. Имеем: $A(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2 \le$ $\le (a_1 + \cdots + a_d) \cdot \max a_k \le u \cdot (5ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8})$. Согласно свойству Г леммы 1.2, $t \le T' \le T \le 4t$. Тем самым, если $\sqrt{t}+1 \le u \le t^{3/4}$, то $A(d,u) \le u \cdot (5ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8}) \le 7u^2t^{-1/4}$. Если же $t^{3/4} < u \le T'$, то $A(d,u) \le u \cdot (5ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8}) \le 7u^{5/2}t^{-5/8} \le 14u^2t^{-1/8}$. И наконец, если $u > T'$, то исходя непосредственно из определения $A(d,u)$ получаем: $A(d,u) \le (u/T' + 1)^2 A(d,T') \le 56u^2t^{-1/8}$.

Теорема доказана.

2. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ РОМАНОВА НА СЛУЧАЙ ОБОБЩЕННЫХ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

В 1934 году Н. П. Романов доказал [3], что сумма множества простых чисел и множества натуральных степеней фиксированного целого числа $a \ge 2$ образует множество положительной плотности (в смысле плотности, по Шнирельману), иными словами, $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\mathrm{card}\,\{n : n \le x,\ n = p + a^m\}\right) > 0$ (через $\mathrm{card}\,X$ обозначено количество элементов множества X). В дальнейшем были получены некоторые аналоги этой теоремы. Например, в 1951 году П. Эрдеш (P. Erdos) заменил ([4]) в теореме Романова степени a^m значениями многочлена с целыми коэффициентами от степени, т. е. $f(a^m)$, где f — не равный константе многочлен с целыми коэффициентами.

В. Н. Чубариковым была поставлена задача получения аналога теоремы Романова для чисел Фибоначчи. В неопубликованной к настоящему времени работе «On the sum of a prime and a Fibonacci number», выложенной в архиве (arXiv: 1011.0173v1 [math.NT] 31 Oct 2010) и поданной в журнал «International Journal of Number Theory», К. Ли (Lee K. S. Enoch) приводит доказательство этого аналога.

Здесь мы доказываем более общую теорему, используя другой подход, а именно, опираясь на оценку, полученную в первой части.

Теорема 2.1. *Сумма множества простых чисел и множества обобщенных чисел Фибоначчи (наперед заданных) имеет положительную плотность (по Шнирельману), т. е.*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\mathrm{card}\,\{n : n \le x,\ n = p + G_m\}\right) > 0.$$

Доказательство. Наше доказательство будет проведено в духе доказательства теоремы Романова, приведенном в работе[5, с. 191–197]. Сформулируем несколько лемм из [5], которые нам понадобятся.

Лемма 2.1 [5, с. 60]. *Пусть b — четное целое ненулевое число. Имеет место оценка*

$$\mathrm{card}\,\{p : p \le x,\ |p+b| \text{ — простое}\} \le c_1 \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{p\,|\,b} (1 - 1/p)^{-1}.$$

Здесь c_1 — абсолютная константа, т. е. не зависит от b.

Лемма 2.2 [5, с. 28]. *Существует такая константа $c_2 > 0$, что*

$$\prod_{p \le x} (1 - 1/p)^{-1} = c_2 \ln x + O(1).$$

Лемма 2.3 (следствие из предыдущей леммы). *Пусть p_n — n-е простое число. Тогда*

$$\prod_{n=1}^{N} (1 + 1/p_n) = O(\ln N).$$

Лемма 2.4. *Обозначим $f(n) = f(n,x) = \mathrm{card}\,\{(p, G_m) : p \le x,\ G_m \le x,\ p + G_m = n\}$. Если существует такая константа c_3, что для всех $x \ge x_0$ (т. е. начиная с какого-то фиксированного x_0) справедливо неравенство*

$$\sum_{n \le x} f^2(n,x) \le c_3 \sum_{n \le x} f(n,x),$$

то существует такая константа $c_4 > 0$, что для всех $x \geq x_0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\} \geq c_4 x.$$

Доказательство (аналогично рассуждениям, приведенным в [5, с. 192]).

Имеем:

$$\sum_{n \leq x} f(n,x) \geq \operatorname{card}\{p : p \leq x/2\} \cdot \operatorname{card}\{G_m : \ G_m \leq x/2\} \geq c_5 \frac{x}{\ln x} \cdot c_6 lnx = c_7 x,$$

откуда из неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратическом

$$\sum_{n \leq x} f(n,x) \leq (\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\})^{1/2} \left(\sum_{n \leq x} f^2(n,x)\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq (\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\})^{1/2} \cdot c_3^{1/2} \cdot \left(\sum_{n \leq x} f(n,x)\right)^{1/2},$$

следовательно,

$$\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\} \geq c_7 x / c_3 = c_4 x,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Ряд $\sum\limits_{d \geq 2}' \dfrac{1}{d(t(d))^{\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$, сходится. $\sum'$ означает суммирование по бесквадратным числам.*

Доказательство (аналогично рассуждениям, приведенным в [5, с. 196]).

Имеем:

$$\sum_{d \geq 2}' \frac{1}{d(t(d))^{\varepsilon}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\varepsilon}} \sum_{t(d)=n}' \frac{1}{d}\right).$$

Пусть $c_n = \sum\limits_{t(d)=n}' 1/d$, $f(x) = x^{-\varepsilon}$, $C(x) = \sum\limits_{2<n\leq x} \sum\limits_{t(d)=n}' 1/d$. Каждое d встречается в $C(x)$ не более одного раза, все $d \,|\, P$, $P = \prod\limits_{2<n\leq x} F_n < 2^{x^2}$, отсюда

$$C(x) \leq \sum_{d \,|\, P}' \frac{1}{d} = \prod_{p \,|\, P (1+1/p)} \leq \prod_{n \leq x^2} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = O(\ln x)$$

(согласно лемме 2.3). Применяем преобразование Абеля (см., например, [6, с. 224]):

$$\sum_{d \geq 2}' \frac{1}{d(t(d))^{\varepsilon}} = \lim_{X \to +\infty} \sum_{2<n\leq X} \left(\frac{1}{n^{\varepsilon}} \sum_{t(d)=n}' \frac{1}{d}\right) =$$
$$= \lim_{X \to +\infty} \left(-\int_2^X \varepsilon x^{-1-\varepsilon} C(x) dx + C(X) X^{-\varepsilon}\right) = O(1).$$

Лемма доказана.

Итак, для фиксированных $m_1, m_2 \geq 2$, таких, что $m_1 \neq m_2$ и $G_{m_1}, G_{m_2} \leq x$, получаем (согласно лемме 2.1):

$$\operatorname{card}\{(p_1,p_2): \ p_1, p_2 \leq x, p_1 - p_2 = G_{m_2} - G_{m_1}\} \leq c_1 \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{p \,|\, (G_{m_2} - G_{m_1})} (1 - 1/p)^{-1} \leq$$
$$\leq c_8 \frac{x}{\ln^2 x} g(G_{m_2} - G_{m_1}),$$

где $g(k) = \prod_{p\,|\,k}(1+1/p)$. Пусть теперь $S = S(x)$ — число решений уравнения $p_1 - p_2 = G_{m_2} - G_{m_1}$ в множестве $\{(p_1, p_2, G_{m_1}, G_{m_2}) :\ p_1, p_2, G_{m_1}, G_{m_2} \le x;\ m_1, m_2 \ge 2\}$, а $U(x) = \max\{n :\ G_n \le x\}$, тогда

$$\sum_{n\le x} f^2(n,x) \le S(x) \le c_8 \frac{x}{\ln^2 x} \sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}} g(G_{m_2} - G_{m_1}) + c_9 x.$$

Согласно лемме 2.5, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}} g(G_{m_2} - G_{m_1}) \le c_{10} ln^2 x.$$

Далее, $\sum'$ означает суммирование по бесквадратным числам (включая единицу, когда другое не оговорено), взаимно простым с числами a, b и с числом (a^2+ab-b^2). Применяя теорему 1.1, находим:

$$\prod_{p|ab(a^2+ab-b^2)} (1+1/p)^{-1} \cdot \sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}} g(G_{m_2} - G_{m_1}) \le \sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}} \sideset{}{'}\sum_{d\,|\,(G_{m_2}-G_{m_1})} \frac{1}{d} =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{d\le x} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2,\\ d|(G_{m_2}-G_{m_1})}} 1 \le \sideset{}{'}\sum_{d\le x} \frac{1}{d} A(d, U(x)) = (U(x))^2 + \sideset{}{'}\sum_{2\le d\le x} \frac{1}{d} A(d,U(x)) =$$

$$= (U(x))^2 + \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)<\sqrt{t(d)}+1}} \frac{1}{d} A(d,U(x)) + \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)\ge\sqrt{t(d)}+1}} \frac{1}{d} A(d,U(x)) \le (U(x))^2 +$$

$$+ \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)<\sqrt{t(d)}+1}} \frac{1}{d}(3U(x)-2) + \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)\ge\sqrt{t(d)}+1}} \frac{1}{d} 56(U(x))^2 (t(d))^{-1/8} \le$$

$$\le (U(x))^2 + 3U(x) \sum_{2\le d\le x} \frac{1}{d} + 56(U(x))^2 \sideset{}{'}\sum_{d\ge 2} \frac{1}{d(t(d))^{1/8}} \le c_{11} \ln^2 x.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя В. Н. Чубарикова за ценные замечания.

Библиографический список

1. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. М. : Наука, 1978.
2. *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М. : Дрофа, 2005.
3. *Romanoff N. P.* Über einige Satze der additiven Zahlentheorie // Math. Ann. 1934. Vol. 109. P. 668–678.
4. *Erdos P.* On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // J. Chinese Math. Soc. 1951. № 1. P. 409–421.
5. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М. : Мир, 1967.
6. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М. : Высш. шк., 1999.

Arithmetic Properties of Generalized Fibonacci Sequence and Their Consequences

A. N. Vassilyev

Kazakhstani Branch of Lomonosov Moscow State University, Republic of Kazakhstan, 010010, Astana, Kazhimukan str., 11, antonvassilyev@mail.ru

In this paper we obtain some arithmetic properties of generalized Fibonacci sequence and consider their applications.

Key words: generalized Fibonacci, exponential sums, set's density.

References

1. Vorobiev N. N. *Fibonacci Numbers*. Basel; Boston; Berlin, Birkhauser Verlaf, 2002.
2. Gashkov S. B., Chubarikov V. N. *Arifmetika. Algoritmy. Slozhnost' vychislenii* [Arithmetics. Algorithms. The Complexity of Computations]. Moscow, Drofa, 2005 (in Russian).
3. Romanoff N. P. Über einige Satze der additiven Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 1934, vol. 109, pp. 668–678.
4. Erdos P. On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff. *J. Chinese Math. Soc.*, 1951, no. 1, pp. 409–421.
5. Prahar K. *Raspredelenie prostykh chisel* [Distribution of Prime Numbers]. Moscow, Mir, 1967 (in Russian).
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. *Lektsii po matematicheskomu analizu* [Lectures on Mathematical Analysis]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1999 (in Russian).

УДК 511.34

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С БЕСКВАДРАТНЫМИ ЧИСЛАМИ

Д. В. Горяшин

Ассистент кафедры математических и компьютерных методов анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, goryashin@mech.math.msu.su

В работе получена асимптотическая формула для количества представлений натурального числа N в виде $q_1+q_2+[\alpha q_3]$, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа, $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное алгебраическое число.

Ключевые слова: тернарные задачи, бесквадратные числа, асимптотическая формула.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное число и пусть $r_3(\alpha, N)$ равно количеству разбиений натурального числа N на два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. числу представлений числа N в виде

$$q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N, \tag{1}$$

где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа.

Целью данной работы является нахождение асимптотической формулы для величины $r_3(\alpha, N)$ при $N \to \infty$.

Задачи о представлении натурального числа суммой трех слагаемых (называемые тернарными задачами) рассматривались многими авторами. Наиболее известная среди них — тернарная проблема Гольдбаха о представлении натурального числа в виде суммы трех простых чисел, решенная в 1937 г. И. М. Виноградовым [1]. В 1999 г. С. Ю. Фаткина [2] рассмотрела видоизмененную проблему Гольдбаха и доказала асимптотическую формулу для числа представлений натурального числа N в виде $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$, где p_1, p_2, p_3 — простые числа с почти равными слагаемыми.

С другой стороны, в 1929–1933 гг. Эвелин (C. J. A. Evelyn) и Линфут (E. H. Linfoot) в серии работ [3] получили асимптотические формулы для количества $r_\nu(N)$ представлений числа в виде суммы ν бесквадратных чисел, $\nu \geqslant 2$. Оценка остаточного члена в этих формулах в дальнейшем неоднократно уточнялась. Последний результат в этой задаче при $\nu \geqslant 3$ принадлежит Й. Брюдерну (J. Brüdern) и А. Перелли (A. Perelli) [4], которые доказали, что

$$r_\nu(N) = \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^\nu G_\nu(N) N^{\nu-1} + O\big(N^{\nu-3/2+\varepsilon}\big),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно и

$$G_\nu(N) = \prod_{p^2 \nmid N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^\nu}\right)\prod_{p^2 | N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^{\nu-1}}\right).$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть* $\alpha > 1$ *— иррациональное алгебраическое число. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *для количества* $r_3(\alpha, N)$ *решений уравнения* (1) *в бесквадратных числах* q_1, q_2, q_3 *справедлива асимптотическая формула:*

$$r_3(\alpha, N) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 N^2 + O\big(N^{11/6+\varepsilon}\big).$$

Доказательство теоремы проводится, как и в работах [1, 2, 4], круговым методом Харди–Литтлвуда–Рамануджана–Виноградова. Он основан на представлении искомой величины $r_3(\alpha, N)$ в виде

$$r_3(\alpha, N) = \int\limits_0^1 S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i\beta N} d\beta, \qquad (2)$$

где

$$S_1(\beta) = \sum_{\substack{q \leqslant N \\ q \text{ бесквадратное}}} e^{2\pi i\beta q} = \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta n}, \qquad S_2(\beta) = \sum_{n \leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta[\alpha n]}.$$

В доказательстве также используются методы работ Г. И. Архипова, К. Буриева и В. Н. Чубарикова [5, 6] и оценка тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам» [7–9].

Зафиксируем параметр Q так, что $1 \leqslant Q \leqslant \sqrt{N}$, и положим $\tau = N/Q$ (значение Q, а значит, и τ выберем позднее). В силу 1-периодичности подынтегральной функции интеграл в правой части (2) можно представить в следующем виде:

$$r_3(\alpha, N) = \int\limits_{-1/\tau}^{1-1/\tau} = \int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau} S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i\beta N} d\beta + \int\limits_{1/\tau}^{1-1/\tau} S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i\beta N} d\beta = I_1 + I_2.$$

2. ИНТЕГРАЛ I_1: ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИКИ

При $\beta \in [-1/\tau, 1/\tau]$ преобразуем сумму $S_1(\beta)$ следующим образом. Пусть

$$K(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$

Тогда

$$S_1(\beta) = \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta n} = \sum_{n \leqslant N} (K(n) - K(n-1)) e^{2\pi i\beta n} =$$

$$= \sum_{1 < n \leqslant N-1} K(n)\left(e^{2\pi i\beta n} - e^{2\pi i\beta(n+1)}\right) + K(N) e^{2\pi i\beta N} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{1 < n \leqslant N-1} n\left(e^{2\pi i\beta n} - e^{2\pi i\beta(n+1)}\right) +$$

$$+ \frac{6}{\pi^2} N e^{2\pi i\beta N} + O\left(\sum_{1 < n \leqslant N-1} \sqrt{n}\left|e^{2\pi i\beta n} - e^{2\pi i\beta(n+1)}\right| + \sqrt{N}\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \sum_{1 < n \leqslant N} e^{2\pi i\beta n} + O\left(\sqrt{N}(N|\beta| + 1)\right) = \frac{6}{\pi^2} \tilde{S}_1(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta| + 1)\right).$$

Далее, сумму $S_2(\beta)$ представим в следующем виде:

$$S_2(\beta) = \sum_{n \leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta[\alpha n]} = \sum_{n \leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta\alpha n} e^{-2\pi i\beta\{\alpha n\}} =$$

$$= \sum_{n \leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta\alpha n}(1 + O(|\beta|)) = \sum_{n \leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta\alpha n} + O(N|\beta|).$$

К получившейся сумме в правой части применяем такое же преобразование, как к сумме $S_1(\beta)$ (с заменой N на N/α и β на $\beta\alpha$). Получим:

$$S_2(\beta) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{1<n\leqslant N/\alpha} e^{2\pi i\beta\alpha n} + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right).$$

Учитывая, что

$$\sum_{1<n\leqslant N/\alpha} e^{2\pi i\beta\alpha n} = \sum_{1<n\leqslant N/\alpha} e^{2\pi i\beta[\alpha n]}e^{2\pi i\beta\{\alpha n\}} = \sum_{1<n\leqslant N/\alpha} e^{2\pi i\beta[\alpha n]} + O(N|\beta|),$$

сумму $S_2(\beta)$ можно записать также в виде

$$S_2(\beta) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{1<n\leqslant N/\alpha} e^{2\pi i\beta[\alpha n]} + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right) = \frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_2(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right).$$

Подставляя полученные выражения для $S_1(\beta)$ и $S_2(\beta)$ в интеграл I_1, будем иметь:

$$I_1 = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} S_1^2(\beta)S_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta =$$

$$= \int_{-1/\tau}^{1/\tau} \left(\frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_1(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right)\right)^2 \left(\frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_2(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right)\right) e^{-2\pi i\beta N}d\beta =$$

$$= \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \int_{-1/\tau}^{1/\tau} \tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta + O\left(R_1(N,\tau)\right),$$

где

$$\tilde{S}_1(\beta) = \sum_{1<n\leqslant N} e^{2\pi i\beta n}, \qquad \tilde{S}_2(\beta) = \sum_{1<n\leqslant N/\alpha} e^{2\pi i\beta[\alpha n]},$$

$$R_1(N,\tau) = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} \left(N^{5/2}(N|\beta|+1) + N^2(N|\beta|+1)^2 + N^{3/2}(N|\beta|+1)^3\right) d\beta \ll \frac{N^{7/2}}{\tau^2} = N^{3/2}Q^2.$$

Полученный интеграл представим в виде

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau} \tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta = \int_{-1/\tau}^{1-1/\tau} - \int_{1/\tau}^{1-1/\tau} = \int_0^1 \tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta - \int_{1/\tau}^{1-1/\tau} \tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta.$$

Очевидно, первый из интегралов в правой части равен количеству решений уравнения

$$n_1 + n_2 + [\alpha n_3] = N$$

в натуральных числах n_1, n_2, n_3 с условиями $2 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $2 \leqslant n_3 \leqslant [N/\alpha]$. Поскольку при фиксированном n_3 уравнение $n_1 + n_2 = N - [\alpha n_3]$ имеет $N - [\alpha n_3] - 3$ решения в натуральных числах n_1, n_2 с условием $2 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, искомое количество решений равно

$$\sum_{n_3=2}^{[N/\alpha]} (N - [\alpha n_3] - 3) = \frac{N^2}{\alpha} - \sum_{n_3=2}^{[N/\alpha]} \alpha n_3 + O(N) = \frac{N^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{\alpha}\right)^2 + O(N) = \frac{N^2}{2\alpha} + O(N).$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся тривиальным неравенством

$$|\tilde{S}_1(\beta)| \leqslant \frac{1}{\|\beta\|} \leqslant \tau = \frac{N}{Q}, \quad \text{если} \quad \beta \in [1/\tau, 1-1/\tau].$$

Получим:

$$\left|\int\limits_{1/\tau}^{1-1/\tau} \tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta\right| \leqslant \int\limits_{1/\tau}^{1-1/\tau} |\tilde{S}_1(\beta)|^2|\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \leqslant \frac{N}{Q}\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)||\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \ll \frac{N^2}{Q},$$

так как

$$\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)|^2 d\beta = N, \qquad \int\limits_0^1 |\tilde{S}_2(\beta)|^2 d\beta = [N/\alpha]\,,$$

$$\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)||\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \leqslant \left(\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)|^2 d\beta \int\limits_0^1 |\tilde{S}_2(\beta)|^2 d\beta\right)^{1/2} \ll N.$$

Таким образом,

$$I_1 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\left(\frac{N^2}{Q}\right) + O\big(N^{3/2}Q^2\big). \tag{3}$$

3. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА I_2

Разобьем отрезок интегрирования $[1/\tau, 1-1/\tau] = [Q/N, 1-Q/N]$ на два множества:

$$E_1 = \left[\frac{Q}{N}; 1-\frac{Q}{N}\right] \cap \mathfrak{M}(Q), \qquad E_2 = \left[\frac{Q}{N}; 1-\frac{Q}{N}\right] \cap \mathfrak{m}(Q),$$

где

$$\mathfrak{M}(Q) = \bigcup_{q\leqslant Q} \bigcup_{\substack{a\\(a,q)=1}} \left[\frac{a}{q} - \frac{Q}{qN}; \frac{a}{q} + \frac{Q}{qN}\right], \qquad \mathfrak{m}(Q) = \mathbb{R}\backslash\mathfrak{M}(Q).$$

В соответствии с этим разбиением интеграл I_2 также разбивается на два интеграла; пусть $I_2' = \int_{E_1}$, $I_2'' = \int_{E_2}$. Интеграл I_2'' оценим с помощью следующей леммы об оценке тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам» (см. [7–9]). Отметим, что в работе [7] эта оценка доказана в предположении, что $Q \leqslant N^{1/3}$; при $Q \leqslant \sqrt{N}$ она доказана в 2004 г. независимо двумя авторами в работах [8, 9].

Лемма 2. *Пусть* $1 \leqslant Q \leqslant \sqrt{N}$. *Тогда* $S_1(\beta) \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{Q}$ *для всех* $\beta \in \mathfrak{m}(Q)$.

По лемме 2 имеем:

$$|I_2''| \leqslant \int\limits_{E_2} |S_1(\beta)|^2|S_2(\beta)|d\beta \leqslant \max_{\beta\in E_2}|S_1(\beta)| \int\limits_0^1 |S_1(\beta)||S_2(\beta)|d\beta \ll \frac{N^{2+\varepsilon}}{Q},$$

так как

$$\int\limits_0^1 |S_1(\beta)|^2 d\beta = \sum_{n\leqslant N}\mu^2(n) \ll N, \qquad \int\limits_0^1 |S_2(\beta)|^2 d\beta = \sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n) \ll N, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^1 |S_1(\beta)||S_2(\beta)|d\beta \leqslant \left(\int\limits_0^1 |S_1(\beta)|^2 d\beta \int\limits_0^1 |S_2(\beta)|^2 d\beta\right)^{1/2} \ll N.$$

Оценим теперь интеграл I_2' по множеству E_1. Для этого применим следующую лемму [10, п. II, лемма 1].

Лемма 3. *Пусть* β, x *— вещественные числа,* P *— натуральное число,* $P \geqslant 2$. *Тогда имеет место формула*

$$e^{-2\pi i\beta\{x\}} = \sum_{|k|\leqslant P} \frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)} e^{2\pi ikx} + O(R_P(x)),$$

где
$$R_P(x)=\frac{1}{\sqrt{1+P^2\sin^2\pi x}}=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_ke^{2\pi ikx}+O\left(\frac{\ln P}{P}\right),\qquad c_k\ll\frac{\ln P}{P}e^{-|k|/P}.$$

Пользуясь леммой 3, преобразуем сумму $S_2(\beta)$ следующим образом:

$$S_2(\beta)=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta[\alpha n]}=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta\alpha n}\left(\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)}e^{2\pi ik\alpha n}+R_P(\alpha n)\right)=$$
$$=\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)}\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n}+O\left(\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)R_P(\alpha n)\right)=$$
$$=\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i}\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{\beta+k}\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n}+O(R_2(N)).$$

Положим $P=N^{1/6}$. Если α — алгебраическое число, то для $R_2(N)$ справедлива оценка

$$R_2(N)=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)R_P(\alpha n)=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_ke^{2\pi ik\alpha n}+O\left(\frac{N\ln P}{P}\right)\ll$$
$$\ll\frac{\ln P}{P}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}\left|\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi ik\alpha n}\right|+\frac{N\ln P}{P}\ll N^{\frac56+\varepsilon}$$

(доказательство оценки последней тригонометрической суммы см. в [11]). Следовательно,

$$|S_2(\beta)|\ll\left|\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta\alpha n}\right|+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{1}{k}\left|\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n}\right|+N^{\frac56+\varepsilon}\ll$$
$$\ll\sum_{|k|\leqslant P}\frac{|S_3(\alpha(\beta+k))|}{|k|+1}+N^{\frac56+\varepsilon},$$

где $S_3(\beta)=\sum\limits_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta n}$ (т. е. $S_3(\beta)$ отличается от $S_1(\beta)$ лишь длиной промежутка суммирования: N/α вместо N).

Таким образом,

$$I_2'=\int\limits_{E_1}|S_1(\beta)|^2|S_2(\beta)|d\beta\ll\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{|k|+1}\int\limits_{E_1}|S_1(\beta)|^2|S_3(\alpha(\beta+k))|d\beta+N^{11/6+\varepsilon}$$

(здесь мы вновь воспользовались неравенством (4)). Снова разобьем множество интегрирования E_1 на две части — E_{11} и E_{12}, в зависимости от того, принадлежит число $\alpha(\beta+k)$ множеству $\mathfrak{M}(Q)$ или $\mathfrak{m}(Q)$ соответственно. Тогда интеграл по множеству E_{12} также оценивается с помощью леммы 2, так как число $\alpha(\beta+k)$ удовлетворяет ее условиям:

$$\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{|k|+1}\int\limits_{E_{12}}|S_1(\beta)|^2|S_3(\alpha(\beta+k))|d\beta\ll\frac{N^{1+\varepsilon}}{Q}\int\limits_0^1|S_1(\beta)|^2d\beta\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{|k|+1}\ll\frac{N^{2+\varepsilon/2}}{Q}\ln P.$$

Наконец, для оценки интеграла по множеству E_{11} воспользуемся следующей леммой, являющейся вариантом леммы Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова о мере пересечения «больших дуг» в разбиении Фарея [12] (см. также [6, 13]).

Лемма 4. *Пусть* $1\leqslant Q_1,Q_2\leqslant\sqrt{N}$, $\alpha>1$ *— некоторое фиксированное иррациональное алгебраическое число,* k *— целое число. Тогда при любом* $\varepsilon>0$ *для меры* $\mu(T)$ *множества* T *точек* $\beta\in[Q_1/N;1-Q_1/N]\cap\mathfrak{M}(Q_1)$ *таких, что* $\alpha(\beta+k)\in\mathfrak{M}(Q_2)$, *справедлива оценка*

$$\mu(T)\ll(|k|+1)Q_1^2Q_2^2N^{-2+\varepsilon}.$$

Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и в работе [12]. Применим лемму 4 к интегралу по множеству E_{11} при $Q_1 = Q_2 = Q$. Оценивая тривиально подынтегральные функции, получаем:

$$\sum_{|k|\leqslant P} \frac{1}{|k|+1} \int\limits_{E_{11}} |S_1(\beta)|^2 |S_3(\alpha(\beta+k))| d\beta \ll N^3 Q^4 N^{-2+\varepsilon} \sum_{|k|\leqslant P} 1 = PQ^4 N^{1+\varepsilon}.$$

Выберем параметр Q равным $Q = P = N^{1/6}$. Тогда, собирая все оценки, для интеграла I_2 имеем:

$$|I_2| \ll \frac{N^{2+\varepsilon}}{Q} + \frac{N^{2+\varepsilon/2}}{Q} \ln P + PQ^4 N^{1+\varepsilon} + N^{11/6+\varepsilon} \ll N^{11/6+\varepsilon}.$$

Окончательно, учитывая асимптотическую формулу (3) для интеграла I_1, получаем:

$$r_3(\alpha, N) = I_1 + I_2 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\left(\frac{N^2}{Q}\right) + O\big(N^{3/2}Q^2\big) + O\big(N^{11/6+\varepsilon}\big) = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\big(N^{11/6+\varepsilon}\big),$$

что и требовалось доказать.

Библиографический список

1. *Виноградов И. М.* Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 291–294.
2. *Фаткина С. Ю.* О представлении натурального числа суммой трех почти равных слагаемых, порожденных простыми числами // УМН. 2000. Т. 55, вып. 1. С. 197–198.
3. *Evelyn C. J. A., Linfoot E. H.* On a problem in the additive theory of numbers. I // Math. Z. 1929. Vol. 30. P. 433–448; II : J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 164. P. 131–140; III : Math. Z. 1932. Vol. 34. P. 637–644; IV : Ann. of Math. 1931. Vol. 32. P. 261–270; V : Quart. J. Math. 1932. Vol. 3. P. 152–160; VI : Quart. J. Math. 1933. Vol. 4. P. 309–314.
4. *Brüdern J., Perelli A.* Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1999. Vol. XXVIII. P. 591–613.
5. *Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н.* О мощности особого множества в бинарных аддитивных задачах с простыми числами // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 28–57.
6. *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. АН. 2002. Т. 387, № 3. С. 295–296.
7. *Brüdern J., Granville A., Perelli A., Vaughan R. C., Wooley T. D.* On the exponential sum over k-free numbers // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1998. Vol. 356. P. 739–761.
8. *Tolev D. I.* On the exponential sum with squarefree numbers // Bull. London Math. Soc. 2005. Vol. 37. P. 827–834.
9. *Schlage-Puchta J. C.* The exponential sum over squarefree integers // Acta Arith. 2004. Vol. 115. P. 265–268.
10. *Попов О. В.* Арифметические приложения оценок сумм Г. Вейля от многочленов растущей степени // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 2. С. 595–640.
11. *Горяшин Д. В.* Бесквадратные числа в последовательности $[\alpha n]$ // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 3. С. 60–66.
12. *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* О мере «больших дуг» в разбиении Фарея // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 35–38.
13. *Brüdern J., Cook R. J., Perelli A.* The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1997. P. 87–100.

On an Additive Problem with Squarefree Numbers

D. V. Goryashin

Moscow State University, Russia, 199991, Moscow, Leninskie Gory, 1, goryashin@mech.math.msu.su

An asymptotic formula for the number of representations of a positive integer N in the form $q_1 + q_2 + [\alpha q_3]$ is obtained, where q_1, q_2, q_3 are squarefree numbers and $\alpha > 1$ is a fixed irrational algebraic number.

Key words: ternary problem, squarefree numbers, asymptotic formula.

References

1. Vinogradov I. M. Representation of an Odd Number as a Sum of Three Primes. *Doklady AN USSR*. 1937, vol. 15, pp. 291–294 (in Russian).
2. Fatkina S. Yu. On the representation of a natural number as a sum of three almost equal terms generated by primes. *Russian Mathematical Surveys* [Uspekhi Mat. Nauk], 2000, vol. 55, no. 1, pp. 171. DOI: 10.1070/RM2000v055n01ABEH000254.
3. Evelyn C. J. A., Linfoot E. H. On a problem in the additive theory of numbers. I : *Math. Z.* 1929, vol. 30, pp. 433–448; II : *J. Reine Angew. Math.*, 1931, vol. 164, pp. 131–140; III : *Math. Z.*, 1932, vol. 34, pp. 637–644; IV : *Ann. of Math.*, 1931, vol. 32, pp. 261–270; V : *Quart. J. Math.*, 1932, vol. 3, pp. 152–160; VI : *Quart. J. Math.*, 1933, vol. 4, pp. 309–314.
4. Brüdern J., Perelli A. Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1999, vol. XXVIII, pp. 591–613.
5. Arkhipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. On the power of a singular set in binary additive problems with prime numbers. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 218, pp. 23–52.
6. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. On the exceptional set in a Goldbach-type binary problem. *Dokl. Math.* [Dokl. Akad. Nauk], 2002, vol. 66, no. 3, pp. 338—339.
7. Brüdern J., Granville A., Perelli A., Vaughan R. C., Wooley T. D. On the exponential sum over k-free numbers. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1998, vol. 356, pp. 739–761.
8. Tolev D. I. On the exponential sum with square-free numbers. *Bull. London Math. Soc.*, 2005, vol. 37, pp. 827–834. DOI: 10.1112/S0024609305004753.
9. Schlage-Puchta J. C. The exponential sum over squarefree integers. *Acta Arith.*, 2004, vol. 115, pp. 265–268. DOI: 10.4064/aa115-3-7.
10. Popov O. V. Arithmetic applications for estimates of Weyl sums of polynomials of increasing degree. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998, vol. 4, no. 2, pp. 595–640 (in Russian).
11. Goryashin D. V. Squarefree numbers in the sequence $[\alpha n]$. *Chebyshevskiĭ Sb.*, 2013, vol. 14, no. 3 pp. 60–66 (in Russian).
12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. On the measure of «large arcs»' in the Farey partition. *Chebyshevskiĭ Sb.*, 2011, vol. 12, no. 4, pp. 39–42.
13. Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments. *Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 87–100.

УДК 511.9

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОГО МЕТОДА В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ

Л. П. Добровольская[1], М. Н. Добровольский[2], Н. М. Добровольский[3], Н. Н. Добровольский[4], И. Ю. Реброва[5]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент, Институт экономики и управления, Тула, lbocharova6565@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН, Москва, dobrovolsky.michael@gmail.com

[3]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, dobrovol@tspu.tula.ru

[4]Аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[5]Кандидат физико-математических наук, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, i_rebrova@mail.ru

В данной работе дается обзор некоторых актуальных проблем метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова. Данный обзор был сделан 12 сентября 2013 года в г. Саратове на XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения».

Ключевые слова: метод оптимальных коэффициентов, алгебраические решётки, теорема Гельфонда, гиперболическая дзета-функция.

ВВЕДЕНИЕ

Параллелепипедальные сетки Н. М. Коробова (1959 г.)

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{N}\right\}\right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ — погрешность квадратурной формулы и

$$|R_N[f]| \ll \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \qquad \text{(Н. С. Бахвалов, Н. М. Коробов [1]).}$$

Обозначения и необходимые определения

Символ Коробова:

$$\delta_N(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod N, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$

Пусть целое $N > 1$, $N_1 = [(N-1)/2]$, $N_2 = [N/2]$, $a_\nu = a_\nu(N)$ — целые, взаимно простые с N $(\nu = 1, \ldots, s)$:

$$S_N(z_1, \ldots, z_s) = \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(z_1m_1 + \ldots + z_sm_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s},$$

где $z_1, \ldots, z_s$ — произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Оптимальные коэффициенты

Если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство

$$S_N(a_1, \ldots, a_s) \le B\frac{\ln^\beta N}{N},$$

то целые $a_1, \ldots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю N.

Основная мера качества

Величину $S_N(a_1, \ldots, a_s)$ называют основной мерой качества набора оптимальных коэффициентов. Известно (см. [1, с. 81]), что для любых целых $a_1, \ldots, a_s$ выполняется оценка

$$S_N(a_1, \ldots, a_s) \ge B_0\frac{\ln^s N}{N},$$

с некоторой константой B_0.

Существование оптимальных коэффициентов

Для $\sigma(N)$ — *среднего арифметического основной меры качества набора коэффициентов по всем параллелепипедальным сеткам*, заданного равенством

$$\sigma(N) = \frac{1}{\varphi^s(N)} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_s=1 \\ (a_v,N)=1\,(v=1,\ldots,s)}}^{N-1} S_N(a_1, \ldots, a_s),$$

и для любого составного модуля N справедливо асимптотическое равенство:

$$\sigma(N) = \frac{2^s \ln^s N}{N} + O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N}\right).$$

Отсюда следует существование оптимальных коэффициентов для любого составного модуля N.

ТЕОРЕМА А. О. ГЕЛЬФОНДА И ОПТИМАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки Λ

$\Lambda = \Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$ — решётка решений линейного сравнения

$$m + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N,$$

$\Lambda^{(p)}$ — присоединенная решётка решений системы линейных сравнений

$$\begin{cases} k_1 \equiv a_1 k \\ \ldots\ldots\ldots \\ k_s \equiv a_s k \end{cases} \pmod N,$$

$q(\Lambda)$ — гиперболический параметр и присоединенный гиперболический параметр $Q(\Lambda)$:

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{m} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \overline{m}\,\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s, \qquad Q(\Lambda) = \min_{\substack{\vec{k} \in \Lambda^{(p)}, \\ k \not\equiv 0 \pmod N}} |k||k_1| \ldots |k_s|.$$

Теорема А. О. Гельфонда (1967 г.)

Согласно теореме А. О. Гельфонда для величин $q(\Lambda)$ и $Q(\Lambda)$ справедливы неравенства

$$Q(\Lambda) \geq C_1(s) q(\Lambda)^s, \qquad q(\Lambda) \geq C_1(s) \frac{Q(\Lambda)^s}{N^{s^2-1}},$$

где $C_1 = \min\left(1/(2s+3)^{s+1}, 1/5^{2s}\right)$.

Присоединенная мера качества

$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ — расстояние до ближайщего целого.

$$S_N^*(z_1, \dots, z_s) = \sum_{k=1}^{N_2} \frac{1}{k \left\| \frac{z_1 k}{N} \right\| \ldots \left\| \frac{z_s k}{N} \right\|},$$

где z_1, …, z_s — произвольные целые взаимно простые с N.

Критерий оптимальности с присоединенной мерой качества

Теорема 1. *Целые $1, z_1, \dots, z_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю N тогда и только тогда, когда существуют константы $\beta_2 = \beta_2(s)$ и $B_2 = B_2(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство*

$$S_N^*(z_1, \dots, z_s) \leq B_2 \ln^{\beta_2} N.$$

Новое доказательство существования оптимальных коэффициентов

Теорема 2. *Для любого натурального $N > 2$ существует набор оптимальных коэффициентов $1, a_1, \dots, a_s$ по модулю N с*

$$S^*(a_1, \dots, a_s) \leq (2 \ln N + 2(C - \ln 2) + 3)^s (\ln N + C - \ln 2).$$

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ

Проблема правильного порядка

Как известно, на классе алгебраических решёток достигается правильный порядок убывания гиперболической дзета-функции решёток при росте детерминанта решёток (см. [2]). Более того, для этих решеток справедлива асимптотическая формула (см. [3–5]). Из непрерывности гиперболической дзета-функции на пространстве решёток следует, что правильный порядок убывания гиперболической дзета-функции решёток достижим на классе рациональных решёток. Действительно, достаточно брать рациональные решетки из очень маленьких окрестностей алгебраических решёток.

Возникает естественный вопрос, а на классе целочисленных решёток правильный порядок убывания достижим или нет?

Если достижим, то надо указать алгоритм построения таких оптимальных параллелепипедальных сеток, для которых будет правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах E_s^α. Другими словами, в этом случае необходимо построить алгоритм вычисления модуля N и оптимальных коэффициентов по модулю N, для которых выполняется оценка

$$\zeta(\Lambda(1, a_1, \ldots, a_{s-1}; N)|\alpha) = O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N^\alpha}\right) \qquad (\alpha > 1).$$

Если такой порядок недостижим, то мы получим некоторый аналог теоремы Лиувиля–Туэ–Зигеля–Рота для алгебраических решёток, так как отсутствие правильного порядка будет означать, что алгебраические решетки нельзя хорошо приближать целочисленными.

Проблема существования аналитического продолжения

Как известно, для любой декартовой решётки существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки. Более того, для произвольной декартовой решётки получено функциональное уравнение, задающее это аналитическое продолжение в явном виде (см. [3, 4, 6]).

Естественно, возникают вопросы о существовании аналитического продолжения для гиперболической дзета-функции в следующих случаях:

Для решёток С. М. Воронина $\Lambda(F, q)$, где F — произвольное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а q — простое натуральное число и целочисленная решетка $\Lambda(F, q)$ соответствует идеалу $\mathfrak{L} \subset \mathbb{Z}_F$ с нормой $N(\mathfrak{L}) = q$, если фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^s$ соответствует кольцу $\mathbb{Z}_F$ целых алгебраических чисел поля F.

Сам С. М. Воронин вместе со своим учеником Н. Темиргалиевым рассмотрел случай кольца целых гауссовых чисел и случай круговых полей. Это объясняется тем, что и квадратичное поле гауссовых чисел, и круговые поля относятся к числу наиболее изученных алгебраических полей. В частности, там имеются теоремы об описании соответствующих идеалов и о распределении их норм в арифметических прогрессиях, явно заданных алгебраическим полем.

Для решётки совместных приближений $\Lambda(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, заданной равенством

$$\Lambda(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \{(q, q\theta_1 - p_1, \ldots, q\theta_s - p_s) \mid q, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\theta_1, \ldots, \theta_s$ — произвольные иррациональные числа. Важность таких решеток уже обсуждалась в связи с проблемой Литлвуда.

Легко видеть, что взаимная решетка $\Lambda^*(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ имеет вид

$$\Lambda^*(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \{(q - \theta_1 p_1 - \ldots - \theta_s p_s, p_1, \ldots, p_s) \mid q, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Естественно предполагать, что гиперболические дзета-функции этих решеток связаны некоторым функциональным уравнением между значениями в левой и правой полуплоскостях.

Для алгебраической решётки $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$, где решётка

$$\Lambda(F) = \left\{\vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu\right) \middle| \, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Для произвольной решётки Λ. Если для произвольной решётки гиперболическая дзета-функция не продолжается на всю комплексную плоскость (что весьма сомнительно), то требуется описать класс всех решёток, для которых гиперболическая дзета функция аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс s-го порядка.

По-видимому, ключом к решению проблемы аналитического продолжения является дальнейшее изучение возможности предельного перехода для гиперболических дзета-функций декартовых решеток в левой полуплоскости по сходящейся последовательности декартовых решёток.

Если такой предел всегда существует, то, переходя в функциональном уравнении слева и справа к пределу, получим функциональное уравнение для предельной решётки. Наиболее перспективно должно быть получение функционального уравнения только в терминах взаимных решёток, так как сходимость последовательности решёток эквивалентна сходимости соответствующих взаимных решёток.

Здесь необходимо подчеркнуть, что основная сложность должна быть в случае, когда предельная решётка недекартовая и имеет тольку одну главную компоненту. Например, все алгебраические решётки относятся к этому случаю.

Проблема поведения в критической полосе

На важность этой проблемы указывал в беседах Н. М. Коробов. Он высказывал гипотезу, что аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решётки в критическую полосу из правой полуплоскости и аналитическое продолжение в критическую полосу гиперболической дзета-функции взаимной решетки или присоединенных решеток из левой полуплоскости позволит получать константы в соответствующих теоремах переноса.

Проблема значений тригонометрических сумм сеток

Нормированные тригонометрические суммы параллелепипедальных сеток имеют два значения: 0 и 1. Для нормированных тригонометрических сумм двумерных сеток Смоляка таких значений три: 0, 1 и -1. Для неравномерных сеток имеется или хорошая равномерная оценка $O(1/\sqrt{N})$, или они равны 1.

Очень важно получить оценки нормированных тригонометрических сумм для алгебраических сеток.

Если эти суммы имеют спектр значений не сосредоточенный около точек 0 и 1, то алгебраические сетки нельзя хорошо приблизить параллелепипедальными сетками, а алгебраические решётки нельзя хорошо приблизить целочисленными решётками.

Библиографический список

1. *Коробов Н. М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е изд. М. : МЦНМО, 2004.

2. *Добровольский Н. М.* Гиперболическая дзета-функция решёток. Тула, 1984. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

3. *Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н.* Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, вып. 4(44). Тула : Из-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. С. 4–107.

4. *Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н.* Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов. Тула : Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 283 с.

5. *Добровольский Н. М.* Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. 195 с.

6. *Добровольский М. Н.* Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

Some Questions of Number-theoretical Method in Approximation Analysis

L. P. Dobrovolskaya[1], M. N. Dobrovolsky[2], N. M. Dobrovol'skii[3], N. N. Dobrovol'skii[4], I. Y. Rebrova[5]

[1]Institute of Economics and Management, Russia, 300041, Tula, Veresaeva st., lbocharova6565@mail.ru

[2]Geophysical center RAS, Russia, 119296, Moscow, Molodezhnaya str., 3, dobrovolsky.michael@gmail.com

[3]Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, pr. Lenina, 125, dobrovol@tspu.tula.ru

[4]Tula State University, Russia, 300600, Tula, pr. Lenina, 92, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[5]Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, pr. Lenina, 125, i_rebrova@mail.ru

This article gives an overview of several actual problems of optimal coefficients method. This overview was done on September 12, 2013 on XI internation conference «Algebra and number theory: modern problems and applications» in Saratov city.

Key words: optimal coefficients method, algebraic lattices, Gelfond theorem, hyperbolic zeta-function.

References

1. Korobov N. M. *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximations analysis]. Moscow, 2004 (in Russian).
2. Dobrovolskiy N. M. *Giperbolicheskaia dzeta-funktsiia reshetok* [Hyperbolic zeta-function on lattices]. Tula, 1984. Dep. v VINITI 24.08.84, no. 6090–84 (in Russian).
3. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolskiy M. N., Dobrovolskiy N. M., Dobrovolskiy N. N. *Giperbolicheskie dzeta-funktsii setok i reshetok i vychislenie optimal'nykh koeffitsientov* [Hyperbolic zeta-functions on nets and lattices and computation of optimal coefficients]. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2012, vol. 13, iss. 4(44), pp. 4–107 (in Russian).
4. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolskiy M. N., Dobrovolskiy N. M., Dobrovolskiy N. N. *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshetki i algoritmy poiska optimal'nykh koeffitsientov* [Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications]. Tula, State Pedagogic University Press, 2005, 195 p. (in Russian).
5. Dobrovolskiy N. M. *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshetki i ikh prilozheniia* [Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications]. Tula, State Pedagogic University Press, 2005, 195 p. (in Russian).
6. Dobrovolskiy M. N. Funktsional'noe uravnenie dlia giperbolicheskoi dzeta-funktsii tselochislennykh reshetok [Functional equation of hyperbolic zeta-function on integral lattices]. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 2007, iss. 3, pp. 18–23 (in Russian).

УДК 512.567.5

ОБ УСЛОВИЯХ ДИСТРИБУТИВНОСТИ И МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТОК КОНГРУЭНЦИЙ КОММУТАТИВНЫХ УНАРНЫХ АЛГЕБР

В. К. Карташов[1], А. В. Карташова[2], В. Н. Пономарёв

[1]Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и математического анализа, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, kartashovvk@yandex.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, kartashovaan@yandex.ru

Статья посвящена известной проблеме описания унарных алгебр, решетки конгруэнций которых обладают заданным свойством. К настоящему времени эта проблема решена для унарных алгебр с одной операцией. Показано, что для произвольных коммутативных унарных алгебр данная проблема является гораздо более сложной. Здесь приводится несколько необходимых условий дистрибутивности и модулярности таких решеток. Доказано также, что решетка всех подмножеств любого множества изоморфна решетке конгруэнций подходящей связной коммутативной унарной алгебры.

