



МАТЕМАТИКА

УДК 517

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ МИНИМУМА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛЬЕСА И НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ЧАСТИ ИНТЕРВАЛА

Т. А. Иванникова¹, Е. В. Тимашова², С. А. Шабров³

¹Магистрант кафедры математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, solliden_2008@inbox.ru

²Магистрант кафедры математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, juli4732@mail.ru

³Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, shaspoteha@mail.ru

В работе получено необходимое условие экстремума квадратичного функционала с интегралом Стильеса для случая, когда коэффициент при старшей производной может обращаться в нуль на части интервала. Показано, что получаемая математическая модель обладает свойством невырожденности. Доказано, что разнопорядковая граничная задача, возникающая как необходимое условие экстремума, занимает «промежуточное» положение между краевыми задачами четвертого и второго порядков — пространство решений имеет размерность три.

Ключевые слова: функционал, необходимое условие, интеграл Стильеса, производная по мере.

ВВЕДЕНИЕ

В работе получено необходимое условие экстремума функционала:

$$\Phi(u) = \int_0^\xi \frac{pu''_{xx}}{2} dx + \int_\xi^l \frac{ru'_x{}^2}{2} dx + \int_0^l \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^l u dF + \gamma_1 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u'^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u^2(l)}{2}, \quad (1)$$

определенного на множестве E абсолютно непрерывных на $[0; l]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0; \xi]$, имеет конечное на $[0; l]$ изменение, вторая квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$ является функцией ограниченной на $[0; \xi]$ вариации.

На протяжении всей работы мы предполагаем выполненными следующие условия:

- 1) $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0; l]$ изменение;
- 2) $p(x) > 0$ на $[0; \xi]$;
- 3) интеграл $\int_0^{\xi-0} \frac{dt}{p(t)}$ конечен;
- 4) $r(x) > 0$ для всех $x \in (\xi; l]$;
- 5) $Q(x)$ — не убывает на $[0; l]$;
- 6) $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$);
- 7) $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$.

Все производные в равенстве (1) понимаются в классическом смысле; вторая — существует почти всюду (по мере Лебега); мы принимаем следующее соглашение для функции $\varphi(x)$, принадлежащей $BV[0; l]$ — пространству функций ограниченной на $[0; l]$ вариации: если для некоторой внутренней точки η отрезка $[0; l]$ справедливо равенство $\varphi(\eta - 0) = \varphi(\eta + 0)$, то $\varphi(\eta)$ равно $\varphi(\eta - 0)$ ($= \varphi(\eta + 0)$), т. е. $\varphi(x)$ непрерывна в точке η .

Первый и второй интегралы в (1) понимаются по Лебегу, третий и четвертый — по Риману–Стилтьесу.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Задача минимизации функционала (1) на множестве E возникает при моделировании малых деформаций механической системы, состоящей из стержня, на левом конце которого имеются две пружины жесткости γ_1 и γ_2 , реагирующие на смещение и поворот соответственно, а к правому прикрепена



растянутая струна, правый конец которой имеет упругое закрепление с помощью пружины γ_3 , когда (1) описывает потенциальную (полную) энергию системы.

Договоримся под записью $\gamma_1 = \infty$ подразумевать условие $u(0) = 0$, а под $\gamma_2 = \infty$ и $\gamma_3 = \infty - u'(0) = 0$ и $u(l) = 0$ соответственно.

Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на оставшуюся часть $[0; l]$ нулем.

Пусть $u(x)$ дает минимум функционалу $\Phi(u)$ на E . Введем в рассмотрение скалярную функцию $\varphi(\lambda) = \Phi(u + \lambda h)$. У этой функции точка $\lambda = 0$ является точкой минимума, поэтому производная $\varphi'(0)$, если она существует, обязана обращаться в 0. Легко видеть, что $\varphi(\lambda)$ является квадратичной относительно λ функцией, поэтому

$$\begin{aligned} \varphi'(0) \equiv & \int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^\ell r u'_x h'_x dx + \int_0^\ell u h dQ - \int_0^\ell h dF + \\ & + \gamma_1 u(0) h(0) + \gamma_2 u'(0) h'(0) + \gamma_3 u(l) h(l) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

для любой функции $h \in E$.

На множестве $[0; \ell] \setminus S(Q)$ определим функцию $\alpha(x) = \int_0^x u dQ$. Тогда $\int_0^\ell u h dQ = \int_0^\ell h d\alpha$ (на основании результатов работы [1]) и

$$\int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^\ell r u'_x h'_x dx + \int_0^\ell h d(\alpha - F) + \gamma_1 u(0) h(0) + \gamma_2 u'_x(0) h'_x(0) + \gamma_3 u(l) h(l) = 0.$$

Третий интеграл в последнем равенстве мы проинтегрируем по частям, что возможно в силу свойств $h(x)$, $\alpha(x)$ и $F(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^\ell (r u'_x - \alpha + F) h'_x dx + h(l)(\alpha(l) - F(l)) - h(0)(\alpha(0) - F(0)) + \\ + \gamma_1 u(0) h(0) + \gamma_2 u'_x(0) h'_x(0) + \gamma_3 u(l) h(l) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим множество $E_1 = \{u \in E | u(x) = 0 \text{ для всех } x \geq \xi, h(0) = h'(0) = 0\}$. Для $h \in E_1$ равенство (3) принимает вид

$$\int_0^\xi p u''_{xx} h''_{xx} dx + \int_0^\xi (r u'_x - \alpha + F) h'_x dx = 0.$$

Вводя функцию $\beta(x) = \int_0^x (r u'_x(s) - \alpha(s) + F(s)) ds$ и интегрируя по частям интеграл $\int_0^\xi h'_x d\beta$, будем иметь:

$$\int_0^\xi (p u'' - \beta) h'' dx + \beta(\xi - 0) h'(\xi - 0) = 0. \quad (4)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится лемма из [2], которую для удобства читателя мы приведем здесь без доказательства.

Лемма 1 [2]. Пусть $A(x)$ имеет конечное на $[0; \xi]$ изменение. Интеграл $\int_0^\xi A(x) h''(x) dx$ равен нулю для любой $h \in E$, удовлетворяющей дополнительным условиям: $h(\xi) = h'(\xi) = 0$. Тогда $A(x) -$ линейная на $[0; \xi]$ функция.

Из леммы мы находим, что $p u''_{xx}(x) - \beta(x) = C_1 + C_2 x$ почти всюду, а так как $\beta(x)$ и $C_1 + C_2 x$ абсолютно непрерывны на $[0; \xi]$, то равенство $p u''_{xx}(x) - \beta(x) = C_1 + C_2 x$ превращается на $[0; \xi]$ в тождество. Из (4) также находим, что $C_1 + C_2 \xi + \beta(\xi - 0) = 0$ (так как в качестве $h(x)$ допускаются функции, для которых $h'(\xi - 0) \neq 0$). Тогда $p u''_{xx}(\xi - 0) = 0$.

Отсюда мы находим, что $p u''_{xx}(x)$ абсолютно непрерывна на всем $[0; \ell]$, следовательно, интеграл $\int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx} dx$ допускает интегрирование по частям:

$$\int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx} dx = p u''_{xx} h'_x \Big|_0^\ell - \int_0^\ell (p u''_{xx})'_x h'_x dx = -p u''_{xx}(0) h'_x(0) - \int_0^\ell (p u''_{xx})'_x h'_x dx,$$

так как $p(l) = 0$. Тогда равенство (3) принимает вид

$$\int_0^\ell \left[- (p u''_{xx})'_x + r u'_x - \alpha + F \right] h'_x dx + h(l)(\alpha(l) - F(l)) - h(0)(\alpha(0) - F(0)) -$$



$$-pu''_{xx}(0)h'_x(0) + \gamma_1 u(0)h(0) + \gamma_2 u'_x(0)h'_x(0) + \gamma_3 u(l)h(l) = 0 \quad (5)$$

для любой $h \in E$.

Лемма 2. Пусть $A(x)$ — функция ограниченной вариации и пусть для любой $h \in E$

$$\int_0^\ell A dh = 0.$$

Тогда $A(x)$ есть константа на $(0; \ell)$.

Доказательство. Так как $h \in E$, то интеграл $\int_0^\ell (A - C) dh$ равен нулю для любой константы C и для $C^* = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell A(s) ds$, в частности. Функция $h(x) = \int_0^x (A(s) - C^*) ds$, очевидно, принадлежит E . Поэтому равенство $\int_0^\ell (A - C^*) dh = 0$ принимает вид $\int_0^\ell (A(s) - C^*)^2 ds = 0$. Отсюда вытекает, что равенство $A(x) - C^* = 0$ справедливо почти всюду.

Пусть ξ — внутренняя точка, в которой равенство $A(x) - C^* = 0$ нарушается. Так как $A(x)$ имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение, то односторонние пределы $A(\xi - 0)$ и $A(\xi + 0)$ существуют. Ввиду того что множество точек, в которых $A(x) = C^*$ имеет полную меру, найдутся две последовательности $\{\xi'_n\}$ и $\{\xi''_n\}$ такие, что для всех n справедливо 1) $\xi'_n < \xi < \xi''_n$; 2) $\xi'_n \rightarrow \xi$ и $\xi''_n \rightarrow \xi$; 3) $A(\xi'_n) = A(\xi''_n) = C^*$.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем равенстве будем иметь $A(\xi - 0) = A(\xi + 0) = C^*$, т. е. односторонние пределы совпадают, что вместе с принятым соглашением означает непрерывность $A(x)$ в точке ξ^* . Таким образом, $A(x) \equiv C^*$ на $(0; l)$. Лемма доказана.

Из (5), на основании леммы 2, мы получаем тождество $-(pu''_{xx})'_x(x) + ru'(x) - \alpha(x) + F(x) \equiv C$ при некоторой постоянной C . Дифференцируя по мере σ , содержащей все особенности системы (см. [3]), последнее тождество мы придем к уравнению

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma.$$

Так же из (5) мы получаем равенства

$$-\alpha(0) + F(0) - C + \gamma_1 u(0) = 0, \quad -pu''_{xx}(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0, \quad \alpha(l) - F(l) + C + \gamma_3 u(l) = 0.$$

Из первого и третьего равенств мы получаем граничные условия (так как $(pu''_{xx})'_x(0) - \alpha(0) + F(0) = C$ и $ru'_x(l) - \alpha(l) + F(l) = C$):

$$(pu''_{xx})'_x(0) + \gamma_1 u(0) = 0, \quad ru'_x(l) + \gamma_3 u(l) = 0.$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Если $u(x)$ дает минимум функционалу $\Phi(u)$ на множестве E , то $u(x)$ принадлежит пространству $\tilde{E} \subset E$ функций, вторая квазипроизводная $(pu''_{0x\mu})_x(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0; l]$, $(pu''_{0x\mu})'_x - \sigma$ -абсолютно непрерывна на $[0; l]$ и является решением граничной задачи:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ (pu''_{xx})'_x(0) + \gamma_1 u(0) = 0, \\ -(pu''_{xx})(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0, \\ (ru'_x)(l) + \gamma_3 u(l) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Изучать полученную систему можно и с позиций теории обобщенных функций, когда все штрихи означают обобщенное дифференцирование. Однако на этом пути возникает ряд труднопреодолимых препятствий. Во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которая на данный момент не решена. Во-вторых, даже в случае решения первой проблемы, удаётся установить слабую разрешимость (6). И в-третьих, подход к изучению уравнения (и самой модели) с позиций теории обобщенных функций не даёт возможности применения качественных методов анализа (типа теорем Ролля) решения уравнения.

Уравнение в (6) в точке ξ реализуется как условия

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0), \quad (pu''_{xx})(\xi - 0) = 0, \quad \Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = 0.$$



Последнее равенство принимает вид $(pu''_{xx})'_x(\xi - 0) + (ru'_x)(\xi + 0) = 0$, если вспомнить, что $p(x) \equiv 0$ при $x \geq \xi$ и предположить отсутствие упругой опоры в точке ξ .

Покажем, что модель (6) обладает свойством невырожденности, т. е. однородная задача (при $F(x) \equiv \text{const}$) имеет только тривиальное решение.

Если это не так, то существует нетривиальное решение $u(x)$. Подставим $u(x)$ в уравнение, умножим полученное тождество на $u(x)$ и проинтегрируем по мере σ по всему $[0; \ell]$:

$$\int_0^\ell ((pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma) u(x) d\sigma = 0.$$

Разбивая интеграл на три и интегрируя по частям первый из них дважды, а второй один раз, будем иметь

$$(pu''_{xx})'_x u(x)|_0^\ell - (pu''_{xx})u'_x(x)|_0^\ell - (ru'_x)u(x)|_0^\ell + \int_0^\ell pu''_{xx} dx + \int_0^\ell ru'_x dx + \int_0^\ell u^2 Q'_\sigma d\sigma = 0.$$

В силу граничных условий последнее равенство принимает вид

$$\gamma_1 u^2(0) + \gamma_2 u'^2(0) + \gamma_3 u^2(\ell) + \int_0^\ell pu''_{xx} dx + \int_0^\ell ru'_x dx + \int_0^\ell u^2 Q'_\sigma d\sigma = 0.$$

В последнем равенстве все слагаемые неотрицательны, поэтому $\gamma_1 u^2(0) = 0$, $\gamma_2 u'^2(0) = 0$, $\gamma_3 u^2(\ell) = 0$, $\int_0^\ell pu''_{xx} dx = 0$, $\int_0^\ell ru'_x dx = 0$ и $\int_0^\ell u^2 Q'_\sigma d\sigma = 0$. Из первого и второго равенств, содержащих интеграл, мы находим, что $pu''_{xx}(x) = 0$ и $ru'_x(x) = 0$ почти всюду на $[0; \ell]$. Из первого следует, что $u(x)$ на $[0; \xi]$ есть линейная функция, из второго — $u(x)$ есть константа на $[\xi, \ell]$.

В то же время равенство $\gamma_3 u^2(\ell) = 0$ означает, что $u(\ell) = 0$. Отсюда находим, что $u(x) \equiv 0$ на $[\xi, \ell]$ и в силу непрерывности решения $u(\xi - 0) = 0$.

Из условия $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ мы находим, что либо $\gamma_1 u^2(0) = 0$, либо $\gamma_2 u'^2(0) = 0$ (либо выполняются оба равенства). В первом случае мы получим, что линейная на $[0; \xi]$ функция $u(x)$ на концах этого отрезка принимает нулевые значения, т. е. $u(x) \equiv 0$ на $[0; \xi]$. Во втором случае делаем вывод о том, что $u'(x)$ на $[0; \xi]$ есть нулевая константа, а затем установим тривиальность $u(x)$ на $[0; \xi]$.

Таким образом, $u(x)$ есть нуль на всем $[0; \ell]$, что противоречит нашему предположению.

Покажем, что рассматриваемая модель занимает «промежуточное» положение между моделями, которые описываются граничными задачами второго и четвертого порядков соответственно, в следующем смысле: размерность пространства решений однородного уравнения (размерность модели) равна трем, т. е. существует система из трех линейно независимых решений однородной модели; любые другие решения могут быть выражены через эти три. Следует отметить, что применить здесь классическую схему не представляется возможным. В самом деле, если поставить задачу Коши в точке x_0 слева от ξ , то решение будет существовать на всем полуинтервале $[0; \xi]$. Используем теперь условия вклейки в точке ξ . Мы можем подставить начальную задачу в точку $\xi + 0$. Мы получим решение на полуинтервале $(\xi; \ell]$. Таким образом, мы можем получить решения на всем $[0; \ell]$. Однако, ставя задачу Коши справа от ξ в силу теоремы о существовании единственности, мы получим решение на полуинтервале $(\xi; \ell]$, но «перебраться» за точку ξ без соблюдения единственности мы не можем ($u'_x(\xi - 0)$ не определено).

Далее, для простоты мы рассмотрим случай $\gamma_i = \infty$ ($i = 1, 2, 3$). Все сказанное справедливо и в общем случае (при условии невырожденности модели) при небольших изменениях рассуждений.

Введем обозначения: $l_1 u = u(0)$, $l_2 u = u'(0)$, $l_3 u = u(\ell)$.

Покажем, что существует система линейно независимых функций, удовлетворяющих условию $l_i \varphi_j = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и 0 — в противном случае.

На полуинтервале $[0; \xi]$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ и $\varphi_*(x)$ определим как решения однородного уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ и неоднородного уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma$ соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_i(0) = \delta_i^1$, $\varphi'_i(0) = \delta_i^2$, $p\varphi''_{xx}(0) = \delta_i^3$, $(p\varphi''_{xx})(0) = \delta_i^4$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $\varphi_*(0) = \varphi'_*(0) = p\varphi''_{xx}(0) = (p\varphi''_{xx})'_x(0) = 0$. Аналогично на $(\xi; \ell]$ определим функции $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^2$ и $\varphi^*(x)$ как решения однородного $-(ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$ и $-(ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma$ соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $\psi_j^{(i-1)}(0) = \delta_i^j$ и $\varphi^{*(i-1)}(0) = 0$ ($i, j = 1, 2$). Существование решений задач Коши обеспечивается соответствующими теоремами.



Функция

$$u(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi_i(x) + \varphi_*(x) & \text{при } x < \xi, \\ \sum_{j=1}^2 \beta_j \psi_j(x) + \varphi^*(x) & \text{при } x > \xi \end{cases} \quad (7)$$

удовлетворяет краевым условиям $u(0) = u'(\xi) = u(\ell) = 0$ при любых α_3, α_4 и β_2 , если только $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$. Остается заметить, что существует единственная тройка чисел $(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2)$ такая, что функция $u(x)$ удовлетворяет остальным трем краевым условиям. В самом деле, для этого необходимо и достаточно, чтобы α_3, α_4 и β_2 удовлетворяли системе

$$\begin{cases} \alpha_3 \varphi_3(\xi - 0) + \alpha_4 \varphi_4(\xi - 0) + \varphi_*(\xi - 0) = \beta_2 \psi_2(\xi + 0) + \varphi^*(\xi + 0), \\ \alpha_3 (p\varphi_{3xx}''(\xi - 0) + \alpha_4 (p\varphi_{4xx}''(\xi - 0) + (p\varphi_{*xx}''(\xi - 0) = 0, \\ \alpha_3 (p\varphi_{3xx}''(\xi - 0) + \alpha_4 (p\varphi_{4xx}''(\xi - 0) + (p\varphi_{*xx}''(\xi - 0) + \\ + \beta_2 r(\xi + 0) \psi_{2x}'(\xi + 0) + r(\xi + 0) \varphi_{*x}'(\xi + 0) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

определитель которой отличен от нуля, так как однородная система (при $\varphi_*(x) \equiv \varphi^*(x) \equiv 0$, что соответствует однородной модели) имеет только нулевое решение ввиду доказанной выше невырожденности. Таким образом, система (8) имеет единственное решение при любой допустимой $F(x)$.

Беря в (7) $\varphi_*(x) \equiv \varphi^*(x) \equiv 0$ и последовательно $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\beta_1 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получим три линейно независимых решения однородной модели (6), причем всё пространство решений однородной модели исчерпывается ими. Последнее и означает, что размерность пространства решений однородного уравнения $Lu = 0$ равна трем.

Покажем теперь, что при выполнении условий 1)–7) экстремаль $u_0(x)$ (решение краевой задачи) функционала (1) доставляет минимум. В самом деле, вторая вариация функционала $\Phi(u)$ на допустимой экстремали имеет вид

$$\delta^2 \Phi(u_0)h = \int_0^l p h_{x\mu}''^2 d\mu + \int_0^l r h_x'^2 dx + \int_0^l h^2 dQ + \gamma_1 h^2(0) + \gamma_2 h^2(0) + \gamma_3 h^2(l),$$

которая при всех $h \in E$ принимает неотрицательные значения.

Библиографический список

1. Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М.: Физматлит, 2009. 192 с.
2. Шабров С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 52–55.
3. Шабров С. А. О μ -регуляризации функции с конечным изменением // Сб. статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж, 1999. С. 166–169.
4. Покорный Ю. В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.

On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval

T. A. Ivannikova, E. V. Timashova, S. A. Shabrov

Voronezh State University, Russia, 394006, Voronezh, Universitetskaya pl., 1, solliden_2008@inbox.ru, juli4732@mail.ru, shaspoteha@mail.ru

In this paper we obtain a necessary condition for an extremum of a quadratic functional with a Stieltjes integral in the case where the coefficient of the highest derivative may vanish on a part of the interval. It is shown that the resulting mathematical model has the property of non-degeneracy. It is proved that a Variable boundary problem that arises as a necessary condition for an extremum is an «intermediate» position between the boundary value problems of fourth- and second-order — the solution space has dimension three.

Key words: functional, a necessary condition, Stieltjes integral, derivative on the measure.



References

1. Pokornyi Yu. V., Bakhtina Zh. I., Zvereva M. B., Shabrov S. A. *Ostsiillatsionnyi metod Shturma v spektral'nykh zadach* [Sturm oscillation method in spectral problems]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 192 p. (in Russian).
2. Shabrov S. A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1. pp. 52–55 (in Russian).
3. Shabrov S. A. О μ -regularizatsii funktsii s konechnym izmeneniiem [About μ -regularization of function of finite variation] *Sb. statei aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta VGU. Voronezh*, 1999, pp. 166–169 (in Russian).
4. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations. *Dokl. Math.*, 1999, vol. 59, no. 1, pp. 34–37.

УДК 517.518.34, 517.518.36, 517.986.62

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАСТЯЖЕНИЯ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ НУЛЬ-МЕРНЫХ ГРУПП

С. Ф. Лукомский

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@info.sgu.ru

В действительном вейвлет-анализе d -мерный оператор растяжения может быть записан с помощью действительной $d \times d$ матрицы. В настоящей работе найден явный вид оператора растяжения в произведении локально-компактных нуль-мерных абелевых групп.

Ключевые слова: нуль-мерные группы, оператор растяжения, кратномасштабный анализ.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы активно изучаются всплесковые базисы на группах Виленкина G_V и полях \mathbb{Q}_p p -адических чисел, а также кратномасштабный анализ (КМА), позволяющий строить такие базисы. В значительной мере это связано с тем, что всплесковые базисы на G_V и \mathbb{Q}_p , которые получаются в рамках соответствующего КМА, состоят из ступенчатых функций и, значит, могут быть использованы в цифровой обработке дискретной информации. Поэтому особый интерес вызывают всплесковые базисы на произведениях G_V^d и \mathbb{Q}_p^d . Первая попытка получить всплесковые базисы в $L_2(\mathbb{Q}_p^d)$ была предпринята в работе А. Хренникова и В. Шелковича [1], где многомерные всплесковые базисы были получены как произведение одномерных. В. Шелкович и М. Скопина [2] в 2009 г. построили многомерные 2-адические базисы Хаара в $L_2(\mathbb{Q}_2^d)$, используя тензорное произведение одномерных КМА. При построении всплесковых базисов и КМА основную роль играет наличие операторов растяжения и сдвига. Так, в работе [2] в качестве d -мерного оператора растяжения A_d использовался оператор покомпонентного растяжения, т. е. $A_d(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) = (A_1x^{(1)}, A_1x^{(2)}, \dots, A_1x^{(d)})$, где A_1 — одномерный оператор растяжения. В классическом случае [3] d -мерный оператор растяжения может быть определен с помощью целочисленной матрицы $\mathcal{A}_{d \times d}$ равенством $A_d(X) = \mathcal{A}X$. Э. Кинг и М. Скопина [4] в 2010 г. выяснили, что при построении КМА в $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$ в качестве \mathcal{A} можно взять шахматную матрицу $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Поле \mathbb{Q}_p является частными случаями нуль-мерной группы, а их произведение \mathbb{Q}_p^d также будет нуль-мерной группой. Поэтому естественно рассмотреть более общий вопрос: какой вид имеет оператор растяжения в произведении нуль-мерных групп. В работах [5, 6], учитывая тот факт, что произведение нуль-мерных групп снова нуль-мерная группа, была предложена конструкция построения оператора растяжения на произведении компактных нуль-мерных групп, однако этот оператор не удалось записать в виде $A_d(X) = \mathcal{A}X$. В настоящей работе мы покажем, что оператор растяжения, рассмотренный в работах [5, 6], может быть записан в виде $A_d(X) = \mathcal{A}E_A\mathcal{A}^{-1}X$, где $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{d \times d}$ — невырожденная матрица над полем вычетов по простому модулю p , и E_A матрица, в которой на диагонали, ниже главной, стоят 1, в правом верхнем углу — одномерный оператор растяжения A_1 , и остальные элементы равны нулю.



1. ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫЕ НУЛЬ-МЕРНЫЕ ГРУППЫ, ТОПОЛОГИЯ, ХАРАКТЕРЫ

Приведем основные понятия и факты, связанные с анализом на нуль-мерных группах. Более подробную информацию можно найти в [7]. Пусть $(G, \dot{+})$ — локально-компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп:

$$\supset G_{-n} \supset \dots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots,$$

таких, что $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$, $(G_n/G_{n+1})^\# = p_n$, где p_n — простые числа. Через μ обозначим меру Хаара на G нормированную условием $\mu G_0 = 1$, а через $\int_G f(x) d\mu(x)$ — абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}), \quad (1)$$

причем в сумме (1) слагаемых с отрицательными номерами конечное число. Систему элементов (g_n) будем называть базисной. Пусть далее X — совокупность характеров группы G , которая является группой относительно операции умножения, G_n^\perp — аннулятор группы G_n , т.е. $G_n^\perp = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$.

Каждый аннулятор G_n^\perp есть группа относительно умножения, G_n^\perp образуют возрастающую последовательность:

$$\dots \subset G_{-n}^\perp \subset \dots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset \dots,$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = \{1\},$$

причем фактор-группа G_{n+1}^\perp/G_n^\perp имеет порядок p_n .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $\chi \in X$ единственным образом представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в произведении множителей с положительными номерами конечное число. Характеры r_n будем называть *функциями Радемахера*.

2. ОПЕРАТОР РАСТЯЖЕНИЯ В НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ И ГРУППЕ ЕЕ ХАРАКТЕРОВ

В этом и следующем параграфе мы будем рассматривать локально-компактную группу $(G, \dot{+})$ с основной цепочкой подгрупп

$$\dots \subset G_n \subset \dots \subset G_1 \subset G_0 \subset G_{-1} \subset \dots \subset G_{-n} \subset \dots,$$

в которой $(G_n/G_{n+1})^\# = p$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ (символом $X^\#$ обозначено количество элементов множества X). Будем также предполагать, что операция $\dot{+}$ в группе G удовлетворяет условию

$$p g_n = \alpha_1 g_{n+1} \dot{+} \alpha_2 g_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} \alpha_s g_{n+s} \quad (2)$$

при некоторых фиксированных числах $\alpha_j = \overline{0, p-1}$ ($j = \overline{1, s}$).

Отметим, что если $p g_n = 0$, то группа G есть группа Виленкина, если $p g_n = g_{n+1}$ — группа всех p -адических чисел.

Определение. Определим оператор $A : G \rightarrow G$ равенством

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_{n-1}$$

при $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_n$. Если оператор A аддитивен, то будем называть его *оператором растяжения*.



Отметим, что оператор A будет аддитивным, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2), которое выполняется в наиболее важных группах: группах Виленкина с условием $pg_n = 0$ и группах p -адических чисел ($pg_n = g_{n+1}$).

Лемма 1. Если A — оператор растяжения, то $AG_n = G_{n-1}$, $A^{-1}G_n = G_{n+1}$.

Доказательство. Равенство $AG_n = G_{n-1}$, очевидно, следует из представления

$$G_n = \{x \in G : x = a_n g_n \dot{+} a_{n+1} g_{n+1} \dot{+} \dots\}. \quad \square$$

Обозначим

$$H_0 = \{x \in G : x = a_{-1} g_{-1} \dot{+} a_{-2} g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N} g_{-N}, N \in \mathbb{N}, a_{-j} = \overline{0, p-1}\}.$$

Множество H_0 играет роль натуральных чисел.

3. ОПЕРАТОР РАСТЯЖЕНИЯ В ПРОИЗВЕДЕНИИ НУЛЬ-МЕРНЫХ ГРУПП

Пусть $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ — локально-компактная нуль-мерная абелева группа с основной цепочкой:

$$\dots \subset \mathfrak{G}_n \subset \dots \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_{-1} \subset \dots \subset \mathfrak{G}_{-n} \subset \dots, \quad (\mathfrak{G}_n / \mathfrak{G}_{n+1})^\# = p,$$

$(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — базисная система, т.е. $g_n \in \mathfrak{G}_n \setminus \mathfrak{G}_{n+1}$. Пусть $G = \mathfrak{G}^d$ — произведение d экземпляров группы \mathfrak{G} с топологией произведения. Базу этой топологии образуют всевозможные смежные классы $\mathfrak{G}_{n_1} \times \mathfrak{G}_{n_2} \times \dots \times \mathfrak{G}_{n_d} \dot{+} (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$. С этой топологией \mathfrak{G}^d есть нуль-мерная группа и подгруппы

$$\dots \subset \mathfrak{G}_n^d \subset \dots \subset \mathfrak{G}_1^d \subset \mathfrak{G}_0^d \subset \mathfrak{G}_{-1}^d \subset \dots \subset \mathfrak{G}_{-n}^d \subset \dots$$

образуют цепочку подгрупп, которая не является базисной. Обозначим $G_{nd} = \mathfrak{G}_n^d$. Цепочку $(G_{nd})_{n \in \mathbb{Z}}$ по теореме Силова можно дополнить до основной цепочки $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ так, что $(G_n / G_{n+1})^\# = p$. Пусть $\mathfrak{g}_n \in G_n \setminus G_{n+1}$, произвольные пока векторы $\mathfrak{g}_n = (g^{(n_1)}, g^{(n_2)}, \dots, g^{(n_d)})$, которые образуют базисную систему в $G = \mathfrak{G}^d$. По этой системе можно определить оператор A_d равенством

$$A_d \mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathfrak{g}_{n-1} \quad \text{если} \quad \mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathfrak{g}_n.$$

Если он аддитивен, то, согласно определению, он является оператором растяжения. Мы хотим записать оператор A_d в виде

$$(A_d \mathbf{x})^T = \mathcal{A} \mathbf{x}^T,$$

где \mathcal{A} — некоторая матрица размерности $d \times d$, \mathbf{x}^T — вектор-столбец $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})^T$.