Ключевые слова: коммутативная унарная алгебра, дистрибутивная решетка, модулярная решетка, решетка конгруэнций алгебры.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно (см., например, [1]), решетка $Con\mathfrak{A}$ конгруэнций произвольной алгебры $\mathfrak{A}$ содержит значительную информацию о свойствах самой алгебры $\mathfrak{A}$. Поэтому проблема описания класса алгебр фиксированной сигнатуры, решетки конгруэнций которых обладают заданным свойством, привлекает внимание многих математиков.

Вопросы, связанные с исследованием решеток конгруэнций алгебр, занимают значительное место в работах Г. Гретцера (G. Gratzer), А. И. Мальцева, Л. А. Скорнякова и других алгебраистов (см., например, [1–9]).

В работе Г. Гретцера и Е. Т. Шмидта (E. T. Shmidt) [1] эта проблема была сведена к исследованию решеток конгруэнций унарных алгебр. Ими было доказано, что для любой алгебры $\mathfrak{A}$ существует унарная алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $Con\mathfrak{A} \cong Con\mathfrak{B}$. Это повысило интерес к данной проблеме, а также к другим вопросам, связанным с унарными алгебрами.

Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра может быть интерпретирована как автомат без выхода, как полигон либо как ориентированный граф.

Кроме того, в отличие от классических алгебр (групп, колец, полугрупп и т. д.) унарные алгебры имеют ряд особых свойств. Поэтому исследование их весьма важно для построения общей теории алгебраических систем.

К настоящему времени по указанной выше проблеме для класса унаров (алгебр с одной унарной операцией) существует ряд глубоких результатов, имеющих окончательный характер. В частности, полностью описаны классы унаров, решетка конгруэнций которых модулярна, дистрибутивна, стоунова, булева, с дополнениями, а также – решены многие другие классические вопросы,которые возникают для решеток, связаенных с каким-нибудь фиксированным классом алгебр [4–8].

Для унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, эти задачи оказались значительно более сложными.

Например, известно [7], что любой однопорожденный унар имеет дистрибутивную решетку конгруэнций. Однако в общей ситуации это утверждения неверно.

Для сравнения приведем следующие два примера.

Пример 1. $\mathfrak{A}_1 = \langle A, f, g\rangle$, где $A = \{a, b, c, d\}$, $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = d$, $f(d) = c$ и $g(a) = g(c) = c$, $g(b) = g(d) = d$.

Пример 2. $\mathfrak{A}_2 = \langle A, f, g\rangle$, где $A = \{a, b, c, d\}$, $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = d$, $f(d) = c$ и $g(a) = c$, $g(b) = d$, $g(c) = a$, $g(d) = b$.

Первая алгебра порождается любым из элементов a, b, вторая — любым ее элементом. Непосредственная проверка показывает, что решетки конгруэнций обеих алгебр пятиэлементны, при этом $Con\mathfrak{A}_1$ немодулярна, а $Con\mathfrak{A}_2$ модулярна, но не дистрибутивна.

В данной статье приводится несколько необходимых условий модулярности и дистрибутивности коммутативных унарных алгебр.

Напомним, что унарная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ называется *коммутативной*, если $fg(x) = gf(x)$ для любых $f, g \in \Omega$ и $x \in A$.

Очевидно, что алгебры, указанные в примерах 1 и 2, являются коммутативными.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Далее, $\mathbb{N}$ означает множество положительных целых чисел и $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ — произвольная унарная алгебра. Через Ω^* обозначается свободный моноид слов с порождающим множеством Ω относительно композиции. Единицей в Ω^* служит пустое слово $\emptyset$.

Результат $w(a)$ применения слова $w \in \Omega^*$ к элементу $a \in A$ определяется индуктивно по длине слова (см., например, [2]). По определению полагаем $f^0(a) = \emptyset a = a$, $f^n(a) = f(f^{n-1}(a))$ для произвольных $f \in \Omega$, $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

Отсюда, если $w = w_1w_2$, то $w(a) = w_1(w_2(a))$, где $w, w_1, w_2 \in \Omega^*$ и $a \in A$.

Далее, для любого элемента $a \in A$ через (a) обозначается подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная элементом a.

Для любой подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B, \Omega \rangle$ алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ бинарное отношение ρ_B на множестве A, определенное по правилу

$$x\rho_B y \Leftrightarrow (x = y) \vee \{x, y\} \subseteq B,$$

очевидно является конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$. Эта конгруэнция называется *конгруэнцией Рисса*, соответствующей подалгебре $\mathfrak{B}$.

Алгебра называется *связной*, если $(a) \cap (b) \neq \emptyset$ для любых ее элементов a и b, и *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Элементы $a, b \in A$ называются *взаимно достижимыми*, если $(a) = (b)$.

Очевидно, что отношение взаимной достижимости является эквивалентностью на множестве A. В дальнейшем ради краткости в случае, если элементы a и b находятся в этом отношении, будем говорить, что элементы a и b эквивалентны и писать $a \sim b$.

Лемма 1 [9, лемма 3]. *Отношение эквивалентности между элементами сохраняется при гомоморфизме унарных алгебр, то есть если $\varphi : A \to B$ — некоторый гомоморфизм унарных алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, $a, b \in A$ и $a \sim b$, то $\varphi(a) \sim \varphi(b)$.*

Класс эквивалентности $\sim$ с порождающим элементом a называется *слоем* этого элемента и обозначается через $S(a)$.

Множество $\Omega(a) = \{f \in \Omega | f(a) \sim a\}$ называется *сигнатурой слоя* $S(a)$.

Заметим, что $\Omega(a)$ может быть пустым. Нетрудно показать, что в случае если $\Omega(a) \neq \emptyset$, то *множество $S(a)$ будет сильно связной подалгеброй редукта $\langle A, \Omega(a) \rangle$.*

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем сначала несколько вспомогательных предложений.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — коммутативная унарная алгебра, $a \in A$ и $\Omega(a) \neq \emptyset$. Тогда на однопорожденной подалгебре (a) истинна следующая формула:*

$$(\forall x \in (a) \forall f \in \Omega)(f(x) \in S(a) \Rightarrow x \in S(a) \& f \in \Omega(a)).$$

Доказательство непосредственно вытекает из определений. □

Лемма 3. *Если a и b – независимые элементы некоторой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$, то $S(a) \cap (b) = \emptyset$.*

Доказательство также непосредственно вытекает из определений. □

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — коммутативная унарная алгебра, $\{a_i | i \in I\}$ — некоторая независимая система ее порождающих, $B = A \setminus (\bigcup_{i \in I} S(a_i))$. Тогда либо $B = \emptyset$, либо $\langle B, \Omega \rangle$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Допустим, что $b \in B$ и $f \in \Omega$. Тогда $b = v(a_j)$ для некоторых $j \in I$ и $v \in \Omega^*$. Предположим, что $f(b) \notin B$. Тогда $f(b) \in S(a_k)$, где $k \in I$, откуда $f(b) \in (a_j) \cap S(a_k)$. Если теперь $j \neq k$, то это противоречит лемме 3.

Пусть $j = k$. Тогда $f(b) = f(v(a_j)) \in S(a_j)$. Кроме того, $b \in (a_j)$. Отсюда $b \in S(a_j)$ в силу леммы 2, что противоречит выбору b. □

Пусть $A = \{a, b, c\}$ — трехэлементное множество и $\Omega = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k\}$ $(n, k \in \mathbb{N})$ — некоторая совокупность унарных символов.

Построим на носителе A унарную алгебру сигнатуры Ω, полагая по определению:

1. $\forall\, x \in \{a,b\} f_i(x) = x$ $(i = 1,2,\ldots,n)$;

2. $\forall\, x \in \{a,b\} \varphi_j(x) = c$ $(j = 1,2,\ldots,k)$;

3. $f_i(c) = \varphi_j(c) = c$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,k)$.

Будем обозначать эту алгебру в дальнейшем через $\tilde{3}$.

Лемма 5. *Решетка $Con\tilde{3} \cong M_3$, где M_3 – пятиэлементная модулярная, но недистрибутивная решетка.*

Доказательство тривиально. □

Теорема 1. *Если связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A}$ содержит два независимых элемента a и b таких, что сигнатуры соответствующих слоев совпадают, т. е. $\Omega(a) = \Omega(b)$, то решетка $Con\mathfrak{A}$ недистрибутивна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ – связная коммутативная унарная алгебра, a и b – независимые элементы из $\mathfrak{A}$ и $\Omega(a) = \Omega(b)$.

Обозначим через $\mathfrak{B} = \langle B, \Omega\rangle$ подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную элементами a и b. Так как алгебра $\mathfrak{B}$ коммутативна, то отношение эквивалентности $\sim$, определенное выше, является конгруэнцией. Из определений следует, что все слои в фактор-алгебре $\mathfrak{B}/\sim$ одноэлементны.

Очевидно также, что алгебра $\mathfrak{B}$ связна. Кроме того, как уже отмечалось выше, каждый из слоев $S(a)$ и $S(b)$ сильно связан в сигнатуре $\Omega(a) = \Omega(b)$. Отсюда в силу независимости элементов a и b имеем $C = B\setminus(S(a)\cup S(b)) \neq \emptyset$, откуда в силу леммы 4 получаем, что $\langle C, \Omega\rangle$ – подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$.

Это означает, что

$$\mathfrak{B}/\rho_C \cong \tilde{3},$$

где ρ_C — конгруэнция Рисса, соответствующая подалгебре $\langle C, \Omega\rangle$.

Теперь, учитывая, что решетка конгруэнций любой подалгебры унарной алгебры и любой ее фактор-алгебры вкладывается в решетку конгруэнций самой алгебры как подрешетка, применением леммы 5 завершаем доказательство теоремы. □

Следствие. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ — связная коммутативная унарная алгебра с n операциями, которая содержит независимую систему элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $k \geq 2^n$. Тогда решетка $Con\mathfrak{A}$ недистрибутивна.*

Доказательство. Убедимся сначала, что $\Omega(a_i) \neq \Omega$ для всех $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Действительно, если $\Omega(a_i) = \Omega$ для некоторого i, то слой $\langle S(a_i), \Omega\rangle$ является сильно связной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$. Отсюда ввиду связности алгебры $\mathfrak{A}$ для любого $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ найдется слово $w \in \Omega^*$ такое, что $w(a_j) \in S(a_i)$. Это противоречит независимости системы элементов $\{a_i | i = 1,2,\ldots,k\}$, поскольку $k > 1$.

Следовательно среди подмножеств $\Omega(a_1), \Omega(a_2), \ldots, \Omega(a_k)$ само множество Ω не встречается, откуда в силу неравенства $k \geq 2^n$ вытекает, что найдутся такие числа i, j, $i \neq j$, для которых $\Omega(a_i) = \Omega(a_j)$. Применяя теорему 1, завершаем доказательство. □

Следующая теорема указывает на особое место унаров в решении проблемы описания решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр.

Теорема 2. *Пусть Ω — сигнатура, состоящая из n унарных символов, где $n > 1$. тогда для любого целого положительного числа $k < 2^n$ существуют связные коммутативные унарные алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, у каждой из которых мощность любой независимой системы элементов не превосходит k и при этом решетка $Con\mathfrak{B}$ булева, а решетка $Con\mathfrak{C}$ не является дистрибутивной.*

Доказательство. Пусть $n > 1$ и $\Omega = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ — сигнатура, состоящая из n унарных символов, $k \in \mathbb{N}$ и $k < 2^n$.

I. Зафиксируем некоторую систему $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ из k различных подмножеств множества Ω, каждое из которых отлично от Ω. На носителе $B = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \Omega\}$ зададим операции f_i

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ по правилу $f_i(\Omega) = \Omega$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и

$$f_i(\Omega_j) = \begin{cases} \Omega_j, & \text{если } f_i \in \Omega_j, \\ \Omega, & \text{если } f_i \notin \Omega_j, \end{cases}$$

где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Легко проверить, что $\mathfrak{B} = \langle B, f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$ — связная коммутативная унарная алгебра, причем ее элементы $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ попарно независимы.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что любой неодноэлементный класс произвольной конгруэнции $\theta \in Con\mathfrak{B}$ содержит Ω. Это означает, что любая конгруэнция θ алгебры $\mathfrak{B}$ однозначно определяется классом $[\Omega]_\theta$. Отсюда вытекает, что

$$\theta_1 \subseteq \theta_2 \Leftrightarrow [\Omega]_{\theta_1} \setminus \{\Omega\} \subseteq [\Omega]_{\theta_2} \setminus \{\Omega\}$$

для любых конгруэнций $\theta_1, \theta_2 \in Con\mathfrak{B}$.

Следовательно, решетка $Con\mathfrak{B}$ изоморфна решетке всех подмножеств множества $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k\}$ по включению.

II. Если $k = 1$, то при $n = 2$ в качестве $\mathfrak{C}$ можно взять унарную алгебру, построенную в примере 1. При $n > 2$ сигнатуру этой алгебры можно дополнить, задав на ее носителе дополнительно $(n - 2)$ тождественные операции.

Пусть теперь $k > 1$ и $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_k\}$ — некоторое множество. На множестве C зададим операции f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ по правилу

$$f_i(x) = c_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

для любого $x \in C$.

Очевидно, что система элементов $c_1, c_2, \ldots, c_k$ независима, и $\Omega(c_i) = \emptyset$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Отсюда, поскольку $k > 1$, получаем, что решетка $Con\mathfrak{C}$ не является дистрибутивной в силу теоремы 1. $\square$

Замечание. Теорема 2 не справедлива для унаров [7, теорема 2].

Из рассуждений, проведенных при построении алгебры $\mathfrak{B}$ в доказательстве теоремы 2, вытекает

Следствие. *Решетка всех подмножеств произвольного множества изоморфна решетке конгруэнций подходящей коммутативной унарной алгебры.* $\square$

Теорема 3. *Если связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A}$ содержит независимое подмножество $\{a, b, c\}$ из трех элементов, у которых слои имеют одинаковую сигнатуру, то решетка $Con\mathfrak{A}$ не является модулярной.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. На заключительном этапе получаем некоторую фактор-алгебру $\mathfrak{B}$ подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной множеством $\{a, b, c\}$, решетка $Con\mathfrak{B}$ конгруэнций которой изоморфна решетке всех эквивалентностей на четырехэлементном множестве. $\square$

Библиографический список

1. *Gratzer G., Shmidt E. T.* Characterizations of congruence lattices of abstract algebras // Acta Sci. Math. 1963. Vol. 24. P. 34–59.

2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.

3. *Skornjakov L. A.* Unars // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. 1982. Vol. 29. Universal Algebra (Esztergom 1977). P. 735–743.

4. *Скорняков Л. А.* Дополнения в структуре конгруенций // Мат. сб. 1972. Т. 88(130), № 5(1). С. 148–181. DOI: 10.1070/SM1972v017n01ABEH001495.

5. *Berman J.* On the congruence lattices of unary algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36, № 1. P. 34–38.

6. *Егорова Д. П., Скорняков Л. А.* О структуре конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и

решетки. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1977. Т. 4. С. 28–40.
7. *Егорова Д. П.* Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1978. Т. 5. С. 11–44.
8. *Johnson J., Seifert R. L.* A survey of multi-unary algebras. Mimeographed seminar notes. N. Y. : U. C. Berkeley, 1967. 16 p.
9. *Карташов В. К.* Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр //Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 79–84. DOI: 10.4213/dm1027.

On Conditions for Distributivity or Modularity of Congruence Lattices of Commutative Unary Algebras

V. K. Kartashov, A. V. Kartashova, V. N. Ponomarjov

Volgograd State Socio-pedagogical University, Russia, 400066, Volgograd, Lenina pr., 27, kartashovvk@yandex.ru, kartashovaan@yandex.ru

The paper is devoted to the problem of describing unary algebras whose congruence lattices have a given property. By now this problem has been solved for algebras with one unary operation. In the paper it is shown that this problem is much more difficult for arbitrary commutative unary algebras. We give some necessary conditions for such lattices to be distributive or modular. Besides, it is proved here that a lattice of all subsets of a set is isomorphic to the congruence lattice of a suitable connected commutative unary algebra.

Key words: commutative unary algebra, distributive lattice, modular lattice, congruence lattice of an algebra.

References

1. Gratzer G., Shmidt E. T. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. *Acta Sci. Math.*, 1963, vol. 24, pp. 34–59.
2. Mal'tsev A. I. *Algebraic Systems*. Berlin, Springer-Verlag, 1976, 392 p. (Rus. ed. : Mal'tsev A. I. Algebraicheskie sistemy. Moscow, Nauka, 1970, 392 p.)
3. Skornjakov L. A. Unars. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai.*, 1982. vol. 29. Universal Algebra (Esztergom 1977). pp. 735–743.
4. Skornjakov L. A. Complements in the lattice of congruences. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972. vol. 17, no 1. pp. 148–181. DOI: 10.1070/SM1972v017n01ABEH001495.
5. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972. vol. 36. no 1. pp. 34–38.
6. Egorova D. P., Skornjakov L. A. O strukture kongrujencij unarnoj algebry [On congruence lattice of a unary algebra]. *Uporjadochennye mnozhestva i reshetki* [Ordered sets and lattices]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1977, vol. 4. pp. 28–40 (in Russian).
7. Egorova D. P. Struktura kongrujencij unarnoj algebry [The congruence lattice of a unary algebra]. *Uporjadochennye mnozhestva i reshetki* [Ordered sets and lattices]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1978, vol. 5. pp. 11–44 (in Russian).
8. Johnson J., Seifert R. L. *A survey of multi-unary algebras*. Mimeographed seminar notes. New York, U. C. Berkeley, 1967, 16 p.
9. Kartashov V. K. Independent systems of generators and the Hopf property for unary algebras. *Discrete Mathematics and Applications*, 2008, vol. 18, iss. 6, pp. 625—630. DOI: 10.1515/DMA.2008.047.

УДК 512.567.5

О РЕШЕТКАХ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ СУММ СИЛЬНО СВЯЗНЫХ КОММУТАТИВНЫХ УНАРНЫХ АЛГЕБР

А. В. Карташова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, kartashovaan@yandex.ru

Объединение любого семейства попарно непересекающихся унарных алгебр называют их прямой суммой. Говорят, что унарная алгебра сильно связна, если она порождается любым своим элементом. В данной работе исследуется решетки конгруэнций коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций, у которых каждая связная компонента является сильно связной. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором решетка конгруэнций произвольной алгебры из этого класса является дистрибутивной. Описан также класс всех дистрибутивных решеток конгруэнций алгебр из обозначенного класса.

Ключевые слова: коммутативная унарная алгебра, сильно связная алгебра, решетка конгруэнций алгебры.

ВВЕДЕНИЕ

Унарной алгеброй называется алгебра, сигнатура которой состоит из унарных символов. Любую унарную алгебру, очевидно, можно рассматривать как автомат без выхода. Поэтому унарные алгебры привлекали внимание многих исследователей. Значительное место в этих исследованиях занимают решетки конгруэнций унарных алгебр, которые несут важную информацию о свойствах самих алгебр.

Исследования в этом направлении достаточно глубоко продвинуты для случая решеток конгруэнций унаров, т. е. алгебр с одной унарной операцией. В [1] описаны унары, решетка конгруэнций которых либо полумодулярна сверху, либо атомарна. В [2] и [3] найдены условия, при которых решетка конгруэнций унара является решеткой с дополнениями, дистрибутивной, модулярной, цепью, либо стоуновой решеткой.

Решетки конгруэнций унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, изучены мало. Такие решетки рассматривались рядом авторов (см., например, [4–7]). Однако, к настоящему времени для них получено значительно меньше результатов.

Унарная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ называется *коммутативной*, если $f(g(a)) = g(f(a))$ для любых $f, g \in \Omega$ и $a \in A$.

Объединение любого семейства попарно непересекающихся унарных алгебр называют их *прямой суммой*. В частности, запись $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ означает, что алгебра $\mathfrak{A}$ является прямой суммой алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом. Например, сильно связными унарами являются циклы и только они (*циклом* называют однопорожденный унар $\langle A, f\rangle$ такой, что $f^n(a) = a$, где a – порождающий элемент этого унара, $n \in \mathbb{N}$).

Многообразие унарных алгебр конечной сигнатуры Ω называется *сильно регулярным*, если оно определяется тождествами вида $w(x) = x$, где слово w содержит все символы из Ω (см, например, [8]).

Нетрудно показать, что каждая коммутативная связная алгебра любого сильно регулярного многообразия является сильно связной. К таким многообразиям относится, например, многообразие $\mathscr{A}_{1,1}$ алгебр с двумя унарными операциями f и g, определяемое тождествами $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ (см. [9–11]).

В дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{K}$ класс всех коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций, каждая из которых либо сильно связна, либо является прямой суммой сильно связных алгебр.

В данной работе найдено необходимое и достаточное условие, при котором решетка конгруэнций алгебры из класса $\mathfrak{K}$ дистрибутивна, и охарактеризован класс всех дистрибутивных решеток конгруэнций алгебр этого класса.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ — произвольная унарная алгебра. Через Ω^* обозначается свободный моноид слов с порождающим множеством Ω относительно композиции. Единицей в Ω^* служит пустое слово $\emptyset$. В дальнейшем $\mathbb{N}$ всюду означает множество положительных целых чисел и $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Результат $w(a)$ применения слова $w \in \Omega^*$ к элементу $a \in A$ определяется индукцией по длине слова w (см. [12, с. 142]). Отсюда, если $w = w_1 w_2$, то $w(a) = w_1(w_2(a))$, где $w, w_1, w_2 \in \Omega^*$ и $a \in A$. По определению также полагаем $f^0(a) = \emptyset a = a$, $f^n(a) = f(f^{n-1}(a))$ для произвольных $f \in \Omega$, $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

Для любого слова $u \in \Omega^*$ определим отображение $\delta_u : A \to A$ равенством $\delta_u(a) = u(a)$ для любого $a \in A$. Множество $\{\delta_u | \ u \in \Omega^*\}$ образует полугруппу $S(\mathfrak{A})$ относительно композиции. Эта полугруппа называется *характеристической полугруппой унарной алгебры* $\mathfrak{A}$. В [13] показано, что характеристическая полугруппа всякой сильно связной коммутативной унарной алгебры является абелевой группой.

Для любого элемента a произвольной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ через (a) обозначается подалгебра, порожденная элементом a.

Очевидно, что для любой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ бинарное отношение $\eta = \{(a,b) \in A \times A | \ (a) \cap (b) \neq \emptyset\}$ является конгруэнцией этой алгебры. Классы конгруэнции η называются *компонентами связности* алгебры $\mathfrak{A}$. Легко проверить, что каждая компонента связности будет подалгеброй этой алгебры.

Коммутативная унарная алгебра называется *связной*, если она имеет ровно одну компоненту связности.

Лемма 1. *Если унарная алгебра $\mathfrak{A}$ содержит более двух компонент связности, то решетка $Con\mathfrak{A}$ конгруэнций этой алгебры не является дистрибутивной.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [3] для унаров. □

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1, \Omega\rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2, \Omega\rangle$ — сильно связные коммутативные унарные алгебры, причем для некоторой конгруэнции $\sigma \in Con\mathfrak{A} \setminus \{1_{Con\mathfrak{A}}\}$ существуют элементы $a \in \mathfrak{A}_1$, $b \in \mathfrak{A}_2$, такие, что $(a,b) \in \sigma$. Тогда решетка $Con\mathfrak{A}$ конгруэнций этой алгебры не является модулярной.*

Доказательство. Положим $\tau = \{(x,y) | \ (x\sigma y \& x, y \in A_1) \vee x, y \in A_2\}$, $\gamma = \{(x,y) | \ \exists \ i \in \{1,2\} \ (x, y \in A_i)\}$. Непосредственная проверка показывает, что $\gamma, \tau \in Con\mathfrak{A}$ и $\tau \leq \gamma$. Предположим теперь, что $\tau = \gamma$. Тогда для произвольного элемента $x \in A_1$ получаем $x\tau a$, поскольку $x\gamma a$ в силу определения конгруэнции γ, откуда $x\sigma a$. Это означает, что $A_1 \subseteq [a]_\sigma$. Кроме того, так как алгебра $\mathfrak{A}_2$ сильно связная, то для любого $y \in A_2$ найдется слово $u \in \Omega^*$ такое, что $y = u(b)$. Отсюда $y\sigma u(a)$, поскольку $a\sigma b$ и, значит, $y \in [u(a)]_\sigma = [a]_\sigma$. Следовательно, $[a]_\sigma = A$, что противоречит условию. Таким образом, $\tau \neq \gamma$.

Легко убедиться, что $\sigma \wedge \tau = \sigma \wedge \gamma$ и $\sigma \vee \tau = 1_{Con\mathfrak{A}}$. Поэтому конгруэнции $\tau, \gamma, \sigma, 1_{Con\mathfrak{A}}, \sigma \wedge \tau$ образуют пятиэлементную немодулярную решетку. □

Для произвольной решетки L через L' будем обозначать решетку, полученную из L добавлением внешним образом наибольшего элемента.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1, \Omega\rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2, \Omega\rangle$ – сильно связные коммутативные унарные алгебры, причем для любой конгруэнции $\theta \in Con\mathfrak{A}$ и элементов $x \in A_1$, $y \in A_2$, справедлива импликация*

$$x\theta y \Rightarrow \theta = 1_{Con\mathfrak{A}}.$$

Тогда $Con\mathfrak{A} \cong (Con\mathfrak{A}_1 \times Con\mathfrak{A}_2)'$.

Доказательство. Пусть e – добавленный внешним образом наибольший элемент решетки $(Con\mathfrak{A}_1 \times Con\mathfrak{A}_2)'$. Для любой крнгруэнции $\theta \in Con\mathfrak{A}$ положим

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} e, & \text{если } \theta = 1_{Con\mathfrak{A}}, \\ (\theta_1, \theta_2), & \text{если } \theta \neq 1_{Con\mathfrak{A}}, \end{cases}$$

где $\theta_1 = \{(x,y) | \ x\theta y \ \& \ x, y \in A_1\}$, $\theta_2 = \{(x,y) | \ x\theta y \ \& \ x, y \in A_2\}$.

Очевидно, что $\theta_1 \in Con\mathfrak{A}_1$, $\theta_2 \in Con\mathfrak{A}_2$, причем $\theta \leq \rho \Rightarrow \varphi(\theta) \leq \varphi(\rho)$ для любых конгруэнций $\theta, \rho \in Con\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $\theta, \rho \in Con\mathfrak{A} \setminus \{1_{Con\mathfrak{A}}\}$, $\varphi(\theta) \leq \varphi(\rho)$ и $x\theta y$, где $x, y \in \mathfrak{A}$. Тогда $\{x,y\} \subseteq A_i$ для некоторого $i \in \{1,2\}$, откуда $(x,y) \in \theta_1 \cup \theta_2$ и, значит, $(x,y) \in \rho_1 \cup \rho_2$. Поэтому $(x,y) \in \rho$ и, следовательно, $\theta \leq \rho$.

Убедимся, что отображение $\varphi : Con\mathfrak{A} \to (Con\mathfrak{A}_1 \times Con\mathfrak{A}_2)'$ сюрьективно. Действительно, пусть $(\theta_1, \theta_2) \in Con\mathfrak{A}_1 \times Con\mathfrak{A}_2$. Зададим отношение θ на множестве $A_1 \cup A_2$ по правилу $\theta = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(a,a)|\ a \in A_1 \cup A_2\}$. Непосредственная проверка показывает, что $\theta \in Con\mathfrak{A}$ и $\varphi(\theta) = (\theta_1, \theta_2)$. □

Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ через $\mathscr{L}_n$ будем обозначать решетку целых положительных делителей числа n. Через $\mathscr{N}$ обозначается решетка, двойственная к решетке целых положительных чисел по делимости.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – сильно связная коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций, решетка конгруэнций которой дистрибутивна. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если алгебра $\mathfrak{A}$ конечна, то $Con\mathfrak{A} \cong \mathscr{L}_n$, где $n = |A|$;

2) если алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечна, то $Con\mathfrak{A} \cong \mathscr{N}$.

Доказательство. Заметим сначала, что решетка $SubS(\mathfrak{A})$ подгрупп группы $S(\mathfrak{A})$ дистрибутивна, так как $SubS(\mathfrak{A}) \cong Con\mathfrak{A}$, ввиду [8, теорема 1]. Эта группа является конечно порожденной, поскольку $\mathfrak{A}$ – алгебра с конечным числом операций. Следовательно, $S(\mathfrak{A})$ – циклическая группа по теореме Оре (см. [14, теорема 78.2]).

Кроме того, $|S(\mathfrak{A})| = |\mathfrak{A}|$. Поэтому, если алгебра $\mathfrak{A}$ конечна, то $SubS(\mathfrak{A}) \cong \mathscr{L}_n$, где $n = |S(\mathfrak{A})| = |A|$. Если же алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечна, то $Con\mathfrak{A} \cong \mathscr{N}$. □

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1, \Omega \rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2, \Omega \rangle$ — сильно связные коммутативные унарные алгебры, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, $\theta \in Con\mathfrak{A}$, $a \in A_2$ и $A_1 \subseteq [a]_\theta$. Тогда $\theta = 1_{Con\mathfrak{A}}$.*

Доказательство. Пусть $b \in A_2$. Убедимся, что $b \in [a]_\theta$. Для этого зафиксируем произвольный элемент $c \in A_1$. Тогда $a\theta c$, так как $A_1 \subseteq [a]_\theta$.

Кроме того, $b = u(a)$ для некоторого слова $u \in \Omega^*$, поскольку $\mathfrak{A}_2$ – сильно связная алгебра. Следовательно, $b\theta u(c)$, откуда $a\theta b$, так как $u(c) \in A_1$. □

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из лемм 2–4 непосредственно вытекает

Теорема 1. *Решетка конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ класса $\mathfrak{K}$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих условий*

1) $\mathfrak{A}$ сильно связная алгебра и $S(\mathfrak{A})$ — циклическая группа;

2) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ — сильно связные алгебры, $S(\mathfrak{A}_1), S(\mathfrak{A}_2)$ – циклические группы, причем справедлива импликация

$$(a, b) \in \theta \Rightarrow \theta = 1_{Con\mathfrak{A}}$$

для любой конгруэнции $\theta \in Con\mathfrak{A}$ и элементов $a \in \mathfrak{A}_1$, $b \in \mathfrak{A}_2$. □

Для любых целых чисел $s, k_1, k_2, \ldots, k_s$ обозначим через $\mathfrak{Z}(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ алгебру $\langle \mathbb{Z}, f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $f_i(x) = x + k_i$ при всех $x \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Через $\mathfrak{Z}_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим алгебру $\langle \mathbb{Z}_n, f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$, где $\mathbb{Z}_n$ — множество классов вычетов по модулю n, $f_i(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{k}_i$ при всех $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Теорема 2. *Пусть L – произвольная дистрибутивная решетка. Тогда $L \cong Con\mathfrak{A}$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда L изоморфна одной из решеток следующих видов:*

1) $\mathscr{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $\mathscr{N}$;

3) $\mathscr{L}'_n$, $n \in \mathbb{N}$;

4) $(\mathscr{L}_n \times \mathscr{N})'$, $n \in \mathbb{N}$;

5) $(\mathscr{N} \times \mathscr{N})'$.

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку решетка конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ дистрибутивна, то по лемме 1 алгебра $\mathfrak{A}$ содержит не более двух компонент связности. Если при этом алгебра $\mathfrak{A}$ является связной, то либо $Con\mathfrak{A} \cong \mathscr{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, либо $Con\mathfrak{A} \cong \mathscr{N}$ по лемме 4.

Пусть теперь алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из двух компонент связности. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ – некоторые коммутативные сильно связные алгебры. Кроме того, $Con\mathfrak{A} \cong (Con\mathfrak{A}_1 \times Con\mathfrak{A}_2)'$ в силу лемм 2 и 3.

Далее, решетки $Con\mathfrak{A}_1$ и $Con\mathfrak{A}_2$ также дистрибутивны, так как $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — подалгебры алгебры $\mathfrak{A}_2$. Отсюда, снова применяя лемму 4, получаем, что каждая из решеток $Con\mathfrak{A}_1$ и $Con\mathfrak{A}_2$ либо изоморфна решетке $\mathscr{N}$, либо – одной из решеток вида $\mathscr{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Осталось воспользоваться тем очевидным фактом, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ декартово произведение $\mathscr{L}_n \times \mathscr{L}_m \cong \mathscr{L}_s$, где $s \in \mathbb{N}$.

Достаточность. Заметим сначала, что $\mathfrak{Z}_n(1), \mathfrak{Z}(1,-1)$, $n \in \mathbb{N}$ — сильно связные алгебры. Кроме того, $Con\mathfrak{Z}_n(1) \cong \mathscr{L}_n$ ввиду [1, лемма 2] и $Con\mathfrak{Z}(1,-1) \cong \mathscr{N}$ согласно [11, следствие 2 из леммы 3].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}_n(1) + \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E} = \langle \{e\}, f_1 \rangle$ – одноэлементная алгебра. Тогда, очевидно, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$. Покажем, что $Con\mathfrak{A} \cong \mathscr{L}'_n$. Действительно, если $\bar{a}\theta e$ для некоторой конгруэнции $\theta \in Con\mathfrak{A}$ и элемента $\bar{a} \in \mathfrak{Z}_n(1)$, то $\theta = 1_{Con\mathfrak{A}}$ по лемме 5. Следовательно, $Con\mathfrak{A} \cong (Con\mathfrak{Z}_n(1) \times Con\mathfrak{E})'$ в силу леммы 3, откуда, очевидно, $Con\mathfrak{A} \cong \mathscr{L}'_n$.

Пусть теперь $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}_n(1,1,1) + \mathfrak{Z}(0,1,-1)$. Тогда $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$, так как $\mathfrak{Z}_n(1,1,1)$ и $\mathfrak{Z}(0,1,-1)$ — сильно связные коммутативные унарные алгебры.

Если при этом $\bar{a}\theta b$ для некоторых $\theta \in Con\mathfrak{A}$, $\bar{a} \in \mathfrak{Z}_n(1,1,1)$, $b \in \mathfrak{Z}(0,1,-1)$, то $f_1^r(\bar{a})\theta f_1^r(b)$, т. е. $f_1^r(\bar{a})\theta b$, $r \in \mathbb{N}$. Это означает, что $\theta = 1_{Con\mathfrak{A}}$ ввиду леммы 5. Следовательно, $Con\mathfrak{A} \cong (\mathscr{L}_n \times \mathscr{N})'$ в силу лемм 3 и 4.

Пусть, наконец, $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}(1,-1,0) + \mathfrak{Z}(0,1,-1)$ и $\theta \in Con\mathfrak{A}$. Предположив, что $a\theta b$, $a \in \mathfrak{Z}(1,-1,0)$, $b \in \mathfrak{Z}(0,1,-1)$, то $f_1^r(a)\theta f_1^r(b)$, откуда $f_1^r(a)\theta b$ и $f_1^r(a)\theta a$ для любого $r \in \mathbb{N}$.

Если же $c \in \mathfrak{Z}(1,-1,0)$ и $c = f_2^s(a)$, где $c \in \mathbb{N}$, то имеем $f_2^s(a)\theta f_2 f_1(a)$, т. е. $c\theta a$, $c\theta b$. Следовательно, $\mathfrak{Z}(1,-1,0) \subseteq [b]_\theta$. Отсюда, снова применяя лемму 5, получаем $\theta = 1_{Con\mathfrak{A}}$. Поэтому $Con\mathfrak{A} \cong (\mathfrak{Z}(1,-1,0) \times \mathfrak{Z}(0,1,-1))'$ в силу леммы 3. Таким образом, $Con\mathfrak{A} \cong (\mathscr{N} \times \mathscr{N})'$ по лемме 4. □

Библиографический список

1. *Berman J.* On the congruence lattices of unary algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36, № 1. P. 34–38.

2. *Егорова Д. П., Скорняков Л. А.* О структуре конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1977. Вып. 4. С. 28–40.

3. *Егорова Д. П.* Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1978. Вып. 5. С. 11–44.

4. *Gratzer G., Shmidt E. T.* Characterizations of congruence lattices of abstract algebras // Acta Sci. Math. 1963. Vol. 24. P. 34–59.

5. *Johnson J., Seifert R. L.* A survey of multiunary algebras. Mimeographed seminar notes. N. Y. : U. C. Berkeley, 1967. 16 p.

6. *Esik Z., Imreh B.* Subdirectly irreducible commutative automata // Acta Cybernetica. 1981. Vol. 5, № 3. P. 251–260.

7. *Карташова А. В.* О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 119–132. DOI: 10.4213/dm1065.

8. *Карташов В. К.* Независимые системы элементов в коммутативных унарных алгебрах // Алгебра и теория чисел : современные проблемы и приложения : тез. докл. междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. С. 29.

9. *Акатаев А. А., Смирнов Д. М.* Решетки подмногообразий многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 1. С. 5–25. DOI: 10.1007/BF02218747.

10. *Карташов В. К.* О решетках квазимногообразий унаров // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 3. С. 49–62. DOI: 10.1007/BF00968621.

11. *Бощенко А. П.* Решетки конгруэнций унарных алгебр с двумя операциями f и g, удовлетворяющими тождествам $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ или $f(g(x)) = x$ / Волгоградский государственный педагогический университет. Волгоград, 1998. Деп. в ВИНИТИ 20.04.1998, № 1220–В98.

12. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.

13. *Esik Z., Imreh B.* Remarks on finite commutative automata // Acta Cybernetica. 1981. Vol. 5, № 3. P. 143–146.

14. *Fuchs L.* Abelian groups. Budapest : Publ. House of the Hungar. Acad. Sci., 1958. 367 p.

On Congruence Lattices of Direct Sums of Strongly Connected Commutative Unary Algebras

A. V. Kartashova

Volgograd State Socio-Pedagogical University, Russia, 400066, Volgograd, Lenina prospekt., 27, kartashovaan@yandex.ru

A union of mutually disjoint unary algebras is called their direct sum. A unary algebra is said to be strongly connected if it is generated by its arbitrary element. In the present paper we investigate congruence lattices of the class of all algebras with finitely many operations whose every connected component is strongly connected. We give a necessary and sufficient condition for an algebra from this class to have a distributive congruence lattice (Theorem 1). Besides, all distributive congruence lattices of algebras from the above class are discribed (Theorem 2).

Key words: commutative unary algebra, strongly connected algebra, congruence lattice of an algebra.

References

1. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 36, no 1, pp. 34–38.

2. Egorova D. P., Skornjakov L. A. O strukture kongrujencij unarnoj algebry [On congruence lattice of a unary algebra]. *Uporjadochennye mnozhestva i reshetki* [Ordered sets and lattices]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1977, vol. 4, pp. 28–40 (in Russian).

3. Egorova D. P. Struktura kongrujencij unarnoj algebry [The congruence lattice of a unary algebra]. *Uporjadochennye mnozhestva i reshetki* [Ordered sets and lattices]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1978, vol. 5, pp. 11–44 (in Russian).

4. Gratzer G., Shmidt E. T. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. *Acta Sci. Math.*, 1963, vol. 24, pp. 34–59.

5. Johnson J., Seifert R. L. *A survey of multi-unary algebras*. Mimeographed seminar notes. New York, U. C. Berkeley, 1967. 16 p.

6. Esik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata // *Acta Cybernetica*, 1981, vol. 5, no 3, pp. 251–260.

7. Kartashova A. V. On finite lattices of topologies of commutative unary algebras. *Discrete Mathematics and Applications*, 2009, vol. 19, iss. 4, pp. 431–443. DOI: 10.1515/DMA.2009.030.

8. Kartashov V. K. Nezavisimye sistemy jelementov v kommutativnyh unarnyh algebrah [Independent systems of elements in commutative unary algebras]. *Algebra i teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija : tezisy dokl. mezhdunar. nauch. konf.*, Saratov, 2011, pp. 29 (in Russian).

9. Akataev A. A., Smirnov D. M. Lattices of submanifolds in manifolds of algebras. *Algebra and Logic*, 1968, vol. 7, iss. 1, pp.2–13. DOI: 10.1007/BF02218747.

10. Kartashov V. K. Lattices of quasivarieties of unars. *Siberian Mathematical Journal*, 1985, vol. 26, iss. 3, pp. 346–357. DOI: 10.1007/BF00968621.

11. Boschenko A. P. *Reshetki kongrujencij unarnyh algebr s dvumja operacijami f i g, udovletvorjajushhimi tozhdestvam $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ ili $f(g(x)) = x$* [Congruence lattices of unary algebras with two operations f and g which satisfy the identities $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ or $f(g(x)) = x$]. Volgograd pedagogical university. Volgograd, 1998. Dep. VINITI 20.04.1998, № 1220–B98 (in Russian).

12. Mal'tsev A. I. *Algebraic Systems*. Berlin, Springer-Verlag, 1976, 392 p. (Rus. ed. : Mal'tsev A. I. Algebraicheskie sistemy. Moscow, Nauka, 1970, 392 p.)

13. Esik Z., Imreh B. Remarks on finite commutative automata. *Acta Cybernetica*, 1981, vol. 5, iss. 3, pp. 143–146.

14. Fuchs L. *Abelian groups*. Budapest, Publ. House of the Hungar. Acad. Sci., 1958, 367 p.

УДК 519.7

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С БЫСТРЫМ УМНОЖЕНИЕМ МАТРИЦ

Ю. В. Кузнецов

Кандидат физико-математических наук, заместитель директора, Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва, ykuz@niisi.ras.ru

В рамках теоретико-группового подхода Х. Кона, К. Уманса, Р. Клейнберга, Б. Сегеди к проблеме быстрого умножения матриц возникают специфические комбинаторные объекты, получившие название «однозначно разрешимые матрицы» («uniquely solvable puzzle») или USP-матрицы. В работе обсуждается некоторая числовая характеристика USP-матриц и исследуется связь между USP-матрицами и известной комбинаторной проблемой, в англоязычной литературе носящей название «Cap set problem».

Ключевые слова: быстрое умножение матриц, теоретико-групповой подход, экспонента матричного умножения ω, USP-матрицы, Cap set problem.

Проблема быстрого умножения матриц является одной из наиболее значительных проблем алгебраической теории сложности вычислений. Основные усилия исследователей сосредоточены на получении оценки экспоненты матричного умножения ω. Вплоть до недавнего времени, наилучшей оценкой для ω оставалась оценка Копперсмита (D. Coppersmith) и Винограда (S. Winograd) $\omega < 2.376\ldots$, полученная в 1990 году в работе [1]. В 2012 году в результате чрезвычайно трудоемкого уточнения указанной оценки В. Василевской-Вильямс (V. Vassilevska Williams) в работе [2] была получена оценка $\omega < 2.3727\ldots$ Большинство исследователей в области быстрого умножения матриц считают, что $\omega = 2$.

В 2003–2005 годах в работах [3, 4] Х. Коном (H. Cohn), К. Умансом (C. Umans), Р. Клейнбергом (R. Kleinberg) и Б. Сегеди (B. Szegedy) был предложен принципиально новый подход к проблеме быстрого умножения матриц, носящий теоретико-групповой характер. Один из способов построения групп, пригодных для оценки экспоненты матричного умножения заключается в следующем: искомая группа строится как сплетение некоторой циклической группы и симметрической группы, действующей на некотором множестве U троичных наборов длины n (т. е. $U \subseteq \{1, 2, 3\}^n$), которые в совокупности обладают специфическими комбинаторными свойствами. Такие множества получили название «однозначно разрешимых матриц» («uniquely solvable puzzle» или сокращенно USP).

Для дальнейшего изложения понадобится серия определений из работы [4] (см. также работы на русском языке [5] и [6]). Для произвольного конечного множества U через $\mathrm{Sym(U)}$ обозначим симметрическую группу, действующую на U.

Определение. *USP-матрицей* ширины n называется множество наборов $U \subseteq \{1, 2, 3\}^n$, удовлетворяющее следующему свойству.

Для любых трех перестановок π_1, π_2, $\pi_3 \in \mathrm{Sym(U)}$ либо $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$, либо найдется набор $u \in U$ и номер i, $1 \le i \le n$, такие, что выполняются не менее двух равенств из трех: $(\pi_1(u))_i = 1$, $(\pi_2(u))_i = 2$, $(\pi_3(u))_i = 3$.

Для оценки экспоненты матричного умножения ω представляет интерес не весь класс USP-матриц, а некоторый его подкласс — так называемые усиленные USP-матрицы (strong USP) или SUSP-матрицы.

Определение. *SUSP-матрицей* ширины n называется множество наборов $U \subseteq \{1, 2, 3\}^n$, удовлетворяющее следующему свойству.

Для любых трех перестановок π_1, π_2, $\pi_3 \in \mathrm{Sym(U)}$ либо $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ либо найдется набор $u \in U$ и номер i, $1 \le i \le n$, такие, что выполняются в точности два равенства из трех: $(\pi_1(u))_i = 1$, $(\pi_2(u))_i = 2$, $(\pi_3(u))_i = 3$.

В свою очередь, важным подклассом SUSP-матриц являются так называемые локальные SUSP-матрицы.

Определение. *Локальной SUSP-матрицей* ширины n называется подмножество $U \subseteq \{1,2,3\}^n$, удовлетворяющее следующему свойству.

Для любой упорядоченной тройки наборов $(u,v,w) \in U^3$, среди которых хотя бы два набора различны, найдется координата i, $1 \le i \le n$, такая, что тройка чисел (u_i, v_i, w_i) является одним из элементов множества $\{(1,2,1),\ (1,2,2),\ (1,1,3),\ (1,3,3),\ (2,2,3),\ (3,2,3)\}$.

Иными словами, выполняются в точности два равенства из трех $u_i = 1$, $v_i = 2$, $w_i = 3$.

Аналогичным образом определяются локальные USP-матрицы.

Основной характеристикой USP-мариц является так называемая емкость (capacity).

Определение. *Емкостью* USP-матрицы (SUSP-матрицы) U ширины n назовем величину $C_U = |U|^{1/n}$.

Непосредственно на саму оценку экспоненты матричного умножения ω влияет емкость C_{SUSP} всего класса SUSP-матриц.

Определение. C_{SUSP} — это наибольшее число C, для которого найдется бесконечная последовательность SUSP-матриц $\{U_{n_k}\}$, для которых $C_{U_{n_k}} \to C$ при $k \to \infty$.

Аналогично определяется емкость C_{USP} всего класса USP-матриц и емкость $C_{\text{лок.}SUSP}$ всего класса локальных SUSP-матриц.

В работе [4] было показано, что $C_{USP} = 3/2^{2/3}$, $C_{SUSP} \ge 2^{2/3}$ и $C_{SUSP} = C_{\text{Лок.}SUSP}$. В работе [4] была также выдвинута гипотеза, что $C_{SUSP} = C_{USP}$, т.е. $C_{SUSP} = 3/2^{2/3}$. Из этой гипотезы следует, что $\omega = 2$.

С использованием оценки $C_{SUSP} \ge 2^{2/3}$ удается получить оценку $\omega \le 2.48$. Эта оценка остается на сегодняшний день наилучшей оценкой, которая получается с использованием аппарата USP-матриц.

Таким образом, улучшение оценок для C_{SUSP} является одним из направлений развития теоретико-группового подхода к проблеме быстрого умножения матриц.

SUSP-матрицы оказались новым, интересным и сложным комбинаторно-алгебраическим объектом. В 2011 году Н. Алоном (N. Alon), А. Шпилькой (A. Shpilka) и К. Умансом в работе [7] была обнаружена тесная связь между SUSP-матрицами и глубокой комбинаторной гипотезой П. Эрдёша о «подсолнечнике», известной еще с 1960-х годов.

В настоящей работе изучается связь USP-матриц с другой известной комбинаторной проблемой — о максимальном размере множеств векторов $C \subseteq \mathbb{F}_3^n$, не содержащих «троек», где $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ — поле из трех элементов, «тройка» — три вектора $x, y, z \in \mathbb{F}_3^n$, таких, что $x + y + z = 0$. В литературе эта проблема получила название «Cap set problem», при этом само множество векторов C называется «cap», а указанная «тройка» — «set».

Нетрудно заметить, что векторы $x, y, z \in \mathbb{F}_3^n$ образуют «тройку» тогда и только тогда, когда для каждой координаты i, $1 \le i \le n$, либо $x_i = y_i = z_i$, либо x_i, y_i, z_i — попарно различны. С другой стороны, в поле $\mathbb{F}_3$ условие $x + y + z = 0$ эквивалентно условию $y - x = z - y$, поэтому о «тройке» иногда говорят как о трехчленной арифметической прогрессии. В вышеуказанной работе [7] в качестве обобщения понятия «тройки» выступал «подсолнечник» в $\mathbb{Z}_D^n$.

Через a_n обозначим максимальную мощность множества $C \subseteq \mathbb{F}_3^n$, не содержащего «троек». Точно вычислены только 6 первых значений этой последовательности: 2, 4, 9, 20, 45, 112 [8].

Основные усилия исследователей направлены на получение оценок для последовательности $\{a_k\}$. На сегодняшний день наилучшая оценка сверху получена Бэйтманом (M. Bateman) и Кацем (N. Katz) в работе [9]:

$$a_n \le C\frac{3^n}{n^{1+\epsilon}},$$

где $\epsilon > 0$ и C — некоторые константы.

Наилучшая оценка снизу получена Эделем (Y. Edel) в работе [10]: $2.2174^n \le a_n$.

Проблема получения оценок для $\{a_k\}$ является сложной, глубокой и имеет многочисленные приложения. Филдсовские лауреаты Теренс Тао и Тимоти Гауэрс, а также другой известный математик Гил Калай, неоднократно указывали на важность исследований в этой области.

Пусть $C \subset \mathbb{F}_3^n$. Произведем замены в C: $0 \to 123$, $1 \to 231$, $2 \to 312$.

Полученную матрицу размера $|C| \times 3n$ обозначим через $F(C)$.

В работе [11] показано, что если $C \subset \mathbb{F}_3^n$ — произвольное множество, не содержащее «троек», то $F(C)$ — SUSP-матрица.

На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Теорема 1. *Если $C \subset \mathbb{F}_3^n$ — произвольное множество, не содержащее «троек», то $F(C)$ — локальная SUSP-матрица.*

Доказательство. Через C_1 обозначим матрицу, которая получается из матрицы C заменами $0 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 3$; через C_2 — матрицу, получающуюся из C заменами $0 \to 2$, $1 \to 3$, $2 \to 1$; и, наконец, через C_3 — матрицу, получающуюся из C заменой $0 \to 3$ (т. е. 1 и 2 не заменяются).

Понятно, что $F(C)$ можно получить в результате объединения C_1, C_2, C_3 с соответствующей перестановкой столбцов.

Рассмотрим три набора $(u, v, w) \in F(C)^3$, причем будем считать, что наборы u, v, w попарно различны. Так как матрица C не содержит «троек», то найдется некоторая координата i такая, что среди чисел u_i, v_i, w_i ровно два различных. Пусть для определенности $u_i = \alpha$, $v_i = \beta$, $w_i = \alpha$.

Нетрудно видеть, что в одной из матриц C_1, C_2, C_3 в строке v в соответствующем j-м столбце будет находиться число 2, а в строках u и w — некоторое число α', отличное от 2 . В любом случае мы получаем, что эта координата j — искомая, в которой выполняется ровно два равенства из трех $u_j = 1$, $v_j = 2$, $w_j = 3$.

Аналогично рассматривается случай, когда среди трех наборов $(u, v, w) \in F(C)^3$ ровно два различных. Теорема 1 доказана.

Нетрудно заметить, что если исходная матрица C, не содержащая «троек», имеет емкость σ, то результат $F(C)$ будет иметь емкость $\sigma^{1/3}$. Поэтому даже в самом лучшем случае, если верно, что $a_k = (3 - o(1))^n$ (к чему склоняется Теренс Тао), мы получим оценку для всего класса SUSP-матриц $C_{SUSP} \geq 3^{1/3}$, что хуже, чем $C_{SUSP} \geq 2^{2/3}$. Однако теорема 1 показывает, что конструкция $C \to F(C)$ является избыточной, и поэтому возможно при более экономном переходе $C \to F(C)$ удастся получить оценку лучше, чем $2^{2/3}$.

Пусть $U \subseteq \{1, 2, 3\}^n$. Произведем замены в U: $1 \to 0$, $2 \to 1$, $3 \to 2$.

Полученную матрицу обозначим через $G(U)$.

Теорема 2. *Если U — SUSP-матрица, то $G(U)$ — множество, свободное от «троек».*

Доказательство. Предположим противное, а именно пусть найдутся три попарно различных набора u, v, $w \in G(U)$, образующих «тройку». Обозначим прообразы этих наборов при отображении $U \to G(U)$ через u', v', w' соответственно. Определим три перестановки π_1, π_2, π_3, действующие на U следующим образом:

– перестановка $\pi_1 = E$;

– перестановка π_2 циклически переставляет строки u', v', w', т. е. π_2 осуществляет преобразование $u' \to v'$, $v' \to w'$, $w' \to u'$;

– перестановка π_3 осуществляет преобразование $u' \to w'$, $v' \to u'$, $w' \to v'$.

На остальных строках перестановки π_2 и π_3 действуют тождественно.

Утверждается, что для любой строки $a \in U$ и любой координаты i, $1 \leq i \leq n$, невозможно выполнение в точности двух равенств из трех: $(\pi_1(a))_i = 1$, $(\pi_2(a))_i = 2$, $(\pi_3(a))_i = 3$.

Действительно, если строка a отлична от строк u', v', w', то требуемое утверждение очевидно.

Пусть a совпадает с одной из строк u', v', w'. Для определенности будем считать, что строка a совпадает с u'.

Рассмотрим произвольную координату i, $1 \leq i \leq n$. Возможно два варианта.

1. Выполняются равенства $u_i' = v_i' = w_i'$. В этом случае опять требуемое утверждение очевидно.
2. Все числа u_i', v_i', w_i' попарно различны. Но тогда:

$$(\pi_1(u'))_i = u_i', \qquad (\pi_2(u_i'))_i = v_i', \qquad (\pi_3(u_i'))_i = w_i'$$

и может выполняться только либо три равенства, либо одно, либо ни одного. Получили противоречие. Аналогично рассматриваются случаи, когда строка a совпадает с v' или w'. Теорема 2 доказана.

Как показывает следующий пример, существуют USP-матрицы U такие, что $G(U)$ содержит «тройки». Тем самым утверждение теоремы 2 справедливо не для всех USP-матриц.

Пример. *Матрица*

1	2	3
2	1	2
3	3	1

является USP-матрицей.

Доказательство этого факта можно провести методом, изложенным в работе [11].

Таким образом теорема 2 позволяет в некотором смысле выделить класс SUSP-матриц в классе всех USP-матриц и косвенно объясняет трудности, возникающие при исследовании SUSP-матриц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00190-а и 13-01-12402 оф_м2).

Библиографический список

1. *Coppersmith D., Winograd S.* Matrix multiplication via arithmetic progressions // J. Symbolic Comput. 1990. Vol. 9, № 3. P. 251–280.
2. *Vassilevska Williams V.* Multiplying Matrices Faster than Coppersmith–Winograd // Proceedings of the 44-th Symposium on Theory of Computing, STOC'12. 2012. URL: www.cs.berkeley.edu/ virgi/matrixmult.pdf (дата обращения 30.09.2013).
3. *Cohn H., Umans C.* A group theoretic approach to fast matrix multiplication // Proceedings of the 44-th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2003. P. 438–449. DOI: 10.1109/SFCS.2003.1238217.
4. *Cohn H., Kleinberg R., Szegedy B., Umans C.* Group-theoretic algorithms for matrix multiplication // Proceedings of the 46-th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2005. P. 379–388. DOI: 10.1109/SFCS.2005.39.
5. *Платонов В. П., Кузнецов Ю. В., Петрунин М. М.* О теоретико-групповом подходе к проблеме быстрого умножения матриц. Математическое и компьютерное моделирование систем : теоретические и прикладные аспекты // Сб. науч. тр. НИИСИ РАН. М., 2009. С. 4–15.
6. *Кузнецов Ю. В.* Некоторые комбинаторные аспекты теоретико-группового подхода к проблеме быстрого умножения матриц // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 1. С. 102–109.
7. *Alon N., Shpilka A., Umans C.* On sunflowers and matrix multiplication // Electronic Colloquium on Computational Complexity. 2011. Report № 67. P. 1–16.
8. *Davis B. L., Maclagan D.* The card game SET // Mathematical Intelligencer. 2003. Vol. 25, № 3. P. 33–40.
9. *Bateman M., Katz N.* New bounds on caps sets // J. American Math. Soc. 2012. Vol. 25, № 2. P. 585–613.
10. *Edel Y.* Extensions of generalized product caps // Designs, Codes and Cryptography. 2004. Vol. 31. P. 5–14.
11. *Mebane P.* Uniquely Solvable Puzzles and Fast Matrix Multiplication. HMC Senior Theses, 2012. 37 p.

On Combinatorial Problem, Related with Fast Matrix Multiplication

Yu. V. Kuznetsov

Scientific Research Institute for System Studies of RAS, Russia, 117218, Moscow, Nakhimovskii pr., k. 1, 36, ykuz@niisi.ras.ru

The group-theoretical approach to fast matrix multiplication generates specific combinatorial objects, named Uniquely Solvable Puzzles (briefly USP). In the paper some numerical characteristic of the USP was discussed and the relation of USPs to famous combinatorial problem named «Cap set problem» was investigated.

Key words: fast matrix multiplication, group-theoretical approach to fast matrix multiplication, USP, Cap set problem.

References

1. Coppersmith D., Winograd S. Matrix multiplication via arithmetic progressions. *J. Symbolic Comput.*, 1990. Vol. 9, no. 3, pp. 251–280.

2. Vassilevska Williams V. Multiplying Matrices Faster than Coppersmith–Winograd. *Proceedings of the 44-th Symposium on Theory of Computing, STOC'12.* 2012. URL: www.cs.berkeley.edu/ virgi/matrixmult.pdf (Accsessed 30, September, 2013).

3. Cohn H., Umans C. A group theoretic approach to fast matrix multiplication. *Proceedings of the 44-th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science.* 2003, pp. 438–449. DOI: 10.1109/SFCS.2003.1238217.

4. Cohn H., Kleinberg R., Szegedy B., Umans C. Group-theoretic algorithms for matrix multiplication. *Proceedings of the 46-th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science.* 2005, pp. 379–388. DOI: 10.1109/SFCS.2005.39.

5. Platonov V. P., Kuznetsov Iu. V., Petrunin M. M. O teoretiko-gruppovom podkhode k probleme bystrogo umnozheniia matrits. Matematicheskoe i komp'iuternoe modelirovanie sistem: teoreticheskie i prikladnye aspekty [A group-theoretical approach to the problem of fast matrix multiplication. Mathematical and computer modeling of systems: theoretical and applied aspects]. *Sbornik nauchnuh trudov NIISI RAN* [Collection of scientific papers NIISI RAS]. Moscow, 2009, pp. 4–15 (in Russian).

6. Kuznetsov Yu. V. Nekotorye kombinatornye aspekty teoretiko-gruppovogo podkhoda k probleme bystrogo umnozheniia matrits [Some combinatorial aspects of the group-theoretic approach to fast matrix multiplication]. *Chebyshevskii sbornik.*, 2012, vol. 13, no. 1, pp. 102–109 (in Russian).

7. Alon N., Shpilka A., Umans C. On sunflowers and matrix multiplication. *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, 2011, Report no. 67, pp. 1–16.

8. Davis B. L., Maclagan D. The card game SET. *Mathematical Intelligencer*, 2003, vol. 25, no. 3, pp. 33–40.

9. Bateman M., Katz N. New bounds on caps sets. *J. American Math. Soc.*, 2012. vol. 25, no. 2, pp. 585–613.

10. Edel Y. Extensions of generalized product caps. *Designs, Codes and Cryptography*, 2004, vol. 31, pp. 5–14.

11. Mebane P. *Uniquely Solvable Puzzles and Fast Matrix Multiplication*. HMC Senior Theses, 2012, 37 p.

УДК 511.3

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ

А. Лауринчикас[1], Р. Мацайтене[2], Д. Мохов[3], Д. Шяучюнас[4]

[1]Академик АН Литвы, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел, Вильнюсский университет (Литва), antanas.laurincikas@mif.vu.lt

[2]Доктор математических наук, профессор кафедры математики, Шяуляйский университет (Литва), renata.macaitiene@mi.su.lt

[3]Магистрант факультета математики и информатики, Вильнюсский университет (Литва), dmitrij.mochov@mif.vu.lt

[4]Доктор математических наук, профессор кафедры математики, Шяуляйский университет (Литва), siauciunas@fm.su.lt

Хорошо известно, что обобщение дзета функции Гурвица — периодическая дзета функция Гурвица — с трансцендентным параметром универсальна в том смысле, что её сдвигами приближается всякая аналитическая функция. В статье условие трансцендентности параметра заменяется более слабым условием о линейной независимости некоторого множества.

Ключевые слова: периодическая дзета функция Гурвица, пространство аналитических функций, слабая сходимость, универсальность.

1. INTRODUCTION

Let $s=\sigma+it$ be a complex variable, and α, $0<\alpha\leq 1$, be a fixed parameter. The Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$ is defined, for $\sigma>1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and continues analytically to the whole complex plane, except for a simple pole at $s=1$ with residue 1.

A natural generalization of the function $\zeta(s,\alpha)$ is the periodic Hurwitz zeta-function. Let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $k \in \mathbb{N}$. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ is defined, in the half-plane $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

The periodicity of the sequence $\mathfrak{a}$ shows that, for $\sigma > 1$,

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_l \zeta\left(s, \tfrac{l+\alpha}{k}\right).$$

Thus, the properties of the Hurwitz zeta-function imply the analytic continuation for $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ to the whole complex plane, except for a simple pole at $s=1$ with residue $a \overset{def}{=} \frac{1}{k}\sum\limits_{l=0}^{k-1} a_l$. If $a=0$, then the function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ is entire.

Properties of the functions $\zeta(s,\alpha)$ and $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ depend on the parameter α. It is known [6] that the function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ with transcendental parameter α is universal in the sense that the shifts $\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a})$, $\tau \in \mathbb{R}$, uniformly on compact subsets of the strip $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$, approximate every analytic function. For a precise statement of the universality for $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$, we need some notation. Denote by $\mathscr{K}$ the class of compact subsets of D with connected complements. For $K \in \mathscr{K}$, let $H(K)$ denote the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K. Moreover, let $\mathrm{meas}A$ stand for the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. Then the main result of [1] is the following theorem.

Theorem 1. *Suppose that α is a transcendental number, $K \in \mathscr{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

The aim of the present paper is to replace a hypothesis of Theorem 1 on the transcendence of the parameter α by a wider one. Define the set $L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$.

Theorem 2. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and that $K \in \mathscr{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then the same assertion as in Theorem 1 is valid.*

Note that if α is a transcendental number, then the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. On the other hand, it is known [2] that if α is an algebraic irrational number, then at least 51 percent of elements of the set $L(\alpha)$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$. Thus, it is possible that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ even α is an algebraic irrational number. Unfortunately, we do not know any such α.

For the proof of Theorem 2, a probabilistic method based on limit theorems on the weak convergence of probability measures in the space of analytic functions will be applied.

2. LIMIT THEOREMS

Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D equipped with the topology of uniform convergence on compacta. Let $\mathscr{B}(X)$ stand for the Borel field of the space X. In this section, we consider the weak convergence of the probability measure

$$P_T(A) \overset{def}{=} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) \in A\right\}, \qquad A \in \mathscr{B}(H(D)),$$

as $T \to \infty$.

Let γ be the unit circle on the complex plane, i. e., $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. We start with a limit theorem on the torus $\Omega = \prod\limits_{m=0}^{\infty} \gamma_m$, where $\gamma_m = \gamma$ for all $m \in \mathbb{N}_0$. Since Ω with the product topology and pointwise multiplication is a compact topological Abelian group, on $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ the probability Haar measure m_H can be defined, and we have a probability space $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$. Let, for $A \in \mathscr{B}(\Omega)$,

$$Q_T(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : ((m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0) \in A\right\}.$$

Lemma 1. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then Q_T converges weakly to the Haar measure m_H as $T \to \infty$.*

Proof. Denote by ω the elements of Ω. For $m \in \mathbb{N}_0$, let $\omega(m)$ be the projection of $\omega \in \Omega$ to the coordinate space γ_m. Then it is well known, see, for example, [3], that the Fourier transform $g_T(\underline{k})$, $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots)$, of the measure Q_T is of the form

$$g_T(\underline{k}) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \exp\left\{-i\tau \sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\right\} \mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

where only a finite number of integers k_m are distinct from zero. Now we essentially apply the linear independence of the set $L(\alpha)$. Since $\sum\limits_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) = 0$ if and only if all $k_m = 0$, we deduce from (1) that

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ 0 & \text{if} \quad \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

This and Theorem 1.4.2 of [4] show that the measure Q_T converges weakly to m_H as $T \to \infty$. ☐

Now we will prove a limit theorem for absolutely convergent Dirichlet series. For a fixed $\sigma_1 > 1/2$, and $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, let $v_n(m,\alpha) = \exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right\}$. Define

$$\zeta_n(s,\alpha;\mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}.$$

Then it is known [3] that the latter series is absolutely convergent for $\sigma > 1/2$. For $A \in \mathscr{B}(H(D))$, define $P_{T,n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta_n(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) \in A\right\}$. For $\omega \in \Omega$, define one more function

$$\zeta_n(s,\alpha,\omega;\mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m) v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s},$$

clearly, the series being absolutely convergent for $\sigma > \frac{1}{2}$. Let $\omega_0 \in \Omega$ be a fixed element. On $(H(D), \mathscr{B}(H(D)), m_H)$, define one more probability measure

$$\hat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta_n(s+i\tau,\alpha,\omega_0;\mathfrak{a}) \in A\right\}.$$

Lemma 2. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the both measures $P_{T,n}$ and $\hat{P}_{T,n}$ converges weakly to the same probability measure P_n on $(H(D), \mathscr{B}(H(D)))$ as $T \to \infty$.*

Proof. A proof uses Lemma 1, Theorem 5.1 of [5] and the invariance of m_H, and is independent on the arithmetic nature of the parameter α. Therefore, it remains the same as in the case of transcendental α [1]. ☐

The next step in the investigation of the weak convergence of the measure P_T consists of the approximation of the function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ by $\zeta_n(s,\alpha;\mathfrak{a})$ in the mean. The space $H(D)$ is metrisable. Denote by ρ a metric in $H(D)$ which induces the topology of uniform convergence on compacta.

Lemma 3. *We have*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \rho(\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}), \zeta_n(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}))\mathrm{d}\tau = 0.$$

Proof. A proof of the lemma in the case of transcendental α in [1] does not use the transcendence property. Therefore, it also remains the same in our case. □

Let, for $\omega \in \Omega$,

$$\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Then $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ is the $H(D)$-valued random element defined on the probability space $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$ [6].

The approximation of the function $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ by $\zeta_n(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ is more complicated, we need some elements of ergodic theory. For $\tau \in \mathbb{R}$, define $a_\tau = \{((m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)\}$. Let $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, where $\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega$, $\omega \in \Omega$. Then $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ is a group of measurable measure preserving transformations of the torus Ω. We will prove the ergodicity of the group $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$. We recall that the set $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ is invariant with respect to the group $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ if, for any $\tau \in \mathbb{R}$, the sets A and $A_\tau = \varphi_\tau(A)$ differ one from another by a set of m_H-measure zero. The group $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ is invariant if the σ-field of all invariant sets consists of the sets having m_H-measure 0 or 1.

Lemma 4. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the group $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ is ergodic.*

Proof. It is well known that the characters χ of the group Ω are of the form $\chi(\omega) = \prod\limits_{m=0}^{\infty} \omega^{k_m}(m)$, where only a finite number of integers k_m are distinct from zero. First let χ be a non-trivial character, i. e., $\chi(\omega) \not\equiv 1$. Then we have that

$$\chi(a_\tau) = \prod_{m=0}^{\infty} (m+\alpha)^{-i\tau k_m} = \exp\left\{-i\tau \sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\right\}. \tag{2}$$

Since the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) \neq 0$ for every finite number of non-zero integers k_m. Therefore, (2) implies that there exists $\tau_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that

$$\chi(a_{\tau_0}) \neq 1. \tag{3}$$

Let $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ be an invariant set with respect to the group $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, and I_A be the indicator function. Then we have that, for every $\tau \in \mathbb{R}$ and for almost all $\omega \in \Omega$,

$$I_A(a_\tau \omega) = I_A(\omega). \tag{4}$$

Denote by $\hat{g}(\chi)$ the Fourier transform of the function g, i. e., $\hat{g}(\chi) = \int\limits_{\Omega} \chi(\omega) g(\omega) m_H(\mathrm{d}\omega)$. Taking into account (4), we find that

$$\hat{I}_A(\chi) = \chi(a_{\tau_0}) \hat{I}_A(\chi).$$

This together with (3) shows that $\hat{I}_A(\chi) = 0$ for every non-trivial character χ.

Now let χ_0 be the trivial character of the torus Ω, i. e., $\chi_0(\omega) \equiv 1$, and let, for brevity, $\hat{I}_A(\chi_0) = b$. Using the orthogonality property of characters and the equality $\hat{I}_A(\chi) = 0$, we find that, for every character χ of the torus Ω,

$$\hat{1}(\chi) = b \int_{\Omega} \chi(\omega) m_H(\mathrm{d}\omega) = b \hat{I}_A(\chi) = \hat{b}(\chi).$$

From this the lemma easily follows. □

Lemma 5. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then, for almost all $\omega \in \Omega$,*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho\left(\zeta(s+i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{a}), \zeta_n(s+i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{a})\right) \mathrm{d}\tau = 0.$$

Proof. In [6], the assertion of the lemma is proved in the case of transcendental α, however, the transcendence is used only for the proof of the ergodicity of the group $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$. Since, by Lemma 4, the group $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ is ergodic, the proof of the lemma runs in the same way as in [6]. $\square$

Now we are able to obtain the weak convergence of the measure P_T. However, having in mind the identification of the limit measure, we also consider the measure

$$\hat{P}_T(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \zeta(s+i\tau,\alpha,\omega;\mathfrak{a}) \in A\right\}, \qquad A \in \mathscr{B}(H(D)).$$

Lemma 6. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the both measures P_T and $\hat{P}_T$ converge weakly to the same probability measure P on $(H(D), \mathscr{B}(H(D)))$ as $T \to \infty$.*

Proof. The used method is the same as in the case of transcendental α [1, 6], and uses Lemmas 2, 3 and 5. $\square$

Now we state the main limit theorem of this section.

Theorem 3. *Suppose that the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the measure P_T converges weakly to the distribution P_ζ of the random element $\zeta(s,\alpha,\omega;\mathfrak{a})$.*

Proof. We apply Lemmas 4, 6 and the Birkhoff–Khinchine theorem. $\square$

3. PROOF OF THE UNIVERSALITY THEOREM

For the proof of Theorem 2, together with Theorem 3 we need the explicit form of the support of the measure P_ζ.

The support of P_ζ is independent of the arithmetic nature of the parameter α, therefore we may use the following result of [1].

Theorem 4. *The support of the measure P_ζ is the whole of $H(D)$.*

Proof of Theorem 2. By the Mergelyan theorem [7], there exists a polynomial $p(s)$ such that

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

In view of Theorem 4, the polynomial $p(s)$ is an element of the support of the measure P_ζ. Thus, for every open neighbourhood G of the polynomial $p(s)$, the inequality $P_\zeta(G) > 0$ is true. Let $G = \{g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon/2\}$. Using Theorem 3, an equivalent of the weak convergence of probability measures in terms of open sets and the definition of G, we obtain that

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - p(s)| < \varepsilon/2\right\} > 0. \tag{6}$$

It remains to replace in this inequality $p(s)$ by $f(s)$. We note that in view of (5), for such τ,

$$\sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon.$$

Thus, we deduce from (6) that

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

The theorem is proved. $\square$

Библиографический список

1. *Javtokas A., Laurinčikas A.* The universality of the periodic Hurwitz zeta-function // Integral Transforms Spec. Funct. 2006. Vol. 17, № 10. P. 711–722.

2. *Cassels J. W. S.* Footnote to a note of Davenport and Heilbronn // J. London Math. Soc. 1961. Vol. 36. P. 171–184.

3. *Laurinčikas A., Garunkštis R.* The Lerch Zeta-Function. Dordrecht : Kluwer, 2002. 189 p.

4. *Heyer H.* Probability Measures on Locally Compact Groups. Berlin : Springer, 1977. 531 p.
5. *Billingsley P.* Convergence of Probability Measures. N.Y. : Wiley, 1968. 272 p.
6. *Javtokas A., Laurinčikas A.* On the periodic zeta-function // Hardy-Ramanujan J. 2006. Vol. 29. P. 18–36.
7. *Mergelyan S. N.* Uniform approximation to functions of complex variable // Usp. Matem. Nauk. 1952. Vol. 7. P. 31–122.

On Universality of Certain Zeta-functions

A. Laurinčikas[1], R. Macaitienė[2], D. Mokhov[3], D. Šiaučiūnas[4]

[1]Vilnius University, Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania, antanas.laurincikas@mif.vu.lt

[2]Šiauliai University, P. Višinskio st. 19, LT-77156 Šiauliai, Lithuania, renata.macaitiene@mi.su.lt

[3]Vilnius University, Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania, dmitrij.mochov@mif.vu.lt

[4]Šiauliai University, P. Višinskio st. 19, LT-77156 Šiauliai, Lithuania, siauciunas@fm.su.lt

It is well known that a generalization of the Hurwitz zeta-function — the periodic Hurwitz zeta-function with transcendental parameter is universal in the sense that its shifts approximate any analytic function. In the paper, the transcendence condition is replaced by a simpler one on the linear independence of a certain set.

Key words: periodic Hurwitz zeta-function, space of analytic functions, universality, weak convergence.

References

1. Javtokas A., Laurinčikas A. The universality of the periodic Hurwitz zeta-function. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2006, vol. 17, no. 10, pp. 711–722.

2. Cassels J. W. S. Footnote to a note of Davenport and Heilbronn. *J. London Math. Soc.*, 1961, vol. 36, pp. 171–184.

3. Laurinčikas A., Garunkštis R. *The Lerch Zeta-Function*. Dordrecht, Kluwer, 2002, 189 p.

4. Heyer H. *Probability Measures on Locally Compact Groups*. Berlin, Springer, 1977, 531 p.
5. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. New York, Wiley, 1968, 272 p.
6. Javtokas A., Laurinčikas A. On the periodic zeta-function. *Hardy-Ramanujan J.*, 2006, vol. 29, pp. 18–36.
7. Mergelyan S. N. Uniform approximation to functions of complex variable. *Uspekhi Matem. Nauk*, 1952, vol. 7, pp. 31–122.

УДК 511.3

К ОЦЕНКЕ ОДНОГО КЛАССА СУММАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Матвеев

Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com

Для конечнозначных функций натурального аргумента $h(n)$, имеющих ограниченную сумматорную функцию, оцениваются сумматорные функции вида $\sum\limits_{n\le x} h(n)n^{it}$, $1 \le |t| \le T$.

Ключевые слова: числовые характеры, сумматорные функции, степенные ряды.

В работе [1] было показано, что для числовых характеров Дирихле χ при любом действительном t имеет место оценка вида

$$\sum_{n\le x} \chi(n)n^{it} = O(1).$$

В данной работе этот результат обобщается на случай конечнозначных функций натурального аргумента $h(n)$, для которых выполняются условия:

1) $S(x) = \sum\limits_{n\le x} h(n) = O(1)$;

2) функция $g(x)$, заданная степенным рядом вида $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h(n)x^n$, имеет конечный предел в точке $x = 1$.

Для таких функций имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *В любом прямоугольнике* $\{s = \sigma + it \mid 0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1,\ 2 \le |t| \le T\}$ *функция, заданная рядом Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

обладает свойством

$$|f(s)| = O(1),$$

где константа в оценке зависит только от T.

Доказательство. Воспользуемся формулой суммирования Абеля для функций $f(s)$ и $h(n)$ и получим:

$$f(s) = s \int_1^{\infty} \frac{S(u)}{u^{s-1}}\, du,$$

где $S(u) = \sum\limits_{n \le x} h(n)$, что даёт аналитическое продолжение $f(s)$ в полуплоскость $\sigma > 0$.

Рассмотрим преобразование Меллина:

$$f(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h(n) e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \int_0^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx, \tag{2}$$

где $g(e^{-x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h(n) e^{-nx}$, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Разобьём интеграл в правой части (2) на два:

$$\int_0^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx = \int_1^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx + \int_0^{1} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx.$$

Так как $g(e^{-x})$ ограничена при $x \in (0, 1)$, то из этого равенства следует, что интеграл в правой части (2) абсолютно сходится при $\sigma > 0$.

По условию $g(x)$ непрерывна на $[0, 1]$. Пусть $P_n(x)$ — последовательность полиномов наилучшего приближения для $g(x)$ на этом отрезке.

Как показано в теореме 6.1 работы [2], в силу того что $g(x)$ на отрезке $(-1, 1)$ определяется степенным рядом с ограниченными коэффициентами, последовательность коэффициентов полиномов $P_n(x)$ равномерно ограничена, т. е. если $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$, то для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{0, n}$ имеет место неравенство $|a_k^{(n)}| \le M$.

С помощью (2) представим $f(s)$ в виде

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_1^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx + \int_0^{1} [g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})] x^{s-1}\, dx + \int_0^{1} P_n(e^{-x}) x^{s-1}\, dx \right).$$

Отсюда при $\sigma > 0$ получаем оценку вида

$$|f(s)| \le \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left[\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_n}{\sigma} + \left| \int_0^{1} P_n(e^{-x}) x^{s-1}\, dx \right| \right].$$

При надлежащем выборе n получаем:

$$|f(s)| \le \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left[C_1 + \left| \int_0^{1} P_n(e^{-x}) x^{\sigma-1}\, dx \right| \right], \tag{3}$$

где C_1 не зависит от σ.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx.$$

Применяя последовательно формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx = \frac{e^{-k}}{s} + \frac{ke^{-k}}{s(s+1)} + \frac{k^2e^{-k}}{s(s+1)(s+2)} + \dots .$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}\,dx = \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} e^{-kx}x^{s-1}\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int\limits_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} e^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\dots(s+m)}\,. \tag{4}$$

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора в окрестности $x=0$ функции e^x:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}x^m.$$

Проинтегрируем это выражение по $t =: x$ от 0 до x дважды:

$$\int\limits_0^x e^t\,dt = e^x - 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{x^{m+1}}{m+1}\,,$$

$$\int\limits_0^x (e^t-1)\,dt = e^x - 1 - x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}\,,$$

$$\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}\,.$$

С учётом этого при $|t| \ge 2$ из (4) получаем:

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\dots(s+m)}\right| \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m+2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{(m+2)!} = \frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\,.$$

Таким образом,

$$\left|\int\limits_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}\,dx\right| \le \sum_{k=0}^{n} \left|a_k^{(n)}\right| e^{-k}\left(\frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\right) \le M\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{e^{-k}}{k^2} - \frac{e^{-k}}{k}\right) \le M_0,$$

где M_0 не зависит от σ_0.

Отсюда и из (3) получаем:

$$|f(s)| \le \frac{1}{|\Gamma(s)|}[C_1 + M_0] \le \frac{C}{|\Gamma(s)|}, \qquad s \in \{\sigma + it \mid 0 < \sigma_0 \le \sigma < 1,\ 2 \le t \le T\},$$

т. е.

$$|f(s)| = O(1),$$

где константа зависит только от T, что и завершает доказательство теоремы. □

Далее, наряду с рядом Дирихле (1), рассмотрим функциональный ряд вида

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n}\frac{it}{n^s}, \qquad \sigma > 0, \tag{5}$$

где $S(n) = \sum\limits_{k\le n} h(k)$. Этот ряд сходится абсолютно при любых $\sigma > 0$ и $|t| \le T$.

Следующая лемма определяет соотношение между частичными суммами рядов (1) и (5) при $s = it$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{N} h(n)n^{-it} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S(n)}{n}\frac{it}{n^{it}} + O(1), \tag{6}$$

где константа в оценке не зависит от N *и* t.

Доказательство. В результате применения формулы суммирования по частям получим:

$$\sum_{n=1}^{N} h(n)n^{-it} = \sum_{n=1}^{N-1} S(n)[n^{-it} - (n+1)^{-it}] + O(1), \tag{7}$$

где константа в оценке не зависит от t и N. Воспользуемся оценкой, полученной в работе [3]:

$$n^{-it} - (n-1)^{-it} + itn^{-1-it} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из этой оценки и из равенства (7) следует утверждение леммы. □

Теорема 1 и лемма 1 позволяют доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть функция* $f_1(s)$ *вида* (5) *при стремлении* σ *к нулю определяет функцию, непрерывную на каждом отрезке* $[2, T]$ *мнимой оси. Тогда для любого* t, $2 \le |t| \le T$ *имеет место оценка*

$$S_t(x) = \sum_{n \le x} h(n)n^{it} = O(1),$$

где константа зависит только от T.

Доказательство теоремы 2 проводится точно так же, как и доказательство аналогичного утверждения в работе [4], имеющего место, в отличие от нашего случая, при более сильных ограничениях.

Библиографический список

1. *Чудаков Н. Г., Бредихин Б. М.* Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп // УМН. 1956. Т. 9. С. 347–360.
2. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1982.
3. *Гельфонд А. О.* Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$ // Избранные труды. М. : Наука, 1973. С. 310–328.
4. *Матвеев В. А., Матвеева О. А.* О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 2. С. 106–116.

An Estimate of a Certain Summatory Functions Class

V. A. Matveev

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, vladimir.matweev@gmail.com

In this paper summatory functions of form $\sum\limits_{n \le x} h(n)n^{it}$, $1 \le |t| \le T$ for finite-valued functions $h(n)$ of natural argument with bounded sum function are estimated.

Key words: dirichlet character, summatory functions, power series.

References

1. Chudakov N. G., Bredikhin B. M. Application of Parseval's identity in estimations of summatory functions of Dirichlet characters on numerical semigroups. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1956, vol. 9, pp. 347–360 (in Russian).
2. Dem'ianov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks* [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).
3. Gel'fond A. O. Ob arifmeticheskom ekvivalente analitichnosti L-riada Dirikhle na priamoi [On certain arith-

metical equivalent of analytic property of Dirichlet L-series on $\mathrm{Re}\, s = 1$ line]. *Izbrannye trudy* [Selectas], Moscow, Nauka, 1973. pp. 310–328 (in Russian).
4. Matveev V. A., Matveeva O. A. On behavior in critical strip of Dirichlet series with finite-valued coefficients and bounded summatory function. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2012, vol. 13, iss. 2, pp. 106–116 (in Russian).

УДК 511.3

ОБ ОДНОМ ЭКВИВАЛЕНТЕ РАСШИРЕННОЙ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА ДЛЯ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Матвеев[1], О. А. Матвеева[2]

[1]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com

[2]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

Для L-функций Дирихле числовых полей получено условие на сумматорную функцию, рассматриваемую на множестве простых идеалов, эквивалентное расширенной гипотезе Римана. Изучаются аналитические свойства эйлеровых произведений, связанных с этим эквивалентом.

Ключевые слова: расширенная гипотеза Римана, L-функции Дирихле, числовые поля.

ВВЕДЕНИЕ

Харди и Литлвуд в [1] высказали предположение о том, что нетривиальные нули L-функций Дирихле в случае числовых характеров лежат на критической прямой. Это предположение получило название расширенной гипотезы Римана. Соответствующее предположение о нетривиальных нулях L-функций числовых полей также называют расширенной гипотезой Римана.

В данной работе будет доказано утверждение о том, что расширенная гипотеза Римана для L-функций числового поля эквивалентна определённой асимптотике для сумматорной функции характера Дирихле, рассматриваемой на множестве простых идеалов данного поля, и будут рассмотрены аналитические свойства эйлеровых произведений, связанных с этим эквивалентом.

1. УСЛОВИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ L-ФУНКЦИИ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Пусть χ — неглавный первообразный характер Дирихле по модулю m числового поля $\mathbb{K}$, и $L(s,\chi,\mathbb{K})$, $s = \sigma + it$ — соответствующая L-функция, определённая при $\sigma > 1$ следующим образом:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \tag{1}$$

где произведение берётся по всем простым, а сумма — по всем целым идеалам поля $\mathbb{K}$.

В данной работе приведём доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Расширенная гипотеза Римана для L-функции Дирихле* (1) *эквивалентна оценке вида*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p},\\ N(\mathfrak{p})\le x}} \chi(\mathfrak{p}) = O(x^{1/2+\varepsilon}), \tag{2}$$

где суммирование рассматривается по всем простым идеалам, норма которых не превосходит x, ε — произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от x.

Доказательству теоремы 1 предпошлём доказательства двух лемм.

Лемма 1. *Пусть ряд Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\qquad s=\sigma+it,\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1, \tag{3}$$

таков, что соответствующий степенной ряд

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

при подходе к точке $z=1$ вдоль вещественной оси ведёт себя следующим образом:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=O\left((1-x)^{1/2+\varepsilon}\right), \tag{4}$$

где ε — произвольное положительное число.

Тогда ряд Дирихле (3) *аналитически продолжим в полуплоскость $\sigma>1/2$.*

Доказательство. Запишем известное преобразование Меллина:

$$f(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}\right)x^{s-1}\,dx,\qquad \sigma\geq 1, \tag{5}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

В силу оценки (4) интеграл, стоящий в правой части этого равенства, абсолютно сходится при любом s, если $\sigma>1/2$. Действительно, оценка (4) равносильна оценке

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}=O(x^{1/2+\varepsilon}),\qquad x\to 0.$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_0^{1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}\right)x^{s-1}\,dx$$

абсолютно сходится при $\sigma>1/2$, а интеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}\right)x^{s-1}\,dx$$

абсолютно сходится при любом s, что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 2. *Следующие оценки эквивалентны:*

1. $\displaystyle\sum_{N(\mathfrak{p})\leq x}\chi(\mathfrak{p})=O(x^{1/2+\varepsilon})$;
2. $\displaystyle\sum_{N(\mathfrak{p})\leq x}\chi(\mathfrak{p})\ln N(\mathfrak{p})=O(x^{1/2+\varepsilon})$. (6)

Доказательство. Применяя метод суммирования Абеля, получим эквивалентность вида

$$\sum_{N(\mathfrak{p})\leq x}\chi(\mathfrak{p})\ln N(\mathfrak{p})\sim\ln x\sum_{N(\mathfrak{p})\leq x}\chi(\mathfrak{p}),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Доказательство основной теоремы. Пусть имеет место расширенная гипотеза Римана. Используя приём оценки сумматорной функции, приведённый в работе [2], получим оценку (6), а в силу леммы 2 — и оценку (2).

Обратно, пусть имеет место оценка (2), а следовательно, и оценка (6). Обозначим

$$a_n = \sum_{N(\mathfrak{p})=n} \chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p})$$

и рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Применяя приём суммирования Абеля, получаем следующее интегральное представление этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\ln x \int\limits_{2}^{+\infty} S(u) x^u du, \tag{7}$$

где $S(u) = \sum\limits_{n \le u} a_n$.

В силу оценки (6) имеем:

$$S(u) = O(u^{1/2+\varepsilon}).$$

Отсюда и из формулы (7) получаем:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right| = O\left(|\ln x| \int\limits_{2}^{+\infty} u^{1/2+\varepsilon} x^u du \right).$$

Запишем последний интеграл в виде

$$\int\limits_{2}^{+\infty} u^{1/2+\varepsilon} x^u du = \int\limits_{2}^{(1-x)^{-1}} u^{1/2+\varepsilon} x^u du + \int\limits_{(1-x)^{-1}}^{+\infty} u^{1/2+\varepsilon} x^u du.$$

Применяя к последнему слагаемому формулу интегрирования по частям, получаем оценку вида

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right| = O\left(\ln x \left[(1-x)^{-1/2+\varepsilon} + \frac{(1-x)^{-1/2+\varepsilon}}{\ln x} + \frac{(1-x)^{1/2+\varepsilon}}{\ln^2 x} \right] \right) = O\left((1-x)^{-1/2+\varepsilon} \right)$$

при $x \to 1$.

Отсюда в силу леммы 1 получаем, что ряд Дирихле

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}$$

аналитически продолжим в полуплоскость $\sigma > 1/2$.

Так как

$$-\frac{L'(s,\chi,\mathbb{K})}{L(s,\chi,\mathbb{K})} = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g(s,\chi),$$

где $g(s,\chi)$ — функция, голоморфная при $\sigma > 1/2$, то $L(s,\chi,\mathbb{K})$ не имеет нулей в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Тогда в силу функционального уравнения для L-функции (1) имеет место расширенная гипотеза Римана. Тем самым теорема полностью доказана. □

2. ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЭЙЛЕРОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С «ИСПОРЧЕННЫМИ» НА РЕДКОМ МНОЖЕСТВЕ ПРОСТЫХ ИДЕАЛОВ ХАРАКТЕРАМИ ДИРИХЛЕ

Рассмотрим характер Дирихле χ числового поля $\mathbb{K}$ и мультипликативную функцию h, заданную на целых идеалах поля, которая на множестве простых идеалов $\mathfrak{p}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \le x}{}' 1 = O(x^{1/2+\varepsilon}), \tag{8}$$

принимает значения, равные корням из единицы, отличные от значений $\chi(\mathfrak{p})$. Такие функции будем называть «испорченными» на редком множестве характерами Дирихле.

Рассмотрим эйлерово произведение:

$$f(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{h(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}, \qquad \sigma > 1. \tag{9}$$

Относительно таких функций имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция $f(s)$ вида* (9) *аналитически продолжима в полуплоскость $\sigma > 1/2$, и в этой полуплоскости возможные нули $f(s)$ совпадают с нулями L-функции Дирихле $L(s,\chi)$.*

Доказательство. Функцию $f(s)$ представим в виде

$$f(s) = L(s,\chi) \cdot f_1(s) \cdot f_2(s),$$

где

$$f_1(s) = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}, \qquad f_2(s) = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1 - \frac{h(p)}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

причём произведение берётся по редкому множеству простых идеалов, для которых $\chi(\mathfrak{p}) \neq h(\mathfrak{p})$. При $\sigma > 1$ логарифмы этих функций представимы в виде

$$\ln f_1(s) = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{N(\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g_1(s,\chi),$$

$$\ln f_2(s) = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h(\mathfrak{p}^m)}{N(\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \frac{h(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g_2(s,h),$$

где $g_1(s,\chi)$ и $g_2(s,h)$ — функции, голоморфные в полуплоскости $\sigma \geq 1/2$.

Отсюда в силу условия (8) и рассуждений, приведённых при доказательстве теоремы 1, следует возможность аналитических продолжений функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$ в полуплоскость $\sigma > 1/2$. При этом в этой полуплоскости данные функции не имеют нулей, что и доказывает утверждение теоремы 2. □

Библиографический список

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some problems of partitio numerorum III : On the expression of a number as a sum of primes // Acta Mathematica. 1923. Vol. 44. P. 1–70.

2. *Хейльбронн Х.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1969. С. 310–346.

On a Particular Equivalent of Extended Riemann Hypothesis for Dirichlet L-functions on Numerical Fields

V. A. Matveev, O. A. Matveeva

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, vladimir.matweev@gmail.com, olga.matveeva.0@gmail.com

A condition on summatory function over a set of prime ideals for Dirichlet L-functions on numerical fields is obtained. This condition is equivalent to extended Riemann hypothesis. Analytical properties of Euler products associated with this equivalent are studied.

Key words: extended Riemann hypothesis, Dirichlet L-functions, numerical fields.

References

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of partitio numerorum III : On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Mathematica*, 19232, vol. 44, pp. 1–70.

2. Kheil'bronn Kh. ζ-funktsii i L-funktsii [ζ-functions and L-functions]. *Algebraicheskaia teoriia chisel* [Algebraic number theory], Moscow, Mir, 1969, pp. 310–346 (in Russian).

УДК 511.3

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ И ПОВЕДЕНИЕ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

О. А. Матвеева

Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

Строится последовательность полиномов Дирихле, аппроксимирующих L-функции Дирихле, что позволяет эффективно вычислять нули и высказать предположения относительно поведения L-функций Дирихле в критической полосе.