Через Z_p обозначим поле вычетов по модулю p , т.е. $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ с операцией $m \dot{+} n = (m+n) \bmod p$ и операцией умножения $m \cdot n = \underbrace{m \dot{+} m \dot{+} \dots \dot{+} m}_n$. Через $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{d \times d} = (a_{i,j})$

обозначим матрицу, элементы которой $a_{i,j} \in Z_p$, через E_A — матрицу

$$E_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где A есть одномерный оператор растяжения в группе $(\mathfrak{G}, \dot{+})$. По матрице \mathcal{A} определим подгруппы $G_{(n+1)d-l}$ и векторы $\mathfrak{g}_{(n+1)d-l}$ равенствами

$$\mathfrak{g}_{(n+1)d-l} = (a_{1,l} g_n, a_{2,l} g_n, \dots, a_{d,l} g_n), \quad l = \overline{1, d},$$

$$G_{(n+1)d-l} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{(n+1)d-l+1} \dot{+} j \mathfrak{g}_{(n+1)d-l}).$$

Лемма 2. Пусть \mathcal{A} — невырожденная матрица над полем Z_p . Справедливы следующие утверждения:

- 1) $G_{(n+1)d} \subset G_{(n+1)d-1} \subset \dots \subset G_{(n+1)d-d+1} \subset G_{nd}$;
- 2) при каждом $l = \overline{1, d}$ множества $G_{(n+1)d-l}$ есть подгруппы;
- 3) $(G_{(n+1)d-l} / G_{(n+1)d-l+1})^\# = p$;
- 4) $\mathfrak{g}_{(n+1)d-l} \in G_{(n+1)d-l} \setminus G_{(n+1)d-l+1}$;



5) оператор A_d , определенный равенством

$$A_d \left(\sum_{n,l} a_{(n+1)d-l} \mathbf{g}_{(n+1)d-l} \right) = \sum_{n,l} a_{(n+1)d-l} \mathbf{g}_{(n+1)d-l-1},$$

аддитивен.

6) если $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})^T = \mathbf{x}^T$, то $(A_d(\mathbf{x}))^T = \mathcal{A} E_A \mathcal{A}^{-1} X$.

Доказательство. 1)–4). Множества

$$G_{(n+1)d} \dot{+} j(a_{1,1}g_n, a_{2,1}g_n, \dots, a_{d,1}g_n) \quad (j = \overline{0, p-1}) \quad (3)$$

являются смежными классами по подгруппе $G_{(n+1)d}$ и так как матрица \mathcal{A} невырождена, то $(a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{d,1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Поэтому $p(a_{1,1}g_n, a_{2,1}g_n, \dots, a_{d,1}g_n) \in G_{(n+1)d}$ и, значит,

$$G_{(n+1)d} \dot{+} p(a_{1,1}g_n, a_{2,1}g_n, \dots, a_{d,1}g_n) = G_{(n+1)d}.$$

Отсюда делаем вывод, что смежные классы (3) образуют циклическую группу порядка p . Поэтому множество

$$G_{(n+1)d-1} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{(n+1)d} \dot{+} j(a_{1,1}g_n, a_{2,1}g_n, \dots, a_{d,1}g_n))$$

есть подгруппа, такая, что

$$G_{(n+1)d} \subset G_{(n+1)d-1} \subset G_{nd}, (G_{(n+1)d-1}/G_{(n+1)d})^\# = p, (G_{nd}/G_{(n+1)d-1})^\# = p^{d-1}.$$

Так как матрица \mathcal{A} невырождена, то

$$\mathbf{g}_{(n+1)d-2} = (a_{1,2}g_n, a_{2,2}g_n, \dots, a_{d,2}g_n) \in G_{nd} \setminus G_{(n+1)d-1}$$

и, аналогично предыдущему, множество

$$G_{(n+1)d-2} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{(n+1)d-1} \dot{+} j\mathbf{g}_{(n+1)d-2})$$

есть подгруппа такая, что

$$G_{(n+1)d} \subset G_{(n+1)d-1} \subset G_{(n+1)d-2} \subset G_{nd}, (G_{(n+1)d-2}/G_{(n+1)d-1})^\# = p, (G_{nd}/G_{(n+1)d-2})^\# = p^{d-2}.$$

Продолжая эти рассуждения, получаем, что утверждения 1)–4) леммы 2 выполнены.

5) Для доказательства аддитивности оператора A_d достаточно проверить справедливость равенства

$$p\mathbf{g}_n = \gamma_1 \mathbf{g}_{n+1} \dot{+} \gamma_2 \mathbf{g}_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_{sd} \mathbf{g}_{n+sd}.$$

6) Покажем, что для оператора A_d справедливо равенство

$$(A_d(\mathbf{x}))^T = \mathcal{A} E_A \mathcal{A}^{-1} X \quad (X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})^T).$$

Пусть $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^d \alpha_{(n+1)d-l} \mathbf{g}_{(n+1)d-l} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^d \alpha_{(n+1)d-l} (a_{1,l}g_n, a_{2,l}g_n, \dots, a_{d,l}g_n).$$

Отсюда находим

$$x^{(j)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \sum_{l=1}^d \alpha_{(n+1)d-l} a_{j,l} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \beta_n^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, d,$$

т. е.

$$\mathcal{A} (\alpha_{(n+1)d-1}, \alpha_{(n+1)d-2}, \dots, \alpha_{nd})^T = (\beta_n^{(1)}, \beta_n^{(2)}, \dots, \beta_n^{(d)})^T,$$

или

$$(\alpha_{(n+1)d-1}, \alpha_{(n+1)d-2}, \dots, \alpha_{nd})^T = \mathcal{A}^{-1} (\beta_n^{(1)}, \beta_n^{(2)}, \dots, \beta_n^{(d)})^T.$$



Обозначим для удобства $\mathcal{A}^{-1} = (b_{i,j})_{d \times d}$. По определению оператора растяжения

$$\begin{aligned} A_d \mathbf{x} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{d-1} \alpha_{(n+1)d-l} \mathbf{g}_{(n+1)d-l-1} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_{(n+1)d-0} \mathbf{g}_{(n+1)d-1} \dot{+} \alpha_{(n+1)d-1} \mathbf{g}_{(n+1)d-2} \dot{+} \dots \dot{+} \alpha_{(n+1)d-(d-1)} \mathbf{g}_{(n+1)d-d}) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_{(n+1)d-0} (a_{1,1} g_n, a_{2,1} g_n, \dots, a_{d,1} g_n) \dot{+} \alpha_{(n+1)d-1} (a_{1,2} g_n, a_{2,2} g_n, \dots, a_{d,2} g_n) \dot{+} \\ &\quad \dot{+} \dots \dot{+} \alpha_{(n+1)d-(d-1)} (a_{1,d} g_n, a_{2,d} g_n, \dots, a_{d,d} g_n)). \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим $A_d \mathbf{x} = \mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(d)})$. Из (4) находим выражения для компонент вектора \mathbf{y}

$$y^{(i)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \sum_{l=1}^d a_{i,l} \alpha_{(n+1)d-(l-1)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\beta}_n^{(i)} g_n, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Отсюда получаем:

$$(\tilde{\beta}_n^{(1)}, \tilde{\beta}_n^{(2)}, \dots, \tilde{\beta}_n^{(d)})^T = \mathcal{A}(\alpha_{(n+1)d}, \alpha_{(n+1)d-1}, \dots, \alpha_{(n+1)d-(d-1)})^T.$$

Запишем выражение для $y^{(i)}$ в виде

$$\begin{aligned} y^{(i)} &= \sum_{l=1}^d a_{i,l} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \alpha_{(n+1)d-(l-1)} = a_{i,1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \alpha_{(n+1)d-0} \dot{+} a_{i,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \alpha_{(n+1)d-1} \dot{+} \dots \dot{+} \\ &\dot{+} a_{i,d} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \alpha_{(n+1)d-(d-1)} = a_{i,1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \left(\sum_{j=1}^d b_{d,j} \beta_{n+1}^{(j)} \right) \dot{+} a_{i,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \left(\sum_{j=1}^d b_{1,j} \beta_n^{(j)} \right) \dot{+} \dots \dot{+} \\ &\dot{+} a_{i,d} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \left(\sum_{j=1}^d b_{d-1,j} \beta_n^{(j)} \right) = a_{i,1} \sum_{j=1}^d b_{d,j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \beta_{n+1}^{(j)} \dot{+} a_{i,2} \sum_{j=1}^d b_{1,j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \beta_n^{(j)} \dot{+} \dots \dot{+} \\ &\dot{+} a_{i,d} \sum_{j=1}^d b_{d-1,j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \beta_n^{(j)} = a_{i,1} \sum_{j=1}^d b_{d,j} A x^{(j)} \dot{+} a_{i,2} \sum_{j=1}^d b_{1,j} x^{(j)} \dot{+} \dots \dot{+} a_{i,d} \sum_{j=1}^d b_{d-1,j} x^{(j)}, \end{aligned}$$

где A — одномерный оператор растяжения в G . Таким образом,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(d)} \end{pmatrix} &= \mathcal{A} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d b_{d,j} x^{(j)} \\ \sum_{j=1}^d b_{1,j} x^{(j)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d b_{d-1,j} x^{(j)} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} b_{d,1} A & \dots & b_{d,d} A \\ b_{1,1} & \dots & b_{1,d} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{d-1,1} & \dots & b_{d-1,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(d)} \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A}^{-1} \cdot (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})^T = \mathcal{A} E_A \mathcal{A}^{-1} (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})^T, \end{aligned}$$

и лемма доказана. □

Из леммы 2 сразу получаем следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть A — одномерный оператор растяжения в $(G, \dot{+})$. Для любой невырожденной матрицы $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{d \times d}$ над полем вычетов по модулю p равенство

$$(A_d(\mathbf{x}))^T = \mathcal{A} E_A \mathcal{A}^{-1} \mathbf{x}^T$$

определяет оператор растяжения в G^d .



Теорема 2. Пусть p — простое и

$$E_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{p} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица размерности $d \times d$ ($d \geq 2$). Тогда равенство

$$(A_d(\mathbf{x}))^T = \mathcal{A} E_p \mathcal{A}^{-1} \mathbf{x}^T$$

определяет оператор растяжения в \mathbb{Q}_p^d .

Если \mathfrak{G} есть группа всех p -адических чисел \mathbb{Q}_p , то в \mathbb{Q}_p^2 можно указать другой вид оператора растяжения.

Теорема 3 [9]. Определим базисную последовательность в \mathbb{Q}_p^2 равенствами $\mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, \nu g_n)$, $\mathbf{g}_{2n} = (g_n, g_{n+1})$, где $\nu | (p-1)$. Обозначим $p-1 = \nu\alpha$. Тогда соответствующий оператор растяжения A_2 задается равенством

$$A_2(x^{(1)}, x^{(2)}) = (Ax^{(1)} \dot{+} \alpha Ax^{(2)}, \nu Ax^{(1)} \dot{-} Ax^{(2)}),$$

или в матричной форме $A_2 \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha A \\ \nu A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$, где A — одномерный оператор растяжения $Ax = \frac{x}{p}$.

При доказательстве последнего равенства существенно используется тот факт, что в группе p -адических чисел операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+1}$. При $p = 2$ получаем оператор растяжения из работы [4].

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ (проект 13-01-00102-а).

Библиографический список

1. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M. P -adic multidimensional wavelets and their application to p -adic pseudo-differential operators. Preprint. 2006. URL: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049> (дата обращения 28.09.2012).
2. Shelkovich V. M., Skopina M. A. P -adic Haar multi-resolution analysis and pseudo-differential operators // J. Fourier Anal. Appl. 2009. Vol. 15, № 3. P. 366–393.
3. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
4. King E. J., Skopina M. A. Quincunx Multiresolution Analysis for $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$ // P -adic Numbers. Ultrametric Analysis and Applications. 2010. Vol. 2, № 3. P. 222–231.
5. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 385. P. 1162–1178.
6. Lukomskii S. F. Haar System on a product of zero-dimensional compact group // Centr. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. P. 627–639.
7. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
8. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
9. Лукомский С. Ф. О системе Хаара на произведении групп целых p -адических чисел // Мат. заметки. 2011. Т. 9, вып. 4. С. 541–557.

Matrix Representation of Dilation Operator on the Product of Zero-Dimensional Locally Compact Abelian Groups

S. F. Lukomskii

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, LukomskiiSF@info.sgu.ru

In the real wavelet analysis d -dimensional dilation operator may be written with the help of an integer-valued $d \times d$ matrix. We find the matrix representation of the dilation operator on the product of zero-dimensional locally compact Abelian groups.

Key words: zero-dimensional group, delation operator, multiresolution analysis.



References

1. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M. *P*-adic multidimensional wavelets and their application to *p*-adic pseudo-differential operators. *Preprint*, 2006. Available at: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049> (accessed 28 September 2012).
2. Shelkovich V. M., Skopina M. A. *P*-adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 366–393.
3. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet Theory*. Translations Mathematical Monographs, vol. 239. New York, Amer. Math. Soc., 2011, 506 p.
4. King E. J., Skopina M. A. Quincunx Multiresolution Analysis for $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$. *P-adic Numbers. Ultrametric Analysis and Applications*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 222–231.
5. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 385, pp. 1162–1178.
6. Lukomskii S. F. Haar System on a product of zero-dimensional compact group. *Centr. Eur. J. Math.*, 2011, vol. 9, no. 3, pp. 627–639.
7. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsii i garmonicheskii analiz na nul'mernykh gruppakh* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups]. Baku, Elm, 1981. 180 p. (in Russian).
8. Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Fundamentals of the Theory of Groups*. New York, Springer-Verlag, 1979, 203 p. (Russ. ed.: Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Osnovy teorii grupp*. Moscow, Nauka, 1982. 288 p.)
9. Lukomskii S. F. Haar system on the product of groups of *p*-adic integer. *Math. Notes*, 2011, vol. 90, iss. 4, pp. 517–532.

УДК 517.927.25

О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. В. Парфилова

Старший преподаватель кафедры информатики, Саратовская государственная юридическая академия, Oksana_Parfilova@mail.ru

Рассматривается класс сильно нерегулярных пучков обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от него. Найден точный отрезок, на котором система собственных функций 2-кратно полна в пространстве суммируемых с квадратом функций.

Ключевые слова: квадратичный пучок, пучок второго порядка, пучок обыкновенных дифференциальных операторов, двухточечные краевые условия, однородное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами, кратная полнота системы собственных функций, кратная неполнота системы собственных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0, 1]$ дифференциальным выражением:

$$l(y, \lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями:

$$U_\nu(y, \lambda) := U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda) := (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2, \quad (1)$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид

$$\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0.$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$ и предположим, что всюду далее выполняется основное предположение: корни ω_1, ω_2 различны, отличны от нуля и



лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала. Не нарушая общности, можно считать, что выполняется условие

1. $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Далее будет использоваться обозначение $\tau := |\omega_2|/\omega_1$. Ясно, что $\tau > 0$. Введем функции $y_1(x, \lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x, \lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $l(y, \lambda) = 0$.

Для определенности считаем, что в (1) $\alpha_{\nu 1} \neq 0$ или $\beta_{\nu 1} \neq 0$, $\nu = 1, 2$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются.

Введем следующие обозначения: $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1}\omega_j + \alpha_{\nu 2}$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j) \times U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda = \beta_{\nu 1}\omega_j + \beta_{\nu 2}$ ($\nu, j = 1, 2$), и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ ($j = 1, 2$). Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} U_1(y_1, \lambda) & U_1(y_2, \lambda) \\ U_2(y_1, \lambda) & U_2(y_2, \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} v_{11} + e^{\lambda\omega_1} w_{11} & v_{12} + e^{\lambda\omega_2} w_{12} \\ v_{21} + e^{\lambda\omega_1} w_{21} & v_{22} + e^{\lambda\omega_2} w_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 \left(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)} a_{12} \right) = \lambda^2 \Delta_0(\lambda). \end{aligned}$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

2. $a_{12} \neq 0$, $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{1\bar{2}} = 0$.

При этом условии получим:

$$\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)} a_{12}. \quad (2)$$

Следовательно, рассматриваемый пучок не является нормальным по терминологии А. А. Шкаликова [1]. Такие пучки называются сильно нерегулярными. Для таких пучков актуальной является задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует 2-кратная полнота системы собственных функций (с. ф.) пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, 1]$. При отсутствии такой полноты естественно ставить вопрос о 2-кратной полноте в пространствах $L_2[0, \sigma]$ при $0 < \sigma < 1$ или об однократной полноте в пространстве $L_2[0, 1]$, а также в пространствах $L_2[0, \sigma]$ при $0 < \sigma < 1$. В данной статье найден точный отрезок $[0, \hat{\sigma}]$, на котором имеет место 2-кратная полнота в пространстве $L_2[0, \hat{\sigma}]$.

Отметим, что в случае $0 < \omega_1 < \omega_2$ при условии $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} \neq 0$, $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{12} = 0$ свойства с. ф. детально исследовались в статье [2], а при условии $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$ — в [3]. В случае же $\omega_2 < 0 < \omega_1$ и выполнении условия $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$ двукратная полнота системы с. ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, \sigma]$ детально исследовалась в [4] и анонсировалась в [5].

Из (2) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней, которые выражаются следующим образом:

$$\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/(\omega_1 + \omega_2), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

где $d_0 = \ln_0 c_0$ (\ln_0 есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{12}$. Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с. з.) пучка $L(\lambda)$, которые являются простыми. Точка $\lambda = 0$ может быть с. з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$. Имеет место равенство

$$e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)} = c_0, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (4)$$

Далее будет использоваться понятие порождающей функции для системы с. ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с. з. В случае простых с. з. (а именно этот случай рассматривается далее) будем называть функцию $y(x, \lambda)$ порождающей для системы с. ф. пучка $L(\lambda)$, если функции $y(x, \lambda_k)$, где λ_k есть ненулевое с. з., являются с. ф. пучка $L(\lambda)$.

Лемма 1. Если выполняются условия 1, 2, то функция

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)}, \quad (5)$$

где $b_0 = a_{12}/a_{2\bar{2}} \neq 0$, является порождающей для системы с. ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с. з.



Доказательство. Будем брать в качестве порождающих функций для системы с. ф. пучка $L(\lambda)$ функции, рассмотренные в [6]:

$$\gamma(x, \lambda, \Gamma) = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \\ -\Gamma & V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \quad (6)$$

где вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T \neq 0$ является параметром. Используем в качестве Γ векторы V_1, V_2, W_1, W_2 , как предложено в [6].

Распишем (6), раскладывая определитель по первой строке:

$$\begin{aligned} \gamma(x, \lambda, \Gamma) &= -y_1(x, \lambda) |-\Gamma, V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2| + y_2(x, \lambda) |-\Gamma, V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1| = e^{\lambda\omega_1 x} |\Gamma, V_2| + \\ &+ e^{\lambda\omega_1 x} |\Gamma, e^{\lambda\omega_2}W_2| + e^{\lambda\omega_2 x} |-\Gamma, V_1| + e^{\lambda\omega_2 x} |-\Gamma, e^{\lambda\omega_1}W_1| = e^{\lambda\omega_1 x} |\Gamma, V_2| + e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2)} |\Gamma, W_2| + \\ &+ e^{\lambda\omega_2 x} |V_1, \Gamma| + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)} |W_1, \Gamma|. \end{aligned} \quad (7)$$

Возьмем, например, $\Gamma = W_2$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \gamma(x, \lambda, W_2) &= e^{\lambda\omega_1 x} |W_2, V_2| + e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2)} |W_2, W_2| + e^{\lambda\omega_2 x} |V_1, W_2| + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)} |W_1, W_2| = \\ &= e^{\lambda\omega_1 x} |W_2, V_2| + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)} |W_1, W_2| = e^{\lambda\omega_1 x} a_{2\bar{2}} + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)} a_{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем, что $a_{2\bar{2}} \neq 0$. Так как в силу 2 имеем $a_{1\bar{2}} = 0$ или, что то же самое, $|V_1 W_2| = 0$, то существует $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$ такие, что $\gamma_1 V_1 + \gamma_2 W_2 = 0$. Если бы $\gamma_1 = 0$, то тогда $\gamma_2 \neq 0$ (иначе $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 0)$) и получили бы, что $W_2 = 0$. Но это противоречит условию 2, так как получили бы $a_{12} = |W_1 W_2| = 0$. Таким образом, $\gamma_1 \neq 0$ и, следовательно, $V_1 = cW_2$, где $c = -\gamma_2/\gamma_1$. Так как в силу 2 имеем $a_{1\bar{2}} = |V_1 V_2| \neq 0$, то с учетом этого получим $0 \neq |V_1 V_2| = c|W_2 V_2| = ca_{2\bar{2}}$. Отсюда следует, что $a_{2\bar{2}} \neq 0$.

Разделим обе части (8) на $a_{2\bar{2}}$. Таким образом, получим, что функция

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{a_{2\bar{2}}} \gamma(x, \lambda, W_2) = e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)},$$

где $b_0 = a_{12}/a_{2\bar{2}} \neq 0$, является порождающей для системы с. ф. рассматриваемого класса пучков. Лемма доказана.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ 2-КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ

Пусть $Y_\Lambda = \{y(x, \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система Y_Λ совпадает с системой с. ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с. з. Исследуем 2-кратную полноту системы Y_Λ в пространстве $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$. Скалярное произведение в пространстве $L_2^2[0, \sigma] := L_2[0, \sigma] \oplus L_2[0, \sigma]$ будем обозначать $\langle \hat{g}, \hat{h} \rangle_2 := \langle g_1, h_1 \rangle + \langle g_2, h_2 \rangle$, где $\hat{g} = (g_1, g_2)$, $\hat{h} = (h_1, h_2)$, $\langle g_j, h_j \rangle := \int_0^\sigma g_j(x) \overline{h_j(x)} dx$, $j = 1, 2$.

Пусть $\hat{y}(x, \lambda) := (y(x, \lambda), \lambda y(x, \lambda))$, где $y(x, \lambda)$ определяется формулой (5), а $\hat{f}(x) := (\overline{f_1}, \overline{f_2})$, где $f_1, f_2 \in L_2[0, \sigma]$. Справедлива лемма.

Лемма 2. Если выполняются условия 1, 2, $\tau > 1$, то для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}(\cdot, \lambda), \hat{f} \rangle_2 &= \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 \sigma)} \right) \tilde{f}_1(\sigma) + \lambda \left(\int_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} (\tau - 1) F_1((1 - \tau)x) dx + \right. \\ &\left. + \int_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} \left(\frac{\tau - 1}{\tau} \right) F_2 \left(\frac{1 + (\tau - 1)x}{\tau} \right) dx \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{f}_1(x) := \int_0^x f_1(\xi) d\xi$, $F_1(x) := f_2(x) - \omega_1 \tilde{f}_1(x)$, $F_2(x) := f_2(x) - \omega_2 \tilde{f}_1(x)$.



Доказательство. Интегрируя по частям один раз члены, не содержащие множителя λ , получим при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{y}(\cdot, \lambda), \widehat{f} \rangle_2 &= \int_0^\sigma \left(e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)} \right) f_1(x) dx + \lambda \int_0^\sigma \left(e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)} \right) f_2(x) dx = \\ &= \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 \sigma)} \right) \widetilde{f}_1(\sigma) - \lambda \int_0^\sigma \left(\omega_1 e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 \omega_2 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)} \right) \widetilde{f}_1(x) dx + \\ &\quad + \lambda \int_0^\sigma \left(e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)} \right) f_2(x) dx = \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 \sigma)} \right) \widetilde{f}_1(\sigma) + \\ &\quad + \lambda \left(\int_0^\sigma e^{\lambda\omega_1 x} F_1(x) dx + \int_0^\sigma e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)} b_0 F_2(x) dx \right). \end{aligned}$$

Учитывая предположение леммы о том, что $\tau > 1$, т. е. $0 < \omega_1 < |\omega_2|$, в интегралах справа делаем следующие замены переменных:

$$1) \omega_1 x = (\omega_1 + \omega_2)\xi; \quad \xi = \frac{\omega_1 x}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{x}{1 - \tau}; \quad x \in [0, \sigma] \Rightarrow \xi \in \left[\frac{\sigma}{1 - \tau}, 0 \right].$$

$$2) \omega_1 + \omega_2 x = (\omega_1 + \omega_2)\xi; \quad \xi = \frac{\omega_1 + \omega_2 x}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{1 - \tau x}{1 - \tau}; \quad x = \frac{1 - (1 - \tau)\xi}{\tau}; \quad x \in [0, \sigma] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi \in \left[\frac{1 - \tau\sigma}{1 - \tau}, \frac{1}{1 - \tau} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \widehat{y}(\cdot, \lambda), \widehat{f} \rangle_2 &= \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 \sigma)} \right) \widetilde{f}_1(\sigma) + \lambda \left(\int_0^{\frac{\sigma}{1 - \tau}} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} F_1((1 - \tau)x)(1 - \tau) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{1 - \tau}}^{\frac{1 - \sigma\tau}{1 - \tau}} \frac{(\tau - 1)}{\tau} b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} F_2 \left(\frac{1 - (1 - \tau)x}{\tau} \right) dx \right) = \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 \sigma)} \right) \widetilde{f}_1(\sigma) + \\ &\quad + \lambda \left(\int_0^{\frac{\sigma}{1 - \tau}} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} F_1((1 - \tau)x)(1 - \tau) dx + \int_{\frac{1}{1 - \tau}}^{\frac{1 - \sigma\tau}{1 - \tau}} \frac{(\tau - 1)}{\tau} b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} F_2 \left(\frac{1 + (\tau - 1)x}{\tau} \right) dx \right) = \\ &= \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2 \sigma)} \right) \widetilde{f}_1(\sigma) + \lambda \left(\int_{\frac{\sigma}{1 - \tau}}^0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} F_1((1 - \tau)x)(\tau - 1) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{1 - \tau}}^{\frac{1 - \sigma\tau}{1 - \tau}} \frac{(\tau - 1)}{\tau} b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)x} F_2 \left(\frac{1 + (\tau - 1)x}{\tau} \right) dx \right) \end{aligned}$$

и лемма доказана.

Теорема 1. Предположим, что выполняются условия 1, 2 и $\tau \geq 2$. Тогда при $\sigma = \widehat{\sigma} := \frac{1}{1 + \tau}$ система Y_Λ двукратно полна в пространстве $L_2[0, \widehat{\sigma}]$ с возможным дефектом, не превосходящим 1.

Доказательство. При доказательстве будем пользоваться леммой 2. Система функций $\{e^{2k\pi i x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ полна на любом единичном отрезке, в частности, на отрезке $[-1, 0]$.

Покажем, что при $\tau \geq 2$ и $\sigma \leq \frac{1}{1 + \tau}$ выполняются включения $\left[\frac{\sigma}{1 - \tau}, 0 \right] \subset [-1, 0]$ и $\left[\frac{1}{1 - \tau}, \frac{1 - \sigma\tau}{1 - \tau} \right] \subset [-1, 0]$. В самом деле, условие $\frac{\sigma}{1 - \tau} > -1$ равносильно $\frac{\tau - (\sigma + 1)}{\tau - 1} > 0$. Далее,



условие $\frac{1}{1-\tau} \geq -1$ равносильно тому, что $\frac{\tau-2}{\tau-1} \geq 0$. Таким образом, условие выполняется при $\tau \geq 2$.

При $\tau \geq 2$ условие $\sigma \leq \frac{1}{1+\tau}$ обеспечивает непересечение интервалов $\left[\frac{\sigma}{1-\tau}, 0\right]$ и $\left[\frac{1}{1-\tau}, \frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}\right]$.

При $\sigma = \hat{\sigma}$ имеем $\frac{1-\hat{\sigma}\tau}{1-\tau} = \frac{\hat{\sigma}}{1-\tau} =: \tilde{\sigma}$.

Предположим, что $\hat{f} \in L_2^2[0, \sigma]$ такова, что $\langle \hat{y}(\cdot, \lambda), \hat{f} \rangle_2 = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. В частности, если $0 \in \Lambda$, имеем $\hat{y}(\cdot, 0) = (1+b_0, 0)$ и, значит, $(1+b_0) \int_0^\sigma f_1(x) dx = 0$. Отсюда в случае $1+b_0 \neq 0$ получим $\int_0^\sigma f_1(x) dx = \tilde{f}_1(\sigma) = 0$.

Потребовав дополнительно выполнения условия $\langle \hat{e}_1, \hat{f} \rangle_2 = \int_0^\sigma f_1(x) dx = 0$, где $\hat{e}_1 = (1, 0)$, в случае $0 \notin \Lambda$ или в случае $0 \in \Lambda$, но когда $1+b_0 = 0$ (это условие дает для системы Y_Λ дефект не больше 1), на основании леммы 2 получим:

$$\int_{\frac{1}{1-\tau}}^0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} (\tau-1) F_1((1-\tau)x) dx + \int_{\frac{1}{1-\tau}}^{\tilde{\sigma}} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) dx = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \{0\},$$

или

$$\int_{\frac{1}{1-\tau}}^0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)\xi} F(\xi) d\xi = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}, \tag{10}$$

где

$$F(x) = \begin{cases} F_1((1-\tau)x)(\tau-1), & x \in [\tilde{\sigma}, 0], \\ b_0 F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) & x \in \left[\frac{1}{1-\tau}, \tilde{\sigma}\right]. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть $0 \notin \Lambda$. Тогда $\Lambda = \Lambda \setminus \{0\}$ и так как система $\{e^{\lambda_k(\omega_1+\omega_2)x}\}$ полна на $[-1, 0]$, то $F(x) = 0$ для п.в. $x \in \left[\frac{1}{1-\tau}, 0\right]$. С учетом (11) и $(\tau-1) \neq 0$, $\frac{\tau-1}{\tau} \neq 0$ имеем:

$$\begin{cases} F_1((1-\tau)x) = 0, & x \in [\tilde{\sigma}, 0], \\ F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) = 0, & x \in \left[\frac{1}{1-\tau}, \tilde{\sigma}\right]. \end{cases}$$

Делаем соответствующие замены в F_1 и F_2 , получим:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0, & x \in [0, \sigma], \\ F_2(x) = 0, & x \in [0, \sigma]. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} f_2(x) - \omega_1 \tilde{f}_1(x) = 0, & x \in [0, \sigma], \\ f_2(x) - \omega_2 \tilde{f}_1(x) = 0, & x \in [0, \sigma]. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} f_2(x) = 0, & x \in [0, \sigma], \\ \tilde{f}_1(x) = 0, & x \in [0, \sigma] \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_2(x) = 0, & x \in [0, \sigma], \\ f_1(x) = 0, & x \in [0, \sigma]. \end{cases}$$

Следовательно, есть 2-кратная полнота с дефектом, не превосходящим 1. В этом случае теорема доказана.

Предположим $0 \in \Lambda$. Это, в частности, означает, что $c_0 = 1$, $d_0 = 0$. Тогда $\Lambda \setminus \{0\} \neq \Lambda$, т. е. система $\{e^{\lambda_k(\omega_1+\omega_2)x} : \lambda_k \in \Lambda \setminus \{0\}\}$ не полна в $L_2[0, 1]$.



Потребуем, чтобы $\int_0^1 F(x)dx = 0$, что соответствует выполнению условия (10) при $\lambda = 0$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\frac{1}{1-\tau}}^0 F(\xi)d\xi = \int_{\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}}^0 (\tau-1)F_1((1-\tau)\xi) d\xi + \int_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}} b_0 \frac{(\tau-1)}{\tau} F_2\left(\frac{1+(\tau-1)\xi}{\tau}\right) d\xi = \\ &= \int_0^{\sigma} F_1(x)dx + \int_0^{\sigma} b_0 F_2(x) dx = \int_0^{\sigma} (f_2(x) - \omega_1 \tilde{f}_1(x)) dx + \int_0^{\sigma} b_0 (f_2(x) - \omega_2 \tilde{f}_1(x)) dx = \\ &= (1+b_0) \int_0^{\sigma} f_2(x) dx + (\omega_1 + b_0 \omega_2)(1-\sigma) \int_0^{\sigma} f_1(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае $1+b_0 = 0$ мы потребовали дополнительно выполнения условия $\int_0^{\sigma} f_1(x)dx = 0$, и, таким образом, из (11) следует, что условие $\int_{\frac{1}{1-\tau}}^0 F(x)dx = 0$ выполняется в этом случае автоматически.