Ключевые слова: L-функции Дирихле, аппроксимирующие полиномы.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается один из подходов к изучению таких аналитических свойств L-функций Дирихле в критической области, как распределение нулей, порядок роста модуля вдоль критической оси, свойство универсальности значений. В основе этого подхода лежит метод редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле, основные положения которого были разработаны в работе [1]. Этот метод позволяет конструктивно строить последовательность полиномов Дирихле, которые сходятся к L-функциям Дирихле с показательной скоростью в любом прямоугольнике, лежащем в критической полосе. Это позволило [2] получить эффективную схему определения нулей L-функций. В данной работе показано, что численные эксперименты, связанные с поведением аппроксимирующих полиномов, позволяют сформулировать ряд задач для таких полиномов, решение которых позволит опрелить порядок роста модуля вдоль мнимой оси и получить доказательство свойства универсальности, отличное от приведённого в [3] для L-функций Дирихле.

1. КОНСТРУКЦИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

Рассмотрим L-функцию Дирихле, заданную рядом Дирихле

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{1}$$

где χ — неглавный характер Дирихле, и соответствующий степенной ряд:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) z^n. \tag{2}$$

Так как $g(z)$ — рациональная функция, регулярная в точке 1 и имеющая простые полюсы в корнях из 1 степени d, то существует последовательность полиномов $P_n(x)$, приближающих функцию $g(x)$ на отрезке [0, 1] с показательной скоростью:

$$\max_{x\subseteq[0,1]} |g(x) - P_n(x)| = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \qquad \rho > 1. \tag{3}$$

На основе свойств преобразований Меллина для функций $L(s)$ и $g(e^{-x})$

$$L(s,\chi)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx,$$

$$g(e^{-x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s,\chi)\Gamma(s) x^{-s}\, ds, \qquad x > 1,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера, в работе [4] показано, что полиномы Дирихле $T_n(s)$, которые имеют те же коэффициенты, что и алгебраические полиномы $P_n(x)$, приближают L-функцию Дирихле $L(s,\chi)$ в любом прямоугольнике $0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1$, $0 \le t \le T$ с той же скоростью, что и полиномы $P_n(x)$ приближают функцию $g(x)$ на отрезке [0, 1], а именно имеет место оценка вида

$$|L(s,\chi) - T_n(s)| = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{4}$$

где константа в символе «O» не зависит от n и σ_0. Отметим, что в зависимости от T эта константа растёт как величина $e^T/\sqrt{T}$.

В работе [2] указана вычислительная схема построения полиномов $P_n(x)$, удовлетворяющих оценке (3), а следовательно, и полиномов Дирихле $T_n(s)$, удовлетворяющих оценке (4). Показано, что в случае, когда $g(z)$ регулярна в точке $z = -1$ в качестве полиномов $P_n(x)$ можно взять частичные суммы разложения функции $g(x)$ на отрезке [-1, 1] по полиномам Чебышёва. В противном случае нужно рассматривать разложение по сдвинутым полиномам Чебышёва. В любом случае константа $\rho > 1$ явно вычисляется.

2. ОЦЕНКА СТЕПЕНИ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ, НУЛИ КОТОРЫХ В ЗАДАННОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ СОВПАДАЮТ С НУЛЯМИ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ

Рассмотрим прямоугольник $0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1$, $0 \le t \le T$. Так как полиномы Дирихле $T_n(s)$ равномерно сходятся к L-функции $L(s,\chi)$, то в силу теоремы Гурвица [5] нули L-функции являются пределами нулей аппроксимирующих полиномов.

Важной задачей является задача определения такого числа n_0, что при $n \ge n_0$ нули полинома $T_n(s)$, лежащие в данном прямоугольнике, совпадают с нулями L-функции. Остановимся на двух моментах, связанных с оценкой величины n_0.

Во-первых, известно [6], что для числа $N(T)$ нулей L-функции, лежащих в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$, имеет место асимптотическая формула:

$$N(T) = \frac{T \ln T}{2\pi} + AT + O(\ln T). \tag{5}$$

Таким образом, среднее расстояние между нулями L-функции не меньше величины

$$\varepsilon = \frac{T}{N(T)} \approx \frac{2\pi}{\ln T}. \tag{6}$$

Выберем такую степень аппроксимирующего полинома, чтобы величина приближения в этом прямоугольнике не превосходила величины ε. Тогда в силу (4) и (6) получим:

$$n > \frac{T}{\ln \rho}. \tag{7}$$

Во-вторых, функция

$$f(t) = T_n\left(\frac{1}{2} + it\right) \tag{8}$$

является целой почти периодической функцией класса $\Delta = \dfrac{\ln n}{2}$. Как показано в [7], для числа нулей $n(T)$ этой функции, лежащих в нашем прямоугольнике, имеет место оценка

$$n(T) \le \frac{\Delta}{\pi} T + \omega(t), \tag{9}$$

где $\omega(t)$ — функция, ограниченная на отрезке [0, T]. В силу (9) при предположении, что нули функции (8) в прямоугольнике с учетом кратности совпадут с нулями L-функции, получаем оценку

$$n \ge 2[T] + 1. \tag{10}$$

В работе [2] было показано, что в результате численных экспериментов при условии

$$n \geq 2T \tag{11}$$

нули аппроксимирующих полиномов $T_n(s)$ в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 \leq t \leq T$, совпадают с нулями L-функций в этом прямоугольнике. В дальнейшем будем считать, что $n \geq 2T$.

3. АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ И ПОВЕДЕНИЕ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

Отметим, что численная схема, приведенная в работе [2], основанная на построении аппроксимирующих полиномов, позволяет достаточно быстро определять нули L-функций, лежащие в критической полосе. Результаты численных экспериментов говорят в пользу расширенной гипотезы Римана. Покажем, что свойства аппроксимирующих полиномов позволяют говорить и о поведении L-функции в критической полосе.

Во-первых, рассмотрим проблему роста модуля L-функции на критической прямой.

Аналогом известной гипотезы Линделёфа о порядке роста модуля дзета-функции Римана на критической прямой в случае L-функций Дирихле является следующее утверждение [8]:

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right| = O\left(|t|^{\varepsilon}\right),$$

где ε — любое положительное число.

Легко показать, что это утверждение эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого n

$$\max_{0<t\leq n/2} \left| T_n\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = O(n^{\varepsilon}).$$

Численная схема определения полиномов $T_n(s)$ позволяет вычислять величины $\max\limits_{0<t\leq n/2} |T_n(1/2+it)|$.

Результаты численного эксперимента для различных характеров говорят о том, что

$$\max_{0<t\leq n/2} \left| T_n\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = O(\ln n).$$

Если это так, то

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right| = O(\ln|t|).$$

В этом направлении необходимо продолжить серию вычислений.

Во-вторых, можно описать область значений полинома $T_n(s)$ в случае $s = \sigma + it$, $0 < \sigma < 1$, t — любое. Она содержит круг (без нуля), радиус которого стремится к бесконечности, когда $n \to \infty$. Отсюда сразу получается ряд утверждений относительно значений L-функций Дирихле в критической полосе, аналогичных утверждениям относительно значений дзета-функции Римана, приведенным в [9].

Рассмотрим известное свойство универсальности, сформулированное в следующем виде. Дан отрезок $I = [\sigma + it_0, 1/2]$. Пусть $\varphi(s)$ — функция, регулярная в некоторой области, содержащей этот отрезок, и не равная нулю в точках отрезка. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует T такое, что

$$|\varphi(s) - L\left(s + iT\right)| < \varepsilon, \qquad s \in I.$$

Это утверждение допускает переформулироку в терминах полиномов $T_n(s)$: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие n и $T \leq n/2$, что

$$|\phi(s) - T_n\left(s + iT\right)| < \varepsilon, \qquad s \in I.$$

Последнее условие легко доказывается с помощью теоремы Кронекера, если только величина почти периода $l \leq n/2$.

Результаты численных экспериментов говорят в пользу этого неравенства. Отметим, что аналогичные факты имеют место в случае целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Библиографический список

1. *Кузнецов В. Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 6. С. 805–812.
2. *Коротков А. Е., Матвеева. О. А* Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определённых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2011. Т. 24, вып. 17. С. 47–53
3. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М. : Физматлит, 1994. 376 с.
4. *Кузнецов В. Н., Водолазов А. М.* Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 2–11.
5. *Титчмарш Е. К.* Теория функций. М. : Наука, 1980. 464 с.
6. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М. : Мир, 1967. 511 с.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Изд-во техн.-теоретич. лит., 1956. 632 с.
8. *Туран П.* О новых результататх в аналитической теории чисел // Проблемы аналитической теории чисел. М. : Мир, 1975. С. 118–142.
9. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М. : Изд-во иностр. лит., 1953. 409 с.

Approximation Polynomials and Dirichlet L-functions Behavior in the Critical Strip

O. A. Matveeva

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, olga.matveeva.0@gmail.com

In this paper a sequence of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions is constructed. This allows to calculate zeros of L-functions in an effective way and make an assumptions about Dirichlet L-function behavior in the critical strip.

Key words: Dirichlet L-functions, approximation polynoms.

References

1. Kuznetsov V. N. Analog of Szegö's theorem for a class of Dirichlet series. *Math. Notes*, 1984, vol. 35, iss. 6, pp. 903–907.
2. Korotkov A. E., Matveeva O. A. Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej celyh funkcij, opredeljonnyh rjadami Dirihle s periodicheskimi kojefficientami. [On a computing algorithm of calculation of zeroes of the integral functions]. *Nauch. vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo un-ta. Ser. Matematika. Fizika*, 2011, vol. 24, iss. 17, pp. 47–53 (in Russian).
3. Voronin S. M., Karacuba A. A. *Dzeta-funktsiia Rimana* [The Riemann Zeta-Function]. Moscow, Fizmatlit, 1994, 376 p. (in Russian).
4. Kuznetsov V. N., Vodolazov A. M. Approksimacionnyj kriterij periodichnosti konechnoznachnyh funkcij natural'nogo argumenta [Approximated criterion for periodicity of the finitely valued functions of a natural argument]. *Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkc. analizu i smezhnym voprosam : Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2003, iss. 2, pp. 2–11 (in Russian).
5. Titchmarsh E. K. *Teoriia funktsii* [Function theory]. Moscow, Nauka, 1980, 464 p. (in Russian).
6. Prahar K. *Raspredelenie prostykh chisel* [Distribution of primes]. Moscow, Mir, 1967, 511 p. (in Russian).
7. *Levin B. Ja.* Raspredelenie kornej celyh funkcij [Distribution of roots of integer functions]. Moscow, Izd-vo tehniko-teoretich. literat., 1956, 632 p. (in Russian).
8. Turan P. O novyh rezul'tatath v analiticheskoj teorii chisel [On a new results in number theory]. *Problemy analiticheskoj teorii chisel*, Moscow, Mir, 1975, pp. 118–142 (in Russian).
9. Titchmarsh E.C. *Teoriia dzeta-funktsii Rimana* [The Theory of the Riemann Zeta-Function]. Moscow, 1930, 409 p. (in Russian).

УДК 512.554.36

О ПРОБЛЕМЕ А. В. МИХАЛЕВА ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ

Е. В. Мещерина[1], О. А. Пихтилькова[2], С. А. Пихтильков[3]

[1]Аспирант кафедры алгебры и математической кибернетики, Оренбургский государственный университет, elena_lipilina@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Оренбургский государственный университет, OPikhtilkova@mail.ru

[3]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической кибернетики, Оренбургский государственный университет, pikhtilkov@mail.ru

Решена ослабленная проблема А. В. Михалева о первичном радикале артиновых алгебр Ли.

Ключевые слова: алгебра Ли, внутренний идеал, первичный радикал, артинова алгебра Ли.

1. АССОЦИАТИВНАЯ НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ИДЕАЛОВ АЛГЕБРЫ $sl_n(F)$

Впервые понятие внутреннего идеала было введено Джорджией Бенкарт (G. Benkart) [1].

Считается, что внутренний идеал алгебры Ли является аналогом одностороннего идеала ассоциативной алгебры. Внутренние идеалы сыграли важную роль в классификации простых конечномерных алгебр Ли над полями положительной характеристики. Скажем, что подпространство B алгебры Ли L является внутренним идеалом, если $[B,[B,L]] \subseteq B$.

В работе [2] анонсировано, что для алгебры Ли $sl_2(F)$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики, не равной 2, все ее собственные внутренние идеалы одномерны, порождены матрицами вида: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, где $x^2 + yz = 0$, x, y, z — не равны нулю одновременно.

Для такого внутреннего идеала H выполнено условие $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$.

В работе [3] доказана абелевость собственных внутренних идеалов алгебры $sl_n(F)$ над полем F характеристики нуль и поставлен следующий вопрос: верно ли, что все собственные внутренние идеалы H алгебры Ли $sl_n(F)$ для поля F характеристики нуль удовлетворяют условию $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$?

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле, $char\ F = 0$. Все собственные внутренние идеалы H алгебры Ли $sl_n(F)$ удовлетворяют условию: $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$.*

Для доказательства теоремы нам потребуется лемма.

Лемма 1. *Пусть F — поле, $char\ F = 0$, H — собственный внутренний идеал алгебры Ли $sl_n(F)$, состоящий из верхнетреугольных матриц, $A \in H$. Тогда в матрице A все диагональные элементы равны нулю.*

Доказательство. Предположим, что $a_{ii} \neq a_{jj}$ при $i < j$ — ненулевые диагональные элементы матрицы A.

Рассмотрим коммутатор $[A, e_{ji}]$. Мы будем прослеживать только ненулевые элементы полученной матрицы, лежащие ниже диагонали.

Получим:

$$[A, e_{ji}] = \sum_{k \leq j, k > i} a_{kj} e_{kj} e_{ji} - \sum_{i \leq l, l < j} a_{il} e_{ji} e_{il} + B = \sum_{k \leq j, k > i} a_{kj} e_{ki} - \sum_{i \leq l, l < j} a_{il} e_{jl} + B,$$

где B — верхнетреугольная матрица.

Отметим, что в j-й строке, i-м столбце стоит элемент $a_{jj} - a_{ii}$.

Схематично коммутатор $C = [A, e_{ji}]$ можно представить себе в виде матрицы

$$\left\{ \left(\begin{matrix} * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{jj} - a_{ii} & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & * \end{matrix} \right) \middle| \; \alpha, \beta \in F \right\}.$$

Теперь рассмотрим коммутатор $[A, [A, e_{ji}]]$. Нас интересует элемент, стоящий в j-й строке и i-м столбце. Он будет равен $(a_{jj} - a_{ii})^2$. Это легко проследить, производя умножение j-й строки матрицы A на i-й столбец матрицы C и умножая те же строки и столбцы матриц C и A.

Так как собственный внутренний идеал H состоит из верхнетреугольных матриц, элемент $(a_{jj} - a_{ii})^2$ равен нулю. Получили $a_{jj} - a_{ii} = 0$. Следовательно, все диагональные элементы матрицы A равны между собой.

Из условия $tr\ A = 0$ получаем равенство нулю диагональных элементов матрицы A. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Согласно теореме Ли [4], матрицы разрешимой алгебры Ли линейных преобразований конечномерного векторного пространства над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль могут быть приведены одновременно к треугольному виду.

В [3] было доказано, что для полей нулевой характеристики все собственные внутренние идеалы H алгебры $sl_n(F)$ — абелевы. Это означает, в частности, что H является абелевой алгеброй Ли. Из теоремы Ли следует, что все матрицы собственного внутреннего идеала H могут быть приведены одновременно к треугольному виду. Согласно лемме 1, диагональные элементы матриц из H равны нулю.

Пусть A и B — две матрицы из H. Предположим, что матричные единицы $e_{kl}, k < l$ и $e_{ij} i < j$ входят с ненулевыми коэффициентами в разложение A и B соответственно. Тогда ненулевыми в коммутаторе $[A, B]$ могут быть только произведения $e_{kl}e_{ij}$, если $l = i$ (в этом случае $k < j$) или $e_{ij}e_{kl}$, если $j = k$ (в этом случае $i < l$). Оба этих произведения не могут одновременно равняться нулю. Следовательно, из равенства $[A, B] = 0$ следует равнество $AB = 0$. Теорема доказана.

Обобщим полученный результат на один класс бесконечномерных алгебр Ли.

Обозначим через $gl_{fr}(V)$ множество линейных отображений конечного ранга бесконечномерного векторного пространства V над полем F в себя. Пусть $sl_{fr}(V) = [gl_{fr}(V), gl_{fr}(V)]$.

Теорема 2. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле, $char\ F = 0$, V — бесконечномерное векторное пространство над F. Все собственные внутренние идеалы H алгебры Ли $sl_{fr}(V)$ удовлетворяют условию: $f, g \in H \Rightarrow f \circ g = 0$.*

Доказательство. Пусть H — собственный внутренний идеал алгебры Ли $sl_f r(V)$, $f, g \in H$ — произвольные.

Так как f, g — преобразования ограниченного ранга, существует векторное пространство $W \subset V$ такое, что $f(V), g(V) \subset W$.

Пусть $x \in V$ — произвольное. Обозначим через U конечномерное подпространство V, содержащее W и x. Тогда, ограничивая действие элементов H на U, получим множество преобразований $G = H|_U$. Покажем, что G — внутренний идеал алгебры Ли $sl(U)$.

Пусть $l \in sl(U), s, t \in H$. Обозначим через U' подпространство дополняющее U до V, то есть сумма $V = U \oplus U'$ — прямая. Можно считать, что $l \in sl_{fr}(V)$, определяя действие l на U' нулевым образом. Тогда $[s, [t, l]] \in H$. Ограничивая действие преобразования $[s, [t, l]]$ на подпространстве U, получим $[s, [t, l]] \in G$.

Возможны 3 случая.

1. $G = 0$. В этом случае $f \circ g(x) = 0$.

2. Подпространство G — собственный внутренний идеал алгебры Ли $sl(U)$. Согласно теореме 1 выполнено равенство $f \circ g(x) = 0$.

3. $G = sl(U)$.

Обозначим через n размерность векторного пространства U. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — базис векторного пространства V, первые n элементов которого образуют базис U. Будем использовать обычные обозначения для матричных единиц. Выполнено равенство $[sl(u), sl(u)] = sl(u)$. Для любого внутреннего идеала H легко проверить справедливость включения

$$[[H,H],L] \subset H. \tag{1}$$

Согласно включению (1) следующие коммутаторы принадлежат H:

$$[[e_{ii} - e_{jj}, [e_{ii} - e_{jj}, e_{ik}] = e_{ik}, \qquad [[e_{ii} - e_{jj}, [e_{ii} - e_{jj}, e_{kj}] = e_{kj}, \qquad i \neq j, \qquad i,j \leq n, \qquad k > n.$$

Следовательно, $e_{ii} - e_{jj} \in [H,H], i,j > n$, так как $e_{ii} - e_{jj} = [e_{ij}, e_{ji}]$. Согласно лемме и включению (1) элементы $e_{ij} = [e_{ii} - e_{jj}, e_{ij}]/2$ принадлежат H. Мы показали, что все элементы вида $e_{ii} - e_{jj}$, e_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots$ принадлежат H.

Пусть $h \in H$ — произвольное. Учитывая ограниченность ранга f, можно считать в бесконечной матрице A, задающей f, ненулевыми являются только первые $k-1$ строк. Пусть A_i — матрица, состоящая из i-й строки матрицы A. Тогда $A = A_1 + \ldots + A_{k-1}$. Матрица $[e_{ik}, [e_{ki}, A_i]]$, $1 \leq i \leq k-1$ отличается от матрицы A_i конечным числом элементов. Поэтому можно считать, что все $A_i \in H$, $1 \leq i \leq k-1$.

Мы доказали принадлежность $A \in H$. Следовательно, $H = sl_{fr}(V)$. В этом случае внутренний идеал H не является собственным. Теорема доказана.

Теперь можно поставить следующий вопрос: верно Ли, что все собственные внутренние идеалы H простой алгебры Ли над полем F характеристики нуль (над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль) удовлетворяют условию: $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$?

2. ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ АРТИНОВЫХ АЛГЕБР ЛИ

Пусть L — алгебра Ли. В [2] введены следующие определения артиновости:

а) если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется i-артиновой;

б) если убывающая цепочка алгебр стабилизируется, то алгебра называется a-артиновой;

в) если убывающая цепочка внутренних идеалов стабилизируется, то алгебра называется inn-артиновой.

Легко проверить, что из inn-артиновости следует i-артиновость и из a-артиновости следует i-артиновость.

В [2] анонсированы примеры показывающие, что условие i-артиновости слабее, чем условия inn-артиновости и a-артиновости.

В 2001 году А. В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Кольца и модули» поставил проблему: существует ли i-артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

Следующие предложение и леммы потребуются для решения ослабленной проблемы А. В. Михалева.

Предложение 1. *Пусть B — ненулевой идеал алгебры Ли L, L — a-артинова или inn-артинова. Тогда B содержит ненулевой идеал I такой, что $[I,I] = I$ или B удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени.*

Доказательство. Имеем $B \supseteq B' \supseteq B'' \supseteq \ldots \supseteq B^{(n)} \supseteq \ldots$ — убывающая цепочка идеалов, где $B^{(n)}$ — n-й член производного ряда алгебры B. Из a-артиновости или inn-артиновости следует, что она стабилизируется. Существует натуральное число k, такое что $B^{(k)} = B^{(k+1)}$. Пусть $I = B^{(k)}$. Тогда,

1) если $I = 0$, то B удовлетворяет тождеству разрешимости ступени k;

2) если $I \neq 0$, то $[I, I] = I$, I — искомый.

Следовательно, B содержит ненулевой идеал I такой, что $[I, I] = I$, или B удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени. Предложение доказано.

Лемма 2. *Пусть L — a-артинова или inn-артинова алгебра Ли, A — ненулевой абелев идеал алгебры L. Тогда $dim_F A < \infty$.*

Доказательство. Любое подпространство идеала A является абелевой подалгеброй. Если $dim_F A = \infty$, то нарушается a-артиновость.

Пусть V — подпространство идеала A. Тогда $[V, L] \subset A$. Следовательно, $[V, [V, L]] = 0$. Это означает, что подпространство V — внутренний идеал. Бесконечномерность идеала A противоречит inn-артиновости. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть L — a-артинова или inn-артинова алгебра Ли, $I \subset P(L)$ ненулевой идеал такой, что $[I, I] = I$, A — ненулевой абелев идеал алгебры L. Тогда $[I, A] = 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 идеал A — конечномерен. Присоединенное отображение ad является гоморфизмом алгебры Ли L в алгебру эндоморфизмов векторного пространстваA по отношению к коммутированию $ad : L \to End(A)^{(-)}$.

Образ $\bar{I}$ идеала I при отображении ad является слаборазрешимым, то есть любое его конечномерное подпространство удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени. Слаборазрешимый идеал конечномерной алгебры Ли $End(A)^{(-)}$ является разрешимым [5]. Следовательно, идеал $\bar{I}$ — разрешим. Из условия $[\bar{I}, \bar{I}] = \bar{I}$ следует $\bar{I} = 0$.

Пусть $i \in I, a \in A$. Тогда $ad\; i(a) = [i, a] = 0$. Получили $[I, A] = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть L — a-артинова или inn-артинова алгебра Ли. Тогда первичный радикал $P(L)$ аогебры Ли L разрешим.*

Доказательство. Нам потребуется представление первичного радикала как нижнего слабо разрешимого радикала [6].

Пусть $\sigma(L)$ — это любой ненулевой абелев идеал алгебры Ли L. Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено). Как известно [6], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.

2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ так:

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ — это такой идеал алгебры L, что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$;

б) если β — предельное порядковое число, то $\tau(\beta) = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \tau(\gamma)$.

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β. Тогда, что $\tau(\beta)$ совпадает с нижним слабо разрешимым радикалом алгебры Ли L, равным первичному радикалу $P(L)$.

Предположим, что первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L не является разрешимым. Тогда согласно предложению 1 существует ненулевой идеал $I \subset P(L)$ такой, что $[I, I] = I$.

Пусть $a, b \in I$ — произвольные, γ_1 — порядковое число такое, что $b \in \tau(\gamma_1 + 1) \backslash \tau(\gamma_1)$. Пусть $\bar{L} = L/\tau(\gamma_1)$. Тогда $\tau(\gamma_1 + 1)/\tau(\gamma_1)$ — ненулевой абелев идеал, $\bar{I} = I/\tau(\gamma_1)$ такой, что $[\bar{I}, \bar{I}] = \bar{I}$.

Согласно лемме 3 выполнено равенство $[\bar{I}, \tau(\gamma_1+1)/\tau(\gamma_1)] = 0$. Существует порядковое число $\gamma_2 < \gamma_1$ такое, что $ad\, a(b) \in \tau(\gamma_2+1)/\tau(\gamma_2)$.

Продолжая проведенные выше рассуждения, получим порядковое число $\gamma_3 < \gamma_2$ такое, что $(ad\, a)^2(b) \in \tau(\gamma_3+1)/\tau(\gamma_3)$. И так далее.

Получим последовательность убывающих порядковых чисел $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots$, которая не может быть бесконечной. Следовательно, существует натуральное n такое, что $(ad\, a)^n(b) = 0$.

Из леммы 2.1 [7] следует локальная нильпотентность идеала I. Выбирая последовательно базисы в абелевых идеалах, задающих рост цепочки возрастающих идеалов $\tau(\gamma) \subset I$, на основании леммы 3 можно считать, что элементы идеала I задаются верхнетреугольными блочными бесконечными матрицами с конечными столбцами и нулями на главной диагонали. Из этого представления также следует локальная нильпотентность идеала I.

Пусть r — наименьшее порядковое число, равное разности номеров столбцов и строк ненулевых блоков матриц, задающих элементы из I. Так как на диагонали матриц элементов из I стоят нулевые блоки, выполнено неравенство $r > 1$. У матриц из $[I, I]$ наименьшее порядковое число, равное разности номеров столбцов и строк ненулевых блоков, больше r. Получили противоречие с равенством $[I, I] = I$. Теорема доказана.

Теорема 2 дает решение ослабленной проблемы А. В. Михалева для a-артиновых и inn-артиновых алгебр Ли.

Библиографический список

1. *Benkart G.* On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 232. P. 61–81.

2. *Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А.* О свойствах внутренних идеалов алгебр Ли // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов : тез. третьей междунар. шк.-конф., посвящ. 75-летию Э. Б. Винберга (Тольятти, Россия, 25–30 июня 2012 г.). Тольятти : Изд-во ТГУ, 2012. С. 32–34.

3. *Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А.* О собственных внутренних идеалах простых алгебр Ли // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та. 2012. № 6, ч. 2. С. 156–162.

4. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М. : Мир, 1964. 355 с.

5. *Бейдар К. И., Пихтильков С. А.* Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, № 3. С. 643–648.

6. *Балаба И. Н., Михалев А. В., Пихтильков С. А.* Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 159–174.

7. *Pikhtilkov S. A.* Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras // Comm. in Algebra. 2001. Vol. 29, № 10. P. 3781–3786.

On the A. V. Mikhalev's Problem for Lie Algebras

E. V. Mescherina, O. A. Pikhtilkova, S. A. Pikhtilkov

Orenburg State University, Russia, 460352, Orenburg, pr. Pobedy, 13, elena_lipilina@mail.ru, OPikhtilkova@mail.ru, pikhtilkov@mail.ru

Weakened A. V. Mikhalev' sproblem about the prime radical of artinian Lie algebras is solved.

Key words: Lie algebra, inner ideal, prime radical, artinian Lie algebra.

References

1. Benkart G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras. *Transaction of the American Mathematical Society*, 1977, vol. 232, pp. 61–81.

2. Mescherina E. V., Pikhtilkov S. A., Pikhtilkova O. A. About properties of Lie algebras inner ideals. *Abstracts of the third international school conference «Algebras, algebraic groups and the theory of invariants», devoted to the 75 anniversary of E. B. Vinberg (Tolyatti, Russia, on June 25-30, 2012)*. Tolyatti, TGU Publ. house, 2012, pp. 32–34 (in Russian).

3. Mescherina E. V., Pikhtilkov S. A., Pikhtilkova O. A. On proper inner ideals of simple Lie algebras. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta*

[Scientific notes of the Oryol State University], 2012, no. 6, pt. 2, pp. 156–162 (in Russian).
4. Jacobson N. *Algebry Li* [Lie algebras]. Moscow, Mir, 1964, 355 p. (in Russian).
5. Beidar K. I., Pikhtilkov S. A. Prime radical of special Lie algebras. *Fundamentalnaya i prikladnaya mathematika*, 2000, vol. 6, no. 3, pp. 643–648 (in Russian).
6. Balaba I. N., Mikhalev A. V., Pikhtilkov S. A. Prime Radical of Graded Ω-groups. *Journal of Mathematical Sciences* [Fundamentalnaya i prikladnaya mathematika], 2008, vol. 149, no. 2, pp. 1146–1156.
7. Pikhtilkov S. A. Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras. *Comm. in Algebra*, 2001, vol. 29, no. 10, pp. 3781–3786.

УДК 511.4

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОДНОГО КЛАССА ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. Ю. Нестеренко

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, nesterenko_a_y@mail.ru

В работе исследуется класс иррациональных чисел, задаваемых быстро сходящимися рядами с рациональными коэффициентами. Рассматривается задача о восстановлении неизвестных параметров рациональных коэффициентов по заданным рациональным приближениям. Получены верхние и нижние оценки на неизвестные параметры, а также предложен алгоритм поиска неизвестных. Приведены результаты вычислений на ЭВМ.

Ключевые слова: разложения действительных чисел, восстановление параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $b > 1$ натуральное число. Мы будем рассматривать действительные числа $\alpha > 0$, заданные равенством

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{(dn+x_i)^s}b^{-n}, \qquad m,d,s \in \mathbb{N}, \qquad u_1,\dots,u_m \in \mathbb{Q}, \tag{1}$$

а величины $x_1,\dots,x_m$ — различные натуральные числа. Многие математические константы, такие как $\ln 2$, π, константа Каталана, могут быть представлены в указанном виде. Более подробно, см. в работе [1].

В работе [2] автором рассматривались представления чисел вида (1) в системе счисления по основанию b

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}, \qquad 0 \le a_n < b, \qquad n = 1,2,\dots, \tag{2}$$

а также, исследовались статистические свойства последовательности натуральных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

В данной работе решается следующая задача. Пусть для некоторого натурального числа r задано рациональное приближение к числу α

$$\sigma_r = \sum_{n=0}^{r} a_n b^{-n}, \qquad |\alpha - \sigma_r| < b^{-r}, \qquad \sigma_r \in \mathbb{Q}.$$

Необходимо определить значения величин $x_1,\dots,x_m$, если известны значения m, d, s и $u_1,\dots,u_m$. Поскольку неизвестные величины различны, то мы будем дополнительно считать, что выполнены неравенства

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m. \tag{3}$$

1. ВЫВОД ОЦЕНОК ДЛЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Предположим, что существует некоторая натуральная константа c такая, что $x_m \le c$. В этом случае значения неизвестных $x_1, \dots, x_m$ могут быть найдены простым перебором. При этом мощность множества возможных наборов неизвестных величин, удовлетворяющих (1), не превосходит c^m.

Если константа c невелика, то для определения неизвестных значений $x_1, \dots, x_m$, может быть использован PSLQ метод, предложенный в работе [3]. Далее мы будем считать, что значения $x_1, \dots, x_m$ не ограничены. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Определим последовательность действительных чисел* α_k

$$\alpha_1 = \sigma_r, \qquad \alpha_k = \alpha_{k-1} - u_{k-1}\xi_{k-1} \qquad \text{для} \qquad k = 2, \dots, m,$$

где величины $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ *удовлетворяют равенствам*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} u_i \xi_i, \qquad \xi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_i)^s}, \qquad i = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Если для r *выполнены условия:*

1) величина σ_r *отлична от нуля,*

2) выполнено неравенство

$$u_m > \frac{2(b-1)(dr + x_m)^s}{b^r\left(1 - b^{-r}\right)}, \tag{5}$$

3) выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} u_i < (b-1)(dr)^s b^r, \tag{6}$$

то для всех индексов $k = 1, \dots, m$ *выполнены неравенства*

$$\left(\frac{u_k}{\alpha_k}\right)^{1/s} < x_k < \left(\frac{b}{\alpha_k(b-1)} \sum_{i=k}^{m} u_i\right)^{1/s}. \tag{7}$$

Для доказательства приведенной теоремы нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любого индекса* $r = 0, 1, \dots$ *выполнено равенство*

$$\alpha - \sigma_r = b^{-r}\left(\gamma_r + \delta_r\right), \qquad \gamma_r = \sum_{n=r+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i}{(dn + x_i)^s} b^{-n}, \tag{8}$$

а величина $\delta_r \in \mathbb{Q}$ *определяется условиями*

$$\delta_r = b^r \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{r} \frac{u_i b^{-n}}{(dn + x_i)^s} - \sigma_r, \qquad 0 < \delta_r < 1. \tag{9}$$

Доказательство леммы содержится в работе [2].

Лемма 2. *Для величин* γ_r, $r = 0, 1, \dots$, *определенных равенством* (8), *верна оценка*

$$0 < \gamma_r < \frac{1}{(b-1)(d(r+1))^s b^r} \sum_{i=1}^{m} u_i.$$

Доказательство. Неравенство $0 < \gamma_r$, очевидно, выполнено в силу определения величины γ_r. Далее, в силу неравенств (3), а также из условия $n \ge r + 1$, следует выполнение неравенства $\dfrac{1}{dr} > \dfrac{1}{dn + x_i}$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$\gamma_r = \sum_{n=r+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i}{(dn + x_i)^s} b^{-n} < \frac{1}{(d(r+1))^s} \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{n=r+1}^{\infty} b^{-n}.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} b^{-n} = b^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} = \frac{b^{-r}}{(b-1)}, \tag{10}$$

получаем утверждение леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. Согласно (4) и (8) для величины α_k выполнено равенство

$$\alpha_k = \sigma_r - \sum_{i=1}^{k-1} u_i \xi_i = \alpha - b^{-r}(\gamma_r + \delta_r)) - \sum_{i=1}^{k-1} u_i \xi_i = \sum_{i=k}^{m} u_i \xi_i - b^{-r}(\delta_r + \gamma_r).$$

Поскольку неизвестная x_k принимает наименьшее значение среди величин $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m$, а величины b, δ_r, γ_r положительны, то

$$\alpha_k < \sum_{i=k}^{m} u_i \xi_i = \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_k)^s} < \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n}}{x_k^s} = \frac{b}{x_k^s (b-1)} \sum_{i=k}^{m} u_i.$$

Полученное неравенство дает нам оценку сверху для величины x_k.

С другой стороны, запишем равенство

$$\alpha_k = \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_i)^s} - b^{-r}(\delta_r + \gamma_r) =$$

$$= \sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{x_i^s} + \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_i)^s} - b^{-r}(\delta_r + \gamma_r) = \sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{x_i^s} + \Delta_1 - \Delta_2. \tag{11}$$

Вначале оценим величину Δ_1:

$$\Delta_1 = \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_i)^s} > \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{r} \frac{b^{-n}}{(dn + x_i)^s} >$$

$$> \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{r} \frac{b^{-n}}{(dn + x_m)^s} > \frac{1}{(dr + x_m)^s} \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{r} b^{-n}.$$

Учитывая (10), получим равенство

$$\sum_{n=1}^{r} b^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} - \sum_{n=r+1}^{\infty} b^{-n} = \frac{1 - b^{-r}}{(b-1)},$$

из которого следует оценка

$$\Delta_1 > \frac{(1 - b^{-r})}{(b-1)(dr + x_m)^s} \sum_{i=k}^{m} u_i.$$

Теперь, учитывая (5) и (6), а также утверждения доказанных ранее лемм, получаем цепочку неравенств

$$\Delta_1 > \frac{u_m (1 - b^{-r})}{(b-1)(dr + x_m)^s} > 2b^{-r} > b^{-r}(1 + \varepsilon) > \Delta_2,$$

где $\varepsilon = \dfrac{1}{(b-1)(d(r+1))^s b^r} \sum\limits_{i=1}^{m} u_i$. Следовательно, $\Delta_1 - \Delta_2 > 0$. Подставляя это неравенство в (11), получаем оценку

$$\alpha_k = \sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{x_i^s} + \Delta_1 - \Delta_2 > \sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{x_i^s} > \frac{u_k}{x_k^s},$$

из которой следует утверждение теоремы. $\square$

Сделаем несколько замечаний к доказанной теореме.

Утверждение теоремы позволяет в явном виде выписать верхние и нижние оценки на величину неизвестных $x_1, \ldots, x_m$. Данные оценки верны, как следует из (5), только для r, удовлетворяющих неравенству

$$x_m < \left(\frac{u_m b^r (1 - b^{-r})}{2(b-1)} \right)^{1/s} - dr. \tag{12}$$

На практике нам неизвестно значение x_m. Таким образом, фиксировав r, удовлетворяющее неравенству (6), мы получим оценку сверху на величину возможных решений исходной задачи. С другой стороны, правая часть неравенства (12) при $r \to \infty$, ведет себя как $O\left(b^{r/s}\right)$, следовательно, для любого значения x_m найдется такой индекс r, что неравенство (12) будет выполнено.

2. АЛГОРИТМ ПОИСКА НЕИЗВЕСТНЫХ

Алгоритм поиска неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ заключается в следующем. Используя (7), вычислить интервал для величины x_1. Для каждого целого числа x_1 в указанном интервале определить величину $\alpha_2 = \alpha_1 - u_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_1)^s}$ и интервал для возможных значений величины x_2. Далее, для каждого целого значения x_2 из найденного интервала определить величину $\alpha_3 = \alpha_2 - u_2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_2)^s}$ и интервал возможных значений для x_2. Заметим, что для x_2 также должна выполняться оценка снизу $x_1 < x_2$.

Продолжая аналогичным образом, найдем все возможные наборы неизвестных значений $x_1, \ldots, x_m$. Для каждого найденного набора вычислить последовательность $a_0, a_1, \ldots$ и сравнить полученные значения с заданными. В случае совпадения, закончить алгоритм.

Приведем пример, иллюстрирующий описанные выше вычисления. Зафиксируем $b = 256$ и рассмотрим действительное число:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n + x_1)} + \frac{1}{(4n + x_2)} + \frac{1}{(4n + x_3)} \right) 256^{-n},$$

для которого $d = 4$, $m = 3$, $s = 1$ и $u_1 = u_2 = u_3 = 1$. Известно, что начальные коэффициенты в представлении $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 256^{-n}$ имеют вид $\{0, 7, 12, 235, 161, 143, 245, 159, 92, 205, 168, 97, 219, \ldots\}$.

Выберем $r = 5$ согласно (12) этого достаточно для определения величин x_1, x_2, x_3, не превосходящих 2.156×10^9. Построим рациональное приближение:

$$\sigma_5 = \frac{30281539983}{1099511627776} = 0.0275409001761.$$

Воспользовавшись неравенством (7) при $\alpha_1 = \sigma_5$ получаем неравенства $37 \le x_1 \le 109$. Вычисляя для каждого значения x_1 в указанном интервале величину $\alpha_2 = \alpha_1 - \xi_1$, найдем 73 интервала для возможных значений величины x_2. Так, при $x_1 = 37$ неизвестная x_2 удовлетворяет неравенству $2247 \le x_2 \le 4511$, а при $x_1 = 109$ интервал возможных значений для x_2 пуст.

Используя аналогичные соображения, для каждой пары x_1, x_2 найдем интервал для возможных значений x_3. Общее количество найденных троек, удовлетворяющих неравенствам (7), равно 286605.

Для отсева ложных значений мы используем следующее рассуждение. Если неизвестные x_1, x_2, x_3 принимают истинные значения, то согласно (9) должно выполняться неравенство

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) - \sigma_5 < 256^{-5},$$

где

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=0}^{5} \left(\frac{1}{(4n + x_1)} + \frac{1}{(4n + x_2)} + \frac{1}{(4n + x_3)} \right) 256^{-n}.$$

Вычислив величины $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ для найденных троек x_1, x_2, x_3, мы получили 211 троек, для которых выполнялось указанное неравенство.

В завершение для каждой такой тройки были найдены преставление $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{n=0}^{7} c_n 256^{-n}$ и, сравнивая полученные коэффициенты и коэффициенты $a_1, \ldots, a_7$, искомое решение

$$x_1 = 54, \qquad x_2 = 122, \qquad x_3 = 1381.$$

Описанные выше вычисления были произведены на ЭВМ, время* вычислений составило 4.87 с.

Отметим, что время вычислений существенным образом зависит от величин x_1, x_2, x_3. Так, для определения неизвестных значений $x_1 = 122$, $x_2 = 1245$, $x_3 = 1381$, при тех же параметрах b, d, s, m и u_1, u_2, u_3, программе потребовался 1 ч 32 мин. В процессе поиска было перебрано 365263502 возможных троек, из которых 9169647 удовлетворяли неравенству (9).

Библиографический список

1. *Bayley D. H.* A Compendium of BBP-type Formulas for Mathematical Constants. Preprint. April, 2013. URL : http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/bbp-formulas.pdf (дата обращения 10.09.2013).

2. *Нестеренко А. Ю.* О статистических свойствах некоторых трансцендентных чисел // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та. 2012. № 6, ч. 2. С. 170–176.

3. *Ferguson H. R. P., Bailey D. H., Arno S.* Analysis of PSLQ, An Integer Relation Finding Algorithm // Math. of Computation. 1999. Vol. 68, № 225. P. 351–369.

Parameters Recovering Algorithm for One Class of Irrationalities

A. Yu. Nesterenko

National Research University «Higher School of Economics», Russia, 109028, Moscow, Bol. Trekhsvjatitel'skij per., 1-3/12, build. 8, nesterenko_a_y@mail.ru

In this article we study one class of irrationalities which may be defined as covergent series with rational coefficients. This class contain a lot of well known constants such as $\ln 2$, π, e.t.c. We consider the problem of determination parameters of rational coefficients by rational approximation of irrationality. We deduced the lower and upper bounds and present an algorithm for determination of unknown parameters. Also, we present some results of practical calculations.

Key words: irrationality, rational approximation.

References

1. Bayley D. H. *A Compendium of BBP-type Formulas for Mathematical Constants*. Preprint. April, 2013. Available at: http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/bbp-formulas.pdf (Accessed 10, September, 2013).

2. Nesterenko A. Yu. On the statistical properties of some transcendetal numbers. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta* [Scientific notes of the Oryol State University], 2012, no. 6, pt. 2, pp. 170–176 (in Russian).

3. Ferguson H. R. P., Bailey D. H., Arno S. Analysis of PSLQ, An Integer Relation Finding Algorithm. *Mathematics of Computation*, 1999, vol. 68, no. 225, pp. 351–369.

УДК 501.1

О ПОРОЖДАЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ ПОДАЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТОВ СВОБОДНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

В. М. Петроградский[1], И. А. Субботин[2]

[1] Доктор физико-математических наук, факультет математики, Университет Бразилиа, Бразилиа, petrogradsky@rambler.ru

[2] Аспирант кафедры алгебро-геометрических вычислений, факультет математики и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, shelby888@yandex.ru

Пусть $L = L(X)$ — свободная ограниченная алгебра Ли конечного ранга k со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ над произвольным полем положительной характеристики. Пусть G — нетривиальная конечная группа однородных автоморфизмов $L(X)$. Наша основная цель — доказать, что подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена. Мы получаем более сильный результат. Пусть $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ — однородное свободное порождающее множество

*Вычисления производились на ноутбуке HP EliteBook с процессором Intel Core i5 CPU M 560, тактовой частотой 2.67GHz и 4Gb оперативной памяти.

для подалгебры инвариантов L^G, где элементы Y_n имеют степень n относительно X, $n \geq 1$. Рассмотрим соответствующую производящую функцию $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$. В нашем случае свободных ограниченных алгебр Ли мы доказываем, что ряд $\mathscr{H}(Y,t)$ имеет радиус сходимости $1/k$, и описываем его рост при $t \to 1/k - 0$. В результате получаем, что последовательность $|Y_n|$, $n \geq 1$, растет экспоненциально с показателем экспоненты k.

Ключевые слова: свободные алгебры Ли, ограниченные алгебры Ли, инварианты свободных алгебр Ли, порождающее множество.

ВВЕДЕНИЕ. ИНВАРИАНТЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Пусть $L = L(x_1, \ldots, x_m)$ — свободная алгебра Ли. Предположим, что G — конечная группа автоморфизмов алгебры Ли L. Рассмотрим подалгебру инвариантов $H = L^G = \{x \in L \mid g \cdot x = x,\ g \in G\}$. По теореме Ширшова–Витта любая подалгебра в свободной алгебре Ли свободна [1, 2]. Подалгебра инвариантов бесконечно порождена в случае нетривиальной конечной группы однородных автоморфизмов [3].

Теорема 1 [4]. *Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, поле K произвольно. Рассмотрим диагональное действие G на свободной алгебре Ли $L = L(x_1, \ldots, x_k)$. Пусть $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$, — однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G и $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ — соответствующая производящая функция. Тогда последовательность $|Y_n|$ растет экспоненциально:* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Y_n|} = k$.

Более подробное описание асимптотик см. [4]. Цель настоящей статьи — доказательство аналогичного результата для свободных ограниченных алгебр Ли (см. п. 2, теорема 5). Доказательство предыдущей теоремы, а также доказательство основного результата настоящей статьи основаны на следующем результате.

Теорема 2 [3, теорема 3.2]. *В условиях теоремы 1 и обозначений выше существует предел*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\dim L_{im}^G}{\dim L_{im}} = \frac{m}{|G|}.$$

Пусть L — алгебра Ли над полем K характеристики $p > 0$. Используем стандартное обозначение $\operatorname{ad} x : L \to L$, $\operatorname{ad} x(y) = [x, y]$, $x, y \in L$. Алгебра Ли L называется *ограниченной алгеброй Ли* (или *p-алгеброй Ли*), если она дополнительно наделена унарной операцией $x \mapsto x^{[p]}$, $x \in L$ [5, 6].

Рассмотрим две мультипликативные функции, предложенные в [7]:

$$1_p(n) = \begin{cases} 1, & (p,n) = 1, \\ 1 - p, & (p,n) = p, \end{cases}$$

$$\mu_p(n) = \begin{cases} \mu(n), & (p,n) = 1, \\ \mu(m)(p^s - p^{s-1}), & n = mp^s, \quad (p,m) = 1, \quad s \geq 1. \end{cases}$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мебиуса. Функцию $\mu_p(n)$ также можно рассматривать как деформацию функции Мебиуса. Заметим, что имеют место следующие оценки:

$$|1_p(n)| \leq n, \qquad |\mu_p(n)| \leq n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Свободная ограниченная алгебра Ли L_p порожденная множеством $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, определяется при помощи стандартных конструкций [6, 8].