Если же $1+b_0 \neq 0$, то тогда автоматически выполняется условие $\int_0^1 f_1(x)dx = 0$ и, следовательно, для выполнения (12) нужно потребовать дополнительно выполнения условия $\langle \hat{e}_2, \hat{f} \rangle_2 = \int_0^{\sigma} f_2(x)dx = 0$, где $\hat{e}_2 = (0, 1)$. Таким образом, условие (10) будет иметь место $\forall \lambda \in \Lambda$, что приводит к соотношениям $f_1(x) = f_2(x) = 0$ для п.в. $x \in [0, \sigma]$. Аналогично обстоит дело и в случае, когда 0 не принадлежит Λ . При этом система Y_{Λ} может иметь дефект, не превосходящий 1. Тем самым, и в этом случае утверждение теоремы доказано.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1, 2 и $\tau > 2$. Тогда при $\sigma > \frac{1}{1+\tau}$ система Y_{Λ} двукратно неполна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ и имеет в этом пространстве бесконечный дефект относительно двукратной полноты.

Доказательство. Построим бесконечномерное подпространство функций $\hat{f} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}) \in L_2^2[0, \sigma]$, таких, что $\langle \hat{y}(\cdot, \lambda), \hat{f} \rangle_2 = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $\Lambda \in \mathbb{C}$, то тем самым теорема будет доказана.

Не уменьшая общности, можно считать, $\frac{1}{1+\tau} < \sigma < \frac{1}{\tau}$ или $0 > \frac{1-\tau\sigma}{1-\tau} > \frac{\sigma}{1-\tau}$, так как из неполноты системы функций в $L_2[0, \sigma]$ следует неполнота этой системы в $L_2[0, \tilde{\sigma}]$ для любого $\tilde{\sigma} > \sigma$.

Предполагая $\tilde{f}_1(\sigma) = 0$, из (9) получаем:

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}(\cdot, \lambda), \hat{f} \rangle_2 &= \lambda \left(\int_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} (\tau-1)F_1((1-\tau)x) dx + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) dx \right) = \\ &= \lambda \left(\int_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{\sigma}{1-\tau}} b_0 \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) dx + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} b_0 \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) dx + \right) \end{aligned}$$



$$+ \left. \int_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^{\frac{1-\tau\sigma}{1-\tau}} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} (\tau-1) F_1((1-\tau)x) dx + \int_{\frac{1-\tau\sigma}{1-\tau}}^0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} (\tau-1) F_1((1-\tau)x) dx \right). \quad (13)$$

Для того чтобы $\langle \widehat{y}(\cdot, \lambda), \widehat{f} \rangle_2 = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, достаточно обеспечить выполнение равенств:

$$F_1((1-\tau)x) = 0, \quad x \in \left[\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}, 0 \right], \quad (14)$$

$$F_1((1-\tau)x) + b_0 \frac{1}{\tau} F_2 \left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau} \right) = 0, \quad x \in \left[\frac{\sigma}{1-\tau}, \frac{1-\sigma\tau}{1-\tau} \right], \quad (15)$$

$$F_2 \left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau} \right) = 0, \quad x \in \left[\frac{1}{1-\tau}, \frac{\sigma}{1-\tau} \right]. \quad (16)$$

Сделаем замену переменных $x_1 = (1-\tau)x$:

$$F_1(x_1) = 0, \quad x_1 \in [0, 1-\sigma\tau], \quad (17)$$

$$F_1(x_1) + b_0 \frac{1}{\tau} F_2 \left(\frac{1-x_1}{\tau} \right) = 0, \quad x_1 \in (1-\sigma\tau, \sigma], \quad (18)$$

$$F_2 \left(\frac{1-x_1}{\tau} \right) = 0, \quad x_1 \in (\sigma, 1]. \quad (19)$$

Построим функции $f_1, f_2 \in L_2[0, \sigma]$, для которых справедливы равенства (14)–(16). Обозначим $\sigma_1 := 1 - \tau\sigma$, $\sigma_2 := (1 - \sigma)/\tau$. Для $\tau > 2$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \sigma_2 - \sigma_1 &= \frac{1-\sigma}{\tau} - (1-\tau\sigma) = \frac{1-\sigma}{\tau} - \frac{(\tau-\tau^2\sigma)}{\tau} = \frac{1-\sigma-\tau+\tau^2\sigma}{\tau} = \frac{1}{\tau}(\tau^2\sigma - \tau + (1-\sigma)) = \\ &= \frac{1}{\tau}((1-\tau) + \sigma(\tau^2 - 1)) = \frac{1}{\tau}(\tau^2 - 1) \left(-\frac{1}{(1+\tau)} + \sigma \right) = \frac{1}{\tau}(\tau^2 - 1) \left(\sigma - \frac{1}{1+\tau} \right) > 0, \end{aligned}$$

т. е. в этом случае выполняются неравенства $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma$.

Пусть $h \in C^1[\sigma_2, \sigma]$ есть произвольная функция, такая, что

$$h(\sigma_2 + 0) = h'(\sigma_2 + 0) = h(\sigma - 0) = h'(\sigma - 0) = 0.$$

Положим $h_1(x) := h(x)$ при $x \in [\sigma_2, \sigma]$, $H(x) := 0$ при $x \in [\sigma_1, \sigma_2] \cup [\sigma, 1]$ и $H(x) := h(x)$ при $x \in (\sigma_2, \sigma]$, $h_2(x) := -\frac{\tau}{b_0} H(1-\tau x)$ при $x \in [\sigma_2, \sigma]$.

Определим теперь функции f_1 и f_2 формулами

$$\begin{aligned} f_1(x) &\equiv f_2(x) \equiv 0, \quad x \in [0, \sigma_2], \\ f_1(x) &= \frac{h_2'(x) - h_1'(x)}{\omega_1 - \omega_2}, \quad f_2(x) = \frac{\omega_1 h_2(x) - \omega_2 h_1(x)}{\omega_1 - \omega_2}, \quad x \in (\sigma_2, \sigma]. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, множество вектор-функций $\widehat{f} = (\overline{f_1}, \overline{f_2})$ образует бесконечномерное подпространство. Покажем, что так построенные вектор-функции \widehat{f} — искомые. Очевидно, для функции $\widetilde{f}_1(x) := \int_0^x f_1(\xi) d\xi$ справедливы тождества

$$\widetilde{f}_1(x) \equiv 0, \quad x \in [0, \sigma_2], \quad \widetilde{f}_1(x) \equiv \frac{h_2(x) - h_1(x)}{\omega_1 - \omega_2}, \quad x \in (\sigma_2, \sigma]. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\widetilde{f}_1(\sigma) = \frac{h_2(\sigma) - h_1(\sigma)}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left(-\frac{\tau}{b_0} H(\sigma_1) - h(\sigma) \right) = 0.$$

Проверим справедливость равенств (17)–(19). Обозначим для краткости $\xi = (1-x)/\tau$, откуда $x = 1 - \tau\xi$. Пусть $x \in [0, \sigma_1]$, тогда в силу (20) и (21) $F_1(x) = f_2(x) - \omega_1 \widetilde{f}_1(x) = 0$, т. е. равенство (19) выполняется.



При $x \in (\sigma_1, \sigma_2]$, что эквивалентно $\xi \in [(1 - \sigma_2)/\tau] \subset [\sigma_2, \sigma]$, в силу (20) и (21) получаем:

$$\begin{aligned} F_1(x) + \frac{1}{\tau} b_0 F_2(\xi) &= (f_2(x) - \omega_1 \tilde{f}_1(x)) + \frac{1}{\tau} b_0 (f_2(\xi) - \omega_2 \tilde{f}_1(\xi)) = \frac{1}{\tau} b_0 (f_2(\xi) - \omega_2 \tilde{f}_1(\xi)) = \\ &= \frac{1}{\tau} b_0 h_2(\xi) = -H(x) = 0. \end{aligned}$$

При $x \in (\sigma_2, \sigma]$, что эквивалентно $\xi \in [\sigma_2, (1 - \sigma_2)/\tau)$, имеем аналогично

$$\begin{aligned} F_1(x) + \frac{1}{\tau} b_0 F_2(\xi) &= (f_2(x) - \omega_1 \tilde{f}_1(x)) + \frac{1}{\tau} b_0 (f_2(\xi) - \omega_2 \tilde{f}_1(\xi)) = \\ &= \left(\frac{\omega_1 h_2(x) - \omega_2 h_1(x)}{\omega_1 - \omega_2} - \omega_1 \frac{h_2(x) - h_1(x)}{\omega_1 - \omega_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{\tau} b_0 h_2(\xi) = h_1(x) + \frac{1}{\tau} b_0 h_2(\xi) = h(x) - H(x) = h(x) - h(x) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (18) также выполняется. Наконец, при $x \in (\sigma, 1]$, что эквивалентно $\xi \in [0, \sigma_2]$, в силу (20) и (21) имеем:

$$F_2(\xi) = f_2(\xi) - \omega_2 \tilde{f}_1(\xi) = 0,$$

тем самым, (19) доказано. Теорема доказана.

3. ПРИМЕР

Теорема 1 применима, например, для следующего пучка:

$$\begin{cases} y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y, \\ y'(0) + y'(1) = 0, \\ 2\lambda y(0) + y'(1) - 2\lambda y(1) = 0. \end{cases}$$

В этом случае $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -2$ и, следовательно, выполняется условие 1, при этом $\tau = 2$. Так как в рассматриваемом примере $\alpha_{11} = \beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \beta_{12} = 0$, $\alpha_{22} = 2$, $\beta_{22} = -2$, то характеристический определитель пучка примет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} U_1(y_1, \lambda) & U_1(y_2, \lambda) \\ U_2(y_1, \lambda) & U_2(y_2, \lambda) \end{vmatrix} = 2\lambda^2 \begin{vmatrix} 1 + e^\lambda & -1 - e^{-2\lambda} \\ 2 - e^\lambda & 1 - 2e^{-2\lambda} \end{vmatrix} = \\ &= 2\lambda^2 ((1 + e^\lambda)(1 - 2e^{-2\lambda}) + (1 + e^{2\lambda})(2 - e^\lambda)) = 2\lambda^2 (3 - 3e^{-\lambda}), \end{aligned}$$

т.е. выполняется условие 2. Имеем $\hat{\sigma} = 1/3$. Тогда по теореме 1 система Y_Λ двукратно полна в пространстве $L_2[0, 1/3]$. А в случае $\sigma > 1/3$ по теореме 2 система Y_Λ двукратно не полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ с бесконечным дефектом относительно двукратной полноты.

Библиографический список

1. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. Вып. 9. С. 190–229.
2. Рыхлов В. С. О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1992. Т. 36, № 3. С. 35–44.
3. Рыхлов В. С. О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюл. 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.
4. Рыхлов В. С. О двукратной полноте собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2009. Т. 6, № 1. С. 237–249.
5. Рыхлов В. С. О полноте собственных функций дифференциального пучка второго порядка, корни характеристического уравнения которого лежат на одной прямой // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 88–91.
6. Rychlov V. S. On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutional Problems: Proc. of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol, 1997. Vol. 7. P. 70–73.



On 2-fold Completeness of the Eigenfunctions for the Strongly Irregular Quadratic Pencil of Differential Operators of Second Order

O. V. Parfilova

Saratov State Law Academy, Russia, 410056, Saratov, Volskaya st., 1, Oksana_Parfilova@mail.ru

A class of strongly irregular pencils of ordinary differential operators of second order with constant coefficients is considered. The roots of the characteristic equation of the pencils from this class are supposed to lie on a straight line coming through the origin and on the both side of the origin. Exact interval on which the system of eigenfunctions is 2-fold complete in the space of square summable functions is found.

Key words: quadratic pencil, second order pencil, pencil of ordinary differential operators, two-point boundary conditions, homogeneous differential expression with constant coefficients, completeness of the system of eigenfunctions, non-completeness of the system of eigenfunctions.

References

1. Shkalikov A. A. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions *J. of Math. Sciences*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311–1342.
2. Rykhlov V. S. On completeness of eigenfunctions of quadratic pencils of ordinary differential operators. *Russian Math.* [Izv. VUZ. Matematika], 1992, vol. 36, no. 3, pp. 33–42.
3. Rykhlov V. S. On properties of eigenfunctions of ordinary differential quadratic pencil of the second order. *Integral Transforms and Special Functions. Inform. Byulleten*, 2001, vol. 2, no. 1, pp. 85–103 (in Russian).
4. Rykhlov V. S. Double completeness of eigenfunctions of a quadratic pencil of second order differential operators. *Zbirnik prats' In-tu matematiki NAN Ukraini*, 2009, vol. 6, no. 1, pp. 237–249 (in Russian).
5. Rykhlov V. S. O polnote sobstvennykh funktsii differentsial'nogo puchka vtorogo poriadka, korni kharakteristicheskogo uravneniia kotorogo lezhat na odnoi priamoi [On completeness of eigenfunctions of a differential pencil of the second order the roots of the characteristic equation of which lie on a straight line]. *Matematika. Mehanika*. Saratov, 2007, iss. 9, pp. 88–91 (in Russian).
6. Rykhlov V. S. On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators. *Spectral and Evolutional Problems : Proc. of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium*. Simferopol, 1997, vol. 7, pp. 70–73 (in Russian).

УДК 517.9

О СТРУКТУРЕ ОПЕРАТОРА, ОБРАТНОГО К ИНТЕГРАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. Е. Струков

Аспирант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, sv.post.of.chaos@gmail.com

В статье рассматривается алгебра с единицей, порожденная интегральными операторами, действующими в пространствах непрерывных периодических функций. Доказывается наполненность этой подалгебры в алгебре всех линейных ограниченных операторов.

Ключевые слова: банахово пространство, интегральный оператор, теорема Бохнера–Филлипса, ряд Фурье оператора, наполненность подалгебры, винеровская пара алгебр.

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C(\mathbb{T})$ будем обозначать банахово пространство комплексных непрерывных функций, определенных на окружности $\mathbb{T} = \{\theta \in \mathbb{C} : |\theta| = 1\}$.

Будем говорить, что функция $f \in C(\mathbb{T})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда $f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k)\theta^k$, $\theta \in \mathbb{T}$, где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $AC(\mathbb{T})$. Заметим, что $AC(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{AC} = \|a\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)|.$$



В терминах введенных обозначений теорема Винера формулируется следующим образом.

Теорема 1 (Н. Винер). Если функция $f \in AC(\mathbb{T})$ и $f(\theta) \neq 0$ для всех $\theta \in \mathbb{T}$, то $1/f \in AC(\mathbb{T})$, т. е. $1/f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k)\theta^k$, где $b \in l^1(\mathbb{Z})$.

Согласно теории И. М. Гельфанда, теорему Винера можно рассматривать на языке пар алгебр как утверждение о том, что алгебры $AC(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T})$ образуют винеровскую пару [1].

Определение 1. Будем говорить, что алгебры \mathcal{A}, \mathcal{B} ($\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$) образуют *винеровскую пару*, если каждый элемент $a \in \mathcal{A}$, обратимый в алгебре \mathcal{B} , обратим также в алгебре \mathcal{A} .

В данной работе будет использоваться терминология Н. Бурбаки [2].

Определение 2. Подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ называется *наполненной* в алгебре \mathcal{B} , если каждый элемент $a \in \mathcal{A}$, обратимый в алгебре \mathcal{B} , обратим также в подалгебре \mathcal{A} .

В терминах наполненности теорема Винера принимает следующий вид.

Теорема 2. Алгебра $AC(\mathbb{T})$ наполнена в алгебре $C(\mathbb{T})$.

Для функций со значениями в банаховой алгебре теорема Винера была получена в статье S. Vochneg, R. S. Fillips [3]. На основе результатов этой статьи в работах А. Г. Баскакова [4–7] был развит метод доказательства для элементов из банахова пространства линейных ограниченных операторов. Введем терминологию, взяв за основу статью [8].

Пусть $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов на бесконечномерном комплексном банаховом пространстве X . Обозначим через $\text{Inv } X$ множество (непрерывно) обратимых операторов из пространства $\text{End } X$.

Рассматривается сильно непрерывное изометрическое 2π -периодическое представление:

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X, \quad T(t + 2\pi) = T(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Каждому оператору $A \in \text{End } X$ поставим в соответствие периодическую с периодом 2π сильно непрерывную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$, определяемую равенством

$$\Phi_A(t) = T(t)AT(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Множество операторов $A \in \text{End } X$, для которых операторнозначная функция Φ_A непрерывна в равномерной операторной топологии, обозначим символом $\text{End}_c X$, а подмножество непрерывно обратимых операторов из $\text{End}_c X$ обозначим через $\text{Inv}_c X$.

Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$\Phi_A(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t)AT(-t)e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ будем называть *рядом Фурье оператора* A , а операторы A_k , $k \in \mathbb{Z}$, – *коэффициентами Фурье* этого оператора (относительно представления T).

Определим двустороннюю последовательность $d_A(k)$, положив $d_A(k) = \|A_k\|$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Для оператора $A \in \text{End}_c X$ справедливо одно из соотношений

1. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) < \infty$;
2. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k)\alpha(k) < \infty$, где функция $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим свойствам:
 - (a) $\alpha(k) \geq 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$,
 - (b) $\alpha(k_1 + k_2) \leq \alpha(k_1)\alpha(k_2)$ для всех $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,
 - (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha(nk)}{n} = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$;
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} d_A(k)|k|^\gamma = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma > 1$.



Совокупности операторов, удовлетворяющих пунктам 1, 2 или 3 условия 1, обозначим соответственно $\text{End}_1 X$, $\text{End}_\alpha X$ и $\text{End}_\gamma X$. Нетрудно показать, что данные классы являются подалгебрами алгебры $\text{End}_c X$. Обозначим символом p в $\text{End}_p X$ один из символов $1, \alpha, \gamma$. Из лемм 1 и 2 статьи [5] вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть оператор $A \in \text{Inv}_c X \cap \text{End}_p X$. Тогда $A^{-1} \in \text{End}_p X$.

Введем используемые далее обозначения. Символом $L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ обозначим банахову алгебру измеримых 2π – периодических, интегрируемых на отрезке длины 2π функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой $\|f\|_1^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$. В качестве операции умножения возьмем свертку $(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)g(t-s) ds$, для всех $f, g \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

В данной статье рассматриваются операторы вида

$$A = aI + K, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

где K – интегральный оператор, действующий в банаховом пространстве $X = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ непрерывных функций (периода 2π) с нормой $\|x\|_{C_{2\pi}} = \max_{t \in [0, 2\pi]} |x(t)|$.

Оператор K имеет вид

$$(Kx)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau, u)x(u) du, \tag{2}$$

причем его ядро $\mathcal{K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{K}(\tau + 2\pi, u + 2\pi) = \mathcal{K}(\tau, u)$ для всех $\tau, u \in \mathbb{R}$;
- 2) $\kappa(\tau) \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, где $(\kappa(\tau))(u) = \mathcal{K}(\tau, u)$, $u \in \mathbb{R}$;
- 3) $\kappa \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ (функция κ непрерывна по норме пространства $L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

Легко проверить, что рассматриваемый оператор K определен корректно, т. е. $Kx \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ для любого $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

В качестве группы изометрий в пространстве $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ рассмотрим группу сдвигов $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, определенную формулой $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$.

Рассмотрим функцию $\Phi_K : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, определяемую формулой $\Phi_K(t) = S(t)KS(-t)$. Ясно, что она имеет вид

$$(\Phi_K(t)x)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau + t, v + t)x(v) dv, \quad x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Пусть оператор вида (1) удовлетворяет одному из пунктов условия 1. Обозначим соответствующие совокупности операторов символами $\text{Int}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\text{Int}_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\text{Int}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Несложно показать, что данные совокупности являются банаховыми подалгебрами алгебры $\text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Лемма 1. Рассматриваемый оператор $K \in \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ компактен.

Доказательство. Докажем данное утверждение с помощью теоремы Арцела, т. е. покажем, что оператор K отображает единичный шар $B(0, 1) \subset \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ в равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное множество. В силу оценки

$$\|Kx\| = \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(t, s)x(s) ds \right| \leq \max_{t \in [0, 2\pi]} \|\kappa(t)\|_1^{2\pi} \equiv \text{const}$$

для всех $x \in B(0, 1)$, где $(\kappa(t))(s) = \mathcal{K}(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, получаем, что множество $KB(0, 1)$ равномерно ограничено. Для всех $x \in B(0, 1)$ из соотношения

$$\begin{aligned} |(Kx)(t) - (Kx)(t + \tau)| &= \left| \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(t, s)x(s) ds - \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(t + \tau, s)x(s) ds \right| \leq \\ &\leq \|x\|_{C_{2\pi}} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(t, s) - \mathcal{K}(t + \tau, s)| ds \leq \|\kappa(t) - \kappa(t + \tau)\|_1^{2\pi}, \end{aligned}$$

а также из того, что $\kappa \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$, следует, что множество $KB(0, 1)$ является равностепенно непрерывным. \square



Лемма 2. Рассмотрим в пространстве $L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ оператор сдвига $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Совокупность функций $\{S(\tau)(\mathcal{K}(t, s))\} = \{\mathcal{K}(t, \tau + s), \tau, t, s \in \mathbb{R}\}$ равномерно непрерывна по норме пространства $L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ относительно переменной τ .

Доказательство. Для доказательства данного факта достаточно показать равномерную непрерывность при $\tau = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Сначала докажем, что семейство функций $\{\kappa(t), t \in \mathbb{R}\} = \{\mathcal{K}(t, \cdot), t \in \mathbb{R}\}$ является предкомпактным множеством в $L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Поскольку функция κ непрерывна по норме пространства $L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и периодична, то она равномерно непрерывна по норме пространства $L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, в силу чего выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ из того, что $|t_1 - t_2| < \delta_1$, всегда следовало, что $\|\kappa(t_1) - \kappa(t_2)\|_1^{2\pi} < \varepsilon/3$.

В силу периодичности функции κ с помощью разбиения $\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[0, 2\pi]$ с диаметром δ_1 можно построить конечную $\varepsilon/3$ -сеть $\{\kappa(t_k)\}_{k=0}^n$ для множества функций $\{\kappa(t), t \in \mathbb{R}\} \subset L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Поскольку множество непрерывных функций плотно в $L_{2\pi}^1$ [9], для каждой функции $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ можно подобрать последовательность непрерывных периодических функций $\{f_m\} \subset C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, такую, что $\|f - f_m\|_1^{2\pi} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Для величины $\varepsilon/9$ выберем такое $m_0 = m_0(\varepsilon/9, f)$, что для всех $m > m_0$ $\|f - f_m\|_1^{2\pi} \leq \varepsilon/9$. В силу равномерной непрерывности периодической функции f_{m_0} выберем такое $\delta = \delta(\varepsilon/9, f_{m_0}) > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau| < \delta$, справедливо, что $\|f_{m_0} - S(\tau)f_{m_0}\|_1^{2\pi} \leq \varepsilon/9$. Таким образом, для произвольной функции $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и произвольного числа $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau| < \delta$, из соотношения

$$\|f - S(\tau)f\|_1^{2\pi} \leq \|f - f_{m_0}\|_1^{2\pi} + \|f_{m_0} - S(\tau)f_{m_0}\|_1^{2\pi} + \|S(\tau)f_{m_0} - S(\tau)f\|_1^{2\pi}$$

следует, что $\|f - S(\tau)f\|_1^{2\pi} \leq \varepsilon/3$.

Теперь для каждой функции из указанной выше конечной $\varepsilon/3$ -сети $\{\kappa(t_k)\}_{k=0}^n$ найдем указанным выше образом величины и функции $m_0(\varepsilon/9, \kappa(t_k))$, $f_{m_0(\varepsilon/9, \kappa(t_k))}$, $\delta(\varepsilon/6, f_{m_0(\varepsilon/9, \kappa(t_k))})$ и выберем

$$\delta_2 = \min_{0 \leq k \leq n} \{\delta(\varepsilon/9, f_{m_0(\varepsilon/9, \kappa(t_k))})\} > 0.$$

При этом из условия $|\tau| < \delta_2$ для всех $k = \overline{0, n}$ будет следовать, что $\|\kappa(t_k) - S(\tau)\kappa(t_k)\| \leq \varepsilon/3$.

Фиксируем произвольное $t \in [0, 2\pi]$, выберем соответствующее $t_{k_0} \in \{t_k\}_{k=0}^n$ такое, что $\|\kappa(t) - \kappa(t_{k_0})\|_1^{2\pi} < \varepsilon/3$, возьмем также $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $|\tau| < \delta_3$. Из соотношения

$$\|\kappa(t) - S(\tau)\kappa(t)\|_1^{2\pi} \leq \|\kappa(t) - \kappa(t_{k_0})\|_1^{2\pi} + \|\kappa(t_{k_0}) - S(\tau)\kappa(t_{k_0})\|_1^{2\pi} + \|S(\tau)\kappa(t_{k_0}) - S(\tau)\kappa(t)\|_1^{2\pi}$$

для произвольного $t \in [0, 2\pi]$ и произвольного $|\tau| < \delta_3$ получим, что

$$\|\kappa(t) - S(\tau)\kappa(t)\|_1^{2\pi} < \varepsilon. \quad \square$$

Лемма 3. Для рассматриваемого оператора $K \in \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ функция Φ_K непрерывна в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Для доказательства данного факта достаточно проверить непрерывность в нуле. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|\Phi_K(t) - \Phi_K(0)\| &= \|S(t)KS(-t) - K\| = \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(S(t)KS(-t) - K)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \max_{\tau \in [0, 2\pi]} \left\| \int_0^{2\pi} (\mathcal{K}(\tau + t, v + t) - \mathcal{K}(\tau, v))x(v)dv \right\| \leq \\ &\leq \max_{\tau \in [0, 2\pi]} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau + t, v + t) - \mathcal{K}(\tau, v)| dv = \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau + t, v + t) \pm \mathcal{K}(\tau + t, v) - \mathcal{K}(\tau, v)| dv \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau + t, v) - \mathcal{K}(\tau, v)| dv + \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}(\tau + t, v + t) - \mathcal{K}(\tau + t, v)| dv. \end{aligned}$$

В силу свойства 3 ядра оператора K можно подобрать такое $\delta_1 > 0$, что при $|t| < \delta_1$ первое слагаемое в правой части выражения выше будет меньше, чем $\varepsilon/2$. В силу леммы 2 можно выбрать величину $\delta_2 > 0$ такую, что для всех t , $|t| < \delta_2$, второе слагаемое будет меньшим $\varepsilon/2$.

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для всех t , $|t| < \delta$, будет справедливо

$$\|\Phi_K(t) - \Phi_K(0)\| < \varepsilon.$$

т. е. функция Φ_K непрерывна в равномерной операторной топологии. □



Рассмотрим структуру коэффициентов Фурье функции Φ_K . Поставим функции Φ_K в соответствие ее ряд Фурье:

$$\Phi_K(t)x \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_n x e^{int},$$

где коэффициенты Фурье определяются следующими формулами:

$$(K_n x)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_n(\tau, v)x(v)e^{inv} dv,$$

где

$$\mathcal{K}_n(\tau, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau + t, v + t)e^{-in(t+v)} dt.$$

Коэффициенты Фурье оператора A будут совпадать с коэффициентами оператора K за исключением нулевого коэффициента, который будет иметь вид $A_0 = aI + K_0$.

С помощью замены переменных несложно показать, что $\mathcal{K}_n(\tau + u, v + u) = \mathcal{K}_n(\tau, v)$ для всех $u \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $\mathcal{K}_n(\tau, v) = \mathcal{K}_n(\tau - v, 0) = \mathcal{K}_n^0(\tau - v)$, т. е. функция \mathcal{K}_n на самом деле зависит от разности аргументов.

Через $E_n \in \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ обозначим оператор умножения на экспоненту: $(E_n x)(t) = e^{int}x(t) = (e_n x)(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 4. Пусть A_n – коэффициенты Фурье некоторого оператора $A \in \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R})$ с непрерывной в равномерной операторной топологии функцией $\Phi_A(t)$, тогда операторы $A_n E_{-n}$ перестановочны со сдвигом при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Покажем, что $S(\omega)A_n S(-\omega) = e^{in\omega}A_n$ при всех $\omega \in \mathbb{R}$ и для любого $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольное $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} S(\omega)A_n S(-\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\omega)S(t)AS(-t)S(-\omega)e^{-int} dt = \\ &= \frac{e^{in\omega}}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\omega + t)AS(-t - \omega)e^{-in(t+\omega)} dt = \frac{e^{in\omega}}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t)AS(-t)e^{-int} dt = e^{in\omega}A_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$S(t)A_n E_{-n} S(-t) = S(t)A_n S(-t)(S(t)E_{-n} S(-t)) = S(t)A_n S(-t)e^{-int}E_{-n} = A_n E_{-n},$$

т. е. оператор $A_n E_{-n}$ перестановочен со сдвигом. □

Так как оператор A непрерывно обратим, то его обратный имеет вид $A^{-1} = \frac{1}{a}I + \tilde{K}$, где $\tilde{K} = -\frac{1}{a}KA^{-1}$ – компактный оператор (как произведение компактного и ограниченного).

В силу того что оператор $A \in \text{Int}_p C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \text{End}_p C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq \text{End}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где p – один из символов $1, \alpha, \gamma$, по теореме 3 из абсолютной сходимости ряда Фурье функции Φ_A следует абсолютная сходимость рядов Фурье функций $\Phi_{A^{-1}}$ и $\Phi_{\tilde{K}}$.

Введем понятие аппроксимативной единицы. Для этого возьмем произвольный элемент $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Его ряд Фурье имеет вид

$$x(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e_k.$$

Рассмотрим аппроксимативную единицу $\Psi_n \in \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, которая определяется по следующей формуле:

$$\Psi_n x = \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) x_k e_k.$$

Данная последовательность операторов сильно сходится к тождественному оператору в пространстве $\text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, т. е. для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n x = x$.

Лемма 5. Для того чтобы оператор $A \in \text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ был перестановочен со сдвигом, необходимо и достаточно, чтобы функции e_n были его собственными функциями, т. е. $Ae_n = \alpha_n e_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, где $\alpha_n \in \mathbb{C}$.



Доказательство. Необходимость. Пусть оператор A перестановочен со сдвигом, т. е. $S(t)A = AS(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $x_n = Ae_n$ и ее сдвиг $S(h)x_n$, $h \in \mathbb{R}$.

$$S(h)x_n = S(h)Ae_n = AS(h)e_n = A(e^{inh}e_n) = e^{inh}Ae_n = e^{inh}x_n.$$

Рассмотрим теперь функцию $\widetilde{x}_n = x_n e_{-n}$ и ее сдвиг $S(h)\widetilde{x}_n$.

$$S(h)\widetilde{x}_n = S(h)(x_n e_{-n}) = S(h)x_n S(h)e_{-n} = e^{inh}x_n e^{-inh}e_{-n} = \widetilde{x}_n.$$

Получаем, что $S(h)\widetilde{x}_n = \widetilde{x}_n$ для всех $h \in \mathbb{R}$, т. е. \widetilde{x}_n — постоянная функция.