Теорема 3 [9]. *Пусть $L = L_p(X)$ — свободная p-алгебра Ли порожденная множеством $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда имеют место следующие аналоги формулы Витта для размерностей полиоднородных компонент и производящих функций:*

$$\mathscr{H}(L,t) = -\sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a} \ln(1 - kt^a), \qquad \dim L_n = \frac{1}{n} \sum_{a|n} \mu_p(a) k^{n/a}.$$

Пусть $\mathbb{Q}[[t]]$ — кольцо формальных степенных рядов от одной переменной, а также $\mathbb{Q}[[t]]_0$— его подмножество, состоящее из рядов с нулевым свободным членом. Введем операторы $\mathscr{E}_p, \blacksquare\mathrm{L}_p$ на формальных степенных рядах следующим образом:

$$\mathscr{E}_p(\phi)(t) = \exp\left(\sum_{b=1}^{\infty} \frac{1_p(b)}{b}\,\phi(t^b)\right), \qquad \phi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]_0,$$

$$\blacksquare\mathrm{L}_p(\phi)(t) = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a}\ln(\phi(t^a)), \qquad \phi(t) \in 1 + \mathbb{Q}[[t]]_0.$$

Теорема 4 [9]. *Пусть $L = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ — градуированная ограниченная алгебра Ли. Тогда ряды Гильберта–Пуанкаре для L и ее ограниченной обертывающей алгебры $u(L)$ связаны следующим образом: $\mathscr{H}(u(L),t) = \mathscr{E}_p(\mathscr{H}(L,t))$ и $\mathscr{H}(L,t) = \blacksquare\mathrm{L}_p(\mathscr{H}(u(L),t))$.*

2. ПОРОЖДАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО ДЛЯ ПОДАЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТОВ СВОБОДНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Рассмотрим конечную нетривиальную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, действующую на конечномерном пространстве $V = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_K$, где K — произвольное поле положительной характеристики p. Пусть $L = L(x_1, \dots, x_k)$ — свободная ограниченная алгебра Ли, порожденная множеством $\{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда естественно возникает продолжение действия этой группы G однородными автоморфизмами на всей ограниченной алгебре Ли $L(X)$. А именно пусть $\phi \in \mathrm{GL}(V)$, рассмотрим элемент $v \in L$, тогда $v = f(x_1, \dots, x_k)$, и мы определяем действие так: $\phi(v) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_k))$.

Теорема 5. *Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, где K — произвольное поле характеристики p. Рассмотрим диагональное действие G на свободной ограниченной алгебре Ли $L = L(x_1, \dots, x_k)$, порожденной множеством $\{x_1, \dots, x_k\}$. Пусть $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$, $n \geq 1$, — однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G, а также $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ — соответствующая производящая функция. Тогда*

1) $\mathscr{H}(Y,t)$ не зависит от выбора однородного свободного порождающего множества Y;

2) производящая функция имеет следующую асимптотику:

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \Big(1 - kt\Big)^{1/|G| + o(1)}, \qquad t \to 1/k - 0.$$

3) радиус сходимости для $\mathscr{H}(Y,t)$ равен $1/k$;

4) последовательность $|Y_n|$ растет экспоненциально: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Y_n|} = k$;

5) подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена.

Здесь $t \to 1/k - 0$ обозначает, что вещественная переменная стремится слева к $1/k$. Наше доказательство основано на аналоге теоремы 2.

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть m — порядок подгруппы G_0 группы G, состоящих из элементов, действующих скалярно на $V = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_K$. Тогда в условиях теоремы 5 и обозначениях выше существует предел*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\dim L_{im}^G}{\dim L_{im}} = \frac{m}{|G|}.$$

Лемма 2. *Пусть ξ — примитивный корень из единицы порядка m. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеем:*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} = \begin{cases} m, & m \mid n, \\ 0, & m \nmid n. \end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть L — свободная ограниченная алгебра Ли ранга k. Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подалгебру Ли, состоящую из m-кратных компонент, (подалгебру Веронезе) $L_{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_{mi} \subset L$. Тогда для ее производящей функции имеет место асимптотика*

$$\mathscr{H}(L_{(m)}, t) \approx -\frac{1}{m}\ln(1-kt), \qquad t \to 1/k - 0.$$

К сожалению, формат данной статьи не позволяет привести доказательства данных утверждений.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Доказательство теоремы 5. Производящая функция для подалгебры Веронезе вещественная и согласно лемме 3 имеем для любого фиксированного $N \in \mathbb{N}$ также

$$\lim_{t \to 1/k-0} \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi} = +\infty.$$

По лемме 1 для любого числа $\epsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left(\frac{m}{|G|} - \epsilon\right) \dim L_{mi} \le \dim L_{mi}^G \le \left(\frac{m}{|G|} + \epsilon\right) \dim L_{mi}, \qquad i \ge N.$$

Непосредственными вычислениями мы получаем:

$$\mathscr{H}(L^G, t) \approx -\frac{1}{|G|}\ln(1-kt), \qquad t \to 1/k - 0. \tag{2}$$

Теперь мы рассмотрим производящую функцию для $R = u(L^G)$ — ограниченной обертывающей алгебры инвариантов. Используем теорему 4:

$$\mathscr{H}(R, t) = \mathscr{E}_p(\mathscr{H}(L^G, t)) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_p(n)}{n} \mathscr{H}(L^G, t^n)\right). \tag{3}$$

Хорошо известно, что R изоморфна свободной ассоциативной алгебре $A(Y)$, порожденной множеством Y, и в этом случае [10]

$$\mathscr{H}(R, t) = \mathscr{H}(A(Y), t) = \frac{1}{1 - \mathscr{H}(Y, t)}. \tag{4}$$

Из (4) и (3) мы получаем:

$$\mathscr{H}(Y, t) = 1 - \frac{1}{\mathscr{H}(R, t)} = 1 - \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_p(n)}{n} \mathscr{H}(L^G, t^n)\right), \tag{5}$$

из чего следует первое утверждение.

Так как $\dim L_n^G \le \dim L_n$ для всех $n \ge 1$, мы видим, что первое слагаемое $\mathscr{H}(L^G, t)$ в сумме справа (5) определено для любого комплексного $|t| < 1/k$. Значит, другие члены $\mathscr{H}(L^G, t^n)$, $n \ge 2$, определены для всех $|t| < \sqrt{1/k}$. Покажем, что они не меняют асимптотики при $t \to 1/k - 0$, которую дает первое слагаемое.

Действительно, согласно (2) для первого слагаемого имеем $\mathscr{H}(L^G, t) \to +\infty$ при $t \to 1/k - 0$. Так как наш ряд не имеет свободного члена, можем записать $\mathscr{H}(L^G, t) = tf(t)$, где $f(t)$ — ряд с неотрицательными коэффициентами. Как отмечено выше, $f(1/k^2) = k^2 \mathscr{H}(L^G, 1/k^2) = C$ — конечное число. Рассмотрим $t \in \mathbb{C}$, причем $|t| < 1/k$. Тогда

$$|f(t^n)| \le f(|t|^n) < f(1/k^2) = C, \qquad n \ge 2. \tag{6}$$

Используя оценки (1) и (6), сумма слагаемых начиная со второго в (5) оценивается константой:

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1_p(n)}{n}\mathscr{H}(L^G,t^n)\right| \le \sum_{n=2}^{\infty}|\mathscr{H}(L^G,t^n)| \le \sum_{n=2}^{\infty}|t|^n|f(t^n)| \le \frac{C}{k^2(1-1/k)} < \infty, \qquad |t|<1/k. \tag{7}$$

Таким образом, используем (5), (2) и (7), получаем

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1-\exp\left(\frac{1+o(1)}{|G|}\ln(1-kt)\right) = 1-(1-kt)^{1/|G|+o(1)}, \qquad t\to 1/k-0, \tag{8}$$

что доказывает второе утверждение теоремы.

Заметим, что $\mathscr{H}(Y,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|Y_n|t^n$, где $|Y_n|\le \dim L_n$. Обозначим через W диск $|t|<1/k$. Получаем, что $\mathscr{H}(Y,t)$ сходится, по крайней мере, в W. Предположим, что $t_0=1/k$ является *регулярной* точкой для $\mathscr{H}(Y,t)$, то есть существует аналитическое продолжение $h(t)$ в окрестности $W_0=\{t\in\mathbb{C} \mid |t-1/k|<\epsilon\}$ такое, что $\mathscr{H}(Y,t)=h(t)\Big|_{t\in W\cap W_0}$ [11]. Тогда мы имеем разложение в ряд Тейлора:

$$h(t)=c_0+c_1(t-1/k)+c_2(t-1/k)^2+\ldots, \qquad t\in W_0. \tag{9}$$

Сопоставляя пределы (8) и (9) при $t\to 1/k-0$, получаем $c_0=1$. Сравниваем следующие коэффициенты:

$$c_1=\lim_{t\to 1/k}\frac{h(t)-1}{t-1/k}=\lim_{t\to 1/k-0}\frac{\mathscr{H}(Y,t)-1}{t-1/k}=\lim_{t\to 1/k-0}k(1-kt)^{1/|G|-1+o(1)}=+\infty,$$

здесь мы использовали, что $|G|>1$, получаем противоречие. Это противоречие доказывает, что точка $t_0=1/k$ не является регулярной для $\mathscr{H}(Y,t)$ и радиус сходимости для $\mathscr{H}(Y,t)$ в нуле равен $1/k$, см. [11]. Утверждение (3) доказано. Утверждение (4) следует из формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости ряда [11]. Последнее утверждение очевидно. □

Авторы благодарны Роджеру Брайанту за обсуждение.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта CNPq, Бразилия.

Библиографический список

1. *Ширшов А. И.* Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33. С. 441–452.

2. *Witt E.* Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. 1956. Vol. 64. P. 195–216.

3. *Bryant R. M.* On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra // J. London Math. Soc. 1991. Vol. 43, № 2. P. 215–224.

4. *Петроградский В. М., Смирнов А. А.* Об инвариантах модулярных свободных алгебр Ли // Фунд. прикл. мат. 2009. Т. 15, № 1. С. 117–124.

5. *Jacobson N.* Lie algebras. N. Y. : Interscience, 1962. 332 p.

6. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.

7. *Petrogradsky V. M.* On Witt's formula and invariants for free Lie superalgebras // Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow 2000). Springer, 2000. P. 543–551.

8. *Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V.* Infinite dimensional Lie superalgebras. de Gruyter Exp. Math. Vol. 7. Berlin : de Gruyter, 1992. 250 p.

9. *Petrogradsky V. M.* Witt's formula for restricted Lie algebras // Adv. Appl. Math. 2003. Vol. 30. P. 219–227.

10. *Petrogradsky V. M.* Asymptotic problems in algebraic structures // Limit of graphs in group theory and computer science. / ed. G. Arzhantseva, A. Valette. Lausanne : EPFL Press, 2009. P. 77–108.

11. *Маркушевич А. Л., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. М. : Просвещение, 1977. 320 с.

12. *Петроградский В. М.* Об инвариантах действия конечной группы на свободной алгебре Ли // Сиб. мат. журн. 2000. Vol. 41, № 4. P. 915–925.

13. *Петроградский В. М.* Характеры и инварианты свободных суперbegin алгебр Ли // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 1. С. 158–181.

About Generating Set of the Invariant Subalgebra of Free Restricted Lie Algebra

V. M. Petrogradsky[1], I. A. Subbotin[2]

[1]Department of Mathematics, University of Brasilia, 70910-900 Brasilia DF, Brazil, petrogradsky@rambler.ru

[2]Ulyanovsk State University, Russia, 432970, Ulyanovsk, ul. L'va Tolstogo, 42, shelby888@yandex.ru

Suppose that $L = L(X)$ is the free Lie p–algebra of finite rank k with free generating set $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ on a field of positive characteristic. Let G is nontrivial finite group of homogeneous automorphisms $L(X)$. Our main purpose to prove that L^G subalgebra of invariants is is infinitely generated. We have more strongly result. Let $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ be homogeneous free generating set for the algebra of invariants L^G, elements Y_n are of degree n relatively X, $n \ge 1$. Consider the corresponding generating function $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$. In our case of free Lie restricted algebras, we prove, that series $\mathscr{H}(Y,t)$ has a radius of convergence $1/k$ and describe its growth at $t \to 1/k - 0$. As a result we obtain that the sequence $|Y_n|$, $n \ge 1$, has exponential growth.

Key words: free Lie algebras, Lie p-algebras, invariants, generating set.

References

1. Shirshov A. I. Subalgebras of free Lie algebra. *Mat. sb.*, 1953, vol. 33, no. 2, pp. 441–452 (in Russian).
2. Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. *Math. Z.*, 1956, vol. 64, pp. 195–216.
3. Bryant R. M. On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra. *J. London Math. Soc.* 1991, vol. 43, no. 2, pp. 215–224.
4. Petrogradsky V. M., Smirnov A. A. On invariants of modular free Lie algebras. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 166, no. 6, pp. 767–772.
5. Jacobson N. *Lie algebras*. New York, Interscience, 1962. 332 p.
6. Bahturin Yu. A. *Identical Relations in Lie Algebras*. Netherlannds, VNU Sciens Press BV, 1987, 309 p.
7. Petrogradsky V. M. On Witt's formula and invariants for free Lie superalgebras. *Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow 2000)*, Springer, 2000, pp. 543–551.
8. Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. *Infinite-dimensional Lie superalgebras*. de Gruyter Exp. Math., Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1992, vol. 7, 250 p.
9. Petrogradsky V. M. Witt's formula for restricted Lie algebras. *Adv. Appl. Math.*, 2003, vol. 30, pp. 219–227.
10. Petrogradsky V. M. Asymptotic problems in algebraic structures. *Limit of graphs in group theory and computer science*. ed. G. Arzhantseva, A. Valette, Lausanne, EPFL Press, 2009, pp. 77–108.
11. Markushevich A. L., Markushevich L. A. *Vvedenie v teoriiu analiticheskikh funktsii* [Introduction to the theory of analytic functions]. Moscow, Prosveshchenie, 1977, 320 p. (in Russian).
12. Petrogradsky V. M. On invariants of the action of a finite group on a free lie algebra. *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 4, 763–770.
13. Petrogradsky V. M. Characters and invariants for free Lie superalgebras. *St. Petersburg Math. J.*, 2002, vol. 13, no. 1, pp. 107–122.

УДК 517.54

ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА СО СТЕПЕННОЙ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

Д. В. Прохоров[1], К. А. Самсонова[2]

[1]Профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ProkhorovDV@info.sgu.ru

[2]Аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kris_ruzhik@mail.ru

Рассматривается качественное локальное поведение траекторий обыкновенного дифференциального уравнения Левнера с управляющей функцией, обратной к степенной функции, с целым показателем степени. Выделены все особые точки и соответствующие им сингулярные решения. Показано, что эта управляющая функция порождает решения уравнения Левнера, которые представляют собой отображения полуплоскости с гладким разрезом на верхнюю полуплоскость. Найдено асимптотическое соотношение между гармоническими мерами сторон разреза.

Ключевые слова: уравнение Левнера, гармоническая мера, сингулярное решение, управляющая функция, C^1-кривая.

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении многих лет дифференциальное уравнение Левнера [1] служило мощным средством изучения свойств однолистных функций в единичном круге. Обнаруженные связи теории Левнера со многими разделами математики объясняют растущий интерес к ней в современных исследованиях (см. например [2]). Уравнение Левнера для верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ появилось значительно позднее (см. например [3, с. 229]) и стало особенно популярным в последние десятилетия. Рассмотрим его подробнее. Пусть функция $w = f(z,t)$, $z \in \mathbb{H}$, $t \geq 0$, имеющая в окрестности бесконечно удаленной точки представление

$$f(z,t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \qquad z \to \infty, \tag{1}$$

отображает $\mathbb{H}\setminus K_t$, $K_t \subset \mathbb{H}$, на $\mathbb{H}$ и является решением обыкновенного дифференциального уравнения Левнера для верхней полуплоскости:

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \lambda(t)}, \qquad f(z,0) = z, \qquad z \in \mathbb{H}, \tag{2}$$

с непрерывной вещественной управляющей функцией $\lambda(t)$.

Конформные отображения $f(z,t)$ допускают непрерывное продолжение на множество всех точек $z \in \mathbb{R}$, не принадлежащих замыканию множества K_t. Продолженные таким образом отображения $f(z,t)$ удовлетворяют уравнению (2). Давняя задача (см. например [4]) заключается в том, чтобы определить в терминах λ случаи, когда K_t оказывается жордановой дугой $\gamma(\tau)$, $\tau \geq 0$, с начальной точкой $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. В этом случае $\gamma(t)$ является разрезом полуплоскости $\mathbb{H}$, а $f(z,t)$ непрерывно продолжается на множество достижимых граничных точек на обеих сторонах разреза $\gamma(t)$:

$$\lambda(t) = f(\gamma(t),t), \qquad \gamma(t) = f^{-1}(\lambda(t),t).$$

Точки $\gamma(t)$ рассматриваются как носители простых концов, различных на разных сторонах дуги. Известны примеры управляющих функций в уравнении Левнера, которые генерируют отображения $\mathbb{H}\setminus K_t \to \mathbb{H}$ с круговыми двуугольниками K_t. Для классического уравнения Левнера подобный пример построен Куфаревым [5]. Его аналог (2) для верхней полуплоскости возникает при $\lambda(t) = 3\sqrt{2}\sqrt{1-t}$, детальное описание дано в [4, 6].

Линейным преобразованиям управляющей функции $\lambda(t)$ соответствуют определенные преобразования решений уравнения (2). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\lambda(0) = 0$. Геометрическое описание критических траекторий для интегралов уравнения (2) приводится в ряде статей [4, 6, 7], как в случае интегрирования уравнения в квадратурах, так и для управляющих функций из разных функциональных классов, например класса $\mathrm{Lip}(1/2)$.

В настоящей статье исследуется качественное асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения (2), генерируемых управлениями, обратными к степенной функции с натуральной степенью. Управляющая функция $\lambda(t) = \sqrt[N]{t}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, выбрана как типичный представитель класса $\mathrm{Lip}(1/N)$. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $f(z,t)$ является решением дифференциального уравнения:*

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \sqrt[N]{t}}, \qquad f(z,0) = z, \qquad \mathrm{Im}\, z \geq 0, \qquad N \in \mathbb{N}, \qquad N \geq 3. \tag{3}$$

Тогда для достаточно малых $t > 0$ $f(\cdot,t)$ отображает область $D(t) = \mathbb{H} \setminus \gamma(t)$ на $\mathbb{H}$, где $\gamma(t)$ является C^1-кривой, лежащей в $\mathbb{H}$, за исключением, быть может, точки $\gamma(0) = 0$.

В силу результатов статьи [8], что если $N \geq 3$, то разрез $\gamma(t)$ в теореме 1 не может находиться в угле Штольца с вершиной в точке $z = 0$. В [9] показано, что круговой разрез $\gamma(t)$, касающийся вещественной оси $\mathbb{R}$ в точке $z = 0$, генерируется управляющей функцией $\lambda(t) \in \mathrm{Lip}(1/3)$ дифференциального уравнения (2).

Во второй части статьи приводятся предварительные сведения об особых точках и соответствующих сингулярных решениях дифференциального уравнения и их представлении. В третьей части даются вспомогательные результаты, характеризующие поведение сингулярных решений. Четвертая часть содержит описание важных траекторий, порожденных уравнением Левнера, и доказательство основной теоремы 1. В пятой, заключительной, части доказана теорема 2 об асимптотическом поведении отношения гармонических мер двух сторон разреза, генерируемого управляющей функцией уравнения Левнера.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Сделаем замену переменных $t \to \tau^N$, $g(z,\tau) := f(z,\tau^N)$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{dg(z,\tau)}{d\tau} = \frac{2N\tau^{N-1}}{g(z,\tau)-\tau}, \qquad g(z,0)=z, \qquad \operatorname{Im} z \geq 0. \tag{4}$$

Если $z \neq 0$, то $g(z,0) \neq 0$ и существует регулярное решение $g(z,\tau)$ уравнения (4), голоморфное относительно τ при достаточно малых $|\tau|$, единственное для каждого $z \neq 0$. Сингулярные решения уравнения (4) не удовлетворяют условиям единственности. Каждая точка $(g(z_0,\tau_0),\tau_0)$ такая, что $g(z_0,\tau_0)=\tau_0$, является сингулярной точкой для уравнения (4). Если $\tau_0 \neq 0$, то точка $(g(z_0,\tau_0),\tau_0)$ называется алгебраической критической точкой решения $g(z,\tau)$. В этом случае соответствующие сингулярные решения уравнения (4) разложимы в ряды по степеням $(\tau-\tau_0)^{1/m}$, $m \in \mathbb{N}$, в окрестности точки $\tau=\tau_0$ (см. [10, с. 129]).

Точка $(g(z_0,\tau_0),\tau_0)=(0,0)$ является единственной сингулярной точкой неопределенного характера, для которой числитель и знаменатель в правой части уравнения (4) обращаются в нуль одновременно [10, с. 130].

Поведение всех решений уравнения (4) описывается теоремой Пуанкаре–Бендиксона [10, с. 138; 11; 12]. Две интегральные кривые дифференциального уравнения (4) пересекаются только в особой точке $(0,0)$. Интегральная кривая уравнения (4) может иметь кратные точки только в точке $(0,0)$. Бендиксон (I. Bendixson) [12] установил, что вещественные интегральные кривые имеют конечные точки в узлах и фокусах и имеют продолжение через седловые точки. Теорема Бендиксона [12] описывает все три возможных случая поведения траекторий для уравнения (4) в окрестности точки $(0,0)$: (a) интегральная кривая замкнута, то есть является циклом; (б) интегральная кривая представляет собой спираль, которая стремится к циклу асимптотически; (c) интегральная кривая имеет конечную точку $(0,0)$.

Напомним случаи интегрируемости в квадратурах дифференциального уравнения Левнера (2), приведенные в [6] и соответствующие управляющим функциям $\lambda(t)=c\sqrt{t}$ и $\lambda(t)=c\sqrt{1-t}$. В первом из них, после замены переменной $t \to \tau^2$, особая точка (0,0) становится седловой по классификации Пуанкаре [11], а во втором замена переменной $t \to 1-\tau^2$ приводит к фокусу в особой точке $(0,0)$.

Будем искать решения уравнения (4), которые бесконечно дифференцируемы относительно действительной переменной τ (см. [10, с. 129; 13, с. 13]). Рекуррентные оценки тейлоровских коэффициентов позволяют отыскать сингулярные решения при условии, что получившийся ряд будет иметь положительный радиус сходимости [14, с. 101]. Пусть

$$g_s(0,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n \tag{5}$$

представляет формальное степенное разложение для сингулярного решения уравнения (4). Такое разложение не единственно, оно зависит от пути, по которому z приближается к 0, $z \notin K_t$. Подставляя (5) в (4), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \tau^{n-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n - \tau \right) = 2N\tau^{N-1}. \tag{6}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях (6) и получаем систему уравнений

$$a_1(a_1-1)=0,$$
$$\sum_{k=1}^{l} k a_k a_{l-k+1} - l a_l = 0, \qquad l=2,\ldots, \qquad l\neq N-1, \tag{7}$$
$$\sum_{k=1}^{N-1} k a_k a_{N-k} - (N-1)a_{N-1} = 2N.$$

Первое уравнение системы (7) предполагает два возможных значения $a_1=1$ и $a_1=0$ для двух сингулярных решений $g^+(0,\tau)$ и $g^-(0,\tau)$. В обоих случаях уравнение (6) предполагает рекуррентные формулы для коэффициентов a_l^+ и a_l^- функций $g^+(0,\tau)$ и $g^-(0,\tau)$ соответственно:

$$a_1^+=1, \qquad a_2^+=\ldots=a_{N-2}^+=0, \qquad a_{N-1}^+=2N, \qquad a_l^+=-\sum_{k=2}^{l-1} k a_k^+ a_{l-k+1}^+, \qquad l\geq N, \tag{8}$$

$$a_1^-=\ldots=a_{N-2}^-=0, \qquad a_{N-1}^-=-\frac{2N}{N-1}, \qquad a_l^-=\frac{1}{l}\sum_{k=2}^{l-1} k a_k^- a_{l-k+1}^-, \qquad l\geq N. \tag{9}$$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+\tau^n$, формально представляющий $g^+(0,\tau)$, расходится для всех $\tau\neq 0$.

Лемма 1. *Если $s\neq(N-2)m+1$, $m=0,1,\ldots$, то $a_s^+=0$. Существуют $c_{1N}>0$ и $c_{2N}>0$ такие, что для всех $l=(N-2)m+1$, $m=0,1,\ldots$, выполняются неравенства*

$$c_{1N}^m m! \leq |a_l^+| \leq c_{2N}^{l-1} l^{l-3}. \tag{10}$$

Доказательство. Докажем, что $a_s^+=0$ для $s\neq(N-2)m+1$, $m=0,1,\ldots$. Из формулы (8) следует, что $a_s^+=0$ для начальных значений $s=2,\ldots,N-2$. Предположим, что $a_s^+=0$ для всех $s\neq(N-2)q+1$, $q=0,1,\ldots,m$, и докажем, что $a_s^+=0$ для $(N-2)m+2\leq s\leq(N-2)(m+1)$. Согласно (8)

$$a_s^+=-\sum_{k=2}^{s-1} k a_k^+ a_{s-k+1}^+. \tag{11}$$

Если $k=(N-2)q+1, q=0,1,\ldots,m$, то $s-k$ не может быть кратно $N-2$. Поэтому по предположению индукции $a_{s-k+1}^+=0$ в формуле (11) и $a_s^+=0$, что доказывает индуктивное утверждение.

Далее докажем, что $a_l^+=(-1)^{q+1}|a_l^+|$, где $l=(N-2)q+1$, $q=1,2,\ldots$. Из формулы (8) следует, что $a_{N-1}^+=2N>0$ для $q=1$. Предположим, что $a_l^+=(-1)^{q+1}|a_l^+|$ для всех $l=(N-2)q+1$, $q=1,\ldots,s-1$, и докажем, что $a_l^+=(-1)^{s+1}|a_l^+|$ для $l=(N-2)s+1$. Согласно (8) и предположению индукции получаем:

$$a_{(N-2)s+1}^+=-\sum_{p=1}^{s-1}((N-2)p+1)a_{(N-2)p+1}^+ a_{(N-2)(s-p)+1}^+=$$
$$=(-1)^{s+1}\sum_{p=1}^{s-1}((N-2)p+1)|a_{(N-2)p+1}^+||a_{(N-2)(s-p)+1}^+|=(-1)^{s+1}|a_{(N-2)s+1}^+|,$$

что доказывает индуктивное утверждение.

Перейдем к доказательству нижней оценки в неравенстве (10). Для $a_{N-1}^+=2N$ нижняя оценка (10) выполняется. Предположим, что эта оценка выполняется для a_l^+, где $l=(N-2)s+1$, $s=1,\ldots,m-1$, и докажем, что нижняя оценка (10) справедлива для $l=(N-2)m+1$. Действительно,

$$|a_{(N-2)m+1}^+|=\sum_{p=1}^{m-1}((N-2)p+1)|a_{(N-2)p+1}^+||a_{(N-2)(m-p)+1}^+|\geq$$

$$\geq \sum_{p=1}^{m-1}((N-2)p+1)c_{1N}^{p}p!c_{1N}^{m-p}(m-p)! \geq c_{1N}^{m}\sum_{p=1}^{m-1}(p+1)!(m-p)! \geq c_{1N}^{m}m!,$$

что индуктивно доказывает нижнюю оценку (10).

Теперь получим верхнюю оценку в неравенстве (10). Существует c_{2N} такое, что справедлива оценка $|a_n^+| \leq c_{2N}^{n-1}n^{n-3}$ для $n = 1, 2, 3$. Предположим, что утверждение верно для a_k^+, где $k = 1, \ldots, n-1$, $n \geq 4$, и докажем, что верхняя оценка (10) справедлива для $k = n$. Действительно,

$$|a_n^+| = \sum_{k=2}^{n-1}k|a_k^+||a_{n-k+1}^+| \leq c_{2N}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}k^{k-2}(n-k+1)^{n-k-2} =$$

$$= c_{2N}^{n-1}n^{n-4}((1-1/n)^{n-4} + \sum_{k=3}^{n-3}(k/n)^{k-2}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^{n-k-2} + (1-2/n)^{n-4} + \frac{(1-1/n)^{n-2}}{2}). \quad (12)$$

Для $n \geq 4$ справедливы неравенства

$$(1-1/n)^{n-4} \leq 1, \qquad (1-2/n)^{n-4} \leq 1, \qquad (1-1/n)^{n-3} \leq 3/4.$$

Кроме того, для $3 \leq k \leq n-3, n \geq 6$, очевидно, справедливы неравенства

$$(k/n)^{k-2}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^{n-k-2} < 1/2.$$

Подставляем эти неравенства в (12) и приходим к неравенству

$$|a_n^+| < c_{2N}^{n-1}n^{n-4}\left(1 + \sum_{k=3}^{n-3}\frac{1}{2} + 1 + \frac{3n}{8}\right) < c_{2N}^{n-1}n^{n-3},$$

которое доказывает верхнюю оценку (10) и завершает доказательство леммы 1. □

Лемма 2. *Если $s \neq (N-2)m+1$, $m = 1, 2, \ldots$, то $a_s^- = 0$. Для всех $l = (N-2)m+1$, $m = 1, 2, \ldots$, выполняются неравенства*

$$|a_l^-| \leq c_{2N}^{l-1}l^{l-3}. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем, что $a_s^- = 0$ для $s \neq l$. Из рекуррентной формулы (9) следует, что $a_s^- = 0$ для начальных значений $s = 1, 2, \ldots, N-2$. Предположим, что $a_s^- = 0$ для всех $s \neq (N-2)q+1$, $q = 1, \ldots, m$, и докажем, что $a_s^- = 0$ для $(N-2)m+2 \leq s \leq (N-2)(m+1)$. Согласно (9)

$$a_s^- = \frac{1}{s}\sum_{k=2}^{s-1}ka_k^-a_{s-k+1}^-. \quad (14)$$

Если $k = (N-2)q+1, q = 0, 1, \ldots, m$, то $s-k$ не может быть кратно $N-2$. Поэтому по предположению индукции $a_{s-k+1}^- = 0$ в формуле (14) и $a_s^- = 0$, что доказывает индуктивное предположение.

Доказательство того, что $a_l^- = (-1)^q|a_l^-|$, где $l = (N-2)q+1$, $q = 1, 2, \ldots$, проводится аналогично тому, как в лемме 1 было показано, что $a_l^+ = (-1)^{q+1}|a_l^+|$.

Доказательство неравенства (13) следует из леммы 1. Действительно, $a_1^- < a_1^+$, $|a_{N-1}^-| < |a_{N-1}^+|$. Из формул (8) и (9) индуктивно следует, что для всех $l = (N-2)m+1$ справедливы неравенства $|a_l^-| < |a_l^+|$, что вместе с утверждением леммы 1 доказывает лемму 2. □

Из нижней оценки (10) следует расходимость ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l^+\tau^l$ при $\tau \neq 0$. Следовательно, уравнение (4) не имеет голоморфного решения (5) в окрестности точки $\tau_0 = 0$ с условием $a_1^+ = 1$. Известный метод Бореля [14, с. 107; 15], позволяет суммировать расходящийся ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l^+\tau^l$. Согласно лемме 1 ряд

$$G(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^+}{n!}\tau^n$$

сходится при $|\tau| < R_0$, $R_0 > 0$. Сумма Бореля

$$h(\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-x} G(\tau x)\, dx$$

определяет бесконечно дифференцируемую функцию $h(\tau)$, $h^{(n)}(0) = a_n^+$, $n \geq 1$, которая является решением уравнения (4). Такой же подход можно применить и к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- \tau^n$.

В этих случаях решения $g^+(0,\tau)$, $g^-(0,\tau)$ уравнения (4) с начальной особой точкой $(0,0)$ удовлетворяют асимптотическим соотношениям:

$$g^+(0,\tau) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ \tau^k + 0(\tau^n), \qquad g^-(0,\tau) = \sum_{k=1}^{n} a_k^- \tau^k + 0(\tau^n), \qquad \tau \to 0,$$

для всех $n \geq 2$.

Пусть $f_1(0,t) := g^+(0, \sqrt[N]{t})$, $f_2(0,t) := g^-(0, \sqrt[N]{t})$. Так как $f_1(0,t) = \sqrt[N]{t} + 2N \sqrt[N]{t^{N-1}} + O(\sqrt[N]{t^{N-1}})$ и $f_2(0,t) = -\dfrac{2N}{N-1} \sqrt[N]{t^{N-1}} + O(\sqrt[N]{t^{N-1}})$ при $t \to 0$, то неравенства

$$f_2(0,t) < \sqrt[N]{t} < f_1(0,t)$$

выполняются для достаточно малых $t > 0$. Найдем представления для остальных сингулярных решений уравнения (3), которые появляются при $t > 0$. Пусть существуют $z_0 \in \mathbb{H}$ и $t_0 > 0$ такие, что $f(z_0,t_0) = \sqrt[N]{t_0}$. Тогда $(f(z_0,t_0), \sqrt[N]{t_0})$ является сингулярной точкой уравнения (3) и сингулярное решение $f(z_0,t)$ разлагается в ряд по степеням $(t-t_0)^{l/m}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$f(z_0,t) = \sqrt[N]{t_0} + \sum_{l=1}^{\infty} b_{l/m} (t-t_0)^{l/m}. \tag{15}$$

Подставляем (15) в (3) и получаем:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l b_{l/m} (t-t_0)^{l/m-1}}{m} \times$$
$$\times \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_{l/m} (t-t_0)^{l/m} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}(N-1)(2N-1)\dots((l-1)N-1)(t-t_0)^l}{N^l l! t_0^{l-1/N}} \right) = 2. \tag{16}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях уравнения (16), замечаем, что $b_{l/m} \neq 0$ только в случае $m = 2$, при этом

$$(b_{1/2})^2 = 4.$$

Это уравнение предлагает два возможных значения $b_{1/2} = 2$ и $b_{1/2} = -2$ для двух ветвей $f_1(z_0,t)$ и $f_2(z_0,t)$ сингулярного решения (15). Выберем, например, значение $b_{1/2} = 2$ и получим рекуррентную формулу для коэффициентов ветви $f_1(z_0,t)$,

$$b_{1/2} = 2, \qquad b_{l/2} = \frac{1}{l+1} \left(c_{n/2} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{l-1} k b_{k/2} (b_{(l-k+1)/2} - c_{(l-k+1)/2}) \right), \qquad l \geq 2, \tag{17}$$

где

$$c_{(2k-1)/2} = 0, \qquad c_k = \frac{(-1)^{k-1}(N-1)(2N-1)\dots((k-1)N-1)}{N^k k! t_0^{k-1/N}}, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{18}$$

Так как

$$f_1(z_0,t) = \sqrt[N]{t_0} + 2\sqrt{t-t_0} + O(\sqrt{t-t_0}),$$
$$f_2(z_0,t) = \sqrt[N]{t_0} - 2\sqrt{t-t_0} + O(\sqrt{t-t_0}),$$
$$\sqrt[N]{t} = \sqrt[N]{t_0} + \frac{1}{N t_0^{1-1/N}} (t-t_0) + O(t-t_0), \qquad t \to t_0 + 0,$$

то неравенства $f_2(z_0,t) < \sqrt[N]{t} < f_1(z_0,t)$ выполняются для всех $t > t_0$, близких к t_0.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из теории дифференциальных уравнений следует, что различные интегральные кривые уравнения (3) пересекаются только в сингулярной точке $(0,0)$ (см. [10, с. 138]).

Лемма 3. *При* $0 < t_0 < t$ *для достаточно малых* $t > 0$ *выполняются следующие неравенства:*

$$f_2(0,t) < f_2(z_0,t) < \sqrt[N]{t} < f_1(z_0,t) < f_1(0,t),$$

где $(f(z_0,t_0),\ \sqrt[N]{t_0})$ *— сингулярная точка уравнения* (3).

Доказательство. Достаточно доказать первое и последнее неравенства леммы 3. Покажем, что $f_1(z_0,t) < f_1(0,t)$. Вычитая одно из другого уравнения

$$\frac{df_1(0,t)}{dt} = \frac{2}{f_1(0,t) - \sqrt[N]{t}}, \qquad f_1(0,0) = 0,$$
$$\frac{df_1(z_0,t)}{dt} = \frac{2}{f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t}}, \qquad f_1(z_0,t_0) = \sqrt[N]{t_0},$$

получаем

$$\frac{d(f_1(0,t) - f_1(z_0,t))}{dt} = \frac{2(f_1(z_0,t) - f_1(0,t))}{(f_1(0,t) - \sqrt[N]{t})(f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t})}.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{d\log(f_1(0,t) - f_1(z_0,t))}{dt} = -\frac{2}{(f_1(0,t) - \sqrt[N]{t})(f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t})}.$$

Предположим, что существует наименьшее число $T > t_0$, для которого выполняется равенство $f_1(0,T) = f_1(z_0,T)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{t_0}^{T} \frac{dt}{(f_1(0,t) - \sqrt[N]{t})(f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t})} = \infty. \tag{19}$$

Вычисляя $a^{+}_{2N-3} = -(N-1)(2N)^2$, запишем асимптотическое разложение:

$$f_1(0,t) = \sqrt[N]{t} + 2N\sqrt[N]{t^{N-1}} - (N-1)(2N)^2\sqrt[N]{t^{2N-3}} + O(\sqrt[N]{t^{2N-3}}), \qquad t \to +0.$$

Существует $T' > 0$ такое, что для $0 < t < T'$ выполняется неравенство $\sqrt[N]{t} + 2N\sqrt[N]{t^{N-1}} > f_1(0,t)$. Для оценки интеграла в левой части равенства (19) необходимо изучить поведение функции $f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t}$ с использованием дифференциального уравнения:

$$\frac{d(f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t})}{dt} = \frac{2}{f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t}} - \frac{1}{N\sqrt[N]{t^{N-1}}} = \frac{2N\sqrt[N]{t^{N-1}} - f_1(z_0,t) + \sqrt[N]{t}}{N\sqrt[N]{t^{N-1}}(f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t})}. \tag{20}$$

Так как

$$f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t} = 2\sqrt[N]{t - t_0} + O(\sqrt[N]{t - t_0}),$$

то правая часть (20) положительна при $0 < t < T'$, $f_1(z_0,t) - \sqrt[N]{t}$ растет вместе с t, $t_0 < t < T < T'$, и интеграл в левой части (19) конечен. Полученное противоречие с равенством (19) отрицает существование T с заданными свойствами и доказывает последнее неравенство в лемме 3.

Доказательство того, что $f_2(0,t) < f_2(z_0,t)$, проводится аналогично. □

Лемма 4. *При* $0 < t_1 < t_0 < t$ *для достаточно малых* $t > 0$ *выполняются неравенства*

$$f_2(z_1,t) < f_2(z_0,t), \qquad f_1(z_0,t) < f_1(z_1,t),$$

где $(f(z_1,t_1),\ \sqrt[N]{t_1})$ *и* $(f(z_0,t_0),\ \sqrt[N]{t_0})$ *сингулярные точки уравнения* (3).

Доказательство. Доказательство леммы 4 аналогично проведенному в лемме 3 с заменой 0 на z_1.

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА

Решение $f(z,t)$ дифференциального уравнения Левнера (3) аналитично по $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$ для фиксированного $t \geq 0$, дифференцируемо по $t \in (0,t_0)$, $t_0 > 0$, и непрерывно на $[0,t_0]$ для фиксированного $z \in \mathbb{H}\setminus K_{t_0}$. Функция $f(\cdot,t)$ допускает продолжение на замыкание области $\mathbb{H}\setminus K_t$, которое непрерывно в определенном смысле и устанавливает взаимно однозначное соответствие между простыми концами области $\mathbb{H} \setminus K_t$ и точками $\mathbb{R}$. Если простой конец области $\mathbb{H} \setminus K_{t_0}$, соответствующий точке $\sqrt[N]{t_0}$, содержит точку $z_0(t_0)$, $t_0 > 0$, то $(f(z_0(t_0), \sqrt[N]{t_0})$ является сингулярной точкой для уравнения (3).

Зафиксируем $\tau > 0$ и рассмотрим функцию $\varphi_\tau(t) := f(z(\tau),t)$, $0 \leq t \leq \tau$, где $f(z(\tau),\tau) = \sqrt[N]{\tau}$, $f(z(\tau),t)$ определяется разложением (15) с $m = 2$, $\tau = t_0$, $z(\tau) := z_0$, а коэффициенты $b_{l/2}$ в (15) вычисляются по формулам (17), (18).

Предложение 1. *Функция $\varphi_\tau(t)$ аналитична на $(0,\tau)$, непрерывна на $[0,\tau]$, определяет кривую, ортогональную вещественной оси $\mathbb{R}$ и соединяющую точки $\sqrt[N]{\tau}$ и $z(\tau)$. Точка $z(\tau)$ определяется однозначно для всякого достаточно малого $\tau > 0$.*

Доказательство. Функция $f(\cdot,\tau) : \mathbb{H}\setminus K_\tau \to \mathbb{H}$ аналитична в области $\mathbb{H}\setminus K_\tau$ и взаимно однозначно сопоставляет простым концам границы этой области все вещественные точки. В частности, точке $\sqrt[N]{\tau}$ сопоставляется некоторый простой конец, произвольную точку которого обозначим через $z(\tau)$. Так как точка $(f(z(\tau),\tau), \sqrt[N]{\tau})$ является сингулярной точкой для уравнения (3), то справедливо представление (15) с $m = 2$, $b_{l/2} = 2$, из которого следует, что

$$f(z(\tau),t) = \sqrt[N]{\tau} + 2i\sqrt{|t-\tau|} + b_1(t-\tau) + O(t-\tau), \qquad t \to \tau - 0, \qquad b_1 \in \mathbb{R}.$$

Отсюда заключаем, что функция $f(z(\tau),t)$, $0 \leq t \leq \tau$ определяет кривую, ортогональную вещественной оси в точке $\sqrt[N]{\tau}$, и $f(z(\tau),t) \in \mathbb{H}$ для $0 \leq t < \tau$. Это означает, что $z(\tau) \notin K_t$ для всех $t \in [0,\tau)$. Поскольку $f(z(\tau),t) \neq \sqrt[N]{t}$ на $[0,\tau)$, то $\varphi_\tau(t)$ аналитична на $(0,\tau)$, непрерывна на $[0,\tau]$, $\varphi_\tau(\tau) = \sqrt[N]{\tau}$, $\varphi_\tau(0) = f(z(\tau),0) = z(\tau)$.

Осталось показать, что точка $z(\tau)$ определяется однозначно. Действительно, ряд по степеням $\sqrt{t-\tau}$ в представлении (15) с $m = 2$, $t_0 = \tau$, сходится в некотором круге радиуса $R_0 > 0$, и коэффициенты ряда не зависят от выбора точки $z_0 = z(\tau)$, содержащейся в простом конце, соответствующем точке $\sqrt[N]{\tau}$. Функция $\varphi_\tau(t)$ допускает аналитическое продолжение вдоль интервала $(0,\tau)$, которое определяется только начальным элементом (15) и не зависит от выбора $z(\tau)$. Следовательно, значение $\varphi_\tau(0) = z(\tau)$ определяется однозначно, что завершает доказательство предложения 1. $\square$

Доказательство теоремы 1. Для $\tau > 0$ функция $f(\cdot,\tau)$ конформно отображает область $\mathbb{H} \setminus K_\tau$ на $\mathbb{H}$. Множество $K_\tau \subset \mathbb{H}$ порождается управляющей функцией $\sqrt[N]{t}$. Продолженная функция $f(\cdot,\tau)$ взаимно однозначно отображает множество простых концов области $\mathbb{H} \setminus K_\tau$ на $\mathbb{R}$. Один из простых концов, содержащий точку $z(\tau)$, отображается функцией $f(z(\tau),\tau)$ на $\sqrt[N]{\tau}$.

Леммы 3 и 4 описывают структуру прообраза $\mathbb{H}$ при отображении $f(\cdot,\tau_0)$. Все сингулярные решения $f_1(0,t)$, $f_2(0,t)$, $f_1(z(\tau),t)$, $f_2(z(\tau),t)$, $0 < \tau < t < T$, уравнения (3) являются вещественными и удовлетворяют леммам 3 и 4. Сегмент $I = [f_2(0,t), f_1(0,t)] \subset \mathbb{R}$ объединяет сегменты $I_2 = [f_2(0,t), \sqrt[N]{t}]$ и $I_1 = [\sqrt[N]{t}, f_1(0,t)]$. Сегмент I_2 состоит из точек $f_2(z(\tau),t)$, $0 \leq \tau \leq t$, а сегмент I_1 состоит из точек $f_1(z(\tau),t)$, $0 \leq \tau \leq t$. Значит, все точки $z(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, принадлежат границе $\partial(\mathbb{H} \setminus K_t)$ области $\mathbb{H} \setminus K_t$. Согласно предложению 1 простой конец области $\mathbb{H} \setminus K_t$, содержащий $z(\tau)$, $0 < \tau < t$, состоит из единственной точки $z(\tau)$, которая должна быть достижимой граничной точкой. Причем $z(\tau)$ определяет ровно два простых конца, соответствующих функциям $f_1(z(\tau),t)$ и $f_2(z(\tau),t)$. Это доказывает, что $\{z(\tau) : 0 \leq \tau \leq t\}$ представляет множество точек простой кривой γ, которая и является множеством K_t с простыми концами, соответствующими точкам на разных сторонах кривой γ. Обратная функция $f^{-1}(w,t)$ отображает $\mathbb{H}$ на $\mathbb{H} \setminus \gamma(t)$ для достаточно малых $t > 0$.