Обозначим $\widetilde{x}_n = x_n e_{-n} = \alpha_n$, где $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Тогда $x_n = Ae_n = \alpha_n e_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Достаточность. Пусть выполнено $Ae_n = \alpha_n e_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$S(h)AS(-h)e_n = S(h)A(e^{-inh}e_n) = e^{-inh}S(h)Ae_n = e^{-inh}S(h)(\alpha_n e_n) = e^{-inh}\alpha_n S(h)e_n = \alpha_n e_n = Ae_n.$$

Соотношение выше останется справедливым, если заменить e_n элементом $\Psi_m x$ для произвольного $x \in X$. Ввиду сильной сходимости последовательности $\{\Psi_m\}$ к тождественному оператору для всех $x \in X$ справедливо соотношение $S(h)AS(-h)x = Ax$, т. е. оператор A перестановочен со сдвигом. \square

Теорема 4. Пусть $D \in \text{End } C_{2\pi}$ — компактный перестановочный со сдвигом оператор. Тогда D и Ψ_n перестановочны и $\|\Psi_n D - D\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Поскольку оператор D перестановочен со сдвигом, из леммы 5 вытекает его перестановочность с аппроксимативной единицей Ψ_n .

Для произвольного $x \in B(0, 1)$ оценим величину $\|D\Psi_n x - Dx\| = \|\Psi_n Dx - Dx\|$. Пусть $y = Dx$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и в силу компактности оператора D построим конечную $\varepsilon/3$ -сеть $DB_{\varepsilon/3}$ образа единичного шара $D(B(0, 1))$. Для рассмотренного y выберем элемент сети $y_0 \in DB_{\varepsilon/3}$ такой, что $\|y - y_0\| < \varepsilon/3$. Поскольку множество $DB_{\varepsilon/3}$ конечно, найдем такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$ и для любого $y_0 \in DB_{\varepsilon/3}$ выполнялось $\|\Psi_n y_0 - y_0\| < \varepsilon/3$. Тогда

$$\|\Psi_n Dx - Dx\| \leq \|\Psi_n(y - y_0)\| + \|\Psi_n y_0 - y_0\| + \|y_0 - y\| \leq \varepsilon/3(\|\Psi_n\| + 1) + \|\Psi_n y_0 - y_0\| < \varepsilon.$$

Данная оценка не зависит от конкретного $x \in B(0, 1)$, поскольку n_0 выбирается только по $\delta/3$ -сети, зависящей, в свою очередь, только от δ и оператора D . \square

Теорема 5. Пусть D — компактный перестановочный со сдвигом оператор из пространства $\text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, тогда он имеет вид $(Dx)(t) = \int_0^{2\pi} f(t-s)x(s) ds$, где $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (т. е. является оператором свертки с суммируемой функцией).

Доказательство. Покажем, что $\Psi_n Dx = f_n * x$ для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Рассмотрим данный оператор на функциях e_k . В силу перестановочности со сдвигом согласно лемме 5 получаем, что $De_k = \alpha_k e_k$, $k \in \mathbb{Z}$, причем $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в силу компактности оператора D . Тогда

$$D\Psi_n e_k = D\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e_k = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) De_k = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \alpha_k e_k.$$

С другой стороны,

$$(f_n * e_k)(t) = \int_0^{2\pi} f_n(\tau) e^{ik(t-\tau)} d\tau = 2\pi \widehat{f}_n(k) e_k.$$

Отсюда следует, что $\widehat{f}_n(k) = \frac{\alpha_k}{2\pi} (1 - |k|/n)$, $|k| \leq n$. Тогда $\Psi_n De_k = f_n * e_k$, $k \in \mathbb{Z}$, где f_n имеют вид

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \alpha_k e_k.$$

А значит, и для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\Psi_n Dx = f_n * x$, причем доказано, что $\|\Psi_n D\| = \|f_n\|_1^{2\pi}$, где $\|\cdot\|_1^{2\pi}$ — норма в $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится. В силу того что $(D\Psi_n - D\Psi_{n+m})x = (f_n - f_{n+m}) * x$ для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, получаем, что $\|D\Psi_n - D\Psi_{n+m}\| = \|f_n - f_{n+m}\|_1^{2\pi}$, а



из сходимости последовательности $D\Psi_n$ к оператору D по норме пространства $\text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (теорема 4) следует ее фундаментальность. Тогда последовательность $\{f_n\}$ также будет фундаментальной, что в силу полноты пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ означает ее сходимость.

Обозначим $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Тогда $Dx = f * x$, $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, т. е. D — интегральный оператор вида $(Dx)(t) = \int_0^{2\pi} f(t-s)x(s) ds$. □

Вернемся к рассмотрению оператора $A \in \text{End}_p C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где p — один из символов $1, \alpha, \gamma$, определяемого формулой $A = aI + K$, где $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, а K — рассмотренный ранее компактный интегральный оператор. Как было показано, его обратный имеет вид $B = A^{-1} = \frac{1}{a}I + \tilde{K}$, где \tilde{K} — компактный оператор с абсолютно сходящимся рядом Фурье:

$$\tilde{K} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{K}_n.$$

В силу компактности оператора \tilde{K} его коэффициенты Фурье \tilde{K}_n также компактны. Тогда операторы $\tilde{K}_n E_{-n}$ компактны и перестановочны со сдвигом (в силу леммы 4). По доказанному в теореме 5 операторы $\tilde{K}_n E_{-n}$ являются интегральными и имеют следующий вид:

$$(\tilde{K}_n E_{-n} x)(t) = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{H}}_n(t-s)x(s) ds,$$

где функции $\tilde{\mathcal{H}}_n \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Тогда оператор \tilde{K}_n представим в виде

$$(\tilde{K}_n x)(t) = (\tilde{K}_n E_{-n} E_n x)(t) = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{H}}_n(t-s)e^{ins}x(s) ds.$$

Заметим, что коэффициенты Фурье операторов K и \tilde{K} имеют сходную структуру, то есть каждый из операторов является произведением интегрального оператора с ядром, зависящим от разности аргументов, и оператора E_n

$$(K_n x)(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_n^0(\tau-v)e^{inv}x(v) dv, \quad (\tilde{K}_n x)(t) = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{H}}_n(t-s)e^{ins}x(s) ds.$$

Кроме того, $\|\tilde{K}_n E_{-n}\| = \|\tilde{K}_n\| = \|\tilde{\mathcal{H}}_n\|_1$. Тогда в силу абсолютной сходимости ряда Фурье оператора \tilde{K} ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{H}}_n(t-s)e^{ins}$ также абсолютно сходится. Обозначим

$$\tilde{\mathcal{H}}(t, s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{H}}_n(t-s)e^{ins}. \tag{3}$$

С учетом данного обозначения для всех $x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ имеем:

$$\begin{aligned} (\tilde{K}x)(t) &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{K}_n x\right)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{H}}_n(t-s)e^{ins}x(s) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{H}}_n(t-s)e^{ins}\right) x(s) ds = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{H}}(t, s)x(s) ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Исследуем функцию $\tilde{\mathcal{H}}$ и покажем, что она обладает теми же свойствами, что и ядро оператора K . Так как функции $\tilde{\mathcal{H}}_n \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ и ряд (3) абсолютно сходится, то $\tilde{\mathcal{H}}(t, \cdot) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Непосредственно из определения функции $\tilde{\mathcal{H}}$ по формуле (3) следует, что $\tilde{\mathcal{H}}(t+2\pi, s+2\pi) = \tilde{\mathcal{H}}(t, s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и $\tilde{\mathcal{H}}(t, \cdot) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Из соотношения $\tilde{\mathcal{H}}_n(t-s) = S(t)\tilde{\mathcal{H}}_n(-s)$ выведем непрерывность функции $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, s)$ по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Таким образом, доказана следующая теорема, являющаяся основным результатом работы.

Теорема 6. Пусть оператор $A \in \text{Int}_p C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (p — один из символов $1, \alpha, \gamma$) имеет вид (1) и является непрерывно обратимым, тогда обратный оператор имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{a}I + \tilde{K},$$



где оператор \tilde{K} является компактным интегральным оператором вида (4) с ядром $\tilde{\mathcal{K}}$, удовлетворяющим свойствам

- 1) $\tilde{\mathcal{K}}(\tau + 2\pi, u + 2\pi) = \tilde{\mathcal{K}}(\tau, u)$ для всех $\tau, u \in \mathbb{R}$;
- 2) $\tilde{\kappa}(\tau) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где $(\tilde{\kappa}(\tau))(u) = \tilde{\mathcal{K}}(\tau, u)$ для всех $\tau, u \in \mathbb{R}$;
- 3) $\tilde{\kappa} \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ (функция $\tilde{\kappa}$ непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

В терминах наполненности теореме 6 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 7. Подалгебры $\text{Int}_1 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\text{Int}_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\text{Int}_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ наполнены в алгебре $\text{End } C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Замечание 1. Наполненность некоторых других подалгебр, порожденных интегральными операторами, рассмотрена В. Г. Курбатовым в работе [10]. В вышеуказанной статье была исследована алгебра $\mathcal{J}(L_p(G, X))$ интегральных операторов $J \in \text{End } L_p(G, X)$, где $L_p(G, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространства классов совпадающих локально почти всюду относительно меры Хаара измеримых функций $f : G \rightarrow X$, G — компактно-порожденная группа, изоморфная группе $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{K}$, где $n, m \in \mathbb{N}$, \mathbb{K} — компактная абелева группа, X — конечномерное банахово пространство. Операторы $J \in \mathcal{J}(L_p(G, X))$ имеют вид

$$(Jx)(t) = \int_G N(t, s)x(s)ds,$$

(интегрирование ведется по мере Хаара), где ядро N измеримо и при некоторых $M < \infty$ и $\gamma > 0$ удовлетворяет оценке

$$\|N(t, s)\| \leq Me^{-\gamma|t-s|}.$$

Для операторов из $\mathcal{J}(L_p(G, X))$ справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Пусть оператор $I + J$, где $J \in \mathcal{J}(L_p(G, X))$, обратим в $L_p(G, X)$, тогда обратный оператор имеет вид $(I + J)^{-1} = I + J_1$, где $J_1 \in \mathcal{J}(L_p(G, X))$.

Замечание 2. Отметим, что теорема 3 используется в статье И. И. Струковой [11] для доказательства аналога теоремы Винера для периодических на бесконечности функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00378).

Библиографический список

1. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М. : Наука, 1968. 664 с.
2. Бурбаки Н. Спектральная теория. М. : Мир, 1972. 183 с.
3. Bochner S., Phillips R. S. Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings // Ann. of Math. 1942. № 3. P. 409–418.
4. Баскаков А. Г. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Функциональный анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 3. С. 64–65.
5. Баскаков А. Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 17–26.
6. Баскаков А. Г. О спектральных свойствах некоторых классов линейных операторов // Функциональный анализ и его прил. 1995. Т. 29, № 2. С. 61–64.
7. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 14–28.
8. Баскаков А. Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26.
9. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. 165 с.
10. Курбатов В. Г. Об алгебрах разностных и интегральных операторов // Функциональный анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 2. С. 98–99.
11. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 34–41.

Structure of the Inverse for the Integral Operator of Special Kind

V. E. Strukov

Voronezh State University, Russia, 394006, Voronezh, Universitetskaya pl., 1, sv.post.of.chaos@gmail.com

Algebra (with identity) generated by integral operators on the spaces of continuous periodic functions is considered. This algebra is proved to be an inverse-closed subalgebra in the algebra of all bounded linear operators.

Key words: Banach space, integral operator, Bochner–Phillips theorem, Fourier series of an operator, inverse-closedness of a subalgebra, Wiener’s pair of algebras.



References

1. Naimark M. A. *Normirovannye kol'tsa* [Normed Rings]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 664 p. (in Russian).
2. Burbaki N. *Spektral'naya teoriya* [Spectral theory]. Moscow, Mir, 1972, 183 p. (in Russian).
3. Bochner S., Phillips R. S. Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings. *Ann. of Math.*, 1942, no. 3, pp. 409–418.
4. Baskakov A. G. Wiener's theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices. *Functional Analysis and Its Applications*, 1990, vol. 24, no. 3, pp. 222–224.
5. Baskakov A. G. Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, iss. 2, pp. 764–771.
6. Baskakov A. G. On Spectral Properties of Some Classes of Linear Operators. *Functional Analysis and Its Applications*, 1995, vol. 29, no. 2, pp. 121–123.
7. Baskakov A. G. Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, iss. 1, pp. 10–22.
8. Baskakov A. G. Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. *Izvestiya: Mathematics*, 1997, vol. 61, no. 6, pp. 1113–1135. DOI: 10.4213/im164.
9. Baskakov A. G. *Garmonicheskii analiz lineinykh operatorov* [Harmonic analysis of linear operators]. Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1987, 165 p. (in Russian).
10. Kurbatov V. G. Algebras of difference and integral operators. *Functional Analysis and Its Applications*, 1990, vol. 24, no. 2, pp. 156–158.
11. Strukova I. I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 34–41 (in Russian).

УДК 517.547.2

К ПРОБЛЕМЕ ЛЕОНТЬЕВА О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

В. Б. Шерстюков

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, shervb73@gmail.com

Рассматривается произвольная целая функция экспоненциального типа, все нули которой просты и образуют последовательность с нулевым индексом конденсации. На множестве нулей такой функции ее производная растет в определенном смысле максимально быстро. Требуется выяснить, будет ли исходная функция обладать полной регулярностью роста. Эта задача, возникшая в теории представления аналитических функций рядами экспонент, была поставлена А. Ф. Леонтьевым более сорока лет назад и пока не решена. В настоящей работе показано, что означенная проблема решается положительно, если функция «не слишком мала» на некоторой прямой.

Ключевые слова: проблема Леонтьева, функция вполне регулярного роста, индекс конденсации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучая вопросы, связанные с представлением аналитических функций рядами экспонент, А. Ф. Леонтьев (1972 г.) поставил следующую задачу [1, замечание на с. 1291]. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа (ЦФЭТ) с последовательностью простых (всех) нулей $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ и индикатором

$$h_L(\theta) \equiv \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

удовлетворяющая условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |L'(\lambda_k)| - h_L(\arg \lambda_k) \right\} = 0. \quad (1)$$

Нужно выяснить, является ли $L(\lambda)$ функцией вполне регулярного роста (ВРР).

Последнее свойство в соответствии с общим определением [2, гл. III] равносильно существованию равномерного по $\theta \in [0, 2\pi]$ предела

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r} = h_L(\theta).$$

Здесь E — некоторое множество положительных чисел нулевой относительной меры, т. е. такое, что множество $E \cap [0, r]$ измеримо (по Лебегу) при каждом $r > 0$ и его мера есть $o(r)$ при $r \rightarrow +\infty$.



Отметим, что все используемые в дальнейшем без пояснений определения и результаты теории целых функций хорошо известны; в случае необходимости их можно найти, к примеру, в монографиях [2–4].

Условие (1), равносильное, как несложно видеть, неравенству

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} + h_L(\arg \lambda_k) \right\} \leq 0, \quad (2)$$

и близкие ему по характеру играют ключевую роль при установлении критериев представимости аналитических функций рядами экспонент или обобщенных экспонент (см., например, [4, 5]) и затрагивают целый ряд смежных вопросов: интерполяции, слабой достаточности (γ -достаточности) и максимальности множеств в различных классах целых функций. Из большого количества соответствующих работ отметим [6–9], имеющие непосредственное отношение к описанной проблематике.

Интересующая нас задача до выхода в свет работ автора [10–12] исследовалась самим Леонтьевым, а также Ю. И. Мельником, А. В. Братищевым как в приведенной выше, так и в более общей постановке (для целой функции с кратными нулями и индикатором $H_L(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho \in [0, +\infty)$; при этом условие (1) естественным образом подправлялось). Эта задача имеет положительное решение при $\rho \in [0, 1/2)$. Тот же результат получен в [13] для $\rho \in [1/2, 1)$ при дополнительных предположениях

$$\min_{\theta \in [0, 2\pi]} H_L(\theta) > 0, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \min_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|}{\ln r} = +\infty.$$

Следует отметить, что при $\rho(r) \equiv \rho$ из теоремы 1 работы Мельника [14] и теоремы 3 обзорной статьи Ю. Ф. Коробейника [4, с. 106–107] следует справедливость цитированных результатов Братищева уже при любом $\rho > 0$. Если условие положительности индикатора нарушено, то при $\rho \geq 1/2$ соотношение (1) или его естественное обобщение не влекут, вообще говоря, полной регулярности роста функции. Соответствующий пример построен в [13].

Величину, стоящую в левой части неравенства (2), часто называют леонтьевским индексом конденсации нулевого множества ЦФЭТ $L(\lambda)$. Отметим, что в духе задачи Леонтьева описание полной регулярности роста четной ЦФЭТ с простыми вещественными нулями получено недавно автором. Соответствующий результат, формулируемый в терминах обобщенного индекса конденсации последовательности нулей, доложен на 16-й Саратовской зимней школе (2012 г.).

В настоящей работе также рассматривается первоначальный вопрос о справедливости импликации: (1) $\Rightarrow L(\lambda)$ — функция ВРР. Обозначим для удобства изложения через \mathcal{L} класс всех ЦФЭТ (называемый в дальнейшем классом Леонтьева), удовлетворяющих условию (1) этой «классической» задачи. Несмотря на усилия ряда авторов, вопрос о полной регулярности роста функции $L \in \mathcal{L}$, индикаторная диаграмма которой имеет внутренние точки, в общей ситуации остается открытым. Результаты Мельника позволяют дать положительный ответ на него в случае наличия особой симметрии в расположении корней функции $L(\lambda)$ или определенной оценки снизу роста $|L(\lambda)|$ на некоторой системе расширяющихся до бесконечности окружностей $|\lambda| = R_n$. Например [15], если Λ инвариантно относительно поворота вокруг начала на фиксированный угол раствора $2\pi/s$, $s \geq 3$, или если $\min_{|\lambda|=R_n} |L(\lambda)| > R_n^{-p}$ при каком-либо $p > 0$ и всех номерах n [16]. Так, что неизвестно даже, имеет ли ВРР произвольная четная функция $L \in \mathcal{L}$. Дополнительные сведения из истории вопроса и точные формулировки отдельных результатов можно найти в диссертации Братищева [17, введение, с. 34–35; гл. 2, § 2.5].

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основной результат статьи положительно решает задачу Леонтьева при дополнительном условии, допускающем не слишком быстрое стремление функции к нулю на какой-нибудь прямой вне достаточно массивного множества на ней. Доказательство опирается на применение известной теоремы Ингама–Левинсона [18, 19] о максимальной скорости стремления к нулю на вещественной оси финитного преобразования Фурье [20, гл. 3, §3.3]. Приведем в удобном для нас виде формулировку этой теоремы.

Пусть $\omega(x)$ — положительная неубывающая функция ($x \geq 0$), удовлетворяющая условию

$$\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} dx < \infty. \quad (3)$$



Тогда для любого $a > 0$ найдется четная целая функция $F(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста, имеющая только вещественные нули, индикаторную диаграмму $[-ia, ia]$ и удовлетворяющая оценке

$$|F(x)| \leq \exp(-\omega(|x|)), \quad |x| > x_0.$$

Напомним, что множество S_0 вещественных чисел называется относительно плотным по мере, если найдутся такие положительные числа l и α , что для любого $x \in \mathbb{R}$ порция S_0 в отрезке $[x, x+l]$ имеет меру, большую, чем α . Пусть S — множество точек на какой-либо прямой γ ($0 \in \gamma$), полученное из $S_0 \subset \mathbb{R}$ поворотом на соответствующий угол. Если S_0 относительно плотно по мере на \mathbb{R} , то множество S называем относительно плотным по мере на прямой γ .

Теперь мы можем сформулировать центральный результат статьи.

Теорема 1. Пусть функция $L(\lambda)$ принадлежит классу \mathcal{L} и имеет положительный индикатор. Пусть еще найдутся прямая γ , $0 \in \gamma$, относительно плотно по мере множество S на ней и положительная неубывающая функция $\omega(x)$ с условием (3) такие, что

$$\inf \{|L(\lambda)| \exp \omega(|\lambda|) : \lambda \in S\} > 0. \quad (4)$$

Тогда $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост.

Доказательство. Перед началом доказательства отметим, что в [10, теорема 3] установлен аналогичный результат, в котором (4) заменено на более жесткое требование $\inf\{|L(\lambda)| : \lambda \in S\} > 0$. Мы покажем, что можно свести ситуацию к рассмотренной в [10]. Приступая к доказательству, выберем и зафиксируем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы функция $F(\lambda)$, построенная по весу $\omega_0(x) \equiv (1+\delta)\omega(x)$ в соответствии с приведенной выше теоремой Ингама–Левинсона, удовлетворяла при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ условию

$$h_F(\theta) < h_L(\theta) - 4\delta. \quad (5)$$

Введем объединение кругов с конечной суммой радиусов:

$$U \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < e^{-\delta|\lambda_k|} \right\}$$

и функцию

$$\Phi(\lambda) \equiv \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Используя принадлежность $L(\lambda)$ классу Леонтьева и экспоненциальный рост $F(\lambda)$, получим с положительными постоянными A и B при всех $k \in \mathbb{N}$ неравенства

$$|L'(\lambda_k)| \geq A \exp((h_L(\arg \lambda_k) - \delta)|\lambda_k|), \quad |F(\lambda_k)| \leq B \exp((h_F(\arg \lambda_k) + \delta)|\lambda_k|).$$

Если $\lambda \notin U$, то из этих неравенств с учетом (5) следует оценка

$$\left| \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \right| \leq \frac{B}{A} \exp((h_F(\arg \lambda_k) - h_L(\arg \lambda_k) + 3\delta)|\lambda_k|) < \frac{B}{A} e^{-\delta|\lambda_k|}.$$

Отсюда и из теоремы о категориях стандартным образом заключаем, что $\Phi(\lambda)$ есть ЦФЭТ. Серия дальнейших шагов покажет, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$.

Будем считать, что прямая γ из условия теоремы совпадает с вещественной осью, и, следовательно, $S \subset \mathbb{R}$, что, разумеется, не нарушает общности рассуждений. Поскольку $|F(x)| \leq \exp(-\omega_0(|x|))$, $|x| > x_0$, то из (4) вытекает существование такой постоянной $M > 0$, что при всех $x \in S$, $|x| > x_0$, верно

$$\left| \frac{F(x)}{L(x)} \right| \leq M \exp(-\omega_0(|x|) + \omega(|x|)) = M e^{-\delta\omega(|x|)}.$$

Значит, при $x \in S \setminus U$, $|x| > x_0$, справедлива оценка

$$|\Phi(x)| \leq M e^{-\delta\omega(|x|)} + \frac{B}{A} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta|\lambda_k|}.$$



Итак, ЦФЭТ $\Phi(\lambda)$ ограничена на относительно плотном по мере множестве, а по лемме Б. Я. Левина из [21] — и на всей прямой \mathbb{R} . Следовательно, $\Phi(\lambda)$ — функция ВРР, что мы используем ниже при нахождении ее индикатора. Для сокращения записи полагаем

$$\Psi(\lambda) \equiv L(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)},$$

отмечая, что $\Psi(\lambda)$ есть ЦФЭТ с индикатором $h_{\Psi}(\theta) \leq h_L(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Проанализируем теперь тождество

$$F(\lambda) = \Psi(\lambda) + \Phi(\lambda) L(\lambda).$$

Согласно (5) имеем $h_F(\theta) < h_L(\theta)$ при всех θ . Если бы при каком-то значении θ_0 выполнялось $h_{\Phi}(\theta_0) > 0$, то мы могли бы записать

$$h_F(\theta_0) = \max \{h_{\Psi}(\theta_0), h_{\Phi}(\theta_0) + h_L(\theta_0)\} = h_{\Phi}(\theta_0) + h_L(\theta_0) > h_L(\theta_0),$$

приходя к противоречию. Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Более того, по теореме Фрагмена–Линделефа $\Phi(\lambda)$ есть тождественная постоянная, так как величина $|\Phi(\lambda)|$ ограничена на \mathbb{R} . Но при $x \rightarrow \infty$ по множеству $S \setminus U$ имеем:

$$|\Phi(x)| \leq M e^{-\delta \omega(|x|)} + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(x - \lambda_k)} \right| \rightarrow 0.$$

Итак, $\Phi \equiv 0$. Отсюда

$$\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \notin \Lambda.$$

Правая часть полученного соотношения ограничена на множестве $\mathbb{C} \setminus U$, поэтому найдется такая постоянная $C > 0$, что при всех $\lambda \notin U$ справедлива оценка

$$|L(\lambda)| \geq C |F(\lambda)|.$$

Функция $F(\lambda)$ имеет только вещественные нули, обладает ВРР и положительным индикатором при $\theta = \pm\pi/2$. Вместе с последним неравенством это позволяет выбрать относительно плотное по мере на мнимой оси множество S_1 , на котором $\inf_{\lambda \in S_1} |L(\lambda)| > 0$. Применение цитированной выше теоремы 3 из [10] завершает рассуждения. Теорема 1 доказана.

Приведем еще один результат, вытекающий из [10, теорема 3].

Теорема 2. Четная или нечетная функция класса \mathcal{L} с положительным индикатором и нулями, содержащимися при каких-либо $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ и $D > 0$ в гиперболических секторах $\Gamma(\theta_0, D) \equiv \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda e^{-i\theta_0})^2 \leq D \right\}$, является функцией вполне регулярного роста.

Доказательство. Не умаляя общности рассуждений, будем предполагать, что функция $L(\lambda)$ четна, т. е. что

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По условию при всех $k \in \mathbb{N}$ верно $|\lambda_k|^2 \cos(2(\theta_0 - \arg \lambda_k)) \leq D$. С учетом этого оценим снизу $|L(\lambda)|$ на луче $\gamma(\theta_0) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \theta_0\}$. Для произвольного $\lambda \in \gamma(\theta_0)$, $|\lambda| \geq \sqrt{2D}$, имеем:

$$|L(\lambda)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 2 \left| \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^2 \cos(2(\theta_0 - \arg \lambda_k)) + \left| \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^4} \geq \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{|\lambda|^2}{|\lambda_k|^4} (|\lambda|^2 - 2D)} \geq 1.$$

Следовательно, на прямой γ , содержащей луч $\gamma(\theta_0)$, при $|\lambda| \geq \sqrt{2D}$ выполнена оценка $|L(\lambda)| \geq 1$. По теореме 3 [10] функция $L(\lambda)$ имеет ВРР. Теорема 2 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).



Библиографический список

1. Леонтьев А. Ф. Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 6. С. 1282–1295. DOI: 10.1070/IM1972v006n06ABEH001918.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
3. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М. : Наука, 1976. 536 с.
4. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М. : Наука, 1983. 175 с.
5. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.
6. Абанин А. В. Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1995. 268 с.
7. Братищев А. В. Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 3. С. 451–475.
8. Коробейник Ю. Ф. Максимальные и γ -достаточные множества. Приложения к целым функциям. II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1991. В. 55. С. 23–34.
9. Шерстюков В. Б. К вопросу о γ -достаточных множествах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 935–943. DOI: 10.1007/BF02679704.
10. Шерстюков В. Б. Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 2. С. 301–313. DOI: 10.1023/A:1025068527611.]
11. Шерстюков В. Б. Об одном подклассе целых функций вполне регулярного роста // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. Владикавказ : Изд-во ВНЦ РАН, 2006. С. 131–138.
12. Шерстюков В. Б. О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 119–130. DOI: 10.1007/s11006-006-0115-6.
13. Братищев А. В. К одной задаче А. Ф. Леонтьева // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 2. С. 265–267.
14. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле // Исследование по теории приближений функций и их приложения. Киев : Наук. думка, 1978. С. 132–141.
15. Мельник Ю. И. Об условиях сходимости рядов Дирихле, представляющих регулярные функции // Математический анализ и теория вероятности. Киев : Наук. думка, 1978. С. 120–123.
16. Мельник Ю. И. Об условиях разложимости регулярных функций в ряды экспонент // Всесоюз. симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области : тез. докл. Уфа : БФ АН СССР, 1980. С. 94.
17. Братищев А. В. Базисы Кете, целые функции и их приложения : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1997. 248 с.
18. Ingham A. E. A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 29–32.
19. Levinson N. Gap and density theorems. N. Y. : Amer. Math. Soc., 1940. 246 p.
20. Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М. : Физматлит, 2005. 503 с.
21. Левин Б. Я. Почти периодические функции с ограниченным спектром // Актуальные вопросы математического анализа. Ростов н/Д : Изд-во Ростов. гос. ун-та, 1978. С. 112–124.

The Problem of Leont'ev on Entire Functions of Completely Regular Growth

V. B. Sherstyukov

National Research Nuclear University MEPhI, Russia, 115409, Moscow, Kashirskoe shosse, 31, shervb73@gmail.com

We consider an entire function of exponential type with all its zeros are simple and form a sequence with the index condensation zero. On the set of zeros a function of its derivative is growing quickly. Required to determine whether original function have complete regularity of growth. This problem, which arose in the theory of representation of analytic functions by exponential series was posed by A. F. Leontiev more than forty years ago and has not yet been solved. In this paper we show that the aforesaid problem a positive solution if the function is «not too small» on a straight line.

Key words: Leont'ev problem, function of completely regular growth, index of condensation.

References

1. Leont'ev A. F. On conditions of expandibility of analytic functions in Dirichlet series. *Math. of the USSR-Izvestiya*, 1972, vol. 6, no. 6, pp. 1265–1277. DOI: 10.1070/IM1972v006n06ABEH001918.
2. Levin B. Ja. *Distributions of zeros of entire functions*. RI, Providence, Amer. Math. Soc., 1964. [Rus. ed.: Levin B. Ja. *Raspredelenie kornei tselykh funktsii*. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 632 p.]
3. Leont'ev A. F. *Riady eksponent* [Exponential series]. Moscow, Nauka, 536 p. (in Russian).
4. Leont'ev A. F. *Tselye funktsii. Riady eksponent* [Entire functions. Exponential series]. Moscow, Nauka, 1983, 175 p. (in Russian).
5. Korobeinik Yu. F. Representing systems. *Russian Math. Surv.*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.



6. Abanin A. V. *Slabo dostatochnye mnozhestva i abso-
liutno predstavliaiushchie sistemy*. Diss. dokt. fiz.-mat.
nauk [*Weakly sufficient sets and absolutely representing
systems*. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov on Don,
1995, 268 p.
7. Bratishchev A. V. A type of lower estimate for entire
functions of finite order, and some applications. *Math. of
the USSR-Izvestiya*, 1985, vol. 24, no. 3, pp. 415–438.
DOI: 10.1070/IM1985v024n03ABEH001243.
8. Korobeinik Yu. F. Maksimal'nye i γ -dostatochnye
mnozhestva. Prilozheniia k tselym funktsiiam. II [The
maximal and γ -sufficient sets. Applications to entire
functions]. *Teoriia funktsii, funktsional'nyi analiz i
ikh prilozheniia*. Kharkov, 1991, vol. 55, pp. 23–34 (in
Russian).
9. Sherstyukov V. B. On a question about γ -sufficient
sets. *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 778–
784. DOI: 10.1007/BF02679704.
10. Sherstyukov V. B. On a problem of Leont'ev
and representing systems of exponentials. *Math.
Notes*, 2003, vol. 73, no. 2, pp. 286–298. DOI:
10.1023/A:1025068527611.
11. Sherstyukov V. B. Ob odnom podklasse
tselykh funktsii vpolne reguliarnogo rosta [On a
subclass of entire functions of completely regular
growth]. *Kompleksnyi analiz. Teoriia operatorov.
Matematicheskoe modelirovanie*. Vladikavkaz, Publ.
VNTs RAN, 2006, pp. 131–138 (in Russian).
12. Sherstyukov V. B. On some criteria for completely
regular growth of entire functions of exponential type.
Math. Notes, 2006, vol. 80, no. 1, pp. 114–126. DOI:
10.1007/s11006-006-0115-6.
13. Bratishchev A. V. On a problem of A. F. Leont'ev. *Sov.
Math. Dokl.* 1983, vol. 27, pp. 572–574 (in Russian).
14. Mel'nik Yu. I. O predstavlenii reguliarnykh funktsii
riadami tipa riadov Dirikhle [On the representation of
regular functions by Dirichlet type series]. *Issledovanie
po teorii priblizhenii funktsii i ikh prilozheniia*, Kiev,
Naukova Dumka, 1978, pp. 132–141 (in Russian).
15. Mel'nik Yu. I. Ob usloviakh skhodimosti riadov
Dirikhle, predstavliaiushchikh reguliarnye funktsii
[Conditions for the convergence of Dirichlet series that
represent regular functions]. *Matematicheskii analiz
i teoriia veroiatnostei*, Kiev, Naukova Dumka, 1978,
pp. 120–123 (in Russian).
16. Mel'nik Yu. I. Ob usloviakh razlozhimosti
reguliarnykh funktsii v riady eksponent [On conditions of
expandibility of regular functions in exponential series].
*Vsesoiuz. simpozium po teorii approksimatsii funktsii v
kompleksnoi oblasti*, Ufa, 1980, pp. 94 (in Russian).
17. Bratishchev A. V. *Bazisy Kete, tselye funktsii i ikh
prilozheniia*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Kothe bases,
entire functions and their applications*. Dr. phys. and
math. sci. diss.]. Rostov on Don, 1997, 248 p.
18. Ingham A. E. A note on Fourier transforms. *J. London
Math. Soc.*, 1934, vol. 9, pp. 29–32.
19. Levinson N. *Gap and density theorems*. New York,
Amer. Math. Soc., 1940, 246 p.
20. Sedletskii A. M. *Klassy analiticheskikh preobrazo-
vanii Fur'e i eksponentsial'nye approksimatsii* [Clas-
ses of analytic Fourier transforms and exponential
approximations]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 503 p. (in
Russian).
21. Levin B. Ja. Pochti periodicheskie funktsii s ogra-
nichennym spektrom [Almost periodic functions with
bounded spectrum]. *Aktual'nye voprosy matematichesk-
ogo analiza*, Rostov on Don, 1978, pp. 112–124 (in
Russian).

УДК 501.1

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРОВ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЫ В СМЫСЛЕ СХОДИМОСТИ ПО КУБАМ

И. С. Юрченко

Ассистент кафедры прикладной информатики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, hamsterchik@mail.ru

В данной работе изучаются множества единственности для кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам. Доказано, что конечное множество и счетное множество, имеющее только одну предельную точку, являются множествами единственности.

Ключевые слова: компактная нуль-мерная группа, множество единственности, кратный ряд по системе характеров.

ВВЕДЕНИЕ

В работах В. А. Скворцова [1] и Х. О. Мовсисяна [2] было показано, что счетное множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам. В работе [3] был получен более общий класс множеств единственности для функций Уолша. В частности, было доказано, что любая непрерывная кривая конечной длины или их счетное объединение является множеством единственности для двойных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам.



В работе [4] был получен класс множеств единственности для кратных рядов по смешанной системе функций, расширяющий известные классы множеств единственности. В работе [5] был приведен пример кратного ряда, сходящегося по прямоугольникам, но не сходящегося по кубам. Затем в [6] было доказано, что пустое множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша на двоичной группе в смысле сходимости по кубам. М. Г. Плотников в 2007 году [7], рассматривая функции Уолша на двоичной группе, показал, что конечное множество и счетное множество, имеющее только одну предельную точку, являются множеством единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по кубам. Мы покажем, что данные результаты справедливы для произвольной нуль-мерной группы.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть (G, \oplus) — компактная нуль-мерная группа. Топология на группе G определяется с помощью цепочки вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$. Обозначим $p_k = (G_k/G_{k+1})^\#$. По последовательности простых чисел $(p_k)_{k=0}^\infty$ построим последовательность (m_k) следующим образом: $m_0 = 1, m_{k+1} = p_k m_k$. Элементы $g_n = G_n \setminus G_{n+1}$ образуют базисную систему в G , т.е. любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде ряда $x = \sum_{n=0}^\infty a_n g_n, a_n \in \overline{0, p_n - 1}$. Если $p_n g_n = 0$, группа G является группой Виленкина, если $p_n g_n = g_{n+1}$, то в этом случае G называется группой P -адических чисел, $P = \{p_n\}$.

Аннуляторы группы G образуют возрастающую последовательность $G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots$ и $(G_{k+1}^\perp/G_k^\perp)^\# = p_k$. Обозначим через $X = \{\chi\}$ совокупность характеров группы G . Данная система является ортогональной и $X = \bigcup_{n=0}^\infty G_n^\perp$. Пусть μ определяет меру Хаара и $\mu G = 1$. Тогда $\mu(G_n \oplus h) = 1/m_n$. По мере μ строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_G f d\mu$, инвариантный относительно сдвига.

Характеры $r_k(z) \in G_{k+1}^\perp \setminus G_k^\perp$ назовем функциями Радемахера. Пусть

$$n = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon_k m_{k+1} \in \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon_k \in \overline{0, p_k - 1}, \quad z = \sum_{k=0}^\infty z_k g_k \in G, \quad z_k \in \overline{0, p_k - 1}.$$

Положим по определению $\chi_n(z) = \prod_{k=0}^\infty (r_k(z))^{\varepsilon_k}$. Очевидно, что данное произведение содержит конечное число сомножителей.

Обозначим через $\mathfrak{G} = G^N = \underbrace{G \times \dots \times G}_N$ N -мерную группу с топологией произведения групп. В этом случае база топологии состоит из произведений сдвигов:

$$G_j \oplus \mathbf{h} = (G_{j_1} \oplus h^{(1)}) \times (G_{j_2} \oplus h^{(2)}) \times \dots \times (G_{j_N} \oplus h^{(N)}).$$

Здесь и далее компоненты вектора $\mathbf{h} \in G^N$ обозначены через $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(N)}$, т.е. $\mathbf{h} = (h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(N)})$. Компоненты $h^{(l)}$ вектора \mathbf{h} можно записать в виде

$$h^{(l)} = a_{j_l-1}^{(l)} g_{j_l-1} \oplus a_{j_l-2}^{(l)} g_{j_l-2} \oplus \dots \oplus a_0^{(l)} g_0.$$

Так как $G_j \oplus \mathbf{h}$ есть объединение дизъюнктивных кубов вида

$$(G_j \oplus h^{(1)}) \times (G_j \oplus h^{(2)}) \times \dots \times (G_j \oplus h^{(N)}) \quad (j = \max(j_1, \dots, j_N)), \quad (1)$$

то совокупность таких кубов также образует базу топологии в G^N . Куб (1) можно записать в виде $G_j^N \oplus \mathbf{h} = (G_j \oplus a_{j-1}^{(1)} g_{j-1} \oplus \dots \oplus a_0^{(1)} g_0) \times \dots \times (G_j \oplus a_{j-1}^{(N)} g_{j-1} \oplus \dots \oplus a_0^{(N)} g_0)$.

Обозначая для удобства $\mathfrak{G}_j := G_j^N$, куб (1) можно записать в виде $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, где

$$\mathfrak{g}_{1 \times j} = (g_{j-1} \quad \dots \quad g_0), \quad \mathcal{A}_{j \times N} = \begin{pmatrix} a_{j-1}^{(1)} & \dots & a_{j-1}^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_0^{(1)} & \dots & a_0^{(N)} \end{pmatrix}, \quad a_l^{(\nu)} \in \overline{0, p_l - 1}, \quad l = \overline{0, j-1}.$$

Размерность матриц зависит от ранга куба \mathfrak{G}_j . Обозначим ν -й столбец матрицы \mathcal{A} через $\mathcal{A}^{(\nu)}$, а ν -ю строку через $\hat{\mathcal{A}}^{(\nu)}$.



Положим по определению $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \chi_{n_1}(z_1) \cdots \chi_{n_N}(z_N)$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{G}$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$. Если $\mathbf{m}_j = (m_j, m_j, \dots, m_j)$, то $\chi_{\mathbf{m}_j}(\mathbf{z}) = r_j(\mathbf{z}) = \text{const}$ на $\mathfrak{G}_{j+1} \oplus \mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$.

Покажем, что $I = \int_{G_j} \chi_n(z) d\mu(z) = 0$ при $n \geq m_j$.

Рассмотрим произвольную пачку $m_{j+k} \leq n < m_{j+k+1}$ для всех $k \geq 0$.

1. Пусть $n = m_{j+k}$, в этом случае $\chi_n = r_{j+k}$. Представим интеграл I как сумму интегралов по смежным класса ранга $j+k$ таких, что $G_{j+k} \subset G_j$:

$$I = \sum_l \int_{G_{j+k} \oplus h_l} \chi_n(z) d\mu(z).$$

Зафиксируем l и рассмотрим отдельно интеграл по смежному классу:

$$\begin{aligned} \int_{G_{j+k} \oplus h_l} \chi_n(z) d\mu(z) &= \int_G \chi_n(z) \mathbf{1}_{G_{j+k} \oplus h_l}(z) d\mu(z) = \int_G \chi_n(z \oplus h_l) \mathbf{1}_{G_{j+k} \oplus h_l}(z \oplus h_l) d\mu(z) = \\ &= \int_G \chi_n(z) \chi_n(h_l) \mathbf{1}_{G_{j+k}}(z) d\mu(z) = \chi_n(h_l) \int_{G_{j+k}} \chi_n(z) d\mu(z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \sum_l \int_{G_{j+k} \oplus h_l} \chi_n(z) d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l) \int_{G_{j+k}} r_{j+k}(z) d\mu(z) = \\ &= \sum_l \chi_n(h_l) \sum_{\nu} \int_{G_{j+k+1} \oplus h'_\nu} \varepsilon_\nu d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l) \sum_{\nu} \varepsilon_\nu \mu(G_{j+k+1}) = 0, \end{aligned}$$

где ε_ν — корни из 1, $h_l = a_{j_l-1}g_{j_l-1} \oplus a_{j_l-2}g_{j_l-2} \oplus \dots \oplus a_0g_0$, $h'_\nu = a_{j+k}g_{j+k} \oplus a_{j+k-1}g_{j+k-1} \oplus \dots \oplus a_0g_0$.

2. Пусть $n = \alpha m_{j+k} + \beta = \alpha m_{j+k} + \beta_{j+k-1} m_{j+k-1} + \dots + \beta_0 m_0$, в этом случае $\chi_n = r_{j+k}^\alpha \times \times r_{j+k-1}^{\beta_{j+k-1}} \cdots r_0^{\beta_0} = r_{j+k}^\alpha \cdot 1$ на группе G_{j+k} .

Представим интеграл I как сумму интегралов по смежным класса ранга $j+k$ таких, что $G_{j+k} \subset G_j$:

$$I = \sum_l \int_{G_{j+k} \oplus h_l} \chi_n(z) d\mu(z).$$

Зафиксируем l и рассмотрим отдельно интеграл по смежному классу:

$$\begin{aligned} \int_{G_{j+k} \oplus h_l} \chi_n(z) d\mu(z) &= \int_G \chi_n(z) \mathbf{1}_{G_{j+k} \oplus h_l}(z) d\mu(z) = \int_G \chi_n(z \oplus h_l) \mathbf{1}_{G_{j+k} \oplus h_l}(z \oplus h_l) d\mu(z) = \\ &= \int_G \chi_n(z) \chi_n(h_l) \mathbf{1}_{G_{j+k}}(z) d\mu(z) = \chi_n(h_l) \int_{G_{j+k}} \chi_n(z) d\mu(z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \sum_l \chi_n(h_l) \int_{G_{j+k}} \chi_n(z) d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l) \int_{G_{j+k}} r_{j+k}^\alpha(z) d\mu(z) = \\ &= \sum_l \chi_n(h_l) \sum_{\nu} \int_{G_{j+k+1} \oplus h'_\nu} \varepsilon_\nu^\alpha d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l) \sum_{\nu} \varepsilon_\nu^\alpha \mu(G_{j+k+1}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{n=m_j}^{\infty} \int_{G_j} \chi_n(z) d\mu(z) = 0. \quad (2)$$



Рассмотрим N -кратный ряд

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_N} \chi_{n_1}(z_1) \cdots \chi_{n_N}(z_N). \quad (3)$$

Кубические частичные суммы ряда (3) будем обозначать

$$S_{\mathbf{M}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{M}-1} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\mathbf{M}-1} \cdots \sum_{n_N=0}^{\mathbf{M}-1} c_{n_1 \dots n_N} \chi_{n_1}(z_1) \cdots \chi_{n_N}(z_N),$$

а ядро Дирихле — через

$$D_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{k}-1} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\mathbf{k}-1} \cdots \sum_{n_N=0}^{\mathbf{k}-1} \chi_{n_1}(z_1) \cdots \chi_{n_N}(z_N).$$

Для ряда (3) определим функцию множества:

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}). \quad (4)$$

Запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) &= \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}} \int_{\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) = \\ &= \sum_{n_1=0}^{m_j-1} \cdots \sum_{n_N=0}^{m_j-1} c_{\mathbf{n}} \int_{\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) + \sum_{\mathbf{n} \notin [0, m_j-1]^N} c_{\mathbf{n}} \int_{\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Из (2) следует, что второй интеграл равен нулю (так как $n_s \geq m_j$, $s = \overline{1, N}$), а в первом интеграле $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \text{const}$ на $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, поэтому

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{m_j-1} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \int_{\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} d\mu(\mathbf{z}) = \mu(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) \cdot \sum_{\mathbf{n}=0}^{m_j-1} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \mu(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) S_{\mathbf{m}_j}(\mathbf{z}).$$

Таким образом, для каждого $\mathbf{z} \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ имеет место

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \mu(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) S_{\mathbf{m}_j}(\mathbf{z}). \quad (5)$$

Выразим коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ ряда (3) через функцию Ψ . Для этого выберем произвольное $\mathbf{m}_k = (m_k, \dots, m_k)$ так, чтобы $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}_k - \mathbf{1}$ ($n_s \leq m_k - 1$, $s = \overline{1, N}$), выберем произвольную точку $\mathbf{t}_k = (t_k^{(1)}, \dots, t_k^{(N)}) \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ и рассмотрим суммы

$$\sum_{\mathcal{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}),$$

где суммирование идет по всем кубам ранга k .

Далее, используя (4), имеем:

$$\sum_{\mathcal{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathbf{s}=0}^{\infty} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)} c_{\mathbf{s}} \int_{\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} \chi_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}).$$

Во внутренней сумме в силу (2) слагаемые с номером $\mathbf{s} \geq \mathbf{m}_k$ будут равны нулю, следовательно,

$$\sum_{\mathcal{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathbf{s}=0}^{\mathbf{m}_k-1} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)} c_{\mathbf{s}} \int_{\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} \chi_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) =$$



$$= \sum_{s=0}^{m_k-1} c_s \sum_{\mathcal{A}} \int_{\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} \overline{\chi_n(\mathbf{z})} \chi_s(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) = \sum_{s=0}^{m_k-1} c_s \int_{\mathfrak{G}} \overline{\chi_n(\mathbf{z})} \chi_s(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) = \sum_{s=0}^{m_k-1} c_s \delta_{ns} = c_n.$$

Таким образом,

$$c_n = \sum_{\mathcal{A}} \overline{\chi_n(\mathbf{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}), \quad (6)$$

причем c_n не зависит от \mathbf{k} , лишь бы $n \leq m_k - 1$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Пусть A — M -множество ряда (3) в смысле сходимости по кубам, т. е. ряд (3) не равен нулю тождественно и сходится к нулю вне A . Тогда $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = \emptyset$.

Доказательство. Допустим противное, пусть существует $\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0 : \mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0 \cap A = \emptyset$, но $\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) \neq 0$, и пусть для определенности $\operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) > 0$ (в противном случае можно заменить c_n на $-c_n$ в ряде (3)). Следовательно, существует $\alpha > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) > \alpha > 0$.

Имеем:

$$\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}_{1 \times j_0} \mathcal{A}_{j_0 \times N}^0 = \bigsqcup_{\mathcal{A}^0(1)} (\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}_{1 \times j_0+1} \mathcal{A}_{j_0+1 \times N}^0).$$

Следовательно, в силу аддитивности функции Ψ

$$\begin{aligned} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) &= \sum_{\mathcal{A}^0(1)} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) \Rightarrow \operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) = \sum_{\mathcal{A}^0(1)} \operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) > \alpha > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists \mathcal{A}^1 : \operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^1) > \frac{\alpha}{p_{j_0}^N} > 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}_{1 \times j_0+1} \mathcal{A}_{j_0+1 \times N}^0 &= \bigsqcup_{\mathcal{A}^1(1)} (\mathfrak{G}_{j_0+2} \oplus \mathfrak{g}_{1 \times j_0+2} \mathcal{A}_{j_0+2 \times N}^1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^1) &= \sum_{\mathcal{A}^1(1)} \operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^1) > \frac{\alpha}{p_{j_0}^N} > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \mathcal{A}^2 : \operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^2) &> \frac{\alpha}{p_{j_0}^N p_{j_0+1}^N} > 0 \end{aligned}$$

и т. д.

На n -м шаге получим, что

$$\exists \mathcal{A}^n : \operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^n) > \frac{\alpha}{p_{j_0}^N \cdots p_{j_0+n-1}^N} > 0.$$

В результате получим последовательность вложенных N -мерных смежных классов, сходящуюся к точке \mathbf{z} .

Рассмотрим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} S_{m_j}(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} S_{m_{j_0+n}}(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^n).$$

В силу (5) получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} S_{m_{j_0+n}}(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^n)}{\mu(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^n)} \geq \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\frac{p_{j_0}^N \cdots p_{j_0+n-1}^N}{m_{j_0+n}^N}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha m_{j_0}^N > 0. \end{aligned}$$



Таким образом, $\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} S_{m_j}(\mathbf{z}) > 0$, т. е. ряд не сходится к нулю, следовательно, по условию $\mathbf{z} \in A$, но $\mathbf{z} \in \mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0$. Значит, $\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0 \cap A \neq \emptyset$. Получили противоречие. Таким образом,

$$\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}^0) = 0. \quad \square$$

Лемма 2. Пусть $A \subset \mathfrak{G}$, \mathbf{z} — изолированная точка множества A . Пусть H — аддитивная функция, определенная на борелевских подмножествах множества \mathfrak{G} и $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = \emptyset$. Тогда существует число b такое, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = \{\mathbf{z}\}$ $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = b$.

Доказательство. Выберем $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1 : \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1 \cap A = \{\mathbf{z}\}$ и $H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1) = b$ и выберем произвольно $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2 : \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2 \cap A = \{\mathbf{z}\}$. Покажем, что $H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2) = b$.

1. $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1 \subset \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2$. В этом случае $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2 = \bigsqcup \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, где объединение берется по всем \mathcal{A} , для которых $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \subset \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2) &= \sum H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) + \sum_{\mathbf{z} \notin \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1) + 0 = b. \end{aligned}$$

2. $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2 \subset \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1$. В этом случае $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1 = \bigsqcup \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, где объединение берется по всем \mathcal{A} , для которых $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \subset \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1$. Тогда

$$H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_1) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) + \sum_{\mathbf{z} \notin \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}_2) = b. \quad \square$$

Лемма 3. Пусть $A = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\} \in \mathfrak{G}$ — конечное множество, H — аддитивная функция, определенная на борелевских подмножествах \mathfrak{G} , и такая, что если $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = \emptyset$, то $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = 0$. Тогда существует конечный набор чисел $\{b_1, \dots, b_n\}$ такой, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{l: \mathbf{z}_l \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} b_l$, если $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A \neq \emptyset$.

Доказательство. По лемме 2 для любых l и $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, таких что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = \{\mathbf{z}_l\}$, существует b_l такое, что $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = b_l$.

Смежный класс $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ представим в виде объединения смежных классов большего ранга $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} = \bigsqcup_{\mathcal{A}} \mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ так, чтобы каждый смежный класс $\mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ содержал не более одной точки \mathbf{z}_l . Тогда

$$H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{\mathbf{z}_l \in \mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} H(\mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) + \sum_{\mathbf{z}_l \notin \mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} H(\mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{\mathbf{z}_l \in \mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} b_l. \quad \square$$

Определение. Если точка z принадлежит подгруппе G_{l_0} , но не принадлежит подгруппе G_{l_0+1} , то будем говорить, что *порядок точки z равен l_0* .

Лемма 4. При $l > l_0$, значение выражения $D_{m_l+m_{l_0}}(\mathbf{t}) = m_{l_0}^N r_l(\mathbf{t})$, если порядок всех координат точки \mathbf{t} равен l_0 , и нулю, если порядок хотя бы одной координаты точки \mathbf{t} меньше l_0 .

Доказательство. Имеем:

$$D_{m_l+m_{l_0}}(\mathbf{t}) = \sum_{n=0}^{m_l+m_{l_0}-1} \chi_n(\mathbf{t}) = \sum_{n=0}^{m_l-1} \chi_n(\mathbf{t}) + \sum_{n=m_l}^{m_l+m_{l_0}-1} \chi_n(\mathbf{t}) = D_{m_l}(\mathbf{t}) + r_l(\mathbf{t})D_{m_{l_0}}(\mathbf{t}).$$

Учитывая равенство $D_{m_k}(\mathbf{t}) = \begin{cases} m_k, & \mathbf{t} \in G_k, \\ 0, & \mathbf{t} \notin G_k, \end{cases}$ получим, что

$$D_{m_{l_0}+m_l}(\mathbf{t}) = \begin{cases} r_l(\mathbf{t})m_{l_0}, & \text{если порядок точки } \mathbf{t} \text{ равен } l_0, \\ 0, & \text{если порядок точки } \mathbf{t} \text{ меньше } l_0. \end{cases}$$

Положим $D_{m_l+m_{l_0}}(\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^N D_{m_l+m_{l_0}}(t^{(k)})$, где $\mathbf{t} = (t^{(1)}, \dots, t^{(N)})$, $t^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} t_j^{(k)} g_j$, $g_j \in G_j \setminus G_{j+1}$.

Если порядок хотя бы одной из координат точки \mathbf{t} меньше l_0 , то $D_{m_l+m_{l_0}}(\mathbf{t}) = 0$, иначе $D_{m_l+m_{l_0}}(\mathbf{t}) = \prod_{s=1}^N D_{m_l+m_{l_0}}(t^{(s)}) = \prod_{s=1}^N r_l(t^{(s)})m_{l_0} = m_{l_0}^N r_l(\mathbf{t})$. \square



3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Любое конечное множество $A \subset \mathfrak{G} = G^N$ является множеством единственности для N -кратных рядов по системе характеров в смысле сходимости по кубам.

Доказательство. Допустим противное, пусть существует конечное множество $A = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q\} \in \mathfrak{G}$, где $\mathbf{z}_j = (z_j^{(1)}, \dots, z_j^{(N)})$, которое является M -множеством, следовательно, существует ряд (3), не все коэффициенты которого равны нулю, сходящийся к нулю вне A . Покажем, что существует точка $\mathbf{y} \in \mathfrak{G} \setminus A$, в которой кубические частичные суммы данного ряда не сходятся к нулю, что противоречит условию M -множества.

Пусть $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A})$ — аддитивная функция, построенная для данного ряда (3) по формуле (4). По лемме 1 $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, не содержащего точек множества A . По лемме 3 (в силу леммы 1 и аддитивности функции Ψ) существуют числа $\{b_1, \dots, b_q\}$ такие, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, не содержащего точек множества A , $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{k: \mathbf{z}_k \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} b_k$.

Таким образом,

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = \emptyset; \\ \sum_{k: \mathbf{z}_k \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} b_k, & \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A \neq \emptyset. \end{cases} \quad (7)$$

При этом в силу формулы (6) и условия, что не все коэффициенты c_n равны нулю, существует хотя бы один номер j_0 такой, что $b_{j_0} \neq 0$. Выберем $\mathbf{l}_0 = (l_0, \dots, l_0) \in \mathbb{R}^N$ так, чтобы куб $\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ содержал точку \mathbf{z}_{j_0} , но не содержал остальных точек $\mathbf{z}_j, j = 1, \dots, q, j \neq j_0$. Выберем точку $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(N)}) \in \mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ с координатами $y^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0} \oplus z_{j_0}^{(\nu)}, \nu = 1, \dots, N$. Тогда точка $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}$ будет иметь координаты $y^{(\nu)} \ominus z_{j_0}^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0} \oplus z_{j_0}^{(\nu)} \ominus z_{j_0}^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0}$, значит порядок каждой координаты точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}$ равен l_0 . Рассмотрим остальные точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j, j \neq j_0$ с координатами $y^{(\nu)} \ominus z_j^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0} \oplus z_{j_0}^{(\nu)} \ominus z_j^{(\nu)}$. Так как точки \mathbf{z}_{j_0} и \mathbf{z}_j лежат в разных смежных классах, то порядок хотя бы одной координаты каждой из точек $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j$ будет меньше l_0 (данная точка будет лежать в большем смежном классе).

Покажем, что последовательность кубических частичных сумм $S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y})$ не стремится к нулю при $\mathbf{l} \rightarrow \infty, \mathbf{l} = (l, \dots, l)$.

В силу (6) имеем:

$$S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0 - 1} c_n \chi_n(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0 - 1} \left[\sum_{\mathcal{A}} \overline{\chi_n(\mathbf{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) \right] \chi_n(\mathbf{y}).$$

Суммирование во внутренней сумме идет по всем смежным классам ранга $k \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \ni \mathbf{t}_k$, а номер k выбирается так, чтобы для всех $s = \overline{1, N}$ $n_s \leq m_k - 1$ и в смежном классе $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ лежало не более одной точки \mathbf{z}_j . Тогда

$$S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathcal{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0 - 1} \overline{\chi_n(\mathbf{t}_k)} \chi_n(\mathbf{y}).$$

В силу (7) \mathbf{t}_k можно заменить на $\mathbf{z}_j, j = 1, \dots, N$, тогда

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y}) &= \sum_{j: \mathbf{z}_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} b_j \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0 - 1} \chi_n(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j) = \\ &= \sum_{j: \mathbf{z}_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}, j \neq j_0} b_j D_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j) + b_{j_0} D_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю в силу леммы 4 и выбора точки \mathbf{y} , ядро Дирихле во второй сумме равно $m_{i_0}^N r_1(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0})$, следовательно,

$$S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y}) = 0 + b_{j_0} m_{i_0}^N r_1(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}) = b_{j_0} m_{i_0}^N r_1(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}).$$

Так как $|r_1(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0})| = \prod_{s=1}^N |r_l(y^{(s)} \ominus z_{j_0}^{(s)})| = 1$, то $S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0}(\mathbf{y}) \neq 0$ при $\mathbf{l} \rightarrow \infty$. □



Теорема 2. Если счетное множество $A \subset \mathfrak{G}$ имеет только одну предельную точку, то оно является множеством единственности для N -кратных рядов по системе характеров в смысле сходимости по кубам.

Доказательство. Пусть $A = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$. Тогда все точки этого множества, кроме, быть может, одной являются изолированными. Пусть z — единственная изолированная точка множества A . Допустим противное, пусть множество $A \in \mathfrak{G}$ является M -множеством, т. е. существует ряд (3), не все коэффициенты которого равны нулю, сходящийся к нулю вне A .

Пусть $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A})$ — аддитивная функция, построенная для данного ряда (3) по формуле (4). По лемме 1 $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, не содержащего точек множества A . По лемме 2 для каждой точки $z_j \neq z$ существует число b_j такое, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = z_j$, имеет место равенство $\Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = b_j$.

Рассмотрим два случая.

1. Существует, по крайней мере, один номер $j = j_0$ такой, что $b_{j_0} \neq 0$. Выберем $\mathbf{l}_0 = (l_0, \dots, l_0) \in \mathbb{R}^N$ так, чтобы куб $\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$ содержал точку z_{j_0} , но не содержал остальных точек $z_j, j = 1, \dots, q, j \neq j_0$. Выберем точку $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(N)}) \in \mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$, как в теореме 1, так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \ominus z_{j_0}$ был равен l_0 , а порядок хотя бы одной координаты каждой из точек $\mathbf{y} \ominus z_j, j \neq j_0$ был меньше l_0 .

Покажем что последовательность кубических частичных сумм $S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y}) \not\rightarrow 0$ при $\mathbf{l} \rightarrow \infty, \mathbf{l} = (l, \dots, l)$. Из доказательства теоремы 1 имеем:

$$S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathcal{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0} - 1} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}).$$

В силу лемм 1 и 2 \mathbf{t}_k можно заменить на z_j , тогда

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y}) &= \sum_{j: z_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} b_j \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0} - 1} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y} \ominus z_j) = \\ &= \sum_{j: z_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}, j \neq j_0} b_j D_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y} \ominus z_j) + b_{j_0} D_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y} \ominus z_{j_0}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю в силу леммы 4 и выбора точки \mathbf{y} , ядро Дирихле во второй сумме равно $m_{l_0}^N r_1(\mathbf{y} \ominus z_{j_0})$. Следовательно,

$$S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y}) = 0 + b_{j_0} m_{l_0}^N r_1(\mathbf{y} \ominus z_{j_0}) = b_{j_0} m_{l_0}^N r_1(\mathbf{y} \ominus z_{j_0}).$$

Так как $|r_1(\mathbf{y} \ominus z_{j_0})| = \prod_{s=1}^N |r_1(y^{(s)} \ominus z_{j_0}^{(s)})| = 1$, то $S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y}) \not\rightarrow 0$ при $\mathbf{l} \rightarrow \infty$ и, следовательно, что ряд (3) не сходится к нулю по кубам в точке \mathbf{y} — противоречие.