Осталось показать, что $\gamma(t)$ является C^1-кривой. Фиксируем достаточно малое $t_0 > 0$ и обозначим через $g(w,t_0) = f^{-1}(w,t_0)$ функцию, обратную к функции $f(z,t_0)$. Положим $h(w,t) := f(g(w,t_0),t)$,

$t \geq t_0$. Функция $f(z,t_0)$ отображает $\mathbb{H}\setminus\gamma(t_0)$ на $\mathbb{H}$, $\gamma_{t_0}=\{\gamma(\tau),\ 0\leq\tau\leq t_0\}$, $f(\gamma(t_0),t_0)=\sqrt[N]{t_0}$. При этом отображении кривая $\gamma[t_0,t]:=\{\gamma(\tau),\ t_0\leq\tau\leq t\}$ переходит в кривую $\gamma^*[t_0,t]:=f(\gamma[t_0,t],t_0)$, $\gamma^*(t_0)=\sqrt[N]{t_0}$. Поэтому функция $h(w,t)$ отображает $\mathbb{H}\setminus\gamma^*[t_0,t]$ на $\mathbb{H}$. Запишем разложение $h(w,t)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$h(w,t)=g(w,t_0)+\frac{2t}{g(w,t_0)}+O\left(\frac{1}{g^2(w,t_0)}\right)=w+\frac{2(t-t_0)}{w}+O\left(\frac{1}{w^2}\right).$$

После замены переменных $t_1:=t-t_0$, $h_1(w,t_1):=h(w,t_0+t_1)$ функция h_1 имеет разложение (1) и удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dh_1(w,t_1)}{dt_1}=\frac{2}{h_1(w,t_1)-\sqrt[N]{t_1+t_0}},\qquad h_1(w,0)=w,\qquad w\in\mathbb{H}. \tag{21}$$

Управляющая функция $\lambda(t_1)=\sqrt[N]{t_1+t_0}$ в (21) является аналитической при $t_1\geq 0$. В классической версии уравнения Левнера для отображений круга в круг известно [3, с. 59], что гладкая управляющая функция генерирует отображения круга на круг с гладким разрезом. Этот результат без особого труда переносится на уравнение Левнера (2) и на его частный случай (21) (см. например [8] и приведенные там ссылки). Таким образом, кривая $\gamma^*[t_0,t]$, а вместе с ней и кривая $\gamma([t_0,t_1])=g(\gamma^*[t_0,t],t_0)$, являются C^1-кривыми. Устремляя t_0 к 0, убеждаемся, что $\gamma_t=\{\gamma(\tau):\ 0\leq\tau\leq t\}$ является C^1-кривой, за исключением, быть может, точки $\gamma(0)=0$, что завершает доказательство теоремы 1. $\square$

4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ МЕРЫ СТОРОН РАЗРЕЗА

Функция $f(z,t)$, являющаяся решением уравнения (3), отображает область $\mathbb{H}\setminus\gamma(t)$ на $\mathbb{H}$. Точки двух сторон разреза $\gamma(t)$ считаются различными граничными точками области. Обозначим через $\gamma_1=\gamma_1(t)$ ту сторону γ, которая отображается продолженной функцией $f(z,t)$ на сегмент $I_1=[\sqrt[N]{t},f_1(0,t)]$, а через $\gamma_2=\gamma_2(t)$ — сторону γ, которая является прообразом $I_2=[f_2(0,t),\sqrt[N]{t}]$ при отображении функцией $f(z,t)$.

Напомним, что гармонические меры $\omega(f^{-1}(i,t);\gamma_k,\mathbb{H}\setminus\gamma(t),t)$ дуг γ_k в точке $f^{-1}(i,t)$ относительно области $\mathbb{H}\setminus\gamma(t)$ определяются функциями ω_k, которые являются гармоническими в области $\mathbb{H}\setminus\gamma(t)$ и непрерывно продолжаются на ее замыкание, за исключением концевых точек кривой γ, $\omega_k|_{\gamma_k(t)}=1$, $\omega_k|_{\mathbb{R}\bigcup(\gamma(t)\setminus\gamma_k(t))}=0$, $k=1,2$ (см. [16, с. 132]). Обозначим:

$$m_k(t):=\omega(f^{-1}(i,t);\gamma_k,\mathbb{H}\setminus\gamma(t),t),\qquad k=1,2.$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(z,t)$ является решением уравнения Левнера* (3). *Тогда справедливо асимптотическое соотношение:*

$$\lim_{t\to+0}\frac{m_1(t)}{m_2^{N-1}(t)}=2N\pi^{N-2}. \tag{22}$$

Доказательство. Гармоническая мера инвариантна относительно конформных преобразований. Поэтому гармонические меры

$$\omega(f^{-1}(i,t);\gamma_k,\mathbb{H}\setminus\gamma(t),t)=\Omega(i;f(\gamma_k,t),\mathbb{H},t)$$

определяются функциями Ω_k, которые гармоничны на $\mathbb{H}$ и непрерывно продолжаются на $\mathbb{R}$, за исключением концевых точек образов $f(\gamma_k,t)$, $\Omega_k|_{f(\gamma_k,t)}=1$, $\Omega_k|_{\mathbb{R}\setminus f(\gamma_k,t)}=0$, $k=1,2$. Решение этой задачи известно (см. [17, с. 334]). Именно

$$m_k(t)=\frac{\alpha_k(t)}{\pi},$$

где $\alpha_k(t)$ — угол, под которым наблюдается сегмент $I_k=I_k(t)$ из точки $w=i$, $k=1,2$. Осталось найти асимптотические разложения для $\alpha_k(t)$.

Так как

$$f_1(0,t) = \sqrt[N]{t} + 2N\sqrt[N]{t^{N-1}} + O(t), \qquad f_2(0,t) = -\frac{2N}{N-1}\sqrt[N]{t^{N-1}} + O(t), \qquad t \to +0,$$

то после элементарных геометрических рассуждений находим, что

$$\alpha_1(t) = \operatorname{arctg} f_1(0,t) - \operatorname{arctg}\sqrt[N]{t} = 2N\sqrt[N]{t^{N-1}} + O(t), \qquad t \to +0,$$

$$\alpha_2(t) = \operatorname{arctg}\sqrt[N]{t} - \operatorname{arctg} f_2(0,t) = \sqrt[N]{t} + \frac{2N}{N-1}\sqrt[N]{t^{N-1}} + O(t), \qquad t \to +0.$$

Это означает, что

$$\frac{m_1(t)}{m_2^{N-1}(t)} = \frac{\pi^{N-2}(2N\sqrt[N]{t^{N-1}} + O(t))}{\left(\sqrt[N]{t} + \frac{2N}{N-1}\sqrt[N]{t^{N-1}} + O(t)\right)^{N-1}} = 2N\pi^{N-2}(1 + O(\sqrt[N]{t})), \qquad t \to +0,$$

что приводит к (22) и завершает доказательство теоремы 2. □

Замечание. Из результатов статьи [9] следует соотношение, аналогичное (22), для двух сторон разреза вдоль дуги окружности $\gamma(t)$ в $\mathbb{H}$, которая является касательной к вещественной оси в точке $z = 0$.

Библиографический список

1. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // I. Math. Ann. 1923. Vol. 89, № 1–2. P. 103–121.
2. *Markina I., Vasil'ev A.* Virasoro algebra and dynamics in the space of univalent functions // Contemp. Math. 2010. Vol. 525. P. 85–116.
3. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М. : Наука, 1976. 344 с.
4. *Lind J., Marshall D. E., Rohde S.* Collisions and spirals of Loewner traces // Duke Math. J. 2010. Vol. 154, № 3. P. 527—573. DOI:10.1215/00127094-2010-045.
5. *Куфарев П. П.* Одно замечание об интегралах уравнения Лёвнера // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 7. С. 655–656.
6. *Kager W., Nienhuis B., Kadanoff L. P.* Exact solutions for Loewner evolutions // J. Statist. Phys. 2004. Vol. 115, № 3–4. P. 805–822.
7. *Прохоров Д. В., Захаров А. М.* Интегрируемость частного вида уравнения Лёвнера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 19–23.
8. *Marshall D. E., Rohde S.* The Loewner differential equation and slit mappings // J. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 18, № 4. P. 763–778.
9. *Prokhorov D., Vasil'ev A.* Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation // Analysis and Mathematical Physics / eds. B. Gustafsson, A. Vasil'ev. Berlin : Birkhauser, 2009. P. 455—463.
10. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : в 2 т. М. : Иностр. лит., 1954. Т. 2. 414 с.
11. *Poincaré H.* Sur les courbes définies par une équation différentielle // J. Math. Pures Appl. 1886. Vol. 4, № 2. P. 151–217.
12. *Bendixson I.* Sur les courbes définies par les équations différentielles // Acta Math. 1901. Vol. 24. P. 1–88.
13. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л. : Гостехиздат, 1950. 398 с.
14. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : в 2 т. М. : Иностр. лит., 1953. Т. 1. 346 с.
15. *Borel E.* Mémoire sur les séries divergentes // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1899. Vol. 16, № 3. P. 9—131.
16. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М. : Мир, 1980. 304 с.
17. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М. : Наука, 1966. 628 с.

Integrals of the Loewner Equation with Exponential Driving Function

D. V. Prokhorov, K. A. Samsonova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, ProkhorovDV@info.sgu.ru, kris_ruzhik@mail.ru

We consider the qualitative local behavior of trajectories for the ordinary Loewner differential equation with a driving function which is inverse to the exponential function of an integer power. All the singular points and the corresponding singular solutions are described. It is shown that this driving function generates solutions to the Loewner equation which map conformally a half-plane slit along a smooth curve onto the upper half-plane. The asymptotical correspondence between harmonic measures of two slit sides is derived.

Key words: Loewner equation, harmonic measure, singular solutions, driving function, C^1-curve.

References

1. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *I. Math. Ann.*, 1923, vol. 89, no. 1–2, pp. 103–121.
2. Markina I., Vasil'ev A. Virasoro algebra and dynamics in the space of univalent functions. *Contemp. Math.*, 2010, vol. 525, pp. 85–116.
3. Aleksandrov I. A. *Parametric continuations in the theory of univalent functions*. Moscow, Nauka, 1976, 344 p. (in Russian).
4. Lind J., Marshall D. E., Rohde S. Collisions and spirals of Loewner traces. *Duke Math. J.*, 2010, vol. 154(3), pp. 527–573. DOI: 10.1215/00127094-2010-045.
5. Kufarev P. P. Odno zamechanie ob integralakh uravneniia Levnera. [A remark on integrals of Löwner's equation] *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1947, vol. 57, no. 7, pp. 655—656 (in Russian).
6. Kager W., Nienhuis B., Kadanoff L. P. Exact solutions for Loewner evolutions. *J. Statist. Phys.*, 2004, vol. 115, no. 3–4, pp. 805–822.
7. Prokhorov D. V., Zakharov A. M. Integrability of a partial case of the Löwner equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 19–23 (in Russian).
8. Marshall D. E., Rohde S. The Loewner differential equation and slit mappings. *J. Amer.Math. Soc.*, 2005, vol. 18, no. 4, pp. 763–778.
9. Prokhorov D., Vasil'ev A. Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation. *Analysis and Mathematical Physics*, eds. B. Gustafsson, A. Vasil'ev. Berlin, Birkhauser, 2009, pp. 455–463.
10. Sansone G. *Equazioni differenziale nel campo reale*. P. 2^a, 2^a ediz., Bologna, 1949.
11. Poincaré H. *Sur les courbes définies par une équation différentielle. J. Math. Pures Appl.*, 1886, vol. 4, no. 2, pp. 151–217.
12. Bendixson I. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Acta Math.*, 1901, vol. 24, pp. 1–88.
13. Golubew W. *Differentialgleichungen im komplexen, veb deutsch*. Berlin, Verlag Wiss., 1958, 398 p.
14. Sansone G. *Equazioni differenziale nel campo reale.* P. 1^a, 2^a ediz., Bologna, 1948.
15. Borel E. Mémoire sur les séries divergentes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1899, vol. 16, no. 3, pp. 9–131.
16. Hayman W., Kennedy P. *Subharmonic functions*. London, Academic Press, 1976.
17. Goluzin G. *Geometric theory of functions of a complex variable*. Transl. Math. Monographs, vol. 26, Providence, RI, AMS, 1969. 676 p.

УДК 512.577

О НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ФОРМАЦИЙ УНАРОВ

А. Л. Расстригин

Старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и математического анализа, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, rasal@fizmat.vspu.ru

Формацией называют класс алгебраических систем, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В работе показано, что любая формация, состоящая из не более чем счетных унаров, является наследственной.

Ключевые слова: унар, формация, наследственная формация.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Формацией называется класс алгебраических систем, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формацию называют *конечной*, если она содержит лишь конечные системы. Мы будем называть формацию *не более чем счетной*, если она содержит лишь не более чем счетные системы.

Пусть $\mathfrak{X}$ — совокупность алгебраических систем. Через $\mathrm{H}(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X})$ обозначаются совокупности всех гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений $\mathfrak{X}$-систем соответственно. Через $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех подсистем $\mathfrak{X}$-систем. Класс $\mathfrak{X}$ называется *наследственным*, если $\mathrm{S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$. Через $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ ($\mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$) обозначается наименьшая (наименьшая наследственная) формация, содержащая $\mathfrak{X}$ или, иначе, *порожденная* совокупностью $\mathfrak{X}$. Через $\mathrm{Si}\,\mathfrak{X}$ обозначается совокупность всех подпрямо неразложимых $\mathfrak{X}$-систем. Множество целых неотрицательных чисел обозначается $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ и $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Унаром называется унарная алгебра с одной операцией f. Через $C_m^n = \langle a \mid f^n(a) = f^{n+m}(a)\rangle$ обозначается унар с образующим a и определяющим соотношением $f^n(a) = f^{n+m}(a)$, где $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m > 0$. Унар C_m^0 называют *циклом* длины m. Через C_m^∞ обозначается объединение возрастающей цепи $C_m^1 \subset C_m^2 \subset \ldots$ унаров C_m^t для всех $t \in \mathbb{N}$. Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^{n+m}(a) = f^n(a)$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m > 0$. *Глубиной* $t(a)$ периодического элемента a называется наименьшее $n \in \mathbb{N}_0$, для которого элемент $f^n(a)$ принадлежит циклу. *Периодом* $p(a)$ периодического элемента a называется наименьшее $m \in \mathbb{N}$, для которого $f^{t(a)+m}(a) = f^{t(a)}(a)$. Унар называется *периодическим* (*циклическим*), если все его элементы периодические (принадлежат циклам). *Глубиной* $t(A)$ (*периодом* $p(A)$) периодического унара A, для которого $\{t(a) \mid a \in A\}$ ($\{p(a) \mid a \in A\}$) ограничено, называется $\max\{t(a) \mid a \in A\}$ (НОК$\{p(a) \mid a \in A\}$).

Если A, B — унары, причем $A \cap B = \varnothing$, тогда унар $A \cup B$ обозначается $A + B$ и называется *прямой суммой* унаров A и B. Унар, не являющийся прямой суммой двух своих подунаров, называется *связным*. Для любого подмножества B унара A обозначим $\langle B\rangle$ подунар унара A, порожденный B. Если B — подунар унара A, то через ρ_B обозначим *конгруэнцию Риса* для подунара B, т. е. конгруэнцию на A: $(x, y) \in \rho_B \Leftrightarrow x, y \in B$ или $x = y$. Наибольшая и наименьшая конгруэнции унара A обозначаются ∇_A, и Δ_A соответственно. Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар, а через Z_f — унар, изоморфный унару $\langle \mathbb{Z}, f\rangle$, где $f(n) = n + 1$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Запись $A \leqslant_s \prod_{i\in I} A_i$ означает, что алгебраическая система A разложима в подпрямое произведение систем A_i ($i \in I$).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс алгебр. В [1, леммы 3.2, 3.5] приведены следующие формулы.

Лемма 1 [1]. $\operatorname{form}\mathfrak{X} = \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X})$*;* $\operatorname{sform}\mathfrak{X} = \mathrm{HR}_0\mathrm{S}(\mathfrak{X})$.

В работе [2] автора показано, что любая конечная формация $\mathfrak{F}$ унаров определяется множеством $\mathrm{Si}\,\mathfrak{F}$, которое образует наследственный класс. По лемме 1 из этого следует, что любая конечная формация унаров наследственна [2, следствие 2]. Целью последующего изложения является доказательство наследственности не более чем счетных формаций унаров.

Нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация унаров. Тогда $A + B \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow A,\ B,\ C_1^0 + C_1^0 \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Импликация «$\Rightarrow$» была доказана в [2, лемма 4].

Пусть A, B и $C_1^0 + C_1^0 \in \mathfrak{F}$. Тогда унары $A + C_1^0$, $B + C_1^0$ принадлежат $\mathfrak{F}$, так как они являются гомоморфными образами $A \times (C_1^0 + C_1^0) = A \times C_1^0 + A \times C_1^0$ и $B \times (C_1^0 + C_1^0)$ соответственно. Отсюда следует, что унар $(A + C_1^0) \times (B + C_1^0) = A \times B + A \times C_1^0 + C_1^0 \times B + C_1^0 \times C_1^0$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Положим $D = A \times C_1^0 + C_1^0 \times B$. Покажем, что D является подпрямым произведением унаров $A + C_1^0$ и $B + C_1^0$. Пусть, для определенности, $D \subseteq (A + \langle a\rangle) \times (B + \langle b\rangle)$ и $D = A \times \langle b\rangle + \langle a\rangle \times B$, где $\langle a\rangle \cong \langle b\rangle = C_1^0$. Тогда для произвольного $x \in A + \langle a\rangle$, если $x \in A$, то $\pi_1(x, b) = x$, а если $x = a$, то $\pi_1(a, y) = x$ для любого $y \in B$, где π_1 — проекция произведения $(A + \langle a\rangle) \times (B + \langle b\rangle)$ на $A + \langle a\rangle$. Таким образом, $\pi_1(D) = A + \langle a\rangle$. Аналогично $\pi_2(D) = B + \langle b\rangle$ для π_2 — проекции произведения $(A + \langle a\rangle) \times (B + \langle b\rangle)$ на $B + \langle b\rangle$. Таким образом, $D \in \mathfrak{F}$, но $D \cong A + B$. Поэтому $A + B \in \mathfrak{F}$, что и требовалось показать. □

3. О НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ФОРМАЦИЙ УНАРОВ

Покажем, что если некоторая формация содержит непериодический унар, то она содержит все счетные унары.

Лемма 3. $F_1 \times F_1$ *— свободный унар счетного ранга в многообразии всех унаров.*

Доказательство. Пусть $A \cong B \cong F_1$, где $A = \langle a_0\rangle$, $B = \langle b_0\rangle$, и $f(a_i) = a_{i+1}$, $f(b_i) = b_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$. Определим на $A \times B$ следующие отображения:

1) $h : A \times B \to \mathbb{N}_0$, по правилу $h(x) = \min\{i, j\}$,

2) $d : A \times B \to \mathbb{Z}$, по правилу $d(x) = j - i$,

для любого $x \in A \times B$, где $x = (a_i, b_j)$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$. Отметим, что $x = y$ тогда и только тогда, когда $h(x) = h(y)$ и $d(x) = d(y)$ для любых $x, y \in A \times B$.

Ядро $\operatorname{Ker} d$ отображения d разбивает носитель $A \times B$ на классы. Эти классы являются подунарами унара $A \times B$. Каждый такой класс как подунар порожден элементом вида (a_i, b_j), где $i = 0$ или $j = 0$, и изоморфен F_1. В самом деле, $d(a_i, b_j) = j - i = j + 1 - (i + 1) = d(a_{i+1}, b_{j+1}) = d(f(a_i, b_j))$. Для любого $x \in A \times B$, $x = (a_i, b_j) = f^{h(x)}(a_{i-h(x)}, b_{j-h(x)})$, где $i - h(x) = 0$ или $j - h(x) = 0$. Отображение $y \mapsto a_{h(y)}$, $y \in [x]_{\operatorname{Ker} d}$, задает изоморфизм содержащего x класса на $A \cong F_1$. Таким образом, $F_1 \times F_1$ есть прямая сумма счетного числа унаров F_1 — свободный унар счетного ранга. □

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация унаров. Следующие условия эквивалентны:*

1) $Z_f \in \mathfrak{F}$; 2) $F_1 \in \mathfrak{F}$; 3) $\mathfrak{F}$ содержит все счетные унары.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $A \cong B \cong F_1$, где $A = \langle a_0 \rangle$, $B = \langle b_0 \rangle$, и $f(a_i) = a_{i+1}$, $f(b_i) = b_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$. Покажем, что унар $A \times B$ разложим в подпрямое произведение унаров Z_f. Определим на $A \times B$ следующие конгруэнции, пользуясь определенными в доказательстве леммы 3 отображениями d, h:

1) θ_+ по правилу: $x\theta_+ y \Leftrightarrow h(y) - h(x) = d(x) - d(y)$;

2) θ_- по правилу: $x\theta_- y \Leftrightarrow h(y) - h(x) = d(y) - d(x)$.

Покажем, что $\theta_+ \cap \theta_- = \Delta$. Возьмем $(x, y) \in \theta_+ \cap \theta_-$, но тогда $d(x) = d(y)$, $h(x) = h(y)$ откуда $x = y$. Рассмотрим теперь $A \times B/\theta_+$ и $L \cong Z_f$. Занумеруем элементы $L = \langle \{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}, f \rangle$, где $f(x_i) = x_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Зададим отображение $\varphi : L \to A \times B/\theta_+$, $\varphi(x_n) = [y]_{\theta_+}$, где $d(y) = n, h(y) = 0$. Такое соответствие является изоморфизмом унара L на $A \times B/\theta_+$. Аналогично $A \times B/\theta_- \cong L$. Таким образом, $F_1 \times F_1 \leqslant_s L \times L$. Следовательно, $F_1 \in \operatorname{form} L$.

Далее, импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 3, а (3) $\Rightarrow$ (1) тривиальна. □

Для произвольного унара A определим конгруэнцию $\psi_\|$: $(x, y) \in \psi_\|$, если

$$\begin{cases} x, y \text{ — периодические элементы и } t(x) = t(y), \\ x, y \text{ — непериодические элементы и } f^n(x) = f^n(y) \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Лемма 5. *Если унар A непериодический, то $F_1 \in \operatorname{form} A$.*

Доказательство. Действительно, найдется непериодический элемент $a \in A$. По лемме 2, наибольший связный подунар A' унара A, содержащий a, принадлежит формации $\operatorname{form} A$. Унар $A'/\psi_\|$ изоморфен либо F_1, либо Z_f. Лемма 4 завершает доказательство. □

Для фиксированного $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ через $\mathscr{N}_\omega^n$ обозначим унар, изоморфный фактор унару прямой суммы счетного числа C_1^n по ρ_D для подунара D данной прямой суммы, содержащего все ее подунары C_1^0.

Лемма 6. *Унар $\mathscr{N}_\omega^n$ является свободным унаром счетного ранга в многообразии унаров, определяемом тождеством $f^n(x) = f^n(y)$ ($n \in \mathbb{N}$).*

Доказательство. Обозначим указанное в утверждении многообразие через V. Пусть S — множество всех элементов глубины n унара $\mathscr{N}_\omega^n$. Очевидно S счетно и $\langle S \rangle = \mathscr{N}_\omega^n \in V$. Достаточно проверить (см. например [3, п. 12.2, теорема 1]), что из истинности равенства вида $f^l(x) = f^m(y)$ для некоторых $l, m \in \mathbb{N}_0$ и различных $x, y \in S$ следует, что в многообразии V выполнено тождество $(\forall\, xy)\ f^l(x) = f^m(y)$.

На произвольных различных элементах $x, y \in S$ выполняются только равенства вида $f^{n'}(x) = f^{m'}(y)$, где $n', m' \geqslant n$, и $f^{n'+m'}(x) = f^{n'}(x)$, где $n' \geqslant n$ (см. [4, лемма 1]). Все тождества такого вида являются следствиями тождества $f^n(x) = f^n(y)$ и поэтому верны в V. □

Лемма 7. *Пусть A — связный унар, $C_1^0 \subseteq A$ и $|A| \leqslant \aleph_0$. Тогда $A \in \operatorname{form} C_1^\infty$.*

Доказательство. Покажем, что $\{C_1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \operatorname{form} C_1^\infty$. Обозначим через A_h фактор унар прямой суммы $B_1 + B_2$ унаров $B_1 = C_1^\infty$ и $B_2 = C_1^h$ по конгруэнции $\theta = \rho_D$, где D — подунар унара $B_1 + B_2$, изоморфный $C_1^0 + C_1^0$. Пусть $B_i\theta = \{[x]_\theta \in A_h \mid x \in B_i\}$ ($i = 1, 2$). Унар $A_h/\rho_{B_1\theta}$

изоморфен C_1^h для любого $h \in \mathbb{N}$. В свою очередь, $A_h \in \operatorname{form} C_1^\infty$ для любого $h \in \mathbb{N}$, так как $A_h \leqslant_s C_1^\infty \times C_1^\infty$. Действительно, $A_h/\psi_\| = C_1^\infty$, $A_h/\rho_{B_2\theta} = C_1^\infty$ и $\rho_{B_2\theta} \cap \psi_\| = \Delta_{A_h}$. Таким образом, $C_1^h \in \mathrm{HR}_0(C_1^\infty) = \operatorname{form} C_1^\infty$ для любого $h \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\mathscr{N}_\omega^\infty \in \operatorname{form} C_1^\infty$. Пусть $A_1 \cong B_1 = C_1^\infty$. Будем обозначать $A_1 = \langle \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}, f\rangle$, где $f(a_n) = a_{n-1}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $f(a_0) = a_0$; аналогично $B_1 = \langle \{b_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}, f\rangle$. Тогда унар $A_1 \times B_1$ является связным унаром, содержащим цикл $\langle (a_0, b_0)\rangle = C_1^0$. Множество $X = \{(a_i, b_0), (a_0, b_i), (a_i, b_i) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ элементов унара $A_1 \times B_1$ очевидно образует подунар унара $A_1 \times B_1$. Положим $\theta = \rho_X$.

Определим на $(A_1 \times B_1)/\theta$ отображение $d : (A_1 \times B_1)/\theta \to \mathbb{Z}$ по правилу

$$d(x) = \begin{cases} i - j, & \text{если } (a_i, b_j) \notin X \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \in X \end{cases}$$

для любого $x = [(a_i, b_j)]_\theta \in (A_1 \times B_1)/\theta$.

Унар $(A_1 \times B_1)/\theta$ связен и содержит подунар $X\theta = \{[x]_\theta \in A_1 \times B_1/\theta \mid x \in X\} \cong C_1^0$. Заметим, что $d(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle x\rangle \cong C_1^0$ в $(A_1 \times B_1)/\theta$. Ядро $\operatorname{Ker} d$ разбивает $(A_1 \times B_1)/\theta$ на классы. Каждый такой класс C по $\operatorname{Ker} d$ в объединении с $X\theta$ образует подунар C_1^∞ унара $(A_1 \times B_1)/\theta$. Таким образом, унар $(A_1 \times B_1)/\theta$ связен, содержит унар C_1^0 в качестве подунара и бесконечное число различных подунаров C_1^∞, а пересечение любой пары таких подунаров есть C_1^0. Заключаем, что $(A_1 \times B_1)/\theta \cong \mathscr{N}_\omega^\infty$.

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения леммы. В случае, если унар A конечен, то получаем $A \in \operatorname{form}\{C_1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \operatorname{form} C_1^\infty$.

Пусть A бесконечен. Возьмем $B = \mathscr{N}_\omega^\infty$, $B \in \operatorname{form} C_1^\infty$.

Носитель A и множество попарно различных подалгебр вида C_1^∞ в B равномощны, т. е. между ними существует биекция. Обозначим ее через φ_0. Зададим отображение $\varphi : a \mapsto b$ из A в B такое, что $b \in \varphi_0(a)$ и $t(a) = t(b)$. Отображение φ инъективно. Продолжим φ^{-1} до гомоморфизма $\psi : \langle \operatorname{Im} \varphi\rangle \to A$ следующим образом: для произвольного $x \in \langle \operatorname{Im}\varphi\rangle$ имеет место $x = f^n(x_0)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}_0$ и $x_0 \in \operatorname{Im}\varphi$, положим по определению $\psi(x) = f^n(\varphi^{-1}(x_0))$. Отображение ψ сюрьективно, так как для любого $a \in A$ получаем равенство $\psi(\varphi(a)) = a$ из определения. То, что ψ является гомоморфизмом ясно из способа задания, поэтому ψ — эпиморфизм $\langle \operatorname{Im}\varphi\rangle$ на A. Наконец, $\langle \operatorname{Im}\varphi\rangle \in \operatorname{form} C_1^\infty$ так как формация $\operatorname{form} C_1^\infty$ наследственна в силу леммы 1 и установленного ранее включения $\{C_1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \operatorname{form} C_1^\infty$. Таким образом $A \in \operatorname{form} C_1^\infty$. □

Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ унаров обозначим через $\mathscr{C}\mathfrak{F}$ множество всевозможных сумм циклов из $\mathfrak{F}$ и $\mathscr{N}_\omega\mathfrak{F} = \{A \in \mathfrak{F} \mid A = \mathscr{N}_\omega^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация периодических унаров. Тогда класс $\mathfrak{X} = \operatorname{Si}\mathfrak{F} \cup \mathscr{C}\mathfrak{F} \cup \mathscr{N}_\omega\mathfrak{F}$ порождает $\mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{F} = \operatorname{form}\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, понятно, что $\operatorname{form}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Необходимо показать обратное включение.

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим разложение A в подпрямое произведение:

$$A \leqslant_s \prod_{i\in I} A_i, \text{ где } A_i \in \operatorname{Si}\mathfrak{F}\ (i \in I). \tag{1}$$

Если множество I индексов конечно, то $A \in \operatorname{form}(\operatorname{Si}\mathfrak{F}) \subseteq \operatorname{form}\mathfrak{X}$. Пусть I бесконечно для любого разложения вида (1).

Подпрямо неразложимыми унарами (согласно [5]) являются унары C_1^h $(h \geqslant 1)$, C_1^∞, $C_{p^k}^0$ (p — простое, $k \in \mathbb{N}_0$) и $C_{p^k}^0 + C_1^0$ и только они. Поэтому для каждого разложения вида (1) будем рассматривать разбиение множества I на непересекающиеся подмножества I_1 и I_2, $I = I_1 \cup I_2$ так, что

$$A_i = \begin{cases} C_1^n, \text{ где } n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, & \text{если } i \in I_1, \\ C_{p^k}^0 + C_1^0 \text{ или } C_{p^k}^0, \text{ где } k, p \in \mathbb{N}_0, p \text{ — простое}, & \text{если } i \in I_2. \end{cases}$$

Тогда $A \leqslant_s D_1 \times D_2$, где $D_j \leqslant_s \prod_{i \in I_j} A_i$, $j = 1, 2$. Покажем, что $D_1, D_2 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Пусть для некоторого разложения вида (1) множество $\{t(a) \mid a \in A_i,\ i \in I_1,\}$ не ограничено. Так как унар D_1 является гомоморфным образом унара A, то $D_1 \in \mathfrak{F}$ и является периодическим унаром. Тогда D_1 связный периодический унар, содержащий элементы сколь угодно большой глубины. В D_1 есть лишь один циклический элемент — все проекции которого являются подунарами вида C_1^0 унаров A_i $(i \in I_1)$. В D_1 есть элементы любой глубины, так как таковые есть в унарах A_i $(i \in I_1)$ (см. [4, лемма 2]). Тогда $D_1/\psi_{\|} = C_1^{\infty}$, т. е. $C_1^{\infty} \in \operatorname{Si} \mathfrak{F}$. По лемме 7, $D_1 \in \operatorname{form}(\operatorname{Si} \mathfrak{F}) \subseteq \operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Пусть теперь унары A_i конечны для всех $i \in I_1$ и множество $\{t(A_i) \mid i \in I_1\}$ ограничено для всех разложений (1). Выберем разложение вида (1) такое, что

$$m = \max(\{t \in \mathbb{N} \mid r_t = \aleph_0\} \cup \{0\}) \text{ — минимальное из возможных,} \qquad (2)$$

где $r_t = |\{i \in I_1 \mid t(A_i) = t\}|$ для любого $t \in \mathbb{N}$. Если $m = 0$, то подпрямое произведение D_1 конечно и поэтому $D_1 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$. Пусть $m > 0$. Разложим D_1 в подпрямое произведение унара $D_1' \leqslant_s \prod_{i' \in I_1' \subseteq I_1} A_{i'}$, где $t(A_{i'}) \leqslant m$ $(i' \in I_1')$, и какого-то конечного подпрямого произведения унаров A_i $(i \in I_1)$, у которых $t(A_i) > m$. Разобьем множество $M = \{a \in D_1' \mid t(a) = m\}$ элементов D_1' глубины m на классы: $a \equiv b \Leftrightarrow \langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq C_1^0$. Пусть в M' входит ровно по одному представителю из каждого класса. Покажем, что если $M/\equiv$ бесконечно, то $\mathscr{N}_\omega^m \subseteq D_1'$ и $\mathscr{N}_\omega^m \in \mathfrak{F}$.

Определим конгруэнцию, которая понадобится в дальнейшем. Пусть A — произвольный связный унар, такой, что $\langle a_0 \rangle = C_1^0$ для некоторого $a_0 \in A$ и $\{t(a) \mid a \in A\}$ ограничено. Для некоторого множества B элементов глубины $t(A)$ унара A такого, что для любых двух различных $a, b \in B$ верно $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = C_1^0$, зададим эквивалентность ψ_B на A через описание классов эквивалентности: для любого $a \in B$ и $n < t(A)$ положим

$$[f^n(a)]_{\psi_B} = \{x \in A \mid t(x) = t(A) - n \text{ и } \langle x \rangle \cap \langle a \rangle \neq C_1^0\},$$
$$[a_0]_{\psi_B} = \{x \in A \mid \langle x \rangle \cap \langle a \rangle = C_1^0 \text{ для всех } a \in B\}.$$

Вернемся к доказательству. Очевидно, что $D'/\psi_{M'}$ порожден множеством $\{[a]_{\psi_{M'}} \mid a \in M'\}$ элементов глубины m, мощность которого совпадает с мощностью M', т. е. счетна. Для любых двух различных $a, b \in M'$ имеем $[a]_{\psi_{M'}} \cap [b]_{\psi_{M'}} = C_1^0$. Таким образом, $D'/\psi_{M'} \cong \mathscr{N}_\omega^m$.

Отсюда $\mathscr{N}_\omega^m \in \mathfrak{X}$. По лемме 6, $D_1' \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$ как гомоморфный образ $\mathscr{N}_\omega^m$, а за ним и $D_1 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$ как конечное подпрямое произведение D_1' и какого-то конечного числа унаров A_i $(i \in I_1)$. Если же $M/\equiv$ конечно, то с помощью конгруэнций $\rho_{\langle M' \rangle}$, $\psi_{\{a\}} \neq \Delta$ (по всем $a \in M'$) можно разложить D_1' в подпрямое произведение конечного числа унаров C_1^m и C_1^k, $k < m$, что противоречит минимальности m по условию (2). Действительно, пусть $(x, y) \in \rho_{\langle M' \rangle} \cap (\bigcap_{a \in M'} \psi_{\{a\}})$, тогда $x \in \langle a \rangle$, $y \in \langle b \rangle$ для некоторых $a, b \in M'$. Если $a = b$, то из $(x, y) \in \psi_{\{a\}}$ следует $t(x) = t(y)$, откуда $x = y$. Если же $a \neq b$, то $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = C_1^0$ и, так как $(x, y) \in \psi_{\{a\}} \cap \psi_{\{b\}}$, имеем $x, y \in C_1^0$, откуда также $x = y$. Таким образом, $\rho_{\langle M' \rangle} \cap (\bigcap_{a \in M'} \psi_{\{a\}}) = \Delta$. Далее, унар $D_1'/\psi_{\{a\}}$ порождается элементом $[a]_{\psi_{\{a\}}}$ и изоморфен C_1^m для всех $a \in M'$. Унар $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$ не имеет элементов глубины m, т. е. $t(D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}) < m$. В самом деле, для любого $a \in D_1'$ такого, что $t(a) = m$, для некоторого $b \in M'$ выполнено $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq C_1^0$. Из этого следует, что для некоторого $n < m$ элемент $f^n(a)$ принадлежит $\langle b \rangle$. Следовательно, элемент $[f^n(a)]_{\rho_{\langle M' \rangle}}$ принадлежит подунару C_1^0 унара $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$, т. е. $t([a]_{\rho_{\langle M' \rangle}}) < m$. Поэтому глубина любого гомоморфного образа унара $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$ строго меньше m, т. е. $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$ раскладывается в подпрямое произведение C_1^k, $k < m$.

Унар D_2 является суммой циклов и принадлежит $\mathfrak{X}$, а значит, $D_2 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Доказательство завершается, так как $D_1, D_2 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$, т. е. $A \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$. □

Теперь сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Любая не более чем счетная формация унаров наследственна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация унаров. Если $\mathfrak{F}$ содержит только периодические унары, то по предложению 1 формация $\mathfrak{F}$ порождается таким множеством $\mathfrak{X}$ унаров, что $\mathrm{S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Откуда $\mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$. По лемме 1 получаем, что $\mathfrak{F}$ — наследственная формация.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ содержит непериодические унары. По лемме 5 имеем $F_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией всех счетных унаров по лемме 4 и поэтому $\mathfrak{F}$ наследственная. Теорема 1 доказана. $\square$

Библиографический список

1. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М. : Наука, 1989. 256 с.

2. *Расстригин А. Л.* Формации конечных унаров // Чебышевский сб. 2011. Т. XII, № 2 (38). С. 102–109.

3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.

4. *Карташов В. К.* Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 1. С. 7–20.

5. *Wenzel G. H.* Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Archiv der Mathematik. 1970. Vol. 21. P. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912.

On Heredity of Formations of Monounary Algebras

A. L. Rasstrigin

Volgograd State Socio-Pedagogical University, Russia, 400066, Volgograd, Lenin Ave., 27, rasal@fizmat.vspu.ru

A class of algebraic systems is said to be a formation if it is closed under homomorphic images and finite subdirect products. It has been proven that any formation of at most countable monounary algebras is a hereditary formation.

Key words: unar, formation, hereditary formation.

References

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of algebraic systems]. Moscow, Nauka, 1989, 256 p. (in Russian).

2. Rasstrigin A. L. Formations of finite monounary algebras. *Chebyshevskii Sbornik*, 2011, Vol. XII, no. 2 (38), pp. 102–109 (in Russian).

3. Mal'tsev A. I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow, Nauka, 1970 (in Russian).

4. Kartashov V. K. Quasivarieties of unars. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, pp. 5–12. DOI: 10.1007/BF01149807.

5. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$. *Archiv der Mathematik*, 1970, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912.

УДК 511.325

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

З. Х. Рахмонов

Доктор физико-математических наук, директор, Институт математики Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, zarullo-r@rambler.ru

Получена новая оценка суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю q на последовательности сдвинутых простых чисел $p-l$, $(l,q)=1$, $p \le x$, нетривиальная при $x \ge q^{5/6+\varepsilon}$. Это уточняет оценку Дж. Б. Фридландера, К. Гонга, И. Е. Шпарлинского, нетривиальную лишь при $x \ge q^{8/9+\varepsilon}$.

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В $[1, 2]$ он доказал: *если q — простое, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi) = \sum_{p \le x} \chi(p-l) \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}} + x^{-1/6}\right). \tag{1}$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p \le x$.

Затем И. М. Виноградов [3–5] получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \ge q^{0,75+\varepsilon}$, q — простое. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле; тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x \ \ge \ q^{1+\varepsilon}$.

В 1968 г. А. А. Карацуба [6, 7] нашёл метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В работе [8] он с помощью развития этого метода в соединении с методом И. М. Виноградова доказал: *если q — простое, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, $x \ge q^{1/2+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

Автор ранее [9–11] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q — примитивный характер, порождённый характером χ, тогда*

$$T(\chi) \le x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-1/6}\tau(q_1)\right), \qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\nmid q}} p. \tag{2}$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (2) принимает вид

$$T(\chi_q) \le x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-1/6}\right),$$

и она нетривиальна при $x > q(\ln q)^{13}$.

В 2010 г. Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский [12] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Они доказали: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \ge q^{8/9+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T(\chi_q) \ll xq^{-\delta},$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема о нетривиальной оценке для более коротких сумм $T(\chi_q)$ при составном q.

Теорема. *Пусть q — достаточно большое натуральное число, χ_q — примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $\mathscr{L}=\ln q$, $x \ge q^{5/6+\varepsilon}$. Тогда имеем:*

$$T(\chi_q)=\sum_{p\le x}\chi_q(p-l) \ll x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы проводится методом оценок суммы с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работы А. А. Карацубы [8] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для простого q, работ автора [10, 11, 13, 14], в которых изучаются «длинные» суммы $T(\chi)$ и средние значения функций Чебышёва $\psi(x,\chi)$ по всем характерам Дирихле. В доказательстве мы также используем основные результаты работ А. И. Виноградова [15] и Д. А. Берджесса [16]. Основные утверждения, позволившие получить новую оценку $T(\chi_q)$, содержатся в леммах 1–7, которые в этой статье приводим без доказательства.

Лемма 1. *Пусть $\mu(d)$ — функция Мёбиуса, σ — фиксированное число, $0,1 \le \sigma < 0,9$, тогда*

$$\sum_{\substack{d\backslash D\\ d>\exp(\ln D^2)^\sigma}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^\sigma D\right).$$

Лемма 2. *Пусть K — число решений сравнения:*

$$(nd-\eta)y \equiv (n_1d-\eta)y_1 \ (\mathrm{mod}\ q),$$
$$M < n, n_1 \le M+N, \qquad 1 \le y, y_1 \le Y, \qquad (y,q)=1, \qquad (y_1,q)=1,$$

где $(\eta,q)=1$, d — делитель числа q, $2NY<q$, $d<Y$, $\rho(qd^{-1},Y)$ — число делителей β числа qd^{-1}, удовлетворяющие условиям $qY^{-1} \le \beta < qd^{-1}$ и $(\beta,d)=1$. Тогда справедливо соотношение:

$$K \le NY_q + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d},$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Лемма 3. *Пусть $(\eta,q)=1$, $y<x$, $x<q$, $\omega(q)$ — число различных простых делителей числа q тогда*

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta) \le 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\,\mathscr{L}.$$

Лемма 4. *Пусть σ — вещественное число, M, N, d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $N<q^{7/12}d^{-1/2}$, $0,1 \le \sigma < 0,9$, $d \le \exp(2\mathscr{L})^\sigma$, тогда*

$$\sum_{M<n\le M+N} \chi_q(nd-\eta) \le N^{\frac{2}{3}}q^{1/9+\delta/2}d^{2/3},$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Лемма 5. *Пусть $(\eta,q)=1$, δ — сколь угодно малое положительное число, $y \ge q^{1/3+8\delta/5}$, тогда*

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta) \ll y\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Лемма 6. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M' \le 2M$, $N' \le 2N$, $N \le q^{1/6}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\le M'} |a_m|^\alpha \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \qquad \alpha=1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{M<m\le M'} a_m \sum_{\substack{N'<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll BM^{5/6}N^{1/2}q^{1/6+\delta/6}\mathscr{L}^{(4c_1+c_2+1)/6}.$$

Следствие 6.1. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M' \le 2M$, $N' \le 2N$, $q^\theta < N \le q^{1/6}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \le \tau_5(m)$, $|b_n| \le 1$. Тогда при $x \ge q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка*

$$\sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll x\,\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Лемма 7. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M' \le 2M$, $N' \le 2N$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\le M'} |a_m|^\alpha \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \qquad \alpha=1,2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{M<m\le M'} a_m \sum_{\substack{N'<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll B\left(M^{3/4}N^{1/2}q^{1/4} + M^{3/4}Nq^{1/8}\right)\mathscr{L}^{(2c_1+c_2+1)/4}q^{\delta/4}.$$

Следствие 7.1. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M'\le 2M$, $N'\le 2N$, $q^{1/4-\theta}\le N\le q^{1/4+\theta}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau_5(m)$, $|b_n|\le 1$. Тогда при $x\ge q^{3/4+\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка*

$$\sum_{M<m\le M'} a_m \sum_{\substack{N'<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Библиографический список

1. *Виноградов И. М.* Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 45. С. 311–320.
2. *Виноградов И. М.* Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1943. Т. 7. С. 17–34.
3. *Виноградов И. М.* Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1952. Т. 16. С. 197–210.
4. *Виноградов И. М.* Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1953. Т. 17. С. 285–290.
5. *Виноградов И. М.* Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии //Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1966. Т. 30. С. 481–496.
6. *Карацуба А. А.* Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 6. С. 1287–1289.
7. *Карацуба А. А.* Об оценках сумм характеров // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1970. Т. 34, № 1. С. 20–30.
8. *Карацуба А. А* Суммы характеров с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1970. Т. 34, № 2. С. 299–321.
9. *Рахмонов З. Х.* О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41, № 1. С. 201–202.
10. *Рахмонов З. Х.* Об оценке суммы характеров с простыми числами // Докл. АН Тадж. ССР. 1986. Т. 29, № 1. С. 16–20.
11. *Рахмонов З. Х.* О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Тр. Мат. ин-та РАН. 1994. Т. 207. С. 286–296.
12. *Фридландер Дж. Б., Гонг К., Шпарлинский И. Е.* Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 4. С. 605–619. DOI 10.4213/mzm8692.
13. *Рахмонов З. Х.* Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55–71.
14. *Рахмонов З. Х.* Теорема о среднем значении функций Чебышева // Изв. РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58, № 3. С. 127–139.
15. *Виноградов А. И.* О числах с малыми простыми делителями // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 4. С. 683–686.
16. *Burgess D. A.* On character sum estimate with $r=3$ // J. London Math. Soc. 1986. Vol. 33, № 2. P. 219–226. DOI: 10.1112/jlms/s2-33.2.219.

Distribution of Values of Dirichlet Characters in the Sequence of Shifted Primes

Z. Kh. Rakhmonov

Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, 734063, Dushanbe, Ayni st., 83, rakhmonov-r@rambler.ru

The new estimate for the sum of the values of a primitive Dirichlet character modulo an integer q has been obtained over the sequence of shifted primes $p-l$, $(l,q)=1$, $p\le x$. This estimate is nontrivial for $x\ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ and refines the estimate obtained by J. B. Friedlander, K. Gong, I. E. Shparlinskii. Their estimate holds provided that $x\ge q^{8/9+\varepsilon}$.

Key words: Dirichlet character, shifted primes, short sums of characters, exponential sums over primes.