2. Числа $b_j = 0$ для любого j . В этом случае существует $\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \ni z$ и существует число $b \neq 0$ такое, что $\Psi(\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = b$. В противном случае, функция Ψ будет тождественно равна нулю и, следовательно, в силу формулы (6) все коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ также будут тождественно равны нулю.

Как и в случае 1, выберем точку $\mathbf{y} \in \mathfrak{G} \setminus A$ так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \ominus z$ был равен некоторому числу l_0 , а порядок хотя бы одной координаты каждой из точек $\mathbf{y} \ominus z_j, z_j \neq z$ был меньше l_0 .

Имеем:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y}) &= \sum_{\mathcal{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) D_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y} \ominus z_j) = \\ &= b D_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y} \ominus z) = b m_{l_0}^N r_1(\mathbf{y} \ominus z). \end{aligned}$$

Так как $|r_1(\mathbf{y} \ominus z)| = 1$, то $S_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_{l_0}}(\mathbf{y}) \not\rightarrow 0$ при $\mathbf{l} \rightarrow \infty$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097).



Библиографический список

1. Скворцов В. А. О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 6. С. 789–798.
2. Мовсисян Х. О. О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.
3. Лукомский С. Ф. О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 7. С. 937–945.
4. Жеребьева Т. А. Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 2. С. 14–21.
5. Lukomskii S. F. On a U -set for multiple Walsh series // Analysis Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.
6. Лукомский С. Ф. Представление функций рядами Уолша и коэффициентами сходящихся рядов Уолша : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Саратов, 1996. 220 с.
7. Плотников М. Г. О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. мат. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78. DOI: 10.4213/im739.

A U -set for System of Character of the Zero-dimensional Group under Convergent over Cubes

I. S. Yurchenko

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, hamsterchik@mail.ru

In this work we consider system of characters of the compact zero-dimensional group G and study uniqueness sets for N -fold multiple series for system of character a zero-dimensional group under convergent over cubes (in other words, U -sets). We proof that every finite set is a U -set and show that countable set with only one limit point is a U -set.

Key words: compact zero-dimensional group, U -set, N -fold multiple series under convergent over cubes.

References

1. Skvortsov V. A. Uniqueness sets for multiple Haar series. *Math. Notes*, 1973, vol. 14, no. 6, pp. 1011–1016.
2. Movsisyan Kh. O. O edinstvennosti dvoynykh riadov po sistemam Khaara i Uolsha [Uniqueness for multiple Haar and Walsh series]. *Izv. AN Arm. SSR. Ser. mat.* [Izvestiya AS ASSR. Math. Bulletin], 1974, vol. 9, no. 1, pp. 40–61 (in Russian).
3. Lukomskii S. F. On certain classes of sets of uniqueness of multiple Walsh series. *Math. of the USSR-Sbornik*, 1990, vol. 67, no. 2, pp. 393–401.
4. Zherebeva T. A. A class of sets of uniqueness for multiple Walsh series. *Moscow Univ. Math. Bulletin*, 2009, vol. 64, no. 2, pp. 55–61.
5. Lukomskii S. F. On a U -set for multiple Walsh series. *Analysis Math.*, 1992, vol. 18, no 2, pp. 127–138.
6. Lukomskii S. F. *Predstavlenie funktsii riadami Uolsha i koeffitsientami skhodiashchikhsia riadov Uolsha*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [Representation of function by Walsh series and coefficients of convergent Walsh series. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saratov, 1996, 220 p.
7. Plotnikov M. G. On multiple Walsh series convergent over cubes. *Izvestiya Math.*, 2007, vol. 71, no. 1, pp. 57–73. DOI: 10.4213/im739.



МЕХАНИКА

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК В КООРДИНАТАХ ОБЩЕГО ВИДА

А. А. Барышев¹, С. А. Лычев², А. В. Манжиров³

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, BaryshevAA@gmail.com

²Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, lychevsa@mail.ru

³Доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, manzh@inbox.ru

Построена математическая модель упругих однородных оболочек в рамках кинематики типа Рейсснера–Миндлина. На основе прямых (бескоординатных) методов тензорного исчисления получены уравнения равновесия в перемещениях в произвольной (не обязательно ортогональной) системе координат, учитывающие асимметрию расположения лицевых поверхностей. Для сферической оболочки предложена процедура построения решения, основанная на методе спектрального разложения, описывающего напряженно-деформированное состояние при потенциальных силовых и моментных статических нагрузках.

Ключевые слова: сферическая оболочка, статический изгиб, аналитические решения, спектральные разложения, собственные функции.

Задачи математического моделирования тонкостенных тел, в частности тонких оболочек, возникают при исследовании очень широкого класса современных материалов и конструкций. Создание новых моделей (теорий) или модификация существующих объясняется, с одной стороны, использованием новых материалов, например наноматериалов [1], композитных материалов [2], с другой — описанием технологических процессов, при которых объекты создаются путем наращивания, например при электролитическом, газодинамическом, парофазном осаждениях, ионной имплантации, стереолитографии [3]. Большинство работ в этом направлении основаны на идее редукции задачи о деформировании трехмерного тела к задаче о некоторой специальной трансформации двумерного многообразия, представленного поверхностью осреднения оболочки. Такое преобразование может быть выполнено различным образом. Это означает, что несмотря на введение в модель одних и тех же кинематических и статических ограничений на напряженно-деформированное состояние, окончательные соотношения и уравнения оказываются различными [4].

Создание моделей тонкостенных тел, позволяющих описывать новые эффекты, естественно, основано на использовании современных понятий механики твердого тела, заложенных в трудах С. Truesdell, R. A. Toupin [5], W. Noll [6], M. Epstein [7], M. E. Gurtin [8], G. A. Maugin [9], Cohen [10] и др. Это позволяет осуществить моделирование процессов, выходящих за рамки классической механики оболочек. Так, слоистые оболочки представляют собой соединения континуального множества мембран, или по терминологии [8] — материальных поверхностей, каждая из которых обладает своей индивидуальной отсчетной конфигурацией. Поэтому деформации этих мембран в «сборке», за исключением специальных случаев, не являются совместными, т. е. слоистые оболочки не обладают натуральной конфигурацией [11].

Целью настоящего исследования является построение уравнений равновесия упругих оболочек в рамках кинематики типа Рейсснера–Миндлина, учитывающих асимметрию строения, в координатах общего вида.

Тонкостенные тела интуитивно понимаются как тела, образы конфигураций которых определяются характерными размерами различных порядков: один из них можно трактовать как «малый параметр». Это определение можно сформулировать более строго, если рассмотреть в физическом пространстве две совокупности открытых шаров. Пусть элементы первой совокупности содержат все образы допустимых конфигураций, а элементы второй полностью содержатся в них. Тогда можно определить



наибольший шар из второй совокупности и наименьший из первой. Отношение их радиусов дает параметр, определяющий отношение характерных размеров. Порядок малости этого параметра определяет «степень тонкостенности».

Оболочки определяются как подмножество класса тонкостенных тел, граница которых устроена специальным образом: она представляет объединение двух поверхностей, называемых лицевыми, и конечного множества (возможно, пустого) линейчатых поверхностей. Последние задают так называемый опорный контур оболочки. Если лицевые поверхности эквидистантны, то оболочка классифицируется как оболочка постоянной толщины. Здесь и далее поверхность осреднения будем обозначать символом S . Ортогональная проекция средней линии линейчатых поверхностей на S определяет на ней совокупность (возможно, пустую) замкнутых кривых, которые определяют опорный контур Γ .

Заметим, что в наиболее общем случае S можно рассматривать как ориентируемую поверхность лишь локально, а в целом S представляет собой двумерное гладкое многообразие, накрываемое совокупностью локальных карт, образующих атлас S . То же самое следует сказать и о лицевых поверхностях. Примеры подобных оболочек можно построить как обобщения известных примеров из топологии: лист Мебиуса, бутылка Клейна, яйцо Дунса. Вместе с тем, в рамках статьи ограничимся оболочками, для которых S представляет собой тривиальное многообразие, т. е. двумерное многообразие, атлас которого состоит из одной карты. Более того, будем полагать, что S может быть вложено в физическое (евклидово) пространство \mathcal{E} посредством отображения $\rho : D \rightarrow \mathcal{E}, D \subset \mathbb{R}^2$.

Предположение о возможности вложения достаточно сильное: из него вытекает вполне определенная связность, определяющая S глобально как риманово двумерное многообразие. Если дополнительно предположить, что ρ не имеет особых точек, а на S может быть построено непрерывное поле единичных нормалей, то S можно характеризовать как неособую ориентируемую поверхность¹.

1. Рассмотрим подробно необходимые для дальнейшего изложения геометрические структуры на S . Отображение ρ определяет на S поле реперов, которые принято в механике называть векторными базисами [12]:

$$\rho_\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial q^\alpha} \quad (q^1, q^2) \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

На языке геометрии это поле реперов (вернее, их линейные оболочки) задает *касательное расслоение* TS . В общем случае реперы представляют неортогональные пары векторов (скалярное произведение индуцируется скалярным произведением в физическом пространстве) и порождают дуальные реперы ρ^α :

$$\rho^\alpha \cdot \rho_\beta = \delta_\beta^\alpha.$$

Поле дуальных реперов определяет *кокасательное расслоение* T^*S .

Определим первый фундаментальный тензор поверхности A :

$$A = \rho_\alpha \otimes \rho^\alpha = \rho^\alpha \otimes \rho_\alpha = a_{\alpha\beta} \rho^\alpha \otimes \rho^\beta = a^{\alpha\beta} \rho_\alpha \otimes \rho_\beta. \quad (2)$$

Компоненты $a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$ определяются скалярными произведениями векторных базисов $a_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \cdot \rho_\beta$, $a^{\alpha\beta} = \rho^\alpha \cdot \rho^\beta$. Отметим, что этот тензор является оператором ортогонального проектирования на касательное пространство, т. е.

$$\forall u \in TS \quad A \cdot u = u \cdot A = u.$$

Определим, принимая нотацию Гиббса [13], двумерный оператор Гамильтона на многообразии S по формуле

$$\nabla_s = \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}. \quad (3)$$

Тогда градиент векторного поля нормалей $n = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{|\rho_1 \times \rho_2|}$ имеет следующий вид:

$$\nabla_s n = \rho^\alpha \otimes \frac{\partial n}{\partial q^\alpha} = -B. \quad (4)$$

Он определяет второй фундаментальный тензор поверхности B .

¹Из классификационной теоремы для двумерных многообразий вытекает, что продолжение S топологически эквивалентно либо плоскости, либо сфере, либо n -тору.



Таким образом, с каждой точкой поверхности S ассоциирована тройка векторов $\rho_1, \rho_2, \mathbf{n}$, которая в силу условий, указанных выше, образует базис в векторном пространстве, ассоциированном с \mathcal{E} .

В дальнейшем нам понадобятся следующие разложения градиента векторного поля и дивергенции тензорного поля, определенного на поверхности осреднения [14]:

$$\forall \mathbf{u} \in TS \quad \nabla_s \mathbf{u} = \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}, \quad (5)$$

$$\forall \mathbf{T} \in TS \otimes TS \quad \nabla_s \cdot \mathbf{T} = (\nabla_s \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} : \mathbf{T}) \mathbf{n}. \quad (6)$$

Причем операции с поверхностным оператором Гамильтона могут быть выражены в терминах ковариантной производной ∇_α и соответствующих символов Кристоффеля 2-го рода на поверхности $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} &= \nabla_\alpha u^\beta \rho^\alpha \otimes \rho_\beta = \nabla_\alpha u_\beta \rho^\alpha \otimes \rho^\beta, & \nabla_\alpha u^\beta &= \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma, & \nabla_\alpha u_\beta &= \frac{\partial u_\beta}{\partial q^\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u_\gamma, \\ ((\nabla_s \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{A})^\alpha &= \frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha T^{\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha T^{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Производные базисных векторов можно представить разложениями:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \rho_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial q^\beta} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \rho^\gamma + b_\beta^\alpha \mathbf{n}. \quad (7)$$

Координатное представление на поверхности S порождает криволинейные координаты в окрестности S . Фактически, эти криволинейные координаты задают некоторую карту из атласа, накрывающего все физическое пространство:

$$\mathbf{R} = \rho + z\mathbf{n}, \quad (8)$$

где z — координата, отсчитываемая вдоль нормали, которую далее будем называть трансверсальной координатой. Эта карта является важным элементом теории, поскольку позволяет ввести согласованные координаты как на S , так и на всех слоях, образующих оболочку. Порождаемые этой картой поля реперов (основных и взаимных) имеют вид

$$\mathbf{R}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^\alpha}, \quad \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}^3 = \mathbf{n}. \quad (9)$$

Из соотношений (1), (4) и формул (7), (9) следует, что

$$\mathbf{R}_\alpha = (\mathbf{A} - z\mathbf{B}) \cdot \rho_\alpha, \quad \mathbf{R}^\alpha = (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \rho^\alpha. \quad (10)$$

Тогда пространственный оператор Гамильтона в окрестности поверхности можно представить в терминах поверхностного оператора ∇_s (3):

$$\nabla = \mathbf{R}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} = (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \nabla_s + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11)$$

2. В теории оболочек Рейсснера–Миндлина (в некоторых работах называемой теорией типа Тимошенко [15]) принимаются следующие гипотезы:

1. Нормальный элемент к поверхности осреднения до деформации не изменяет своей длины.
2. Напряжения обжатия по толщине $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ малы и ими можно пренебречь.

Первую группу гипотез можно классифицировать как *кинематические*, поскольку они задают ограничения на деформацию тела, а вторую — как *статические*, ввиду того что в ней речь идет о специальном типе распределения напряжений.

Очевидно, что постулирование кинематических гипотез эквивалентно введению дополнительных идеальных связей. По этой причине оболочки можно рассматривать как тела со связями [12].

Математическая формулировка кинематических ограничений определяется соотношением

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + w\mathbf{n} - z\boldsymbol{\vartheta}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (12)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(q^1, q^2)$, $w = w(q^1, q^2)$ — вектор тангенциальных смещений и прогиб точек поверхности осреднения, $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(q^1, q^2)$ — вектор, характеризующий поворот нормального элемента. С другой



стороны, вводя вектор поворота как $\boldsymbol{\theta} = \vartheta^2 \mathbf{e}_1 - \vartheta^1 \mathbf{e}_2$, поле перемещений можно записать [16] в виде $\mathbf{u} = \mathbf{v} + w\mathbf{n} + z\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}$.

При заданных ограничениях на поле перемещений (12) его градиент может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \left((\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \nabla_s + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{v} + w\mathbf{n} - z\boldsymbol{\vartheta}) = \\ &= (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot (\nabla_s \mathbf{v} - \mathbf{B}w + \nabla_s w \otimes \mathbf{n} - z\nabla_s \boldsymbol{\vartheta}) - \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\vartheta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Непосредственное использование выражения (13) в значительной степени затрудняется наличием множителя $(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$. В различных вариантах теории оболочек используются разные формы его представления. Ряд авторов полагают его равным \mathbf{A} (ввиду малости z и главных значений тензора кривизны), либо используют разнообразие аппроксимации. Это приводит к отличиям в окончательных уравнениях. В этой связи представляется важным конкретизировать форму представления этого множителя. Далее используется асимптотическое разложение:

$$(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A} + z\mathbf{B} + o(z), \quad (14)$$

которое отражает идею представления полей в виде формулы Тейлора первого порядка по отношению к трансверсальной координате z .

Соответствующее представление для градиента перемещений (13) имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}w + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w) \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\vartheta} + \\ &+ z \left(-\nabla_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A} + \underline{\mathbf{B} \cdot (\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}w)} + (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta})) \otimes \mathbf{n} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что подчеркнутые слагаемые, как правило, не учитываются [17, с. 31; 18, с. 82; 19].

Тензор, сопряженный к градиенту перемещений (15), может быть записан в форме

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u})^* &= \mathbf{A} \cdot (\nabla_s \mathbf{v})^* - \mathbf{B}w + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w) - \boldsymbol{\vartheta} \otimes \mathbf{n} + \\ &+ z \left(-\mathbf{A} \cdot (\nabla_s \boldsymbol{\vartheta})^* + \underline{\mathbf{A} \cdot (\nabla_s \mathbf{v})^* - \mathbf{B}w} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta})) \right). \end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют записать выражение для тензора малых деформаций $2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} - \mathbf{B}w + [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}) \otimes \mathbf{n}]^{sym} + \\ &+ z \left(-[\nabla_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + [\mathbf{B} \cdot (\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}w)]^{sym} + [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}) \otimes \mathbf{n}]^{sym} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Эти и все дальнейшие выражения могут быть записаны в компактном виде, если ввести так называемые меры мембранной $\boldsymbol{\varepsilon}$, изгибной $\boldsymbol{\varkappa}$ и угловой $\boldsymbol{\gamma}$ деформации:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} - \mathbf{B}w, \quad \boldsymbol{\varkappa} = [\nabla_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A}]^{sym}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_s + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}. \quad (17)$$

Здесь $[\dots]^{sym}$ означает операцию выделения симметричной части тензора, т. е. $[\mathbf{T}]^{sym} = (\mathbf{T} + \mathbf{T}^*)/2$.

В терминах (17) тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ (16) записывается в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} + [\boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n}]^{sym} + z \left(\underline{\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varkappa}} + [(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \otimes \mathbf{n}]^{sym} - \boldsymbol{\varkappa} \right), \quad (18)$$

где \mathbf{Z} определяется формулой $\mathbf{Z} = ((\nabla_s \mathbf{v})^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot (\nabla_s \mathbf{v})^*)/2$. Заметим, что слагаемые $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}$ в большинстве работ входят в тензор изгибной деформации [18, 19].

3. Для изотропного линейного упругого материала оболочки принимаем следующие определяющие соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varkappa} : \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Atr} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1-\nu} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}. \quad (19)$$

Здесь тензор $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, а тензор $\boldsymbol{\varkappa}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\varkappa} = \rho^\alpha \otimes \rho_\beta \otimes \rho_\alpha \otimes \rho^\beta + k(\mathbf{n} \otimes \rho_\alpha \otimes \mathbf{n} \otimes \rho^\alpha + \rho^\alpha \otimes \mathbf{n} \otimes \rho_\alpha \otimes \mathbf{n}),$$



где k — коэффициент поперечного сдвига [15]. Заметим, что в этом случае выполняется статическая гипотеза в «жестком» варианте [20], так как $\text{tr } \epsilon$ умножается на двумерный единичный оператор \mathbf{A} .

Тензор напряжений представим в форме следующего разложения:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0^{\parallel} + \boldsymbol{\sigma}_0^{\perp} + z \left(\boldsymbol{\sigma}_1^{\parallel} + \boldsymbol{\sigma}_1^{\perp} \right),$$

где $\boldsymbol{\sigma}_0^{\parallel} = 2\mu\epsilon + \lambda \text{Atr } \epsilon$, $\boldsymbol{\sigma}_0^{\perp} = k\mu [\boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n}]^{sym}$, $\boldsymbol{\sigma}_1^{\parallel} = 2\mu (\mathbf{B} \cdot \epsilon + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} - \varkappa) + \lambda \mathbf{A} (\mathbf{B} : \epsilon - \text{tr } \varkappa)$, $\boldsymbol{\sigma}_1^{\perp} = k\mu [\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n}]^{sym}$.

Ниже приведем результат применения операции tr к тензорам деформаций:

$$\text{tr } \epsilon = \nabla_s \cdot \mathbf{v} - w \text{tr } \mathbf{B} \quad \text{tr } \varkappa = \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} \quad \text{tr } \mathbf{Z} = 0.$$

Следующий важный этап редукции трехмерных уравнений к двумерным связан с аппроксимацией выражения $G(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$. Введение редуцированных напряжений — сил и моментов — основано на интегрировании по трансверсальной координате относительно поверхности осреднения. Для выполнения операции интегрирования удобно предварительно ввести напряжения, приведенные к метрике поверхности осреднения S . Эти напряжения будем обозначать символом $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = G(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad G = G(z) = \det (\mathbf{A} - z\mathbf{B}). \quad (20)$$

Из теоремы Гамильтона–Кэли, записанной для тензора, определенного на поверхности, которая может быть сформулирована следующим образом [14]:

$$\mathbf{X}^2 - \mathbf{X} \text{tr } \mathbf{X} + \mathbf{A} \det (\mathbf{X}) = 0, \quad \text{где } \mathbf{X} = (\mathbf{A} - z\mathbf{B}), \quad \det (\mathbf{X}) = G, \quad \text{tr } \mathbf{A} = 2,$$

получаем, что

$$G(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A} + z\mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{B} - \text{Atr } \mathbf{B}.$$

Поэтому разложение в ряд Тейлора по трансверсальной координате тензорного поля $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ дает

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\parallel} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\perp} + z \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\parallel} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\perp} \right) + o(z), \quad (21)$$

а входящие в него компоненты определяются формулами

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\parallel} &= \boldsymbol{\sigma}_0^{\parallel}, & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\perp} &= k\mu \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\parallel} &= 2\mu (\mathbf{D} \cdot \epsilon + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} - \varkappa) + \lambda (\text{Atr } (\mathbf{D} \cdot \epsilon - \varkappa) + \mathbf{Y} : \epsilon) & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\perp} &= k\mu \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

Определим тензоры усилий \mathbf{T} и тензор моментов \mathcal{M} формулами [14, 21, 22]:

$$\mathbf{T} = \int_{-h_-}^{h_+} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dz, \quad \mathcal{M} = - \int_{-h_-}^{h_+} z \hat{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{n} dz. \quad (23)$$

Из определений тензоров следует, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{M} \cdot \mathbf{n} = 0$. Составляющие тензора усилий определяют *тензор мембранных усилий* $\mathcal{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}$ и *вектор перерезывающих сил* $\mathcal{Q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$.

На основании (23) выразим тензоры мембранных усилий, моментов и вектор перерезывающих сил через меры деформации (17), обозначая через $h = h_+ + h_-$ толщину оболочки:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= h(2\mu\epsilon + \lambda \text{Atr } \epsilon) - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} (2\mu\varkappa + \lambda \text{Atr } \varkappa) + \mathcal{T}_c, \\ \mathcal{T}_c &= \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \{2\mu (\mathbf{D} \cdot \epsilon + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}) + \lambda (\text{Atr } (\mathbf{D} \cdot \epsilon) + \mathbf{Y} : \epsilon)\}, \\ -\mathcal{M} &= \left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2} (2\mu\epsilon + \lambda \text{Atr } \epsilon) - \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} (2\mu\varkappa + \lambda \text{Atr } \varkappa) \right] \times \mathbf{n} + \mathcal{M}_c, \\ -\mathcal{M}_c &= \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \{2\mu (\mathbf{D} \cdot \epsilon + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}) + \lambda (\text{Atr } (\mathbf{D} \cdot \epsilon) + \mathbf{Y} : \epsilon)\} \times \mathbf{n}, \\ \mathcal{Q} &= hk\mu\boldsymbol{\gamma} + \mathcal{Q}_c \quad \mathcal{Q}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} k\mu \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \end{aligned} \quad (24)$$



В этих формулах мы выделяем из общих выражений составляющие сил и моментов, подчеркнутые ранее, наделяя их индексом с (curvature). Отметим, что наличие этих слагаемых приводит к тому, что соответствующие тензоры сил и моментов являются несимметричными.

Зависимость введенных в (24) тензоров от перемещений и углов поворота точек поверхности осреднения приобретает вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &= h \{ 2\mu [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \mathbf{v} - (\lambda \text{Atr } \mathbf{B} + 2\mu \mathbf{B}) w \} - \\
 &\quad - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \{ 2\mu [\nabla_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} \} + \mathcal{T}_c, \\
 \mathcal{T}_c &= \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \{ 2\mu (\mathbf{C} \cdot [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + [\mathbf{B} \cdot \nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym}) + \lambda (\mathbf{A} (\mathbf{C} : (\nabla_s \mathbf{v} - \mathbf{B} w)) + \\
 &\quad + \mathbf{B} \nabla_s \cdot \mathbf{v}) - 2\mathbf{B} \cdot (\lambda \text{Atr } \mathbf{B} + 2\mu \mathbf{B} + \mu \mathbf{C}) w \}, \\
 -\mathcal{M} &= \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \{ 2\mu [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \mathbf{v} - (\lambda \text{Atr } \mathbf{B} + 2\mu \mathbf{B}) w \} \times \mathbf{n} - \\
 &\quad - \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \{ 2\mu [\nabla_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} \} \times \mathbf{n} + \mathcal{M}_c, \\
 -\mathcal{M}_c &= \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \{ 2\mu (\mathbf{C} \cdot [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + [\mathbf{B} \cdot \nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym}) + \\
 &\quad + \lambda (\mathbf{A} (\mathbf{C} : (\nabla_s \mathbf{v} - \mathbf{B} w)) + \mathbf{B} \nabla_s \cdot \mathbf{v}) - 2\mathbf{B} \cdot (\lambda \text{Atr } \mathbf{B} + 2\mu \mathbf{B} + \mu \mathbf{C}) w \} \times \mathbf{n}, \\
 \mathcal{Q} &= hk\mu (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_s + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}) + \mathcal{Q}_c \quad \mathcal{Q}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} k\mu \mathbf{D} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_s + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}).
 \end{aligned} \tag{25}$$

4. Для решения краевых задач часто эффективны методы разложения по собственным функциям дифференциального оператора, порождаемого уравнениями равновесия, записанными в терминах перемещений. Как правило, такие системы уравнений приведены для оболочек постоянной толщины канонической формы в традиционных ортогональных системах координат либо в случаях, когда $h\|\mathbf{B}\| \ll 1$.

Получим уравнения равновесия теории оболочек в перемещениях. На основе [11] эту систему, записанную в усилиях и моментах, примем в виде

$$\begin{aligned}
 \nabla_s \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathcal{Q} + \mathbf{g} &= \mathbf{0}, \\
 \nabla_s \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{A} + \mathcal{Q} \times \mathbf{n} + \mathbf{m} &= \mathbf{0}, \\
 \nabla_s \cdot \mathcal{Q} + \mathbf{B} : \mathcal{T} + q &= 0.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $\mathbf{g} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$, $q = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$, а \mathbf{p} — вектор плотности распределенных усилий, \mathbf{m} — вектор распределенных моментов.

Подставим выражения сил и моментов, записанные через перемещения (25):

$$\begin{aligned}
 h \{ \mu \nabla_s^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \mathbf{v} - \nabla_s \cdot ((2\mu \mathbf{B} + \lambda \text{Atr } \mathbf{B}) w) - k\mu \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}) \} - \\
 - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \{ \mu \nabla_s^2 \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} \} + \nabla_s \cdot \mathcal{T}_c \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathcal{Q}_c + \mathbf{g} &= \mathbf{0}, \\
 h \{ k\mu (\nabla_s^2 w - \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} + \nabla_s \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})) + 2\mu \mathbf{B} : \nabla_s \mathbf{v} + \lambda \text{tr } \mathbf{B} \nabla_s \cdot \mathbf{v} - (2\mu \text{tr } \mathbf{B}^2 + \lambda \text{tr }^2 \mathbf{B}) w \} - \\
 - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \{ 2\mu \mathbf{B} : \nabla_s \boldsymbol{\vartheta} + \lambda \text{tr } \mathbf{B} \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} \} + \mathbf{B} : \mathcal{T}_c + \nabla_s \cdot \mathcal{Q}_c + q &= 0, \\
 \left\{ \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} (\mu \nabla_s^2 \boldsymbol{\vartheta} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta}) + kh\mu (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}) \right\} \times \mathbf{n} - \\
 - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \{ \mu \nabla_s^2 \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \mathbf{v} - \nabla_s \cdot ((2\mu \mathbf{B} + \lambda \text{Atr } \mathbf{B}) w) \} \times \mathbf{n} + \\
 + \mathcal{Q}_c \times \mathbf{n} - \nabla_s \cdot \mathcal{M}_c \cdot \mathbf{A} + \mathbf{m} &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Оператор ∇_s^2 необходимо определять следующим образом: $\nabla_s^2 \mathbf{f} = \nabla_s \cdot (\nabla_s \mathbf{f} \cdot \mathbf{A})$.

5. Несмотря на сложность уравнений (27), в ряде случаев удается построить аналитические решения порождаемых ими краевых задач. Конечно, это возможно для специальных форм граничных усло-



вий, однако такие «модельные» решения позволяют изучить качественные особенности напряженно-деформированного состояния исследуемых тонкостенных конструкций и построить на их основе алгоритмы численного решения. Наиболее удобной в этом смысле является сферическая оболочка, т. е. оболочка, поверхность осреднения которой представляет собой связанную часть сферы.

Пусть (θ, ψ, z) — сферические координаты, которые связаны с декартовыми следующими формулами:

$$X = (R + z) \sin \theta \cos \psi, \quad Y = (R + z) \sin \theta \sin \psi, \quad Z = (R + z) \cos \theta.$$

Здесь R — радиус поверхности осреднения. Связь базиса (1) с декартовым базисом и другие соотношения приведены в статье [11].

Сфера выгодно отличается от других поверхностей тем, что тензор \mathbf{B} на ней является шаровым, т. е. $\mathbf{B} = -\mathbf{A}/R$. Это приводит к существенным упрощениям в системе (27).

Приведем здесь выражения усилий и моментов для сферической оболочки из (25):

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= h \left(2\mu [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \mathbf{v} + \frac{2}{R} (\lambda + \mu) \mathbf{A} w \right) - \\ &- \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} (2\mu [\nabla_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta}), \quad \mathcal{Q} = hk\mu \left(-\frac{\mathbf{v}}{R} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta} \right), \\ -\mathcal{M} &= \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \left(2\mu [\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \mathbf{v} + \frac{2}{R} (\lambda + \mu) \mathbf{A} w \right) \times \mathbf{n} - \\ &- \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} (2\mu [\nabla_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A}]^{sym} + \lambda \mathbf{A} \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta}) \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения равновесия (27) примут вид

$$\begin{aligned} h \left\{ \mu \nabla_s^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \mathbf{v} + \frac{2}{R} (\lambda + \mu) \nabla_s w + \frac{k\mu}{R} \left(-\frac{\mathbf{v}}{R} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta} \right) \right\} - \\ - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \left\{ \mu \nabla_s^2 \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\} + \mathbf{g} = 0, \\ h \left\{ k\mu \left(\nabla_s^2 w - \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} - \frac{1}{R} \nabla_s \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{2}{R} (\lambda + \mu) \nabla_s \cdot \mathbf{v} - \frac{4}{R^2} (\lambda + \mu) w \right\} + \\ + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \frac{2(\lambda + \mu)}{R} \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} + q = 0, \\ \left\{ \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} (\mu \nabla_s^2 \boldsymbol{\vartheta} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \boldsymbol{\vartheta}) + kh\mu \left(-\frac{\mathbf{v}}{R} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta} \right) \right\} \times \mathbf{n} - \\ - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \left\{ \mu \nabla_s^2 \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla_s \nabla_s \cdot \mathbf{v} + \frac{2}{R} (\lambda + \mu) \nabla_s w \right\} \times \mathbf{n} + \mathbf{m} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

6. Пусть опорный контур Γ сферической оболочки представляет собой окружности $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1$. Будем полагать, что края оболочки на опорном контуре жестко закреплены:

$$\mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta}|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad w|_{\Gamma} = 0. \quad (30)$$

Рассмотрим случай, когда напряженно-деформированное состояние, возникающее в оболочке, осесимметрично (некоторые несимметричные НДС рассмотрены в [23]). Тогда решение краевой задачи (29), (30) будем искать в пространстве интегрируемых с квадратом вектор-функций, определенных в области $[\theta_0; \theta_1]$, со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathbf{X} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Y} \sin \theta d\theta$$

в форме разложения по собственным функциям оператора \mathcal{L} :

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \mathbf{U}_k,$$



где \mathbf{U}_k — собственные функции обобщенной задачи Штурма–Лиувилля:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}_k] + \lambda_k H \mathbf{U}_k = 0, \quad \mathcal{B}[\mathbf{U}_k] = 0, \quad (31)$$

а α_k — коэффициенты Фурье, определяемые заданными внешними силовыми и моментными полями:

$$\alpha_k = \langle \mathbf{U}_k, \mathbf{G} \rangle, \quad \mathbf{G} = -\frac{\rho(1-\nu^2)}{E} (R^2 g, m, R^2 q).$$

Здесь H — матрица, содержащая инерционные члены динамической задачи, определяется формулой

$$H = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h_+^2 - h_-^2}{Rh} & -\left(\frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} + 2\frac{h_+^3 + h_-^3}{3Rh}\right) & 0 \\ -\left(\frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} + 2\frac{h_+^3 + h_-^3}{3Rh}\right) & \frac{h_+^3 + h_-^3}{3Rh} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{h_+^2 - h_-^2}{Rh} \end{pmatrix},$$

оператор \mathcal{L} , характеризующий упругую реакцию оболочки на перемещения, имеет вид

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \nabla_s^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} + C - K & -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} (\nabla_s^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} + C)\right) & (K + B) \frac{d}{d\theta} \\ -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} (\nabla_s^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} + C)\right) & \frac{h_+^3 + h_-^3}{3R^2 h} (\nabla_s^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} + C) - K & \left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} B\right) \frac{d}{d\theta} \\ -\left(K + B\right) \left(\frac{d}{d\theta} + \cot \theta\right) & -\left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} B\right) \left(\frac{d}{d\theta} + \cot \theta\right) & K \nabla_s^2 - 2B \end{pmatrix},$$

$\mathbf{U} = (v/R, \vartheta, w/R)$ — искомый вектор. Заметим, что в рассматриваемом случае введенный оператор является самосопряженным; $\nabla_s^2 = \frac{d^2}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta}$; $B = 1 + \nu$, $C = 1 - \nu$, $K = kC/2$. Оператор краевых условий можно записать в форме

$$\mathcal{B}[\mathbf{U}] = \{v|_{\theta=\theta_0}, \vartheta|_{\theta=\theta_0}, w|_{\theta=\theta_0}, v|_{\theta=\theta_1}, \vartheta|_{\theta=\theta_1}, w|_{\theta=\theta_1}\}. \quad (32)$$

Целесообразность использования введенного скалярного произведения обуславливается тем, что каждое собственное значение λ с точностью до множителя определяет собственную частоту колебаний оболочки.

Считается, что внешние поля являются потенциальными, т.е. $g = \mathbf{g}'$, $m = \mathbf{m}'$. В этом случае собственные функции могут быть выражены через известные специальные функции. Будем искать тангенциальное смещение и угол поворота в форме $v = \Phi'_k$, $\vartheta = \Psi'_k$. Подставим эти представления в уравнения и первые два проинтегрируем по θ , учитывая, что $\int \left(\nabla_s^2 \frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta}\right) d\theta = \nabla_s^2$. Тогда система принимает вид линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования ∇_s^2 :

$$\begin{aligned} (\nabla_s^2 + C - K) \Phi_k - \left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} (\nabla_s^2 + C)\right) \Psi_k + (K + B) w_k &= -\frac{\rho R^2 (1 - \nu^2)}{E} \mathbf{g}, \\ -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} (\nabla_s^2 + C)\right) \Phi_k + \left(\frac{h_+^3 + h_-^3}{3R^2 h} (\nabla_s^2 + C) - K\right) \Psi_k + \\ &+ \left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} B\right) w = -\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E} \mathbf{m}, \\ -(K + B) \nabla_s^2 \Phi_k - \left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh} B\right) \nabla_s^2 \Psi_k + (K \nabla_s^2 - 2B) w_k &= -\frac{\rho R^2 (1 - \nu^2)}{E} \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Это свойство позволяет представить решение рассматриваемой краевой задачи в форме разложения по базисным функциям, определяемым хорошо изученными решениями уравнения Гельмгольца: $\nabla_s^2 \zeta = \Lambda \zeta$. В силу матричной структуры полученных уравнений векторы (Φ_k, Ψ_k, w_k) можно представить как $(\Phi_k, \Psi_k, w_k) = (a_k, b_k, c_k) \zeta_k$, где функции $\zeta_k = \zeta_k(\theta)$ являются решением порождающего



уравнения $\nabla_s^2 \zeta = \Lambda_k \zeta$. Характеристические числа Λ_k в этом случае являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \Lambda + C - K & -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}(\Lambda + C)\right) & K + B \\ -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}(\Lambda + C)\right) & \frac{h_+^3 + h_-^3}{3R^2h}(\Lambda + C) - K & K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}B \\ -(K + B)\Lambda & -\left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}B\right)\Lambda & K\Lambda - 2B \end{vmatrix} = 0, \quad (33)$$

а собственные значения λ_k находятся путем удовлетворения граничных условий. Такой способ получения решения по-видимому впервые применен в статье [24].

Таким образом, в работе на основе прямых (бескоординатных) методов тензорного исчисления получены уравнения равновесия в перемещениях в произвольной (неортогональной) системе координат, учитывающие асимметрию расположения лицевых поверхностей. Для сферической оболочки предложена процедура построения решения, основанная на методе спектрального разложения, описывающем напряженно-деформированное состояние при потенциальных силовых и моментных статических нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00669-а, 12-08-01119-а, 12-08-01260-а, 12-08-90806-мол-рф).

Библиографический список

1. Еремеев В. А., Альтенбах Х., Морозов Н. Ф. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 4. С. 472–476.
2. Shen H. S. Functionally graded materials : nonlinear analysis of plates and shells. CRC Press, 2009. 280 p.
3. Лычев С. А., Лычева Т. Н., Манжиров А. В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 199–208.
4. Leissa A. W. Vibration of shells. Acoustical Society of America, 1993. 428 p.
5. Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theories. Handbuch der Physik. В. III/1 / ed. S. Flügge. Berlin : Springer-Verlag, 1960. P. 226–858.
6. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. Anal. 1956. Vol. 27, № 1. P. 1–32.
7. Epstein M. The geometrical language of continuum mechanics. Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
8. Gurtin M. E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. Vol. 57, № 4. P. 291–323.
9. Maugin G. A. Material inhomogeneities in elasticity. London : Chapman and Hall, 1993. 280 p.
10. Cohen H., Wang C.-C. Some equilibrium problems for compressible, anisotropic, laminated nonlinearly elastic bodies // Arch. Ration. Mech. Anal. 1992. Vol. 119, № 9. P. 1–34.
11. Лычев С. А., Барышев А. А. Уравнения равновесия для материально единообразных неоднородных оболочек со слоистой структурой // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2012. № 4. С. 42–65.
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. 512 с.
13. Gibbs J. W. Elements of vector analysis. New Haven, 1884.
14. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек / отв. ред. В. А. Бабешко. М. : Наука, 2008. 280 с.
15. Григолюк Э. И. Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М. : ВИНТИ, 1973. 272 с.
16. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек : учеб. пособие. Львов : Выща школа, 1978. 159 с.
17. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л. : Судпромгиз, 1962. 431 с.
18. Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек / под ред. К. Ф. Черных, С. А. Кабрица. СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388 с.
19. Chapelle D., Bathe K. J. The Finite Element Analysis of Shells — Fundamentals. N. Y. : Springer, 2011. Vol. XV. 410 p.
20. Михайловский Е. И. Классическая теория оболочек // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1 : Мат. Мех. Инф. 2006. Вып. 6. С. 123–164.
21. Lebedev L. P., Cloud M. J, Eremeyev V. A. Advanced Engineering Analysis: Calculus of Variations and Functional Analysis with Applications in Mechanics. New Jersey : World Scientific, 2012. 499 p.
22. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
23. Лизарев А. Д., Ростанина Н. Б. Колебания металлополимерных и однородных сферических оболочек. Минск : Наука и техника, 1984. 192 с.
24. Сеницкий Ю. Э., Лычев С. А. Динамика трёхслойных сферических оболочек несимметричной структуры // Тр. XVIII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997. Т. 1. С. 47–52.



The Equilibrium Equations of Shells in the Coordinates of the General Form

A. A. Baryshev¹, S. A. Lychev², A. V. Manzhirov²

¹Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, BaryshevAA@gmail.com

²Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science, Russia, 119526, Moscow, prosp. Vernadskogo, 101, block 1, lychevs@mail.ru, manzh@inbox.ru

A mathematical model of homogeneous elastic shells is considered under kinematics Reissner–Mindlin type. Through direct (coordinateless) methods of the tensor calculus equations of equilibrium are obtained in terms of displacements in an arbitrary (not necessarily orthogonal) coordinate system, taking into account the asymmetry of the location of the front surface. For a spherical shells proposed procedure for constructing solutions, based on the method of spectral decomposition, which describes the stress-strain state at the potential power and torque static loads.

Key words: sphere shell, equilibrium equations, analytical solutions, spectral decomposition, eigenfunctions.

References

1. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Linear theory of shells taking into account surface stresses. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, no. 12, pp. 531–535.
2. Shen H. S. *Functionally graded materials : nonlinear analysis of plates and shells*. CRC Press, 2009, 280 p.
3. Lychev S. A., Lycheva T. N., Manzhirov A. V. Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 325–333.
4. Leissa A. W. *Vibration of shells*. Acoustical Society of America, 1993. 428 p.
5. Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theories. *Handbuch der Physik* [Encyclopedia of Physics]. Vol. III/1 / ed. S. Flügge. Berlin, Springer-Verlag, 1960, pp. 226–858 (in German).
6. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1956, vol. 27, no. 1, pp. 1–32.
7. Epstein M. *The geometrical language of continuum mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010.
8. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1975, vol. 57, no. 4, pp. 291–323.
9. Maugin G. A. *Material inhomogeneities in elasticity*. London, Chapman and Hall, 1993, 280 p.
10. Cohen H., Wang C.-C. Some equilibrium problems for compressible, anisotropic, laminated nonlinearly elastic bodies. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1992, vol. 119, no. 9, pp. 1–34.
11. Lychev S. A., Baryshev A. A. Equilibrium equations for material uniform and inhomogeneous laminated shells. *PNRPU Mechanics Bulletin. Mechanics*, 2012, no. 4, pp. 42–65 (in Russian).
12. Lurie A. I. *Nelineinaya teoriya uprugosti* [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 512 p. (in Russian).
13. Gibbs J. W. *Elements of vector analysis*. New Haven, 1884.
14. Eremeev V. A., Zubov L. M. *Mekhanika uprugikh obolochek* [Mechanics of Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 2008. 280 p. (in Russian).
15. Grigoliuk E. I. Selezov I. T. *Neklassicheskie teorii kolebaniy stержnei, plastin i obolochek* [Non-classical theory of vibrations of rods, plates and shells]. Moscow, VINITI, 1973, 272 p. (in Russian).
16. Pelekh B. L. *Obobshchennaya teoriya obolochek* [Generalized theory of shells]. L'vov, Vyscha shkola, 1978, 159 p. (in Russian).
17. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [The theory of thin shells]. Leningrad, Sudpromgiz, 1962, 431 p.
18. Kabrits S. A., Mikhailovskii E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F., Shamina V. A. *Obshchaya nelineinaya teoriya uprugikh obolochek* [General nonlinear theory of elastic shells]: ed. K. F. Chernykh, S. A. Kabrica. St. Petersburg, St. Petersburg Press, 2002, 388 p. (in Russian).
19. *Chapelle D., Bathe K. J.* The Finite Element Analysis of Shells — Fundamentals. New York, Springer, 2011, Vol. XV, 410 p.
20. Mikhailovskii E. I. Klassicheskaya teoriya obolochek [The classical theory of shells]. *Vestnik Syktyvskogo universiteta. Ser. 1.: Math. Mech. Inform.*, 2006, no. 6, pp. 123–164 (in Russian).
21. Lebedev L. P., Cloud M. J., Eremeyev V. A. *Advanced Engineering Analysis: Calculus of Variations and Functional Analysis with Applications in Mechanics*. New Jersey, World Scientific, 2012. 499 p.
22. Zhilin P. A. *Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek* [Applied Mechanics. Foundations of the Theory of Shells]. St. Petersburg, St. Petersburg State Polytech. Univer. Press, 2006, 167 p. (in Russian).
23. Lizarev A. D., Rostanina N. B. *Kolebaniya metallopolimernykh i odnorodnykh sfericheskikh obolochek* [Vibration in metal- and homogeneous spherical shells]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1984, 192 p. (in Russian).
24. Senitskii Yu. E., Lychev S. A. Dinamika trekhslonnykh sfericheskikh obolochek nesimmetrichnoi struktury [The dynamics of three-layer spherical shells asymmetric structure]. *Trudy XVIII mezhdunarodnoi konferentsii po teorii obolochek i plastin*. Saratov, 1997, vol. 1, pp. 47–52 (in Russian).



УДК 531.1; 531.66; 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ УДАРНОЙ СИСТЕМЫ С УДАРАМИ О ЖЕСТКИЕ ПРЕГРАДЫ

А. А. Дозоров¹, В. К. Манжосов²

¹Аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Ульяновский государственный технический университет, a.dozorov@bk.ru

²Доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики, Ульяновский государственный технический университет, tpm@ulstu.ru, v.manjosov@ulstu.ru

Разработана модель движения ударной системы с упругим элементом при периодическом силовом воздействии с учетом ударов о жесткие преграды. Для моделирования движения ударной системы разработана программа, обеспечивающая численное решение дифференциальных уравнений движения с учетом условий периодичности и условий соударения, графическое и числовое воспроизведение параметров движения в процессе моделирования. Осуществлено моделирование режимов движения ударной системы. В процессе вычислительного эксперимента производится анализ и корректировка параметров по результатам отклика системы.

Ключевые слова: моделирование, периодический удар, модель удара, ударная система, движение с ударами о преграды, периодический режим движения, вычислительный эксперимент.

ВВЕДЕНИЕ

Использование удара широко применяется в технических системах, связанных с деформированием или разрушением технологической среды [1]. Реализация периодического удара осуществляется с использованием виброударных систем [2, 3]. Исследователи обращаются к динамической схеме изучаемых систем, представляя ее в виде движущегося вдоль оси тела массой m , на которое действует некоторое переменное во времени возмущение, а также в виде ограничителя, моделирующего технологическую среду.

Данная модель была рассмотрена в работах [4, 5]. Показано, что теоретически возможно рассчитать параметры ударной системы под действием периодической силы релейного типа, реализующей режим движения ударной массы, когда обеспечивается один удар за период, а переключение силы происходит в момент нанесения удара по ограничителю.

Поддержать выполнение данного условия для ударной системы проблематично без специальных мер стабилизации. При внешних возмущениях (в ряде случаев даже малых) происходит «затягивание» движения в режим, когда удар по ограничителю наносится до момента переключения силы. При этом скорость удара существенно меньше расчетной.

В случае, если время переключения силы для отвода ударника от ограничителя запаздывает по отношению к моменту нанесения удара, возникает вероятность многократных ударов массы об ограничитель (явление «дребезга»).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассмотрена модель ударной системы (рис. 1, а), представленная в виде движущегося вдоль оси x тела массой m , на которое действуют периодическая пульсирующая сила $P(t)$ (рис. 1, б) и усилие пружины жесткостью c .

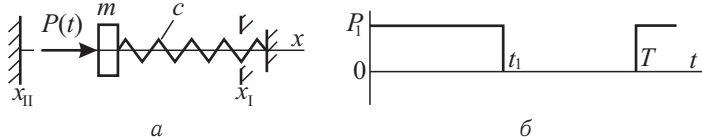


Рис. 1. Схема ударной системы с упругим элементом и ограничителями

и усилие пружины жесткостью c .

При движении тела массой m вдоль оси x происходит его столкновение с ограничителями (левым и правым), положение которых определяется координатами x_I и x_{II} . Задача ударной системы — обеспечить периодические удары с заданной скоростью

по правому ограничителю, моделирующему свойства технологической среды. С энергетических позиций модель ударной системы с двумя ограничителями представляется предпочтительной, так как торможение ударника после отхода от технологической преграды (правого ограничителя) осуществляется пассивным буферным устройством (левым ограничителем), а не активной силой P_1 .



2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УДАРНОЙ СИСТЕМЫ

Периодический режим движения ударной системы, который целесообразно реализовать, опишем следующим образом, ориентируясь на схему рис. 1, а, б.

В момент начала действия силы P_1 ударник находится у левого ограничителя ($x = x_{II}$), и скорость ударника равна \dot{x}_2^+ . Под действием силы P_1 ударник, преодолевая силу упругосжимаемой пружины, перемещается в направлении правого ограничителя. При $t = t_1$ ударник достигает правого ограничителя ($x = x_I$) и наносит удар со скоростью \dot{x}_1^- .

Используем стереомеханическую модель удара, в соответствии с которой удар считается мгновенным, а скорость ударника после нанесения удара принимает значение $\dot{x}_1^+ = -k_1 \dot{x}_1^-$ (где k_1 — коэффициент восстановления скорости при ударе о правый ограничитель).

На интервале $t_1 \leq t < T$ сила $P_1 = 0$ и ударник перемещается к левому ограничителю под действием силы упругосжатой пружины. В момент времени $t = T$ ударник достигнет левого ограничителя ($x = x_{II}$), имея перед столкновением с ним скорость \dot{x}_2^- .

При столкновении с левым ограничителем ($t = T$) скорость ударника принимает значение $\dot{x}_2^+ = -k_2 \dot{x}_2^-$ (где k_2 — коэффициент восстановления скорости при ударе о левый ограничитель). В этот момент на ударник вновь начинает действовать сила P_1 . Далее процесс движения повторяется.

Движение ударной массы с учетом условий периодичности и условий соударения о жесткие ограничители описывается уравнениями:

$$m\ddot{x} = \begin{cases} P(t) - c(\Delta + x), & \text{если } (i-1)T \leq t < (i-1)T + t_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \\ -c(\Delta + x), & \text{если } (i-1)T + t_1 \leq t < iT, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

$$P(t) = P_1, \Delta = \Delta_0 - x_{II}, \quad (2)$$

$$x = x_{II}, \dot{x} = \dot{x}_2^+, \quad \text{если } t \in [(i-1)T, i = 1, 2, 3, \dots], \quad (3)$$

$$x = x_I, \dot{x} = \dot{x}_1^-, \quad \text{если } \dot{x}_1^- > 0, \quad t \in [(i-1)T + t_1, i = 1, 2, 3, \dots], \quad (4)$$

$$x = x_I, \dot{x} = \dot{x}_1^+ = -k_1 \dot{x}_1^-, \quad \text{если } \dot{x}_1^- > 0, \quad t \in [(i-1)T + t_1, i = 1, 2, 3, \dots], \quad (5)$$

$$x = x_{II}, \dot{x} = \dot{x}_2^-, \quad \text{если } \dot{x}_2^- < 0, \quad t \in [iT, i = 1, 2, 3, \dots], \quad (6)$$

$$x = x_{II}, \dot{x} = \dot{x}_2^+ = -k_2 \dot{x}_2^-, \quad \text{если } \dot{x}_2^- < 0, \quad t \in [iT, i = 1, 2, 3, \dots]. \quad (7)$$

где i — номер цикла; Δ — максимальная осадка пружины; Δ_0 — осадка пружины при расположении ударной массы у левого ограничителя.

На режим движения ударной массы оказывает влияние множество факторов, к числу которых можно отнести силы, разгоняющие массу для нанесения удара и отводящие ее в исходное состояние, заданный период между ударами, время переключения сил, восстановление скорости ударника и другие. Эффективный анализ влияния этих факторов и построение требуемого режима движения ударной системы могут быть достигнуты при моделировании движения ударной системы.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ УДАРНОЙ СИСТЕМЫ

Для моделирования движения ударной системы разработана программа для ЭВМ, обеспечивающая численное решение дифференциальных уравнений (1) с учетом условий периодичности (3), (6) и условий соударения (5), (7); графическое и числовое воспроизведение параметров движения в процессе моделирования. Общий вид интерфейса программы представлен на рис. 2.

Созданная программа позволяет визуально наблюдать за реализуемым режимом движения при заданных исходных параметрах. К таким параметрам относятся: x_0 — начальное положение ударной массы, м; v_0 — начальная скорость ударной массы, м/с; c — жесткость пружины, Н/м; Δ — максимальная осадка пружины, м; m — величина ударной массы, кг; P_1 — величина силы, Н; t_1 — длительность действия силы P_1 , с; T — период, с; k_1 и k_2 — коэффициенты восстановления скорости ударника при столкновении с ограничителями; x_I и x_{II} — координаты положения правого и левого ограничителей, м.

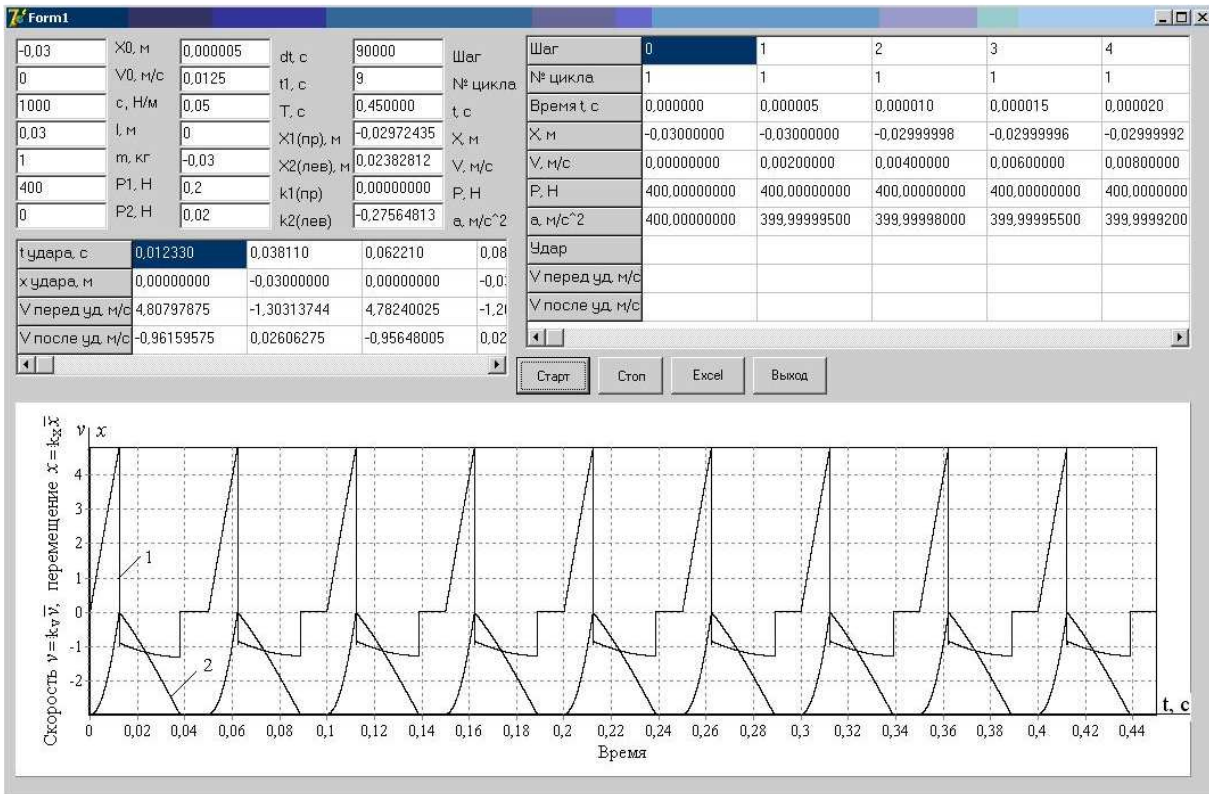


Рис. 2. Общий вид интерфейса программы: 1 – диаграмма скорости v ударной массы при $k_v = 1$ м/с; 2 – диаграмма перемещения ударной массы x при $k_x = 0.01$ м

После остановки процедуры расчета отображаются диаграммы перемещения и скорости объекта. По оси абсцисс откладывается расчетное время t , с. Значение скорости и перемещения объекта определяется как:

$$v = k_v \cdot \bar{v}, \quad x = k_x \cdot \bar{x},$$

где k_v – коэффициент, определяющий масштаб диаграммы скорости ($k_v = 1$ м/с); \bar{v} – числовое значение скорости на оси ординат; k_x – коэффициент, определяющий масштаб диаграммы перемещения ($k_x = 0.01$ м); \bar{x} – числовое значение перемещения на оси ординат.

Для проведения анализа результатов моделирования при запуске процедуры численного расчета результаты выводятся в виде двух таблиц.

В первой таблице отображаются результаты пошагового расчета: номер шага расчета; номер цикла; время t , с; координата объекта x , м; скорость объекта v , м/с; величина силового воздействия P , Н; ускорение объекта a , м/с²; сигнализация удара о левый или правый ограничители; предупредная скорость объекта \dot{x}_1^- или \dot{x}_2^- , м/с; послеударная скорость объекта \dot{x}_1^+ или \dot{x}_2^+ , м/с.

Во второй таблице отображаются значения параметров удара объекта об ограничители: время нанесения удара $t_{\text{удара}}$, с; координата объекта в момент удара $x_{\text{удара}}$, м; предупредная скорость объекта \dot{x}_1^- или \dot{x}_2^- , м/с; послеударная скорость объекта \dot{x}_1^+ или \dot{x}_2^+ , м/с. Немаловажным при проведении численного эксперимента является запись числовых значений параметров движения системы в процессе моделирования. С этой целью в вычислительной программе реализована возможность сохранения числовых значений параметров системы (номер шага расчета, время t , координата объекта x , скорость объекта v , ускорение объекта a в таблицу Excel.

Параметры виброударной системы с реализацией режима движения, представленного на рис. 2, приняты такими, что они обеспечивают устойчивый периодический режим с соударениями об ограничители ($x_0 = -0.03$ м; $v_0 = 0$; $c = 1000$ Н/м; $\Delta = -0.03$ м; $m = 1$ кг; $P_1 = 400$ Н; $t_1 = 0.0125$ с; $T = 0.05$ с; $k_1 = 0.2$; $k_2 = 0.02$; $x_I = 0$; $x_{II} = -0.03$ м).

В процессе моделирования обеспечивается возможность анализа влияния параметров системы на реализуемый режим движения. Так, например, как следует из диаграмм на рис. 3, снижение жесткости упругого элемента для выбранного сочетания параметров практически не влияет на режим движения ударника.

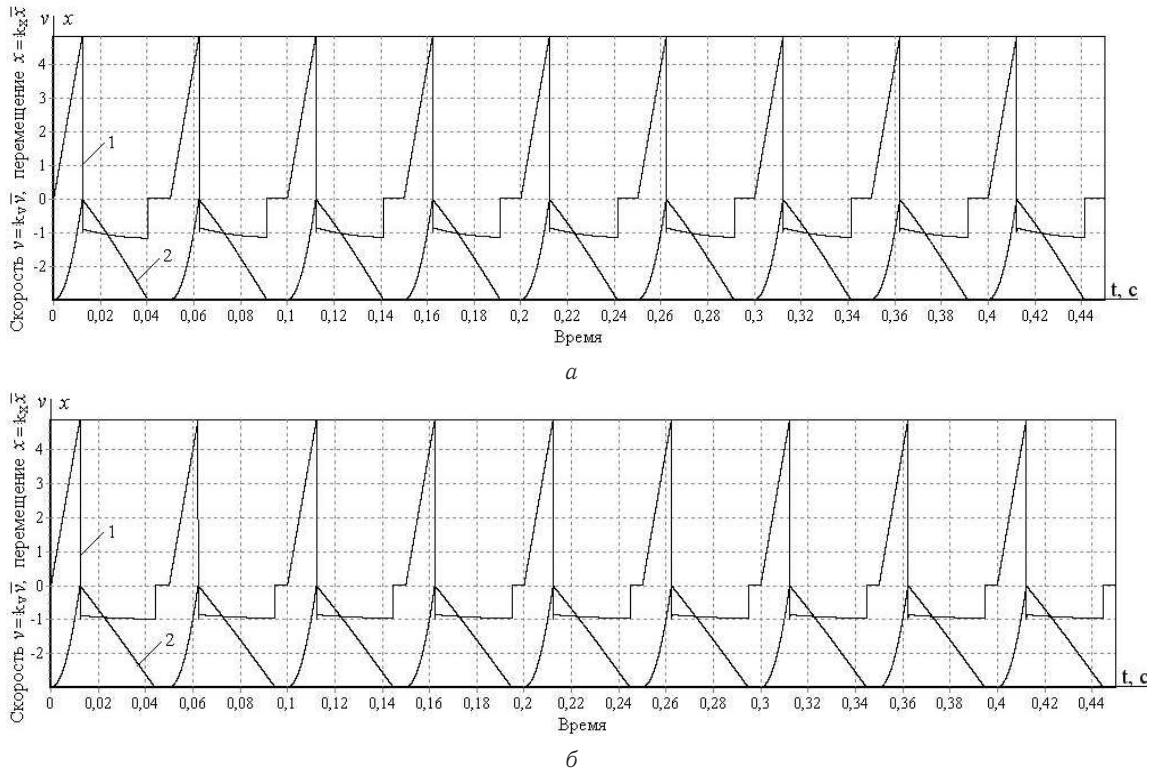


Рис. 3. Диаграммы скорости v (диаграмма 1 при $k_V = 1$ м/с) и перемещения x (диаграмма 2 при $k_x = 0.01$ м) $P_1 = 400$ Н; $m = 1$ кг; $t_1 = 0.0125$ с; $T = 0.05$ с: а — при $c = 600$ Н/м, б — при $c = 200$ Н/м

Переходной процесс заканчивается практически уже на втором цикле движения. К заметным отличиям от диаграмм, приведенных на рис. 2, можно отнести уменьшение зоны покоя ударника у левого ограничителя при снижении жесткости c , а также снижение скорости удара \dot{x}_2^- о левый ограничитель ($\dot{x}_2^- = -1.12$ м/с при $c = 200$ Н/м).

Появление зоны покоя ударника у левого ограничителя (зоны залипания) связано с тем, что происходит запаздывание включения силы P_1 . Длительность зоны залипания составляет величину порядка 0.005 с. Если период цикла $T = 0.05$ с уменьшить до 0.045 с, то при принятых параметрах системы реализуется периодический режим движения, близкий к идеальному (рис. 4).