References

1. Vinogradov I. M. On the distribution of quadratic rests and non-rests of the form $p+k$ to a prime modulus. *Rec. Math. Moscow, n. Ser.*, 1938, vol. 3, no. 45, pp. 311–319 (in Russian).
2. Vinogradow I. M. An improvement of the estimation of sums with primes. *Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. Math.* [Izvestia Akad. Nauk SSSR] 1943, vol. 7, pp. 17–34 (in Russian).
3. Vinogradov I. M. New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p+k)$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1952, vol. 16, pp. 197–210 (in Russian).
4. Vinogradov I. M. Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1953, vol 17, pp. 285–290 (in Russian).
5. Vinogradov I. M. An estimate for a certain sum extended over the primes of an arithmetic progression. *(Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1966, vol 30, no. 3, pp. 481–496 (in Russian).
6. Karatsuba A. A. Sums of characters, and primitive roots, in finite fields. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1968, vol 180, no. 6, pp. 1287–1289 (in Russian).
7. Karatsuba A. A. Estimates of character sums. *Math. USSR-Izv.*, 1970, vol. 4, no. 1, pp. 19–29.
8. Karatsuba A. A. Sums of characters over prime numbers. *Math. USSR-Izv.*, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 303–326.
9. Rakhmonov Z. Kh. On the distribution of values of Dirichlet characters. *Rus. Math. Surv.*, 1986, vol. 41, no. 1, pp. 237–238. DOI: 10.1070/RM1986v041n01ABEH003232.
10. Rakhmonov Z. Kh. Estimation of the sum of characters with primes. *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, 1986, vol 29, no. 1, pp. 16–20 (in Russian).
11. Rakhmonov Z. Kh. On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 207, no. 6, pp. 263–272.
12. Fridlander Dzh. B., Gong K., Shparlinskii I. E. Character sums over shifted primes. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, iss. 3–4, pp. 585–598. DOI: 10.1134/S0001434610090312.
13. Rakhmonov Z. Kh. A theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 43, no. 1, pp. 49–64. DOI: 10.1070/IM1994v043n01ABEH001558.
14. Rakhmonov Z. Kh. A theorem on the mean-value of Chebyshev functions. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 44, no. 3, pp. 555–569. DOI 10.1070/IM1995v044n03ABEH001613.
15. Vinogradov A. I. On numbers with small prime divisors. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol 109, no. 4, pp. 683–686 (in Russian).
16. Burgess D. A. On character sum estimate with $r=3$. *J. London Math. Soc.*, 1986, vol. 33, no. 2, pp. 219–226. DOI: 10.1112/jlms/s2-33.2.219.

УДК 511.325

КЛАСС ПОКАЗАТЕЛЬНО РАСТУЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, НЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ РАВНОМЕРНО ПО МОДУЛЮ ЕДИНИЦА

П. З. Рахмонов

Кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, parviz.msu@gmail.com

Построен класс экспоненциально растущих последовательностей, не являющихся равномерно распределенными по модулю единицы.

Ключевые слова: равномерное распределение по модулю единица, числа Фибоначчи, золотое сечение, дробно-линейная функция.

Вопрос о равномерном распределении функций вида $\alpha\psi(x)$, где α – иррациональное число, $\psi(x)$ – функция, принимающая целые значения, изучался А. Вейлем. Из работы [1] следует, что почти для всех α последовательность $\{\alpha\lambda^n\}$ равномерно распределена, где $\lambda > 1$ – действительное число. Однако конкретные примеры таких α им не были построены. В работах А. Г. Постникова, видимо, впервые построены примеры таких α, что последовательность $\{\alpha\lambda^n\}$ равномерно распределена по модулю единица, $\lambda \geq 2$ – целое число.

Воспользуемся следующими обозначениями: $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность Фибоначчи: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n \geq 2$, $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение.

Лемма 1. *Произвольную дробно–линейную функцию с рациональными коэффициентами a,b,c,d и $c^2+d^2 \neq 0$ от φ можно представить виде линейной функции с рациональными коэффициентами от φ:*

$$\frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}=\frac{bc-ad}{c^2-cd-d^2}\varphi+\frac{ac-bc-bd}{c^2-cd-d^2}.$$

Доказательство. Пользуясь равенством $\varphi^2=\varphi+1$, представим дробно-линейную функцию с рациональными коэффициентами от φ, виде линейной функции от φ с рациональными коэффициентами:

$$\frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}=\frac{a\varphi+b}{c\left(\varphi-\frac{1}{2}\right)+\frac{c}{2}+d}=\frac{(a\varphi+b)\left(c\left(\varphi-\frac{1}{2}\right)-\frac{c}{2}-d\right)}{c^2\left(\varphi^2-\varphi+\frac{1}{4}\right)-\frac{c^2}{4}-cd-d^2}=$$
$$=\frac{(a\varphi+b)(c\varphi-c-d)}{c^2-cd-d^2}=\frac{ac\varphi^2+(bc-ac-ad)\varphi-bc-bd}{c^2-cd-d^2}=$$
$$=\frac{ac(\varphi+1)+(bc-ac-ad)\varphi-bc-bd}{c^2-cd-d^2}=\frac{(bc-ad)\varphi+ac-bc-bd}{c^2-cd-d^2}=$$
$$=\frac{bc-ad}{c^2-cd-d^2}\varphi+\frac{ac-bc-bd}{c^2-cd-d^2}.$$

Очевидно, что знаменатель d^2+cd-c^2 не обращается в нуль при произвольных рациональных c, d, удовлетворяющих условию $c^2+d^2\neq 0$.

Лемма 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. *Тогда, либо последовательности x_n и y_n распределены равномерно, либо последовательности x_n и y_n не распределены равномерно.*

Доказательство. Пусть последовательность x_n равномерно распределена и $l\neq 0$ — целое число. Согласно критерию Г. Вейля равномерного распределения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i l x_k}=0, \tag{1}$$

$$e^{2\pi i l x_k}-e^{2\pi i l y_k}=\cos(2\pi l x_k)-\cos(2\pi l y_k)+i(\sin(2\pi l x_k)-\sin(2\pi l y_k)).$$

По теореме Лагранжа

$$\cos(2\pi l x_k)-\cos(2\pi l y_k)=-2\pi l(x_k-y_k)\cdot\sin(2\pi l\theta_k),\qquad \theta_k\in(x_n,y_n),$$
$$\sin(2\pi l x_k)-\sin(2\pi l y_k)=2\pi l(x_k-y_k)\cdot\cos(2\pi l\hat{\theta}_k),\qquad \hat{\theta}_k\in(x_n,y_n).$$

Поэтому

$$e^{2\pi i l x_k}-e^{2\pi i l y_k}=-2\pi l(x_k-y_k)\cdot\sin(2\pi l\theta_k)+i\cdot 2\pi l(x_k-y_k)\cdot\cos(2\pi l\hat{\theta}_k).$$

Оценивая $|\sin(2\pi l\theta_k)|\leq 1$, $|\cos(2\pi l\hat{\theta}_k)|\leq 1$, получим:

$$\left|e^{2\pi i l x_k}-e^{2\pi i l y_k}\right|\leq 2\pi\sqrt{2}|l|\cdot|x_k-y_k|\to 0\qquad (k\to\infty).$$

Таким образом,

$$\lim_{k\to+\infty}e^{2\pi i l x_k}-e^{2\pi i l y_k}=0.$$

Если последовательность $e^{2\pi i l x_k}-e^{2\pi i l y_k}$ имеет предел, равный 0, то последовательность средних арифметических:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i l x_k}-e^{2\pi i l y_k}$$

также имеет предел, равный нулю, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i l x_k}-e^{2\pi i l y_k}=0.$$

Поэтому из (1) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i l y_k}=0.$$

Значит, по критерию Вейля последовательность y_n равномерно распределена.

Аналогично можно доказать, что если y_n равномерно распределена, то x_n также равномерно распределена.

Теорема. *Последовательность* $\{\varphi f_n\}_{n=0}^{\infty}$*, не является равномерно распределенной.*

Доказательство. Отношения соседних чисел Фибоначчи f_{n+1}/f_n являются подходящими дробями для золотого сечения φ при ее разложении в непрерывную дробь. Поэтому по теореме Дирихле

$$\varphi=\frac{f_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta}{f_n^2},\qquad |\theta|\le 1.$$

Тогда

$$\varphi f_k=\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta}{f_n^2}\right)f_k=\frac{f_kf_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta\cdot f_k}{f_n^2}.$$

Обозначим $A(k,n):=f_kf_{n+1}-f_{k+1}f_n$,

$$\begin{gathered}A(k,n)=f_kf_{n+1}-f_{k+1}f_n=f_k(f_n+f_{n-1})-(f_k+f_{k-1})f_n=f_kf_{n-1}-f_{k-1}f_n=\\=-(f_{k-1}f_n-f_kf_{n-1})=-A(k-1,n-1)=\ldots=(-1)^kA(0,n-k),\\A(0,n-k)=f_0f_{n-k+1}-f_1f_{n-k}=f_{n-k+1}-f_{n-k}=f_{n-k-1}.\end{gathered}$$

Поэтому $A(k,n)=(-1)^kf_{n-k-1}$ при $k<n$ и

$$f_kf_{n+1}=f_{k+1}f_n+(-1)^kf_{n-k-1},$$

Таким образом,

$$\varphi f_k=\frac{f_kf_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta\cdot f_k}{f_n^2}=f_{k+1}+(-1)^k\frac{f_{n-k-1}}{f_n}+\frac{\theta\cdot f_k}{f_n^2},\qquad k<n. \tag{2}$$

Оценим $(-1)^k\dfrac{f_{n-k-1}}{f_n}+\dfrac{\theta\cdot f_k}{f_n^2}$:

$$\frac{f_k}{f_n^2}<\frac{1}{f_n}\to 0\qquad (n\to\infty).$$

При фиксированном k:

$$\frac{f_{n-k-1}}{f_n}=\frac{f_{n-k-1}}{f_{n-k}}\cdot\frac{f_{n-k}}{f_{n-k+1}}\cdots\frac{f_{n-1}}{f_n}.$$

Каждый множитель в этом произведении стремится к φ^{-1} при $n\to\infty$, поэтому

$$\frac{f_{n-k-1}}{f_n}\to\varphi^{-k-1}\qquad (n\to\infty).$$

Подставив в равенство (2), получим, что для любого k

$$\varphi f_k-\left(f_{k+1}+(-1)^k\varphi^{-k-1}\right)\to 0\qquad (n\to\infty).$$

Устремляя $k\to+\infty$:

$$\varphi f_k-f_{k+1}\to 0\qquad (k\to+\infty). \tag{3}$$

Так как последовательность $\{f_{k+1}\}$, очевидно, не является равномерно распределенной, то, согласно лемме 2, $\{\varphi f_k\}$ не является равномерно распределенной.

Следствие. *Пусть α есть значение рациональной функции от φ, то есть $\alpha = f(\varphi)/g(\varphi)$, где $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ — многочлены с целыми коэффициентами от φ. Тогда последовательность $\{\alpha f_n\}$ не является равномерно распределенной.*

Доказательство. Используя свойство $\varphi^2 = \varphi + 1$, выразим $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ в виде линейной функции от φ. Тогда можно полагать, что α есть значение дробно-линейной функции от φ. Далее, согласно лемме 1, значение дробно-линейной функции от φ можно выразить в виде линейной функции с рациональными коэффициентами от φ. Пусть s, t — рациональные числа.

Согласно оценке (3)

$$(s\varphi + t)f_k - (sf_{k+1} + tf_k) \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Последовательность $sf_{k+1}+tf_k$ не является равномерно распределенной (так как s, t — рациональные числа). Поэтому, согласно лемме 2, последовательность $(s\varphi+t)f_k$ также не является равномерно распределенной.

Библиографический список

1. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Vol. 77. P. 313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.

On the Class of Exponentially Growing Sequences that are Not Uniformly Distributed Modulo One

P. Z. Rakhmonov

Moscow State University, Russia, 119234, Moscow, Leninskie Gory, 1, parviz.msu@gmail.com

The paper presents a family of exponentially growing but not uniformly distributed sequences modulo one.

Key words: uniform distrubtion modulo one, Fibonacci numbers, golden ratio, homographic transformation..

References

1. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.*, 1916, vol. 77, pp. 313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.

УДК 511.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ В. С. РЯБЕНЬКОГО

А. В. Родионов

Ассистент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, rodionovalexandr@mail.ru

В работе рассмотрены алгоритмы вычисления гиперболических параметров целочисленных решеток решений линейных сравнений, соответствующих параллелепипедальным сеткам.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, теоретико-числовой метод.

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [1] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \qquad 0 \le t \le T, \qquad -\infty < x_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \dots, s), \tag{1}$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \tag{2}$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)=\sum_{j_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{j_s=0}^{n_s}a_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \qquad (3)$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q)=n_1+\ldots+n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q)=\max(n_1,\ldots,n_s)$, а $\varphi(\vec{x})=\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α $(\alpha>m(Q)+1)$.

Таким образом,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=-\infty}^{\infty}c_{m_1,\ldots,m_s}e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1,\ldots,m_s}|\le\frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}.$$

Величина $\|\varphi\|_{E_s^\alpha}=\sup\limits_{m_1,\ldots,m_s}|c_{m_1,\ldots,m_s}(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha|<\infty$ является нормой на пространстве E_s^α, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

В своей работе В. С. Рябенький предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

Пусть задана целочисленная решетка Λ, которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M_H^*(\Lambda)$. С задачей Коши (1)–(3) свяжем дискретную задачу Коши с решеткой Λ, отличие которой от просто задачи Коши заключается в том, что начальное условие ослабляется и задается не на единичном s-мерном кубе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$. За счет этого решение можно найти в пространстве $\mathbb{T}(M_H^*(\Lambda))$.

Определение 1. *Дискретной задачей Коши с решеткой* Λ называется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(t,\vec{x}), \qquad (4)$$

$$0\le t\le T,\qquad -\infty<x_\nu<\infty\qquad (\nu=1,\ldots,s), \qquad (5)$$

с дискретными начальными условиями:

$$u(0,\vec{x})=\varphi(\vec{x}),\qquad \vec{x}\in M(\Lambda), \qquad (6)$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α $(\alpha>m(Q)+1)$.

Решением дискретной задачей Коши с решеткой Λ назовем тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами $u(t,\vec{x})\in\mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (4) в области (5) с дискретными начальными условиями (6).

Теорема 1. *Решением дискретной задачи Коши с решеткой Λ является тригонометрический многочлен:*

$$u(t,\vec{x})=\sum_{\vec{m}\in M^*(\Lambda)}c(\vec{m})e^{Q(\vec{m})t}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где

$$c(\vec{m})=c_{M(\Lambda),M^*(\Lambda)}(\vec{m})=\frac{1}{N}\sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)}\varphi(\vec{y})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{y})}.$$

Доказательство см. в [2]. □

Введем в рассмотрение новый класс функций $E_s^{*\alpha}(Q)$, где

$$Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \ldots + n_s$.

Определение 2. Периодическая функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^{*\alpha}(Q)$, если

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \le \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q,T)}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)}.$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q,T)} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)| < \infty,$$

где

$$Q(\vec{m}, T) = \max_{q(\vec{n}) \le q(\vec{m})} Q_1(\vec{n}, T),$$

$$Q_1(\vec{m}, T) = \max_{0 \le t \le T} \left(\left|e^{Q(m)t}\right|, \left|e^{Q(m)t}\right| \cdot |Q(m)|\right),$$

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\dots,j_s} (2\pi i)^{j_1+\dots+j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s},$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q, T)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Определение 3. Функция $u(t, \vec{x})$, определенная при $0 \le t \le T$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, периодическая по $\vec{x}$ с периодом 1 по каждой переменной x_ν $(\nu = 1, \dots, s)$, представимая кратным рядом Фурье с переменными коэффициентами Фурье, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \le t \le T$:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} b'_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

принадлежит классу $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$, если для любого t из отрезка $[0; T]$ выполнены равенства

$$b_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t) e^{Q(\vec{m})t}, \qquad b'_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t) Q(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t}$$

и периодическая функция

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

принадлежат классу $E_s^\alpha(Q, T)$.

Теорема 2. *Для пространства $ER_{s+1}^\alpha(Q, T)$ общим решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \qquad 0 \le t \le T, \qquad -\infty < x_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \dots, s)$$

является периодическая функция:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \tag{8}$$

где коэффициенты $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$C = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^{\alpha} \cdot Q(\vec{m},T)| < \infty,$$

и ряды в правых частях (7) *и* (8) *абсолютно сходятся.*

Доказательство см. в работе [2]. □

Теорема 3. *Для пространства $ER^{\alpha}_{s+1}(Q,T)$ решением задачи Коши для дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(t,\vec{x}), \qquad 0\le t\le T, \qquad -\infty < x_\nu < \infty \qquad (\nu = 1,\dots,s) \tag{9}$$

с начальным условием

$$u(0,\vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \qquad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{E}^{\alpha}_s(Q,T), \tag{10}$$

где периодическая функция $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{11}$$

является

$$u(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{12}$$

где $u(t,\vec{x}) \in ER^{\alpha}_{s+1}(Q,T)$.

Доказательство см. в [2]. □

Пусть задана целочисленная решетка Λ и $M^*(\Lambda) = M^*_H(\Lambda)$ — абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ. Согласно теореме 1 решением дискретной задачи Коши (4)–(6) с решеткой Λ является тригонометрический многочлен

$$u_\Lambda(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) U_{\vec{y}}(t,\vec{x}),$$

где

$$c(\vec{m}) = c_{M(\Lambda),M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{y})}.$$

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(t,\vec{x})$ как приближение к решению $u(t,\vec{x})$ задачи Коши (9)–(10). Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

Теорема 4. *Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения* (12) *задачи Коши* (9)–(10) *с функцией $\varphi(\vec{x})$, имеющей ряд Фурье* (11), *справедливо неравенство*

$$|u(t,\vec{x}) - u_\Lambda(t,\vec{x})| \le \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E^{\alpha}_s(Q,T)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C^m_k}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^{s} C^j_s 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s} C^j_s 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1}\right)\right).$$

Доказательство см. в [2]. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00571).

Библиографический список

1. *Рябенький В. С.* Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232–237.

2. *Родионов А. В.* О методе В. С. Рябенького – Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 3. С. 82–96.

Solution of Partial Differential Equations by the Ryabenky Method

A. V. Rodionov

Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, Lenina st., 125, rodionovalexandr@mail.ru

The paper discusses the generalizations of the method Ryabenky approximate solutions of partial differential equations to the case of the use of arbitrary distributions Parallelepipedal nets for integral lattices.

Key words: partial differential equation, number theoretic method.

References

1. Ryabenky V. S. A method for obtaining difference schemes andthe use of nets teoretikochislovyh for solutionthe finite difference method. *Tr. matem. in-ta im. V. A. Steklova.* [Tr. Math. Inst. V. A. Steklov], 1961, vol. 60, pp. 232–237 (in Russian).

2. Rodionov A. V. On the method of V. S. Ryabenky – N. M. Korobov approximate solutions of partial differential equations. *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshevsky collection], 2009, vol. 10, iss. 3, pp. 82–96 (in Russian).

УДК 512.55

НОВЫЕ СВОЙСТВА МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Т. В. Скорая[1], А. В. Швецова[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, skorayatv@yandex.ru,

[2]Аспирант кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, Федеральный научно-производственный центр ОАО «Научно-производственное объединение «Марс», shvesovaav@rambler.ru

В работе представлены два новых результата, касающиеся многообразий алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Доказано достаточное условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница. Найден базис тождеств и базис полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, многообразие алгебр, числовые характеристики, кодлина, полилинейная компонента.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Работа посвящена изучению новых свойств многообразий алгебр Лейбница. Характеристика основного поля Φ предполагается равной нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в работе [1]. В статье представлено два новых результата в этой области. Первый результат принадлежит А. В. Швецовой и содержит доказательство достаточного условия конечности кодлины многообразий алгебр Лейбница. Второй результат принадлежит Т. В. Скорой. В нем найден базис тождеств и базис пространства полилинейных элементов многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница.

Линейная алгебра с билинейным произведением, удовлетворяющая тождеству Лейбница $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$ называется алгеброй Лейбница. Возможно, впервые это понятие было рассмотрено в работе [2], как обобщение понятия алгебры Ли. Тождество Лейбница позволяет любой элемент представить в виде линейной комбинации элементов, в которых скобки расставлены слева направо. Поэтому договоримся, что в дальнейшем будем опускать скобки в левонормированных произведениях, то есть $(((ab)c)\dots d) = abc\dots d$. Многообразием $\mathbf{V}$ линейных алгебр над полем Φ называется совокупность алгебр над этим полем, удовлетворяющих фиксированному набору тождественных соотношений. Отметим, что система тождеств может быть задана неявно. В этом случае многообразие обычно определяется порождающей алгеброй, заданной конструктивно.

Пусть $F(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$ со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Рассмотрим пространство полилинейных элементов алгебры $F(X, \mathbf{V})$, которое обозначим $P_n(\mathbf{V})$ и назовем полилинейной компонентой многообразия $\mathbf{V}$. На этом пространстве естественным образом вводится действие перестановок, что позволяет рассматривать его как ΦS_n-модуль, где S_n — симметрическая группа. Так как поле Φ имеет нулевую характеристику, то пространство $P_n(\mathbf{V})$, раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Обозначим через χ_λ характер неприводимого подмодуля, соответствующего разбиению λ числа n. Тогда характер модуля $P_n(\mathbf{V})$ выражается формулой

$$\chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{1}$$

где m_λ — кратности неприводимых подмодулей в указанной сумме.

Важной числовой характеристикой многообразия $\mathbf{V}$ линейных алгебр является кодлина $l_n(\mathbf{V})$, которая определяется как число слагаемых в разложении характера в сумму неприводимых:

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda. \tag{2}$$

Будем говорить, что кодлина многообразия $\mathbf{V}$ конечна, если существует такая константа C, не зависящая от n, что для любого n выполнено неравенство $l_n(\mathbf{V}) \le C$.

Оператор умножения справа, например, на элемент z обозначим через Z, считая, что $xz = xZ$. Это обозначение позволяет элемент $x\underbrace{y\dots y}_{n}$ записывать в виде xY^n. Напомним, что стандартный полином степени n имеет вид: $St_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q \in S_n} (-1)^q x_{q(1)} x_{q(2)} \dots x_{q(n)}$, где суммирование ведется по элементам симметрической группы, а $(-1)^q$ равно $+1$ или -1 в зависимости от четности перестановки q. Договоримся переменные, входящие в стандартный полином обозначать специальными символами сверху (чертой, волной и так далее). Например, стандартный полином степени n от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем записывать следующим образом: $St_n = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n$.

2. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ КОДЛИНЫ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Ранее А. В. Швецовой были определены необходимые условия конечности кодлины многообразий алгебр Лейбница. Далее рассматриваются достаточные условия ее конечности.

Следуя работе [3], будем обозначать многообразие всех алгебр Лейбница (алгебр Ли), определенных тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4)\dots(x_{2s+1}x_{2s+2}) \equiv 0$, через $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ (соответственно $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$). Пусть, кроме того, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2\mathbf{A}$ — многообразие всех алгебр Ли, коммутант которых нильпотентен ступени не выше двух, а $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ — многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{V}$ — подмногообразие многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$, в котором для некоторых натуральных k, m, $k \le m$, и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Phi$ выполнено тождество*

$$xY^kzY^{m-k} \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i xY^{k-i}zY^{m-k+i}. \tag{3}$$

Тогда многообразие $\mathbf{V}$ имеет конечную кодлину.

Доказательство. Поскольку тождество (3) не выполняется в многообразиях $\mathbf{V}_1$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, то из условий теоремы следует, что $\mathbf{V_1}, \widetilde{\mathbf{V}}_1 \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N_s}\mathbf{A}}$. Тогда по теореме 1 работы [4] существует константа C, не зависящая от n, для которой в сумме (1) верно условие $(n-\lambda_1) < C$. В этом случае в сумме (2) число ненулевых слагаемых ограничено константой, не зависящей от n. Таким образом, для доказательства результата достаточно установить, что все кратности m_λ ограничены константой, также не зависящей от n.

В работе [5] доказано, что кратность $m_\lambda(\mathbf{V})$ совпадает с числом линейно независимых полиоднородных элементов специального вида. Мы покажем, что размерность всего пространства полиоднородных элементов ограничена константой, не зависящей от n, что и завершит доказательство.

Рассмотрим λ, для которого $m_\lambda \neq 0$. Для такого разбиения выполняется условие $(n-\lambda_1) < C$ и ему будут соответствовать мономы вида $g_s = Y^{\alpha_1}x_{i_1}Y^{\alpha_2}x_{i_2}Y^{\alpha_3}\dots Y^{\alpha_s}x_{i_s}Y^{\alpha_{s+1}}$, где $s < C$. Обозначим пространство, порожденное элементами g_s через Q_{λ_1}. Докажем, что число линейно независимых мономов g_s ограничено константой. Доказательство проведем индукцией по числу s образующих x_i и лексикографичексому порядку на строках вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1})$.

Рассмотрим случай $s = 1$. Тогда порождающие мономы пространства Q_{λ_1} имеют вид: $Y^{\alpha_1}x_1Y^{\alpha_2}$. Если для этих элементов выполнены условия $\alpha_1 \geq m$ и $\alpha_2 \geq m$, то по тождеству (3) их можно представить в виде линейной комбинации элементов, в которых $\alpha_1 < m$. Таким образом, любой моном выражается через те, у которых либо только $\alpha_1 \geq m$, либо только $\alpha_2 \geq m$. Число таких мономов ограничено $2m$, константой, не зависящей от n.

В общем случае пространство Q_{λ_1} будет порождаться элементами, у которых только одно α_i не меньше tm. Заметим, что общее количество таких элементов ограничено константой, не зависящей от n.

Пусть i — наименьший индекс, для которого $\alpha_i \geq tm$. Рассмотрим соответствующий элемент: $g_s = yY^{\alpha_1}x_{t_1}Y^{\alpha_2}\dots Y^{\alpha_i}x_{t_i}Y^{\alpha i+1}\dots Y^{\alpha_s}x_{t_s}Y^{\alpha_{s+1}}$. Если при этом $\alpha_{i+1} \geq tm$, то тождество (3) позволяет привести элемент g_s к линейной комбинации слов, меньших лексикографически. Если же $\alpha_{i+1} < tm$, то по модулю слов, меньших лексикографически, элемент g_s представим в виде $Y^{\alpha_1}x_{t_1}\dots Y^{\alpha_i-\alpha_{i+1}-1}\underbrace{(y(y\dots(yx_{t_i})\dots))}_{\alpha_{i+1}+1}\underbrace{(y(y\dots(yx_{t_{i+1}})\dots))}_{\alpha_{i+1}}Y^{\alpha_{i+2}}\dots Y^{\alpha_s}x_{t_s}Y^{\alpha_{s+1}}$.

Тождество Лейбница позволяет привести последний элемент к сумме слагаемых, меньших лексикографически, и слагаемого $Y^{\alpha_1}x_{t_1}\dots Y^{\alpha_i-\alpha_{i+1}-1}X'Y^{\alpha_{i+2}}\dots Y^{\alpha_s}x_{t_s}Y^{\alpha_{s+1}}$, где $x' = \underbrace{(y(y\dots(yx_{t_i})\dots))}_{\alpha_{i+1}+1}\underbrace{(y(y\dots(yx_{t_{i+1}})\dots))}_{\alpha_{i+1}}$. Получим элемент с меньшим количеством образующих x_{i_r}, на который распространяется предположение индукции. Таким образом доказательство завершено. Теорема доказана.

3. БАЗИС ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ МНОГООБРАЗИЯ $\widetilde{\mathrm{V}}_3$ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница является аналогом хорошо известного многообразия $\mathbf{V}_3$ алгебр Ли. Ранее, в работе [6] был определен рост этого многообразия, а в работе [7] — его кратности и кодлина. Пусть $T = \Phi[t]$ — кольцо многочленов от переменной t. Рассмотрим трехмерную алгебру Гейзенберга H с базисом $\{a, b, c\}$ и умножением $ba = -ab = c$, произведение остальных базисных элементов равно нулю. Превратим кольцо многочленов T в правый модуль алгебры H, в котором базисные элементы алгебры H действуют справа на многочлен f из T следующим образом: $fa = f', fb = tf, fc = f$, где f' — производная многочлена f. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств H и T с умножением по правилу: $(x+f)(y+g) = xy + fy$, где x, y из H; f, g из T. Следуя, например, работе [8], обозначим полученную алгебру символом $\widetilde{H}$. Алгебра $\widetilde{H}$ является алгеброй Лейбница, удовлетворяет тождеству $x(y(zt)) \equiv 0$ и порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница.

Лемма. *В многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ выполняются следующие тождества:*

$$x(y(zt)) \equiv 0, \tag{4}$$

$$x_0A\overline{x}_1B\overline{x}_2C\overline{x}_3D\overline{x}_4 \equiv 0, \tag{5}$$

$$x_0(x_1x_4)(x_2x_3) \equiv x_0(x_1x_2)(x_3x_4) + x_0(x_1x_3)(x_2x_4), \tag{6}$$

где A, B, C, D — некоторые слова от образующих.

Доказательство. Истинность тождеств (4) и (5) проверяется подстановкой произвольных элементов алгебры $\widetilde{H}$ и была показана в работе [6]. Тождество (6) вытекает из линеаризации следующего частного вида тождества (5): $x_0\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \equiv 0$ по модулю тождества $xyz - xzy \equiv x(yz)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Совокупность элементов вида*

$$\theta = \theta(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m) = x_i(x_{i_1}x_{j_1})(x_{i_2}x_{j_2})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_{n-2m-1}},$$

где $i_s < j_s, s = 1, 2, \ldots, m, i_1 < i_2 < \ldots < i_m, j_1 < j_2 < \ldots < j_m, k_1 < k_2 < \ldots < k-2m-1$, *образуют базис пространства* $P_n(\widetilde{V}_3)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент пространства $P_n(\widetilde{\mathbf{V}}_3)$. Используя следствие $xy(zt) \equiv x(zt)y$ тождества Лейбница и тождества (4), передвинем все скобки максимально влево. Упорядочим полученные элементы, используя лексикографический порядок строк $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-2m-1})$. Пусть рассматриваемый элемент имеет вид: $x_i(x_{i_1}x_{j_1})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}\ldots x_{k_s}x_{k_{s+1}}\ldots x_{k_{n-2m-1}}$ и $k_s > k_{s+1}$. С помощью тождества Лейбница этот элемент представим в виде суммы $x_i(x_{i_1}x_{j_1})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}\ldots x_{k_{s+1}}x_{k_s}\ldots x_{k-2m-1} + x_i(x_{i_1}x_{j_1})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}\ldots x_{k_{s-1}}(x_{k_s}x_{k_{s+1}})x_{k_{s+2}}\ldots x_{k-2m-1}$, где первое слагаемое лексикографически меньше, чем исходный элемент, а у второго слагаемого число одиночных элементов уменьшилось. Применяя такой же метод к полученным слагаемым, мы, в конечном итоге, представим наш исходный элемент как сумму слагаемых, в которых $k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-2m-1}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент, в котором индексы одиночных элементов упорядочены. Выберем два наименьших индекса внутри скобок в рассматриваемом элементе и переобозначим их через $1'$ и $2'$ соответственно. Введем лексикографический порядок на строках $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$. Используя также индукцию по числу скобок, докажем, что все полученные элементы представимы в виде линейной комбинации элементов θ. Следствие $x(yz) \equiv -x(zy)$ тождества Лейбница позволяет упорядочить индексы элементов внутри пар, а тождество $xy(zt) \equiv x(zt)y$ — скобки по индексам первых элементов. Согласно этим тождествам рассматриваемый элемент может иметь вид либо $x_i(x_{1'}x_{2'})(x_{i_1}x_{j_1})\ldots x_{k_{n-2m-1}}$, либо $x_i(x_{1'}x_{j_1})(x_{2'}x_{j_2})\ldots x_{k_{n-2m-1}}$. В первом случае можно рассматривать упорядоченность уже на $m-1$ скобке, которая выполняется по индукции. Во втором случае применим тождество (6), получим: $x_i(x_{1'}x_{2'})(x_{j_2}x_{j_1})\ldots x_{k_{n-2m-1}} + x_i(x_{1'}x_{j_2})(x_{2'}x_{j_1})\ldots x_{k_{n-2m-1}}$, где к первому слагаемому снова применимо предположение индукции, а второе слагаемое меньше лексикографически. Следовательно, произвольный элемент пространства $P_n(\widetilde{V}_3)$ записывается через линейную комбинацию элементов θ по модулю $Id(\widetilde{V}_3)$.

Докажем теперь, что элементы θ являются линейно независимыми по модулю $Id(\widetilde{V}_3)$. Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов: $\sum_{(i,i_1,\ldots,i_m.j_1,\ldots,j_m)} \alpha(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m)\theta = 0$ и покажем, что все коэффициенты $\alpha = \alpha(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m)$ равны нулю. Предположим противное.

Выберем элемент $\theta^* = \theta(i^*, i_1^*, \ldots, i_m^*, j_1^*, \ldots, j_m^*)$ с коэффициентом α^* не равным нулю так, чтобы количество коммутаторов m в нем было наименьшим и индекс j_1^* элемента на второй позиции в первой скобке был наибольшим. Поскольку каждый элемент однозначно определяется количеством m, элементом x_i и выборкой $(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m)$, то в выбранном элементе θ^* эти показатели фиксированы. Подставим в него базисные элементы алгебры $\widetilde{H}$ следующим образом: $x_{i^*} = f, x_{i_s^*} = a, x_{j_s^*} = b, s = 1, \ldots, m$, в остальные подставим c. После такой подстановки все элементы, отличные от выбранного, станут равными нулю. Действительно, возможны два вида элементов, содержащих m коммутаторов при фиксированной выборке $(i^*, i_1^*, \ldots, i_m^*, j_1^*, \ldots, j_m^*)$: элементы, содержащие на второй позиции в первой скобке $x_{j_1^*}$, и элементы, содержащие на второй позиции в первой скобке $x_{i_s^*}$, где $i_s^* < j_1^*$ $(s = 2, \ldots, m)$. Все элементы второго вида равны нулю, так как при описанной подстановке первая скобка будет равна (aa). В одной из скобок элементов первого типа окажутся образующие $x_{i_s^*}$ и $x_{i_t^*}$. В результате описанной подстановки эта скобка также обнулит элемент. Таким образом, получим, что если $f \neq 0$, то $\sum_{(i,i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_m)} \alpha\theta = 0$. Следовательно, вопреки предположению коэффициент α^* равен нулю. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что любое тождество, которое имеет место в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_3$, является следствием тождества Лейбница и тождеств $x(y(zt)) \equiv 0$ и (3). Отсюда мы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Тождества* (4) *и* (6) *образуют базис тождеств многообразия* $\widetilde{\mathbf{V}}_3$.

Авторы выражают благодарность С. П. Мищенко за постановку задачи, полезные советы и внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (*МОЛ А ВЕД 2012* 12-01-33031).

Библиографический список

1. *Giambruno A., Zaicev M.* Polynomail identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : AMS, 2005. Vol. 122. 352 p.

2. *Блох А. М.* Об одном обощении понятия алгебр Ли // Докл. АН СССР. 1965. Т. 18, № 3. С. 471—473.

3. *Рацеев С. М.* Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2006. № 6(46). С. 70–77.

4. *Мищенко С. П., Череватенко О. И.* Необходжимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница // Фундаментальная прикладная математика. 2006. Т. 12, № 8. С. 207–215.

5. *Мищенко С. П., Зайцев М. В.* Кодлина многообразий линейных алгебр // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 553–559.

6. *Абанина Л. Е., Мищенко С. П.* Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения : тр. девятых математических чтений МГСУ. 2002. С. 95–99.

7. *Скорая Т. В.* Структура полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ // Ученые записки ОГУ. 2012. № 6(2). С. 203–212.

8. *Мищенко С. П., Шишкина Т. В.* О многообразиях алгебр Лейбница почти полиномиального роста с тождеством $(y(xt)) = 0$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 : Математика и механика. 2010. Т. 3. С. 18–23.

New Properties of Varieties of Leibnitz Algebras

T. V. Skoraya[1], A. V. Svetsova[2]

[1]Ulyanovsk State University, Russia, 432017, Ulyanovsk, Lev Tolstoy str., 42, skorayatv@yandex.ru

[2]Federal research and production center Open joint stock company «Scientific and production association «Mars», Russia, 432022, Ulyanovsk, Solnechnaya str., 20, shvesovaav@rambler.ru

The paper is devoted to two new results concerning varieties of Leibnitz algebras over a field of the zero characteristic. Here is proved the sufficient condition for a variety of Leibnitz algebras to have a finite colength. Here is also defined the basis of identities and the basis of multilinear part of variety $\widetilde{\mathbf{V}}_3$.

Key words: Leibnitz algebra, variety of algebras, numerical characteristic, colength, multilinear part.

References

1. Giambruno A., Zaicev M. *Polynomail identities and Asymptotic Methods*. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI, AMS, 2005, vol. 122, 352 p.

2. Blokh A. M. A generalization of the concept of a Lie algebra. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1965. Vol. 18, no. 3, pp. 471–473 (in Russian).

3. Ratseev S. M. The estimation of growth og variety of Leibnitz algebras with a nilpotent commutant. *Vestnik of the Samara state university*, 2006, no 6(46), no. 6(46), pp. 70–77 (in Russian).

4. Mishchenko S. P., Cherevatenko O. I. Necessary and suffcient conditions for a variety of Leibniz algebras to have polynomial growth. *Fundamental applied mathematics*, 2006, vol. 12, no. 8, pp. 207–215 (in Russian).

5. Mishchenko S. P., Zaicev M. V. Colength of varieties of linear algebras. *Math. Notes*, 2006, vol. 79,

no. 4, pp. 511–517. DOI: 10.1007/s11006-006-0056-0.
6. Abanina L. E., Mishchenko S. P. Nekotorye mnogoobraziia algebr Leibnitsa [Some varieties of Leibnitz algebras]. *Matematicheskie metody i prilozheniia : tr. deviatykh matematicheskikh chtenii MGSU* [Mathematical methods and appendices. Works of the ninth mathematical readings MSSU], 2002, pp. 95–99 (in Russian).
7. Skoraya T. V. Structure of multilinear part of variety $\widetilde{\mathbf{V}}_3$. *Uchenye zapiski OGU* [Scientific notes of the OSU], 2012, no. 6(2), pp. 203–212. (in Russian)
8. Mishchenko S. P., Shishkina T. V. On almost polynomial growth varieties of Leibniz algebras with the identity x(y(zt))=0. *Vestnik of the Moscow university, Ser. 1 : Mathematics and mechanics*, 2010, vol. 3, pp. 18–23 (in Russian).

УДК 511

О КОЛИЧЕСТВЕ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЦЕЛОГО ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕНИЕМ КРАТНОСТИ

Г. В. Федоров

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, fedorov@mech.math.msu.su

В данной статье исследуются обобщения числовых функции, связанные с количеством простых делителей заданного числа. Получены верхние и нижние предельные значения, а также асимптотические фрмулы для средних значений количества простых делителей, входящие в целое число с ограничением кратности.

Ключевые слова: функция делителей, теорема Мерсенна, простая дзета-функция.

Памяти Г. И. Архипова

ВВЕДЕНИЕ

Для каждого натурального числа n в соответствии с основной теоремой арифметики имеет место разложение на множители

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} = \prod_{p|n} p^{\alpha_p},$$

причем такое представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей. В теории чисел хорошо известны функции $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ равные количеству простых делителей числа n соответственно с учетом и без учета кратных делителей:

$$\Omega(n) = \sum_{p|n} \alpha_p, \qquad \omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

Свойства этих функций изучены достаточно глубоко, в частности, для функции $\omega(n)$ верхний порядок роста

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\omega(n) \cdot \log_2 \log_2 n}{\log_2 n} \right) = 1$$

достигается на последовательности $n = n_m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$ — произведение последовательных простых чисел, $p_1 = 2$. При этом стоит отметить, что для произвольного $n \le n_m$ выполнено неравенство $\omega(n) \le \omega(n_m)$. Минимальное значение функции $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ принимают на простых числах

$$\Omega(p) = \omega(p) = 1.$$

Верхнее предельное значение функции $\Omega(n)$ достигается на последовательности $n = n_a = 2^a$, причем для произвольного $n \le n_a$ выполнено неравенство $\Omega(n) \le \Omega(n_a) = a$.

Определим обобщенные функции $\Omega(k,n)$ и $\omega(k,n)$ следующим образом:

$$\Omega(k,n)=\sum_{\substack{p|n\\ \alpha_p\le k}}\alpha_p,\qquad \omega(k,n)=\sum_{\substack{p|n\\ \alpha_p>k}}1,$$

где при суммировании учитываются только те простые сомножители p целого числа n, которые входят в разложение с кратностью, удовлетворяющей соответственно условиям $\alpha_p\le k$ или $\alpha_p>k$. В частности, $\Omega(\log_2 n,n)=\Omega(n)$, $\Omega(0,n)=0$, $\omega(\log_2 n,n)=0$, $\omega(0,n)=\omega(n)$.

В данной работе найден верхний порядок роста функций $\Omega(k,n)$ и $\omega(k,n)$ при растущем ограничении кратности k.

Теорема 1. *Пусть $k=k(n)\to\infty$, причем $\dfrac{\log_2 k}{\log_2\log_2 n}\to A$ при $n\to\infty$, где $0\le A<1$ — некоторая постоянная величина. Тогда выполнены следующие предельные соотношения:*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\Omega(k,n)\cdot\log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right)=\frac{1}{1-A},\tag{1}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\omega(k,n)\cdot k\cdot\log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right)=\frac{1}{1-A}.\tag{2}$$

Среднее значение функций $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ представлены асимптотическими формулами (см., например, [1])

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(n)=x\ln\ln x+A_0x+\mathscr{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right),\qquad \sum_{2\le n\le x}\omega(n)=x\ln\ln x+A_1x+\mathscr{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Далее мы будем использовать асимптотическую формулу для ряда из обратных простых чисел (*вторая теорема Мерсена*, см., например, [2]):

$$\sum_{p\le x}\frac1p=\ln\ln x+B_1+\mathscr{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right).\tag{3}$$

Теорема 2. *При $k\ge1$ верны асимптотические формулы:*

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(k,n)=x\ln\ln x+C_kx+\mathscr{O}\left(k\cdot\frac{x}{\ln x}\right),\tag{4}$$

$$\sum_{2\le n\le x}\omega(k,n)=P(k+1)\cdot x+\mathscr{O}\left(\frac{(k+1)\cdot x^{\frac{1}{k+1}}}{\ln x}\right),\tag{5}$$

где $C_1=B_1-P(2)$, B_1 — постоянная, определенная формулой (3), *а при $r\ge2$*

$$C_r=B_1+\sum_{m=2}^{r}P(m)-r\cdot P(r+1),\qquad P(r)=\sum_p\frac{1}{p^r}.$$

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Без ограничения общности далее будем считать, что $k\ge1$ — целое число.

Доказательство теоремы 1. Соотношение (1) вытекает из следующих двух замечаний:

(i) верхний предел достигается на последовательности $\{(n_m)^k\}$, где $n_m=p_1\cdot\dots\cdot p_m$ — произведение последовательных простых чисел, $p_1=2$;

(ii) при любом $n<(n_m)^k$ справедливо неравенство $\Omega(k,n)<\Omega\big(k,(n_m)^k\big)$.

В силу того что

$$\ln n_m=\sum_{m\le m}\ln p_m=p_m+\mathfrak{o}(p_m),$$

из закона распределения простых чисел следует представление

$$m=\pi(p_m)=\frac{p_m}{\ln p_m}+\mathfrak{o}\left(\frac{p_m}{\ln p_m}\right)=\frac{\ln n_m}{\ln\ln n_m}+\mathfrak{o}\left(\frac{\ln n_m}{\ln\ln n_m}\right).\tag{6}$$

Тогда при $n = (n_m)^k$ получаем, что $\Omega(k,n) = k \cdot m$, причем из (6) имеем:

$$m = \frac{\log_2 n_m}{\log_2 \log_2 n_m}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k}\log_2 n}{\log_2\log_2 n - \log_2 k}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k}\log_2 n}{(1-A)\log_2\log_2 n}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big).$$

Таким образом, при $n = n(m) = (n_m)^k$ получаем:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\Omega(k,n)\cdot \log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right) = \frac{1}{1-A}.$$

Аналогично соотношение (2) вытекает из следующих двух утверждений:

(i) верхний предел достигается на последовательности $\{(n_m)^{k+1}\}$, где $n_m = p_1 \cdot \dots \cdot p_m$ — произведение последовательных простых чисел, $p_1 = 2$;

(ii) при любом $n < (n_m)^{k+1}$ справедливо неравенство $\omega(k,n) < \omega\big(k,(n_m)^k\big)$.

При $n = (n_m)^{k+1}$ имеем $\omega(k,n) = m$, где из (6) следует, что

$$m = \frac{\log_2 n_m}{\log_2 \log_2 n_m}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k+1}\log_2 n}{\log_2\log_2 n - \log_2 (k+1)}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k}\log_2 n}{(1-A)\log_2\log_2 n}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big).$$

Таким образом, при $n = n(m) = (n_m)^{k+1}$ получаем:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\omega(k,n)\cdot (k+1)\cdot \log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\omega(k,n)\cdot k\cdot \log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right) = \frac{1}{1-A}.$$

Теорема 1 доказана.

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Среднее значение (4) может быть получено путем следующих преобразований:

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(k,n) = \sum_{2\le n\le x}\sum_{\substack{p|n\\ \alpha_p\le k}}\alpha_p = \sum_{2\le p\le x}\sum_{\substack{n\le x:p|n\\ \alpha_p\le k}}\alpha_p.$$

Количество целых положительных чисел, не превосходящих x, делящихся на p^m, но не делящихся на p^{m+1}, равно

$$\left[\frac{x}{p^m}\right] - \left[\frac{x}{p^{m+1}}\right],$$

поэтому

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(k,n) = \sum_{2\le p\le x}\sum_{m=1}^{k} m\left(\left[\frac{x}{p^m}\right] - \left[\frac{x}{p^{m+1}}\right]\right) = \sum_{2\le p\le x}\left(\left(\sum_{m=1}^{k}\left[\frac{x}{p^m}\right]\right) - k\left[\frac{x}{p^{k+1}}\right]\right) =$$

$$= x\sum_{p\le x}\frac{1}{p} + x\sum_{m=2}^{k}\sum_{p\le x}\frac{1}{p^m} - kx\sum_{p\le x}\frac{1}{p^{k+1}} + \mathscr{O}\left(k\cdot\frac{x}{\ln x}\right).$$

Дробные доли здесь оценены тривиальным образом. Для рядов из степеней простых чисел в [3] определена «простая дзета-функция» (prime zeta function)

$$P(m) = \sum_{p}\frac{1}{p^m},$$

суммирование ведется по всем простым числам. При $m > 1$ ряд $P(m)$ сходится, причем

$$\sum_{2\le p\le T}\frac{1}{p^m} = P(m) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{T^{m-1}\cdot\ln T}\right). \tag{7}$$

С учетом формулы (7) получаем:

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(k,n)=x\ln\ln x+C_kx+\mathscr{O}\left(k\cdot\frac{x}{\ln x}\right),$$

где

$$C_k=B_1+\sum_{m=2}^{k}P(m)-k\cdot P(k+1).$$

Таким образом, формула (4) доказана.

Для доказательства формулы (5) запишем

$$\sum_{2\le n\le x}\omega(k,n)=\sum_{2\le n\le x}\sum_{\substack{p|n\\ \alpha_p>k}}1=\sum_{2\le p\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ p^{k+1}|n}}1=\sum_{2\le p\le x}\left[\frac{x}{p^{k+1}}\right].$$

Заметим, что при $p>x^{\frac{1}{k+1}}$ выполнено $x/p^{k+1}<1$, поэтому

$$\sum_{2\le n\le x}\omega(k,n)=\sum_{2\le p\le x^{\frac{1}{k+1}}}\left[\frac{x}{p^{k+1}}\right]=x\sum_{2\le p\le x^{\frac{1}{k+1}}}\frac{1}{p^{k+1}}+\mathscr{O}\left(\frac{x^{\frac{1}{k+1}}}{\ln x^{\frac{1}{k+1}}}\right)=$$

$$=P(k+1)\cdot x+\mathscr{O}\left(\frac{(k+1)\cdot x^{\frac{1}{k+1}}}{\ln x}\right).$$

Дробные доли мы опять оценили тривиальным образом и воспользовались соотношением (7).

Теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные теоремы оказываются полезными при исследовании верхнего порядка роста функции делителей $\tau_k(n)$ с растущей размерностью k. Напомним, что *многомерная функция делителей* $\tau_k(n)$ определяется как количество представлений натурального n в виде произведения $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k=n$, где $x_1,x_2,\ldots,x_k$ — натуральные числа. В случае $k=2$ значение функции $\tau_2(n)=\tau(n)$ равно количеству различных делителей натурального числа n. В общем случае у многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ число сомножителей k в представлении числа n будем называть ее *размерностью*.

С использованием результатов теоремы 1 автору удалось найти верхний порядок роста функции делителей при значениях размерности следующего вида:

$$k=k(n)=(\log_2 n)^{A+\mathfrak{o}(1)},$$

где A — некоторая постоянная величина. В статье [4] доказаны следующие утверждения.

(i) При $0<A<1$ и достаточно больших значениях n выполнено неравенство

$$\tau_k(n)\le n^{A+\mathfrak{o}(1)},$$

причем равенство достигается на последовательности чисел $n_m=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_m$.

(ii) При $A>1$ и достаточно больших значениях n справедливо неравенство

$$\tau_k(n)\le n^{\log_2\left(\frac{k}{\log_2 n}\right)\cdot\left(1+\mathfrak{o}(1)\right)}=n^{(A-1)\log_2\log_2 n\left(1+\mathfrak{o}(1)\right)},$$

причем равенство достигается на последовательности чисел $n_s=2^s$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. Н. Чубарикову за научное руководство.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00835).

Библиографический список

1. *Hardy G. H., Ramanujan S.* The normal number of prime factors of a number n// Quart. J. Math. 1917. Vol. 48. P. 76–92.
2. *Tanenbaum G., Mendes France M.* The prime numbers and their distribution. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2000. 115 p.
3. *Fröberg C.-E.* On the prime zeta function // BIT 8. 1968. P. 187–202.
4. *Федоров Г. В.* Верхнее предельное значение функции делителей с растущей размерностью // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 2. С. 141–143. DOI: 10.7868/S086956521327 0042.

On a Number of Prime Divisors of an Integer with Bounded Multipleness

G. V. Fjodorov

Moscow State University, Russia, 119991, Moscow, Leninskie Gory st., GSP-1, fedorov@mech.math.msu.su

In this article generalisations of numeric functions related to a number of prime divisors of a given number are investigated. Upper and lower limit values of a number of prime divisors of a bounded power of integer are obtained.

Key words: devisor function, Mersenne theorem, prime zeta function.

References

1. *Hardy G. H., Ramanujan S.* The normal number of prime factors of a number n. *Quart. J. Math.*, 1917, vol. 48, pp. 76–92.
2. Tanenbaum G., Mendes France M. *The prime numbers and their distribution*. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2000, 115 p.
3. Fröberg C.-E. On the prime zeta function. *BIT 8*. 1968. P. 187–202.
4. Fedorov G. V. The upper limit value of the divisor function with growing dimension. *Doklady Math.*, 2013, vol. 88, no. 2, pp. 529–531. DOI: 10.1134/S1064562413 050074.

УДК 512.579

КОНГРУЭНЦИИ ПОЛИГОНОВ НАД ГРУППАМИ

А. Р. Халиуллина

Аспирант кафедры высшей математики № 1, Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Зеленоград, haliullinaar@gmail.com

Получено полное описание конгруэнций полигонов над группами.

Ключевые слова: полигон, конгруэнция, группа.

ВВЕДЕНИЕ

Полигоны над полугруппой, т. е. множества, на которых действует полугруппа, возникают в разных разделах алгебры и ее приложений. Понятие полигона является алгебраическим выражением понятия автомата (см. [1] и [2, гл. 6]), точнее, автомата Мура, т.е. автомата без выхода. Теория полигонов является довольно молодым разделом общей алгебры, а теория конгруэнций полигонов вообще находится на начальной стадии развития. А. Ю. Авдеевым и И. Б. Кожуховым в [3] было дано описание полигонов над регулярными рисовскими матричными полугруппами $M^0(G, I, \Lambda, P)$ (т. е. вполне 0-простыми полугруппами). Все правые конгруэнции на этих полугруппах были описаны Р. Оэмке в [4]. Это можно считать описанием конгруэнций свободного циклического полигона над вполне 0-простой полугруппой. Описание конгруэнций произвольных полигонов над вполне 0-простыми или вполне простыми полугруппами представляется довольно сложной математической задачей. Поэтому естественно рассматривать частные случаи таких полугрупп. Данная работа делает первый шаг в построении теории конгруэнций полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами. А именно нами описаны в теоретико-множественных и теоретико-групповых терминах все конгруэнции произвольного полигона над группой. Основными результатами являются теорема 2, сводящая описание конгруэнций произвольного полигона X над группой G к описанию конгруэнций унитарного полигона XG, а также теорема 5, устанавливающая общий вид конгруэнций унитарного полигона над группой.

Напомним, что *полигон* над полугруппой S или S-полигон (см. [5]) — это множество X, на котором задано действие полугруппы S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Всякая полугруппа является полигоном над собой относительно действия $S \times S \to S$, $(a, b) \mapsto ab$. Этот полигон мы будем обозначать S_S. *Конгруэнцией полигона* X над полугруппой S называется такое отношение эквивалентности ρ на X, что $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$ при всех $x, y \in X$, $s \in S$. Очевидно, конгруэнции полигона S_S — это в точности правые конгруэнции полугруппы S.

Если полугруппа S имеет единицу e и для S-полигона X выполняется равенство $xe = x$ при $x \in X$, то полигон X называется *унитарным*.

Если G — группа, то описание конгруэнций полигона G_G хорошо известно. А именно пусть H — подгруппа группы G, не обязательно нормальная. Обозначим через G/H множество правых смежных классов Hg, где $g \in G$. Положим $\theta_H = \{(a, b) \in G \times G \,|\, Ha = Hb\}$. Нетрудно видеть, что θ_H является правой конгруэнцией группы G. Кроме того, любая правая конгруэнция ρ на группе G имеет вид $\rho = \theta_H$, где H — некоторая подгруппа группы G. То есть разбиение на классы правой конгруэнции — это в точности разбиение группы G на правые смежные классы по некоторой подгруппе.

1. СВЕДЕНИЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛИГОНА НАД ГРУППОЙ К КОНГРУЭНЦИЯМ УНИТАРНОГО ПОЛИГОНА

Пусть X — полигон над группой G с единицей e. Очевидно, $Y = XG = Xe$ — унитарный подполигон полигона X. Описание произвольных полигонов (в нашем случае — это X) сводится к унитарным полигонам (здесь — Y), как показывает следующее утверждение.

Предложение 1 [6, теорема 4]. *Пусть Y — унитарный полигон над группой G, A — произвольное множество такое, что $A \cap Y = \varnothing$, и $\varphi : A \to Y$ — произвольное отображение. Определим умножение элементов $a \in A$ на элементы $g \in G$ следующим образом: $a \cdot g = \varphi(a)g$. Тогда множество $X = Y \cup A$ будет являться G-полигоном. Кроме того, всякий G-полигон может быть получен таким образом.*

Заметим, что в условиях предложения 1 мы имеем $\varphi(a) = ae$ для всех $a \in A$.

Теперь мы можем описать все конгруэнции полигона над группой при условии, что известны конгруэнции унитарного полигона.

Теорема 2. *Пусть X — произвольный полигон над группой G. По предложению 1 мы можем считать, что $X = Y \cup A$, $Y = Xe$ (e — единица группы G), $A \cap Y = \varnothing$. Пусть $\varphi : A \to Y$ — отображение такое, что $\varphi(a) = ae$ при всех $a \in A$. Пусть ρ — конгруэнция полигона Y и $\{K_i \,|\, i \in I\}$ — множество классов конгруэнции ρ. Выберем в каждом множестве $\varphi^{-1}(K_i)$ какое-либо подмножество Z_i (возможно, пустое) и разобьём оставшееся множество $\varphi^{-1}(K_i) \backslash Z_i$ на какие-либо подмножества: $\varphi^{-1}(K_i) \backslash Z_i = \bigcup_{j \in J_i} \widetilde{K_{ij}}$. Положим $\widetilde{K_i} = K_i \cup Z_i$,*

$$\widetilde{\rho} = \bigcup_i (\widetilde{K_i} \times \widetilde{K_i}) \cup \bigcup_i \bigcup_{j \in J_i} (\widetilde{K_{ij}} \times \widetilde{K_{ij}}). \quad (1)$$

Тогда $\widetilde{\rho}$ — конгруэнция полигона X. Кроме того, любая конгруэнция полигона X получается таким образом.

Доказательство. Докажем вначале, что отношение $\widetilde{\rho}$, определённое по формуле (1), является конгруэнцией на X. Очевидно, $\widetilde{\rho}$ — отношение эквивалентности, причём $\widetilde{\rho} \supseteq \rho$. Пусть $(u, v) \in \widetilde{\rho}$ и $g \in G$. Если $u, v \in \widetilde{K_i}$, то $ue, ve \in K_i$, откуда $(ue, ve) \in \rho$, а значит, $(ug, vg) = (ue, ve)g \in \rho \subseteq \widetilde{\rho}$. Если $u, v \in K_{ij}$, то также $(ug, vg) \in \widetilde{\rho}$.

Теперь нужно доказать, что любая конгруэнция на X имеет вид (1). Пусть σ — конгруэнция полигона X. Ясно, что $\rho = \sigma \cap (Y \times Y)$ — конгруэнция на Y.

Рассмотрим произвольный класс K_i конгруэнции ρ. Пусть $Z_i = \{a \in A \,|\, \exists x \in K_i, (x,a) \in \sigma\}$. Докажем, что $Z_i \subseteq \varphi^{-1}(K_i)$. Имеем: $(x,a) \in \sigma$, откуда $(xe, ae) \in \sigma$. Так как $xe = x$, то $(x, ae) \in \sigma$, поэтому $ae \in K_i$. Мы видим, что $a \in \varphi^{-1}(K_i)$. Осталось доказать, что любые σ-эквивалентные элементы $a, b \in A$ лежат в одном каком-либо множестве $\varphi^{-1}(K_i)$. Предположим, что $\varphi(a) \in K_i$, а $\varphi(b) \in K_j$. Тогда будем иметь: $ae \in K_i$, $be \in K_j$. Так как $(a,b) \in \sigma$, то $(ae, be) \in \sigma$. Но $ae, be \in Y$, поэтому $(ae, be) \in \rho$. Это означает, что $i = j$. □

2. КОНГРУЭНЦИИ УНИТАРНОГО ПОЛИГОНА НАД ГРУППОЙ

Пусть S — полугруппа и $\mathscr{F} = \{X_i \,|\, i \in I\}$ — семейство S-полигонов. Определим понятие копроизведения полигонов X_i. Мы можем считать, что полигоны X_i не имеют попарных пересечений, т.е. $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (если это не так, то следует вместо X_i взять их изоморфные попарно не пересекающиеся копии). Тогда множество $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ будет называться *копроизведением* полигонов X_i, умножение на элементы подгруппы S осуществляется очевидным образом: если $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$ и $s \in S$, то $x \in X_i$ при каком-то $i \in I$; полагаем xs равным произведению $x \cdot s$ в X_i. Копроизведение полигонов X_i обозначается следующим образом: $\coprod\limits_{i \in I} X_i$.

Пусть G — группа с единицей e, X — полигон над G. Тогда $X = Xe \cup (X \backslash Xe)$. Нетрудно проверить, что Xe — унитарный подполигон полигона X.

Лемма 3. *Если G — группа, H — её подгруппа, то G/H — унитарный циклический G-полигон. Кроме того, всякий унитарный циклический полигон над группой G изоморфен одному из полигонов G/H, где H — подходящая подгруппа группы G.*

Доказательство. Полигон G/H унитарный, так как $Hg \cdot e = Hg$, если e — единица группы G. Элемент He — образующий этого полигона, так как $He \cdot g = Hg$ для любого $g \in G$. Следовательно, G/H циклический.

Пусть X — произвольный унитарный циклический G-полигон. Тогда $X = x_o G$, где x_o — образующий элемент. Рассмотрим отображение $\varphi : G \to X$, $g \mapsto x_o g$. Очевидно, оно является гомоморфизмом G-полигонов. По теореме об изоморфизме $G/\ker\varphi \cong X$. Так как G — группа, то всякая правая конгруэнция на G определяется некоторой подгруппой H. Таким образом, $G/H \cong X$. □

Также просто определяются все конгруэнции унитарного циклического полигона над группой.

Лемма 4. *Пусть G — группа, H — её подгруппа. Если H' — подгруппа группы G такая, что $H' \supseteq H$, то отношение $\rho_{H'} = \{(Ha, Hb) \,|\, H'a = H'b\}$ является конгруэнцией полигона G/H. Кроме того, всякая конгруэнция полигона G/H совпадает с одной из конгруэнций $\rho_{H'}$.*

Доказательство очевидно. □

Рассмотрим теперь произвольные унитарные полигоны над группой. Пусть X — унитарный G-полигон (G — группа). *Орбитой* элемента $x \in X$ назовём множество $xG = \{xg \,|\, g \in G\}$ (см. [7, § 11a], где орбиты названы системами транзитивности). Множество X является объединением непересекающихся орбит. Всякая орбита является унитарным циклическим G-полигоном. Поэтому $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$, X_i — орбиты. По лемме 3 $X_i \cong G/H_i$, где H_i — подгруппа группы G. Таким образом, всякий унитарный полигон над группой G изоморфен копроизведению $\coprod\limits_{i \in I} G/H_i$, где H_i — подгруппы.

Следующая теорема описывает все конгруэнции произвольного унитарного полигона над группой.

Теорема 5. *Пусть G — группа, H_i $(i \in I)$ — её подгруппы, $X = \coprod\limits_{i \in I} G/H_i$. Пусть задано отношение эквивалентности σ на множестве индексов I, для каждого $i \in I$ задана подгруппа $H'_i \supseteq H_i$ группы G, для каждой пары $(i,j) \in \sigma$ заданы элементы $a_{ij} \in G$, причём $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$, $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$ и $H'_j = a_{ij}^{-1} H'_i a_{ij}$. Тогда*

$$\rho = \{(H_i b, H_j c) \,|\, b, c \in G \text{ и } c \in H'_j a_{ij}^{-1} b\} \tag{2}$$

— конгруэнция полигона X. Кроме того, всякая конгруэнция полигона X имеет вид (2).

Доказательство. Положим $X_i = G/H_i$. Проверим, что отношение ρ, определённое по формуле (2), является конгруэнцией. Из соотношений $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ следует, что $a_{ii} = e$ при всех $i \in I$ (здесь e — единица группы G), поэтому ρ рефлексивно.

Докажем, что ρ симметрично. Пусть $(H_ib, H_jc) \in \rho$, т.е. $c \in H'_j a_{ij}^{-1} b$. Тогда $c = h a_{ij}^{-1} b$, где $h \in H'_j$, откуда $b = a_{ij} h^{-1} c = a_{ij} h^{-1} a_{ij}^{-1} a_{ij} c \in a_{ij} H'_j a_{ij}^{-1} a_{ij} c = H'_i a_{ji}^{-1} c$, а значит, $(H_jc, H_ib) \in \rho$. Следовательно, ρ симметрично. Пусть (H_ib, H_jc), $(H_jc, H_kd) \in \rho$. Тогда $c \in H'_j a_{ij}^{-1} b$ и $d \in H'_k a_{jk}^{-1} c$. Отсюда получаем:

$$d \in H'_k a_{jk}^{-1} H'_j a_{ij}^{-1} b = H'_k a_{jk}^{-1} H'_j a_{jk} a_{jk}^{-1} a_{ij}^{-1} b = H'_k H'_k (a_{ij} a_{jk})^{-1} b = H'_k a_{ik}^{-1} b,$$

т.е. $(H_ib, H_kd) \in \rho$, а значит, ρ транзитивно. Из определения (2) следует, что

$$(H_ib, H_jc) \in \rho \Rightarrow (H_ibg, H_jcg) \in \rho$$

при любом $g \in G$. Таким образом, ρ является конгруэнцией.

Осталось доказать, что любая конгруэнция полигона X имеет вид (2). Пусть τ — конгруэнция. Положим $\tau_i = \tau|_{X_i}$. Тогда τ_i — конгруэнция на X_i. Так как $X_i = G/H_i$, то по лемме 4 существует подгруппа $H'_i \supseteq H_i$ такая, что $\tau_i = \{(H_ib, H_ic) \,|\, H'_ib = H'_ic\}$. Рассмотрим на множестве индексов I отношение σ, где $(i,j) \in \sigma \Leftrightarrow \exists\, x \in X_i\ \exists\, y \in X_j\ (x,y) \in \tau$. Очевидно, σ — отношение эквивалентности.

Пусть $(i,j) \in \sigma$ и $i \neq j$. Тогда существует τ-класс, пересекающийся с X_i и X_j. Рассмотрим группу $\hat{G}$, изоморфную группе G при изоморфизме $g \mapsto \hat{g}$, причём $G \cap \hat{G} = \varnothing$. Для удобства будем считать, что $X_i = G/H_i$, $X_j = \hat{G}/\widehat{H_j}$. Для элементов $H_ib, H_ic \in X_i$ имеем: $(H_ib, H_ic) \in \tau \Leftrightarrow (H_ib, H_ic) \in \tau_i \Leftrightarrow H'_ib = H'_ic$. Аналогично $(\widehat{H_j}\hat{b}, \widehat{H_j}\hat{c}) \in \tau \Leftrightarrow H'_jb = H'_jc$.

Пусть $(H_iu, \widehat{H_j}\hat{v}) \in \tau$. Тогда $(H_i, \widehat{H_j}\widehat{vu^{-1}}) \in \tau$. Положим $a = uv^{-1}$. Тогда $(H_i, \widehat{H_j}\widehat{a^{-1}}) \in \tau$. Возьмем любой элемент $h \in H'_i$. Тогда $(H_ih, \widehat{H_j}\widehat{a^{-1}}) \in \tau$, откуда $(H_i, \widehat{H_j}\widehat{a^{-1}h^{-1}}) \in \tau$. Отсюда получаем: $H'_ja^{-1} = H'_ja^{-1}h^{-1}$. Это влечёт, что $h \in aH'_ja^{-1}$, а значит, $H'_i \subseteq aH'_ja^{-1}$. Аналогично доказывается обратное включение. Таким образом, $H'_i = aH'_ja^{-1}$.

Для произвольных элементов $p, q \in G$ имеем:

$$(H_ip, \widehat{H_j}\hat{q}) \in \tau \Leftrightarrow (H_i, \widehat{H_j}\widehat{qp^{-1}}) \in \tau \Leftrightarrow H'_ja^{-1} = H'_jqp^{-1} \Leftrightarrow q \in H'_ja^{-1}p.$$

Пусть K — произвольный класс эквивалентности отношения σ. Зафиксируем элемент $i \in K$. Для $j \in K$ обозначим через a_{ij} какой-нибудь элемент такой, что $H'_j = a_{ij}^{-1} H'_i a_{ij}$. Положим $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$. Для $j, k \in K$ положим $a_{jk} = a_{ij}^{-1} a_{ik}$. Тогда будем иметь

$$H'_k = a_{ik}^{-1} H'_i a_{ik} = (a_{ij} a_{jk})^{-1} H'_i a_{ij} a_{jk} = a_{jk}^{-1} a_{ij}^{-1} H'_i a_{ij} a_{jk} = a_{jk}^{-1} H'_i a_{jk}.$$

Таким образом, все требуемые условия для эквивалентности a_{ij} выполняются. Кроме того, имеем: $(H_ib, H_ic) \in \tau \Leftrightarrow c \in H'_j a_{ij}^{-1} b$, поэтому $\tau = \rho$. □

Из только что доказанной теоремы можно получить общий вид всех фактор-полигонов произвольного унитарного полигона над группой.

Следствие. *Пусть* $X = \coprod_{i \in I} G/H_i$, ρ — *конгруэнция на* X. *Пусть* σ — *отношение эквивалентности на* I, *участвующее в формулировке теоремы 5. Выберем из каждогоσ-класса по одному элементу. Обозначим это множество представителей через* M. *Тогда* $X/\rho \cong \coprod_{i \in M} G/H'_i$.

Библиографический список

1. *Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Ушчумлич Ш.* Введение в теорию абстрактных автоматов. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985. 176 с.

2. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М. : Мир, 1985. 440 с.

3. *Avdeev A. Yu., Kozhuhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernet. 2000. Vol. 14, № 4. P. 523–531.

4. *Ohemke R. H.* Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups // Pacif. J. Math. 1974. Vol. 54, № 2. P. 143–164.

5. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and cathegories. Berlin; N. Y., 2000. 529 с.
6. *Максимовский М. Ю.* О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 6. С. 855–866.
7. *Курош А. Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967. 648 с.

Congruences of Acts over Groups

A. R. Khaliullina

National Research University of Electronic Technology (MIET), Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, pass. 4806, 5, haliullinaar@gmail.com

A complete description of the congruences of acts over groups is obtained.

Key words: act, congruence, group.

References

1. Kudriavtsev V. B., Podkolzin A. S., Ushchumlich Sh. *Vvedenie v teoriiu abstraktnykh avtomatov* [Introdunction in abstract automata theory]. Moscow, MGU, 1985, 176 p. (in Russian).
2. Lallement G. *Semigroups and combinatorial applications*. New York, Wiley, 1979, 376 p.
3. Avdeev A. Yu., Kozhuhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups. *Acta Cybernet*, 2000, vol. 14, no. 4. pp. 523–531.
4. Ohemke R. H. Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups. *Pacif. J. Math.*, 1974, vol. 54, no. 2. pp. 143–164.
5. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. *Monoids, acts and cathegories*. Berlin, New York, 2000. 529 p.
6. Maksimovskii M. Yu. Bipolygons and multipolygons over semigroups. *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 5–6, pp. 834–843.
7. Kurosh A. G. *Teoriia grupp* [Group theory]. Moscow, Nauka, 1967, 648 p. (in Russian).

УДК 512.554+512.643

О СВОЙСТВАХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

О. О. Щекатурова[1], В. А. Ярошевич[2]

[1]Аспирант кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ot-vna@mail.ru
[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 1, Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, v-yaroshevich@ya.ru

Рассматривается частичная полугруппа булевых матриц конечных размеров относительно операций конъюнктного и дизъюнктного умножений. Получена оценка соотношения числа векторов в строчном и столбцовых базисах. Найдены предминимальный, а также предпредминимальный и предмаксимальный в обобщённом смысле $\mathscr{D}$-классы. Исследуются свойства вторичных идемпотентов. Предложена гипотеза рекурсивного построения приведённых матриц.

Ключевые слова: булева матрица, конъюнктное произведение, дизъюнктное произведение, строчная оболочка, столбцовая оболочка, строчный ранг, столбцовый ранг, приведённая матрица, классы Грина, первичный идемпотент, вторичный идемпотент.

ВВЕДЕНИЕ

Назовём $\cup$ — *объединением*, $\cap$ — *пересечением*, а $'$ — *дополнением*. Обозначим $\langle \mathbf{M}_{m\times n}, \cup, \cap, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ алгебру булевых $m\times n$ матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$. Операции $\cap$, $\cup$ и $'$ определяются для матриц поэлементно. Матрицы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, образованные целиком из нулей и единиц соответственно, дают нуль и единицу такой вторичной булевой алгебры. Для краткости вместо $\mathbf{M}_{n\times n}$ будем писать $\mathbf{M}_n$. Пусть символ $\mathbf{M}$ обозначает множество всех матриц конечных размеров, то есть $\mathbf{M} = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_{m\times n}$. В дальнейшем, если специально не оговорено, мы полагаем, что исходная булева алгебра двухэлементна, то есть $\mathbf{B} = \{0, 1\}$.

Матрицу $C = A \sqcap B \in \mathbf{M}_{m\times p}$ с элементами $c_{ij} = \bigcup_{k=1}^{m} (a_{ik} \cap b_{kj})$ назовём *конъюнктным произведением* матриц согласованных размеров $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ и $B \in \mathbf{M}_{n\times p}$. *Дизъюнктное произведение* $A \sqcup B$, определяется дуальным образом: $A \sqcup B = (A' \sqcap B')'$. Введём частичный порядок на множестве булевых векторов длины n: будем писать $(a_1,\dots,a_n) \leqslant (b_1,\dots,b_n)$, если $a_k \leqslant b_k$ при $k = 1,2,\dots,n$.

Обозначим i-ю строку матрицы A через A_{i*}, аналогично j-й столбец через A_{*j}. Рассмотрим линейную оболочку строк матрицы:

$$R(A) = L(A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{n*}) = \{(\lambda^1 \cap A_{1*}) \cup (\lambda^2 \cap A_{2*}) \cup \dots \cup (\lambda^n \cap A_{n*})\},$$

где $\lambda^k \in \mathbf{B}$, $k = 1,2,\dots,n$. Аналогично определим линейную оболочку $C(A)$ столбцов матрицы. В работе [1, теорема 1.2.3] доказано, что $|R(A)| = |C(A)|$.

В множестве $R(A)$ ($C(A)$) можно выделить набор ненулевых векторов, которые нельзя выразить в виде линейной комбинации других векторов из $R(A)$ ($C(A)$). Такие вектора образуют *базис* линейной оболочки $R(A)$ ($C(A)$). В случае двухэлементной булевой алгебры базис определяется однозначно [1, теорема 1.1.1]. Количество векторов в базисе оболочки $R(A)$ ($C(A)$) называется строчным (столбцовым) рангом и обозначается $\rho_r A$ ($\rho_c A$). Назовём матрицу A размера $m \times n$ *приведённой*, если $\rho_c A = m$ и $\rho_r A = n$.

1. РАНГИ

Теорема 1 (Батлер [2, теорема 5]). *Пусть* $A \in \mathbf{M}_n$, *тогда* (i) $\rho_r A = 1 \;\Leftrightarrow\; \rho_c A = 1$, (ii) $\rho_r A = 2 \;\Leftrightarrow\; \rho_c A = 2$, (iii) $\rho_r A = 3 \;\Rightarrow\; 3 \leqslant \rho_c A \leqslant 4$.

Возникает вопрос: в каком диапазоне может изменяться $\rho_c A$ при фиксированном $\rho_r A$? Для ответа рассмотрим в булевом кубе $\mathbf{B}^m$ из векторов длины m максимальные антицепи. Среди них выберем антицепи, которые содержат наибольшее количество векторов. В полученном множестве антицепей выберем ту антицепь $\mathfrak{A}$, вектора которой содержат больше единиц. Векторы антицепи имеют длину m и состоят из $\lfloor m/2 \rfloor$ нулей и $m - \lfloor m/2 \rfloor$ единиц. Заменим любой вектор из $\mathfrak{A}$ на любые два, ему предшествующие. Векторы в полученном множестве $\widetilde{\mathfrak{A}}$ будем рассматривать как вектор-столбцы и объединим их в матрицу размера $m \times |\widetilde{\mathfrak{A}}|$. В результате получится приведённая матрица A, ранги которой дают ответ на поставленный вопрос:

$$\rho_r A = m, \quad \rho_c A = |\widetilde{\mathfrak{A}}| = C_m^{\lfloor m/2 \rfloor} - 1 + 2 = \frac{m!}{\lfloor m/2 \rfloor! \cdot (m - \lfloor m/2 \rfloor)!} + 1 \overset{m\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^m}{\sqrt{m}}.$$

Рассмотрим некоторые примеры приведённых матриц размера $m \times n$, которые будут использованы в дальнейшем.

$$\widehat{E}_m = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{1} & & 1 \end{array}} \qquad E_m = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{array}} \qquad Q_m = \begin{array}{|c|c|} \hline E_{m-1} & E_{m-1} \\ \hline 1\ 1\ \cdots\ 1 & 0\ 0\ \cdots\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$m = n$, $|R(\widehat{E}_m)| = m + 1$; $\qquad$ $m = n$, $|R(E_m)| = 2^m$; $\qquad$ $n = 2m - 2$, $|R(A)| = 2^m - 1$.

2. КЛАССЫ ГРИНА

В этой работе символы $\mathscr{D}$ и $\mathscr{J}$ будут обозначать отношения Грина на полугруппе $\mathbf{M}_n$ (см. [3, гл. 2]). В силу конечности полугруппы $\mathbf{M}_n$ справедливо равенство $\mathscr{D} = \mathscr{J}$. В связи с этим будем в дальнейшем говорить только о $\mathscr{D}$-классах. $\mathscr{D}$-класс, содержащий матрицу A, будем обозначать D_A. Так как $\mathscr{D} = \mathscr{J}$, то множество всех $\mathscr{D}$-классов можно упорядочить в смысле естественно возникающего частичного порядка на множестве главных идеалов: $D_A \leqslant D_B \;\Leftrightarrow\; \exists\, X, Y : \; A = XBY$.

Считаем, что $D_A < D_B \;\Leftrightarrow\; D_A \leqslant D_B$ и $D_A \neq D_B$. Несложно проверить, что фактор-множество множества $\mathbf{M}_n$ по отношению $\mathscr{D}$ не является решёткой при $n > 2$.

Наряду с рассмотрением множества $\mathbf{M}_n$ всех (не только приведённых) квадратных матриц, естественным будет рассмотрение множества матриц $\mathbf{M}_{(\leqslant n)\times(\leqslant n)}$ произвольного размера $p \times q$, где $\max\{p, q\} \leqslant n$. Множество таких матриц образует частичную полугруппу. Как отмечено в [4], на этой частичной полугруппе можно рассматривать отношения Грина так же, как на обычной полугруппе.

Теорема 2. *Обозначим:* $D_1 = \mathscr{D}(0)$, $D_2 = \mathscr{D}(1)$, $D_3 = \mathscr{D}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. *Тогда для любого $\mathscr{D}$-класса D, отличного от D_1, D_2 и D_3, справедливо соотношение* $D_1 < D_2 < D_3 < D$.

Доказательство. Для любых двух $\mathscr{D}$-классов D' и D'' имеет место эквивалентность:

$$(D' \leqslant D'') \;\Leftrightarrow\; (\forall\ A' \in D',\ \forall\ A'' \in D'',\ \exists\ X, Y:\ A' = XA''Y).$$

Очевидно, что в последнем выражении в качестве A' и A'' достаточно рассматривать не все матрицы из D' и D'', а лишь приведённые. Дальнейшие рассуждения будем проводить, выбирая в качестве представителей $\mathscr{D}$-классов только приведённые матрицы.

В силу теоремы 1 приведённая матрица размера $m \times n$, где $m, n \leqslant 2$, может иметь размер либо 1×1, либо 2×2. Несложно проверить, что с точностью до перестановки строк и столбцов существует всего 4 приведённые матрицы таких размеров:

$$(0) \in D_1, \quad (1) \in D_2, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in D_3, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \notin D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

Все остальные приведённые матрицы ввиду теоремы 1 имеют размер $m \times n$ такой, что $m, n \geqslant 3$.

Очевидно, что $(0) = (0)(1)(0)$ и $(1) = (1\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Это доказывает неравенства $D_1 \leqslant D_2 \leqslant D_3$. Рассмотрим соотношение $D_3 \leqslant D$. Пусть A — любая приведённая матрица, не принадлежащая множеству $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Такая матрица A есть либо $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, либо A должна иметь размер $m \times n$, где $m, n \geqslant 3$. Нужно показать, что найдутся матрицы X и Y, для которых $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = XAY$. В первом случае имеем: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Пусть теперь A имеет размер $m \times n$, где $m, n \geqslant 3$. Рассмотрим матрицу E_m^{ij}, которая отличается от единичной матрицы E_m лишь тем, что $e_{ii} = e_{jj} = 0$ и $e_{ij} = e_{ji} = 1$. Очевидно, что умножение A слева на E_m^{ij} равносильно перестановке i-ой и j-ой строк матрицы A. Аналогично, умножение A справа на E_m^{ij} равносильно перестановке i-го и j-го столбцов матрицы A.

В приведённой матрице A все строки попарно различные, то есть любые две строки отличаются хотя бы в одной позиции. Во всякой приведённой матрице A, где количество строк и столбцов не меньше 3, найдутся две строки с номерами k и l, а также два столбца с номерами s и t такие, что матрица A представима в виде $A^{(u)}$, $u = 1, 2, \ldots, 6$:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = E_m^{kl}A^{(1)}, \quad A^{(4)} = E_m^{kl}A^{(2)}, \quad A^{(5)} = A^{(2)}E_m^{st}, \quad A^{(6)} = E_m^{kl}A^{(2)}E_m^{st}.$$

Отметим, что матрица A может иметь одновременно несколько представлений в виде $A^{(u)}$, $u = 1, 2, \ldots, 6$, но нам достаточно любого из них. Далее матрицу $A^{(u)}$, $u = 1, 2, \ldots, 6$ можно привести к виду $A_2^{(u)}$, $u = 1, 2$:

$$A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} \end{pmatrix}.$$

Это можно осуществить с помощью преобразований

$$\begin{aligned} A_2^{(1)} &= (E_m^{1k}E_m^{2l})A^{(1)}(E_m^{1s}E_m^{2t}), \quad & A_2^{(2)} &= (E_m^{1k}E_m^{2l})A^{(2)}(E_m^{1s}E_m^{2t}), \\ A_2^{(1)} &= (E_m^{1l}E_m^{2k})A^{(3)}(E_m^{1s}E_m^{2t}), \quad & A_2^{(2)} &= (E_m^{1l}E_m^{2k})A^{(4)}(E_m^{1s}E_m^{2t}), \\ A_2^{(2)} &= (E_m^{1k}E_m^{2l})A^{(5)}(E_m^{1t}E_m^{2s}), \quad & A_2^{(2)} &= (E_m^{1l}E_m^{2k})A^{(6)}(E_m^{1t}E_m^{2s}). \end{aligned}$$

Обозначая произведения матриц в скобках справа и слева от $A^{(u)}$, $u = 1, 2, \dots, 6$ соответственно $X_1^{(u)}$ и $Y_1^{(u)}$, получаем, что $A_2 = X_1^{(u)}A^{(u)}Y_1^{(u)}$. Пусть

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad Y_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top.$$

Если $A_2 = A_2^{(1)}$, то $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X_2A_2^{(1)}Y_2^{(1)}$. Иначе, если $A_2 = A_2^{(2)}$, то $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X_2A_2^{(2)}Y_2^{(2)}$. В итоге, опуская верхний индекс в обозначениях матриц, запишем $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (X_2X_1)A(Y_1Y_2) = XAY$, где X и Y равны соответствующим выражениям в скобках слева и справа от A.

Для завершения доказательства покажем, что $D_1 \neq D_2 \neq D_3 \neq D$. Этим будет установлено, что $D_1 < D_2 < D_3 < D$. Действительно, приведённые матрицы в указанных четырёх $\mathscr{D}$-классах невозможно перевести друг в друга, меняя местами строки и столбцы. □

Теорема 3. *Пусть $m \geqslant 3$. Для любого $\mathscr{D}$-класса D, отличного от D_{Q_m} и D_{E_m}, с приведённой матрицей размера $p \times q$, где $p \leqslant m$, справедливо неравенство $D < D_{Q_m} < D_{E_m}$.*

Доказательство. Неравенство $D_{Q_m} < D_{E_m}$ верно, так как $Q_m = E_m \cdot E_m \cdot Q_m$ и $D_{Q_m} \neq D_{E_m}$. Пусть теперь D — некоторый $\mathscr{D}$-класс, отличный от D_{Q_m} и D_{E_m}, с приведённой матрицей A размера $p \times q$, где $p \leqslant m$. Докажем, что $A = XQ_mY$ для некоторых матриц X и Y.

Обозначим через A_1 матрицу A вместе с дописанными к ней снизу $m - p$ нулевыми строками. Очевидно, $A_1 = X_1A$, где X_1 — матрица размера $m \times p$, у которой единицы стоят только на главной диагонали и остальные элементы равны нулю.

Пусть e_k — вектор-столбец, содержащий только одну единицу в позиции с номером k. В линейной оболочке столбцов матрицы Q_m, очевидно, отсутствует только один вектор-столбец e_m. Следовательно, $C(Q_m) = \{0, 1\}^m \backslash \{e_m\}$. Возможны два случая:

(i) $e_m \notin C(A_1)$ или, что то же самое, $C(A_1) \subseteq C(Q_m)$. Умножая справа матрицу Q_m на некоторый вектор-столбец u, мы получим один из векторов w линейной оболочки $C(Q_m)$. Причём w равен объединению в точности тех столбцов матрицы Q_m, на позициях которых стоят единицы вектора u. Ясно, что, вычисляя последовательно столбцы Y_{*j}, $j = 1, \dots, q$ матрицы Y и требуя выполнения $(A_1)_{*j} = Q_mY_{*j}$, получим всю матрицу Y. В итоге получится, что

$$A = \boxed{E_p \;\Big|\; \mathbf{0}_{p\times(m-p)}}\,A_1 = \boxed{E_p \;\Big|\; \mathbf{0}_{p\times(m-p)}}\,Q_mY.$$

(ii) $e_m \in C(A_1)$. Так как $D_{A_1} < D_{E_m}$, то в A_1 не могут быть представлены все вектор-столбцы e_i, $i = 1, 2, \dots, m$ длины m. Найдётся номер k такой, что столбец e_k не входит в A_1. Рассмотрим матрицу $A_2 = E_m^{km}A_1$. Для неё выполняется $C(A_2) \subseteq C(Q_m)$ и аналогично случаю (i) найдётся матрица Y такая, что $A_2 = Q_mY$. Так как $(E_m^{km})^2 = E_m$, то $A_1 = E_m^{km}Q_mY$. В итоге получаем:

$$A = \boxed{E_p \;\Big|\; \mathbf{0}_{p\times(m-p)}}\,A_1 = \left(\boxed{E_p \;\Big|\; \mathbf{0}_{p\times(m-p)}}\,E_m^{km}\right)Q_mY. \qquad \square$$

На основании теорем 2 и 3 назовём класс $\mathscr{D}(1)$ *предминимальным*, а класс $\mathscr{D}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ — *пред-предминимальным*, класс D_{Q_m} назовём *предмаксимальным в обобщённом смысле*. Действительно, всякий $\mathscr{D}$-класс с приведённой матрицей A размера $p \times q$, $\min\{p,q\} \leqslant m$ меньше либо равен D_{Q_m} или $D_{Q_m^\top}$.

3. ИДЕМПОТЕНТЫ

Поплавский [4, теорема 4.1] доказал, что матрицы $A \sqcup A'^\top$, $A'^\top \sqcup A$, $A^\top \sqcup A'$, $A' \sqcup A^\top$ являются идемпотентами в полугруппе $\langle \mathbf{M}, \sqcap \rangle$ с операцией конъюнктного произведения $\sqcap$. Обозначим $i(A) = A \sqcup A'^\top$, то есть мы будем рассматривать лишь идемпотенты, полученные по первой формуле. Для других формул теория не будет иметь принципиальных отличий. Утверждение Поплавского о том, что $i(i(A)) = i(A)$, позволяет естественным образом ввести понятия *первичного идемпотента*, то есть идемпотента X, для которого $X \neq i(X)$, и *вторичного идемпотента*, то есть идемпотента X, для которого $X = i(X)$.

Следующие утверждения очевидны, поэтому их доказательства мы не приводим.

Лемма 4. *Перестановка двух столбцов матрицы A не меняет значения $i(A)$. Перестановка двух строк с номерами s и t матрицы A приводит к перестановке строк с номерами s и t, а также столбцов с номерами s и t матрицы $i(A)$.*

Лемма 5. *Пусть A — матрица размера $m \times n$, тогда $i(A) = \bigcap_{k=1}^{n} i(A_{*k})$.*

Заметим, что матрице A размера $m \times n$ соответствует идемпотент $i(A)$ размера $m \times m$. Интересен вопрос: для каких матриц A и B справедливо равенство $i(A) = i(B)$?

Теорема 6. *Если для двух матриц $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ и $B \in \mathbf{M}_{m\times p}$ с элементами из произвольной булевой алгебры $\mathbf{B}$ имеет место равенство $C(A) \cup \mathbf{1}_{n\times 1} = C(B) \cup \mathbf{1}_{n\times 1}$, где $\mathbf{1}_{n\times 1}$ обозначает вектор-столбец длины n, состоящий из единиц, то $i(A) = i(B)$.*

Доказательство. Случай $C(A) = C(B)$ был разобран в [4, теорема 4.4]. Рассмотрим случай $C(A) = C(B) \cup \mathbf{1}_{n\times 1}$. Ясно, что столбцовый базис матрицы A отличается от столбцового базиса матрицы B присутствием единичного столбца. Обозначим через $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ матрицы, образованные векторами столбцовых базисов матриц A и B соответственно. Очевидно $i(A) = i(\widetilde{A})$ и $i(B) = i(\widetilde{B})$. Так как перестановка столбцов любой матрицы C не влияет на значение $i(C)$, то можно считать, что $\widetilde{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \widetilde{B} & \mathbf{1}_{n\times 1} \\ \hline\end{array}$. Обозначим $X = i(\widetilde{A})$ и $Y = i(\widetilde{B})$. Для элемента матрицы X справедливо

$$x_{ij} = \begin{array}{|c|c|}\hline \widetilde{B}_{i*} & 1 \\ \hline\end{array} \sqcup \begin{array}{|c|}\hline (\widetilde{B}_{j*})'^\top \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} = \left(\bigcap_{k=1}^{n} \widetilde{b}_{ik} \cup \widetilde{b}'_{jk}\right) \cap (0 \cup 1) = \bigcap_{k=1}^{n} \widetilde{b}_{ik} \cup \widetilde{b}'_{jk} = y_{ij}.$$

Следовательно, $X = Y$ или $i(\widetilde{A}) = i(\widetilde{B})$. Окончательно $i(A) = i(B)$. Аналогично рассматриваются случаи $C(A) \cup \mathbf{1}_{n\times 1} = C(B)$ и $C(A) \cup \mathbf{1}_{n\times 1} = C(B) \cup \mathbf{1}_{n\times 1}$. □

Справедливо ли утверждение теоремы в обратную сторону, пока неизвестно.

4. РЕКУРСИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПРИВЕДЁННЫХ МАТРИЦ

Компьютерные вычисления показывают, что *все* приведённые матрицы размера 4×4 можно получить, используя *все* приведённые матрицы размера 3×3 за счёт дописывания специально подобранного столбца и строки. На этом основании мы выдвигаем гипотезу.

Гипотеза. *Всякую приведённую матрицу размера $(n+1)\times(n+1)$ можно получить из некоторой приведённой матрицы размера $n \times n$ дописыванием специально подобранного столбца и строки.*

Пусть A — приведённая матрица. Ниже показаны два частных случая рекурсивного построения приведённых матриц:

$$B = \begin{array}{|c|c|}\hline A & \mathbf{1}_{n\times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1\times n} & 1 \\ \hline\end{array}, \quad |R(B)| = |R(A)| + 1; \quad B = \begin{array}{|c|c|}\hline A & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1\times n} & 1 \\ \hline\end{array}, \quad |R(B)| = 2|R(A)|.$$

Библиографический список

1. *Kim Ki Hang* Boolean Matrix Theory and Applications. N. Y. : Marcel Dekker, 1982. 288 p.
2. *Butler K.* Binary relations // Recent Trends in Graph Theory. 1971. Vol. 186. P. 25–47.
3. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1972. 286 с.
4. *Поплавский В. Б.* О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. № 4. С. 181–192.

On the Properties of Boolean Matrices

O. O. Shchekaturova[1], V. A. Yaroshevich[2]

[1] Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, ot-vna@mail.ru

[2] National Research University of Electronic Technology (MIET), Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, pass. 4806, 5, v-yaroshevich@ya.ru

We consider the partial semigroup of Boolean matrices of various finite sizes under the operations of conjunctive and disjoint multiplication. We estimate the possible number of vectors in the row basis and column basis. The subminimal, subsubminimal and submaximal in general sense $\mathscr{D}$-classes are found. The properties of secondary idempotents are investigated. A conjecture of recursive construction of the reduced matrices is suggested.

Key words: Boolean matrix, conjunctive product, disjoint product, row span, column span, row rank, column rank, reduced matrix, Green's classes, primary idempotent, secondary idempotent.

References

1. Kim Ki Hang *Boolean Matrix Theory and Applications*. New York, Marcel Dekker, 1982, 288 p.
2. Butler K. Binary relations. *Recent Trends in Graph Theory*, 1971, vol. 186, pp. 25–47.
3. Clifford A. H., Preston G. B. *The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. 1*. Mathematical Surveys and Monogrphs, Providence, R.I., AMS, 1961.
4. Poplavski V. B. On Applications of Associativity of Dual Compositions in the Algebra of Boolean Matrices. *Journal of Math. Sciences*, 2013, vol. 191, 5, pp. 718–725.