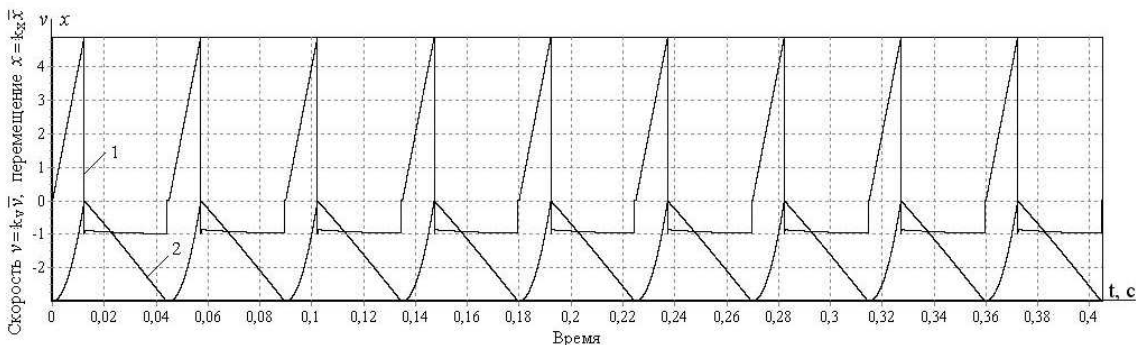
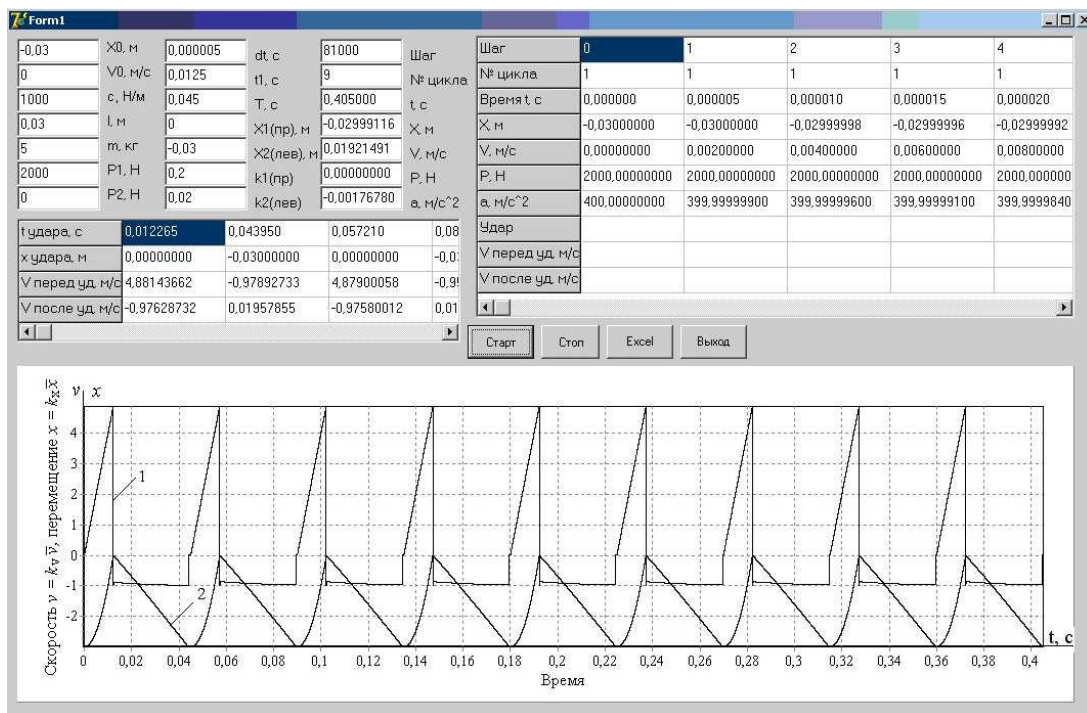


Рис. 4. Диаграммы скорости v (диаграмма 1 при $k_V = 1$ м/с) и перемещения x (диаграмма 2 при $k_x = 0.01$ м), $c = 200$ Н/м, $P_1 = 400$ Н, $m = 1$ кг, $t_1 = 0.0125$ с, $T = 0.045$ с

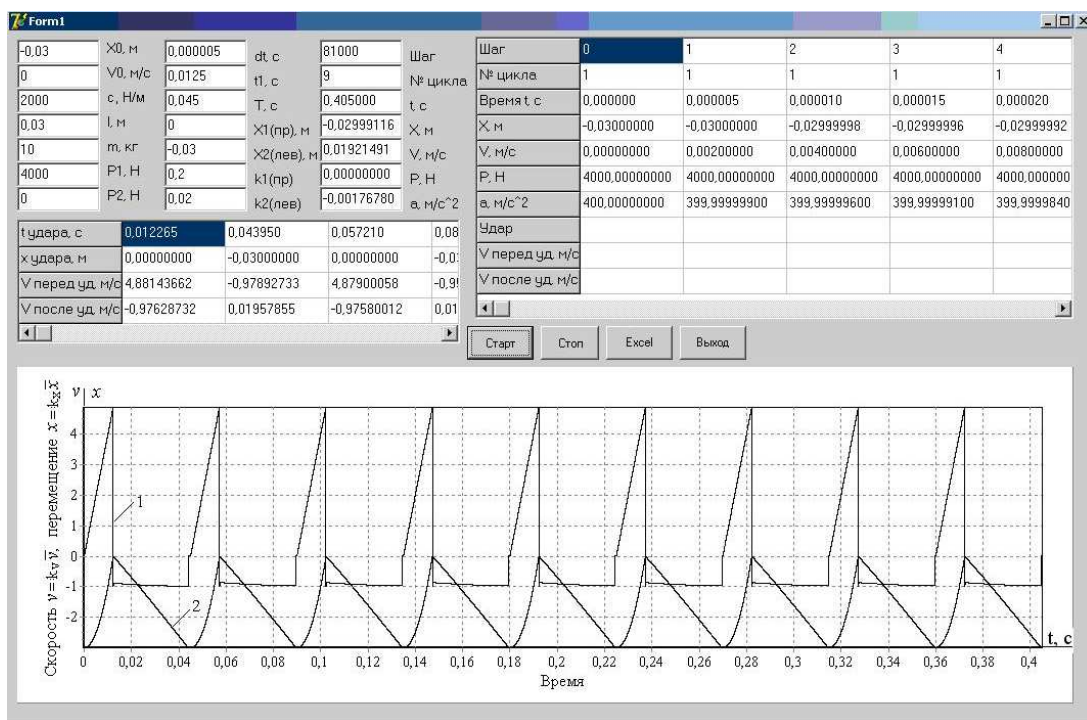
Созданная система позволяет осуществлять корректировку вычислительного эксперимента для поиска более рациональных значений тех или иных параметров.

Рассматриваемый класс виброударных систем имеет свойства инвариантности. Так, если рассматривать системы с постоянным соотношением таких параметров, как $P_1/m = \text{const}$ и $c/m = \text{const}$ при сохранении значений остальных параметров, то обнаруживаем, что они идентичны.

На рис. 5, а представлена реализация процесса движения ударной системы, когда $m = 5$ кг, $P_1 = 2000$ Н, $c = 1000$ Н/м; а на рис. 5, б — когда $m = 10$ кг, $P_1 = 4000$ Н, $c = 2000$ Н/м (при этом $P_1/m = 400$ м/с², $c/m = 200$ с⁻²).



а



б

Рис. 5. Диаграммы скорости v (диаграмма 1 при $k_V = 1$ м/с) и перемещения x (диаграмма 2 при $k_x = = 0.01$ м): а – при $c = 1000$ Н/м, $P_1 = 2000$ Н, $m = 5$ кг, $t_1 = 0.0125$ с, $T = 0.045$ с; б – при $c = = 2000$ Н/м, $P_1 = 4000$ Н, $m = 10$ кг, $t_1 = 0.0125$ с, $T = 0.045$ с

Сравнивая диаграммы движения, приведенные на рис. 5, констатируем, что эти процессы совершенно идентичны. Это позволяет результаты моделирования, выполненные для заданного сочетания параметров, распространять и на другие ударные системы при изменении P_1 , m и c таким образом, чтобы соотношения P_1/m и c/m сохранялись постоянными.

При моделировании возможно проведение анализа чувствительности системы на изменения тех или иных параметров. Так, сокращение периода T до значения $T = 0.04$ с (вместо $T = 0.045$ с)



для параметров виброударной системы, представленных на рис. 4, приводит к заметному снижению скорости удара \dot{x}_1^- о правый ограничитель, а также к торможению ударника силой P_1 .

Заданная скорость удара о правый ограничитель (порядка 4.8 м/с) реализуется только на первом цикле движения. После удара объект перемещается к левому ограничителю. Но из-за малой жесткости пружины он не успевает достигнуть левой преграды к моменту окончания цикла. Включается сила P_1 , которая начинает тормозить ударник. Возникает периодический режим движения без удара о левый ограничитель.

Данную ударную систему можно довести до рационального режима движения, если, сохраняя длительность периода $T = 0.04$ с, увеличить жесткость пружины до значения $c = 1000$ Н/м.

Разработанная вычислительная программа и представленная процедура моделирования процесса движения виброударной системы позволяют в процессе вычислительного эксперимента производить анализ и корректировку параметров по результатам отклика системы, обеспечивая поиск их рациональных значений.

ВЫВОДЫ

Разработана модель движения ударной системы с упругим элементом при периодическом силовом воздействии с учетом ударов о жесткие преграды.

Для моделирования движения ударной системы разработана программа для ЭВМ, обеспечивающая численное решение дифференциальных уравнений с учетом условий периодичности и условий соударения, графическое и числовое воспроизведение параметров движения в процессе моделирования.

Разработанная программа и представленная процедура моделирования процесса движения виброударной системы позволяют в процессе вычислительного эксперимента производить анализ и корректировку параметров по результатам отклика системы, обеспечивая поиск их рациональных значений.

Результаты моделирования показывают, что в зависимости от соотношения параметров системы реализуются самые разнообразные режимы движения. Важным представляется разработка процедуры выбора параметров, реализующая заданный режим. Разработка такой процедуры требует специальной постановки задачи исследования, а предложенная вычислительная программа позволяет подойти к решению таких задач.

Библиографический список

1. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М. : Наука, 1985. 354 с.
2. Алимов О. Д., Басов С. А. Гидравлические виброударные системы. М. : Наука, 1990. 352 с.
3. Крупенин В. Л. Ударные и виброударные машины и устройства // Вест. науч.-техн. развития. 2009. № 4(20). С. 3–32.
4. Манжосов В. К., Новиков Д. А. Моделирование режимов движения ударной системы при периодическом силовом воздействии // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 65–71.
5. Манжосов В. К., Новиков Д. А. Предельные циклы движения ударной системы при действии силы релейного типа и ударе в момент переключения силы // Автоматизация процессов управления. 2011. № 3(25). С. 14–20.

Modeling of the Shock System Motion with Impacts about Hard Barriers

A. A. Dozorov, V. K. Manzhosov

Ulyanovsk State Technical University, Russia, 432027, Ulyanovsk, Severniy Venec st., 32, tpm@ulstu.ru, a.dozorov@bk.ru, v.manjosov@ulstu.ru

We have developed a model of a shock system with a resilient member under periodic force action including impacts about hard barriers. In order to model the shock system we have developed a program providing a computational solution for differential equations of a subject motion taking into account conditions of periodicity and collision, graphical and numerical reproduction of motion parameters in the simulation process. We have performed simulation of modes of the shock system. In the process of computational experiments parameters of the system response have been estimated and corrected upon the results.

Key words: modeling, periodic impact, model of the impact, shock system, motion with impacts about barriers, periodic motion mode, computational experiment.



References

1. Alimov O. D., Manzhosov V. K., Eremiants V. E. *Udar. Rasprostranenie voln deformacij v udarnyh sistemah* [Shock. Propagation of strain waves in shock systems]. Moscow, Nauka, 1985, 354 p. (in Russian).
2. Alimov O. D., Basov S. A. *Gidraulicheskie vibroudarnnye sistemy* [Hydraulic vibroimpact systems]. Moscow, Nauka, 1990, 352 p. (in Russian).
3. Krupenin V. L. *Udarnye i vibroudarnnye mashiny i ustrojstva* [Shock and vibroimpact machine and devices]. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitija*, 2009, no. 4 (20), pp. 3–32 (in Russian).
4. Manzhosov V. K., Novikov D. A. Impact system motion modes simulation at periodic force effect. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 65–71 (in Russian).
5. Manzhosov V. K., Novikov D. A. Limit cycles of motion of a shock system in case of relay-type force and shock action at the moment of force switching. *Avtomatizacija processov upravlenija*, 2011, no. 3(25), pp. 14–20 (in Russian).

УДК 539.374

ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ И d -ТЕНЗОРЫ ТЕРМОУПРУГОГО КONTИНУУМА С «ТОНКОЙ» МИКРОСТРУКТУРОЙ

В. А. Ковалев¹, Ю. Н. Радаев²

¹Доктор физико-математических наук, зав. кафедрой прикладной математики и аналитической поддержки принятия решений, Московский городской университет управления Правительства Москвы, vlad_koval@mail.ru

²Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Рассматривается новая нелинейная математическая модель термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Построение модели выполнено в терминах 4-ковариантного лагранжева формализма теории поля. Микроструктура континуума задается микроструктурными d -тензорами, которые вводятся в теоретико-полевую схему как экстраполевые переменные (d -переменные). Указывается «естественная» плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. Ковариантные уравнения термоупругого поля в континууме с микроструктурой получаются в канонической форме Эйлера–Лагранжа. Обсуждаются определяющие уравнения поля и их место в схеме теоретико-полевого подхода. Выполнен учет инерционности микроструктурной «составляющей» поля. Вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия применяются для построения ковариантных канонических тензоров термомеханики и 4-токов. Даны канонические формы дивергентных законов сохранения термоупругого поля в плоском 4-пространстве-времени.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, поле, экстраполе, действие, лагранжиан, ковариантность, симметрия, закон сохранения, d -тензор, 4-ток, тензор энергии-импульса.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Под микроструктурой континуума обычно понимается существование нескольких различных физических масштабов (структурных уровней), определяющих состояние континуума, их самосогласованное взаимодействие и возможность передачи энергии с одного структурного уровня на другой. Теория таких континуумов основывается на необходимости допустить существование дополнительных (экстра) степеней свободы и возможности исследовать физически бесконечно малый объем не как материальную точку, а как существенно более сложный объект, с присущими ему дополнительными степенями свободы (ротационными, осцилляционными), как своего рода микроконтинуум, обладающий возможностью дополнительной микродеформации.

Вопросы, связанные с изучением континуума с микроструктурой, находятся в русле тех течений в механике деформируемого твердого тела, которые отдают приоритет структурному моделированию. При этом необходимо учитывать, что существенной особенностью современного состояния естественных наук является явно просматриваемая тенденция решения нелинейных проблем (в том числе и проблем механики деформируемого твердого тела) вне рамок имеющегося физически надежно обоснованного набора математических моделей. Конечной целью математического моделирования обычно ставится формулировка замкнутых систем уравнений, без чего в принципе невозможны постановка



и решение прикладных задач. Корректное построение новых математических моделей континуума, в свою очередь, должно опираться на проверенные временем принципы и методы. Не последняя роль здесь принадлежит методам теории поля. Часто эти методы выступают как, по существу, единственный инструмент вывода физически приемлемых уравнений.

Целью настоящей работы является построение нелинейной теоретико-полевой модели термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой, представляемой конечным набором тензоров, ранг которых может быть сколь угодно высоким.

2. ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ, СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Ключевое положение классической теории поля (см., например, [1, 2]) заключается в том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом \mathfrak{J} , который по историческим причинам называется действием (action):

$$\mathfrak{J} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \quad (1)$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [1, 2], имеет следующий смысл: \mathcal{L} — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия); φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных; X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — четыре пространственно-временные координаты; $d^4 X$ — «естественный» элемент объема четырехмерного пространства-времени. Заметим, что в традиционных текстах, посвященных классической теории поля, действие и функционал действия обычно обозначаются через S .

Символ $d^4 X$ в (1) указывает на «естественный» пространственно-временной элемент объема и представляет собой обычное произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4.$$

Через ∂_β в математическом оформлении действия, данном (1) и далее, обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β ; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s \geq 0} (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)},$$

где символ $\partial_\beta^{\text{expl}}$ — оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β .

Четвертую по счету координату в дальнейшем будем ассоциировать со временем, которое, возможно, будет трансформироваться с помощью размерной постоянной так, чтобы уравнивать физические размерности всех четырех пространственно-временных координат. Полное дифференцирование по времени будет обозначаться как символом ∂_4 , так и традиционной точкой.

В теориях поля лагранжиан \mathcal{L} всегда приходится рассматривать как функцию следующего набора переменных:

$$\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^\gamma. \quad (2)$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля или конструируют, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение принципиально новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы, является в известном смысле достаточно сложным видом искусства.

Вариационное описание поля не может быть осуществлено без предварительного указания пространственно-временного многообразия с возможностью измерения в нем элементарных длин и объемов. Пространство-время обладает рядом фундаментальных особенностей: пространство и время однородны (отсутствуют привилегированные места в пространстве и избранные точки отсчета времени); пространство изотропно (нет избранных преимущественных направлений); четырехмерное пространство-время изотропно; пространство, возможно, обладает некоторыми скрытыми симметриями; направление хода времени не регламентировано. Перечисленные свойства пространства-времени могут быть сформулированы на языке групп преобразований пространственно-временных координат.



Преобразование пространственно-временных координат и физических полевых переменных

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) \quad (3)$$

порождает, очевидно, преобразование всего комплекса переменных (2):

$$\begin{array}{c} X^\gamma, \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, \\ \downarrow \\ \tilde{X}^\gamma, \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^s, \dots \end{array}$$

Чаще всего, предполагается, что преобразования (3) образуют однопараметрическую группу преобразований (группу Ли преобразований).

Полные вариации полевых переменных и пространственно-временных координат, отвечающие их преобразованию в соответствии с (3), вычисляются согласно

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Для теории поля числовая величина действия не столь важна, как его форма, задаваемая лагранжианом \mathcal{L} , который определяется (помимо всего прочего) выбором тех или иных координатных систем в пространственно-временном многообразии и математического представления полевых переменных. В новых переменных, вообще говоря, изменяется форма лагранжиана \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}},$$

где $\tilde{\mathcal{L}}$ — «естественная» плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат \tilde{X}^β и физических полей $\tilde{\varphi}^k$. Однако величина действия должна оставаться неизменной (так называемая эквивалентность действия относительно группы преобразований (3)). Таким образом, функционалы

$$\mathfrak{I} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad \tilde{\mathfrak{I}} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X}$$

называются эквивалентными при их преобразовании группой (3) тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\tilde{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}$.

Математическое описание поля представляет собой вариационный принцип, который по соображениям исторического характера, называется вариационным принципом Гамильтона–Остроградского (или принципом наименьшего действия). Действительное поле реализуется в пространстве-времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах и четырехмерной области, выступающей в качестве носителя поля: $\delta \mathfrak{I} = 0$. В аналитической механике такому способу варьирования отвечают так называемые изохронные вариации.

Из принципа наименьшего действия получаются ковариантные дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0, \quad (4)$$

где $\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots$ есть один из самых важных дифференциальных операторов математической физики — оператор Эйлера.

Действительные физические поля (при условии их гладкости) обязаны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа (4).

Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обозримой, если ввести обозначения (см. [3]) $\frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \partial_l$, $\frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)} = \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}$ и записать его символически в форме

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}.$$



Здесь в сумме при $s = 0$ подразумевается слагаемое ∂_0 , обозначающее частное дифференцирование по полевой переменной φ^l .

Заметим, что принцип наименьшего действия ограничивает физически допустимые лагранжианы. Так, недопустимы лагранжианы, для которых соответствующие интегральные функционалы не имеют экстремалей ни при каких вещественных полевых переменных или для которых дифференциальные уравнения поля (4) противоречивы.

В современной научной литературе часто говорится об инвариантности уравнений Эйлера–Лагранжа. Однако это противоречит действительному положению дел. Математически строгое определение инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно группы преобразований известно из группового анализа и означает сохранение формы уравнений при их преобразовании к новым переменным согласно (3). Относительно произвольной однопараметрической геометрической группы преобразований (3) уравнения Эйлера–Лагранжа, вообще говоря, неинвариантны, но они ковариантны (при условии, что действие удовлетворяет принципу эквивалентности, гарантирующему при, возможно, изменяющейся «естественной» плотности лагранжиана постоянство величины действия относительно произвольных геометрических преобразований пространственно-временных координат и полевых переменных), поскольку в новых переменных правило их составления остается прежним.

Исключительный интерес в теории вариационных симметрий представляют однопараметрические геометрические группы преобразований, которые при неизменности формы функционала действия сохраняют его величину при преобразовании координат и полей согласно (3) и соответствии пространственно-временных 4-областей интегрирования в переменных X^β и \tilde{X}^β . Указанные группы обычно называют геометрическими группами абсолютной инвариантности функционала действия, а также абсолютными геометрическими симметриями действия по Гамильтону (или просто вариационными симметриями действия). Инвариантность функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований (3) порождает некоторый дивергентный закон сохранения. Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые получаются как уравнения Эйлера–Лагранжа некоторой вариационной задачи, следующих из существования геометрических вариационных симметрий действия, излагается, например, в [3, с. 377–386]. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \quad (5)$$

где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$ — 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Вектор J^β — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньше порядка уравнений поля; этот вектор называется вектором тока (или 4-током).

Классический метод поиска законов сохранения с помощью вариационных симметрий действия кратко может быть описан следующим образом.

Критерий инвариантности функционала действия (1) относительно геометрической группы преобразований (3) имеет вид

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (6)$$

где вариация лагранжиана $\delta \mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения:

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta).$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, вариация лагранжиана, очевидно, равна

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \delta \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta (\partial_\beta \varphi^k).$$

Учитывая затем формулу для полной вариации первых градиентов поля

$$\delta (\partial_\beta \varphi^k) = \partial_\beta (\delta \varphi^k) + (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \delta X^\gamma,$$



где вариации $\delta\varphi^k$ и $\bar{\delta}\varphi^k$ связаны уравнением $\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\varphi^k)\delta X^\gamma$, получаем:

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k)$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right) \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k \right).$$

В результате, когда вариационная симметрия действия известна и лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, уравнение (6) преобразуется к

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\bar{\delta}\varphi^j + \partial_\beta \left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k \right) = 0. \quad (7)$$

Разделив затем левые и правые части (7) на параметр ε и обозначая

$$\mathcal{Q}^j = \frac{\bar{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}, \quad J^\beta = \mathcal{L}\frac{\delta X^\beta}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\frac{\bar{\delta}\varphi^k}{\varepsilon},$$

приходим к равенству

$$\mathcal{Q}^j \mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(-J^\beta).$$

Таким образом, при выполнении уравнений поля (4) будет справедлив дивергентный закон сохранения (5).

3. ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Одним из самых распространенных подходов к изучению деформации континуума является концепция сравнения пространственных положений составляющих его точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум. В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемых в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки. Однако в некоторых случаях механизм идентификации заранее может быть не вполне ясным, как это видно на примере перемещения тени, отбрасываемой некоторым движущимся от системы источников света телом.

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [4]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ положения \mathbf{X} отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место \mathbf{x} пространства, сопровождается экстрадеформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некопланарных d -векторов \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{d}_\alpha(\mathbf{X}, t). \quad (8)$$

Переменные \mathbf{X} и \mathbf{x} выступают как соответственно лагранжева (отсчетная) и эйлерова (пространственные) переменные, если пользоваться стандартной терминологией механики континуума. С этими переменными связаны метрики $G_{\alpha\beta}$, g_{ij} . Конвективная метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$.

Заметим, что лагранжевы переменные X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), дополненные четвертой временной координатой, выступают как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные x^j ($j = 1, 2, 3$) представляют собой физические поля. То же самое относится к «мягкой» системе d -векторов \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Но они классифицируются нами как экстраполевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью пространственных компонент d_α^j ($\alpha = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$).

Система трех d -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно, и задает микроструктуру континуума. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка



дифференцирований в «естественной» плотности лагранжиана. «Тонкая» (fine) микроструктура континуума представляется экстраполями контравариантных тензоров (d -тензоров) сколь угодно высоких рангов

$$d_c^{j_1 j_2 \dots} \quad (c = 1, 2, 3, \dots).$$

Выбранная здесь схема описания микроструктуры и возможность ее математического представления d -тензорами произвольно высоких четных рангов (симметричными по всем индексам) подробно описана в работе Ю. Н. Радаева «Континуальные модели поврежденности твердых тел» (М., 1999).

Экстрадеформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (8).

Поведение репера \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$) характеризуется как его возможной «чистой» деформацией (сдвигами трехгранника и удлинением его ребер), так и поворотом. Ясно, что каждый элемент континуума с микроструктурой обладает большим числом степеней свободы, чем классический континуум. С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$) может сводиться только к его «жестким» поворотам в пространстве; в этом случае [5], помимо трех трансляционных степеней свободы, микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы. Возможность исключительно «жесткой» трансформации указанного репера можно выразить уравнениями

$$g_{ij} d_a^i d_b^j = \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, 3),$$

где g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, δ_{ab} — символ Кронекера, которые, очевидно, имеют смысл дополнительных кинематических ограничений, накладываемых на экстраполевые переменные \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$).

В более широком смысле дополнительное кинематическое ограничение может накладываться на экстрадеформацию континуума с микроструктурой в форме конечного уравнения:

$$\mathcal{F}(d_1^{j_1 j_2 \dots}, d_2^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0,$$

связывающего экстраполевые переменные $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots$).

В качестве основной термической полевой переменной примем температурное смещение ϑ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ . Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики [6–9].

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой: градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ ($j, \alpha = 1, 2, 3$); d -векторы d_a^j ($a = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) вместе с их референциальными градиентами $\partial_\alpha d_a^j$ ($a = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, 3$); d -тензоры $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots$; $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и их референциальные градиенты $\partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots$; $\alpha = 1, 2, 3$; $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$); градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$ и скорость температурного смещения $\dot{\partial}_4 \vartheta$.

В терминах отсчетных переменных X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), эйлеровых переменных x^j ($j = 1, 2, 3$), экстраполевых d -переменных и температурного смещения ϑ «естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии должна иметь форму

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \quad (9)$$

Более конкретная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathcal{J}} d_a^i d_b^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \dots \overset{cd}{\mathcal{J}} d_c^{j_1 j_2 \dots} d_d^{k_1 k_2 \dots} \dots - \\ & - \psi(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \end{aligned}$$



Здесь точкой обозначается частное дифференцирование по времени ∂_4 при постоянных лагранжевых координатах X^α ; ρ_R — референциальная плотность; \mathfrak{J}^{ab} , \mathfrak{J}^{cd} — тензоры инерции микроэлемента.

Вариационный интеграл термоупругого действия в силу указанной формулой (9) плотности будет иметь следующий вид:

$$\mathfrak{J} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_\alpha^j, d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_\alpha^j, \dot{d}_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta) d^4 X$$

$$(\alpha = 1, 2, 3; \quad \mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad j, j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Соответствующие вариационному интегралу (10) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля получаются в ковариантной форме и распадаются на следующие четыре группы:

$$\partial_\alpha S_j^{\alpha \cdot} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3),$$

$$\partial_\alpha \mathcal{M}_j^{\alpha \cdot} + \mathcal{A}_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3),$$

$$\partial_\alpha \mathcal{M}_{j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots} + \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots} - \partial_4 \mathcal{Q}_{j_1 j_2 \dots} = 0 \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3),$$

$$\partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что определяющие уравнения континуума выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся для записи дифференциальных уравнений поля (11):

$$P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \mathcal{A}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_\alpha^j}, \quad \mathcal{Q}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_\alpha^{j_1 j_2 \dots}},$$

$$S_j^{\alpha \cdot} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, \quad \mathcal{M}_j^{\alpha \cdot} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_\alpha^j)}, \quad \mathcal{M}_{j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_\alpha^{j_1 j_2 \dots})},$$

$$\mathcal{A}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_\alpha^j}, \quad \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}}, \quad s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta}, \quad j_R^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}.$$

В приведенных выше определяющих уравнениях приняты следующие обозначения: P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; \mathcal{A}_j , $\mathcal{Q}_{j_1 j_2 \dots}$ — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы; $S_j^{\alpha \cdot}$ — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа; $\mathcal{M}_j^{\alpha \cdot}$, $\mathcal{M}_{j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots}$ — тензоры экстранапряжений (hyperstress tensors); \mathcal{A}_j , $\mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots}$ — обобщенные силы-моменты, сопряженные экстраполевому переменным d_α^j ($\alpha = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$), $d_\alpha^{j_1 j_2 \dots}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; \quad j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$); s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии); j_R^α — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Полевое уравнение в последней строке (11) выражает баланс энтропии. Если плотность действия не содержит явных вхождений температурного смещения, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости Грина–Нахди GNII [2].

4. ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В дальнейшем будем считать пространство-время плоским. В этом случае выполняется условие трансляционной инвариантности действия. Поэтому можно ввести 4-ковариантный тензор энергии-импульса и сформулировать с его помощью законы сохранения, соответствующие сдвигами всех четырех пространственно-временных координат [2]. Следуя [2], определим компоненты канонического тензора энергии-импульса термоупругого поля T_{λ}^{μ} ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$) в континууме с микроструктурой. Всего имеются следующие четыре группы соотношений:

$$T_{\lambda}^{\mu} = \mathcal{L} \delta_{\lambda}^{\mu} + S_i^{\mu \cdot} (\partial_{\lambda} x^i) + \mathcal{M}_i^{\mu \cdot} (\partial_{\lambda} d_{\alpha}^i) + \mathcal{M}_{j_1 j_2 \dots}^{\mu \cdot \dots} (\partial_{\lambda} d_{\alpha}^{j_1 j_2 \dots}) - j_R^{\mu} (\partial_{\lambda} \vartheta) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3), \quad (12)$$



$$T_{.4}^{\mu} = S_{.l}^{\mu} \dot{x}^l + \mathcal{M}_{.l}^{\mu} \dot{d}_a^l + \mathcal{M}_{.j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots} - j_R^{\mu} \dot{\vartheta} \quad (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3), \quad (13)$$

$$T_{.\lambda}^4 = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d_a^l) \mathcal{Q}_l - (\partial_\lambda d_c^{j_1 j_2 \dots}) \mathcal{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s(\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4), \quad (14)$$

$$T_{.4}^4 = \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{d}_a^l \mathcal{Q}_l - \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots} \mathcal{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s \dot{\vartheta} \quad (\lambda = 4; \mu = 4). \quad (15)$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии-импульса термоупругого поля позволяют быстро найти полный гамильтониан поля \mathcal{H} , вектор псевдоимпульса поля \mathcal{P}_λ , вектор Умова–Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P_{.\lambda}^{\mu}$.

Так, компонента (15) тензора энергии-импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{d}_a^l \mathcal{Q}_l + \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots} \mathcal{Q}_{j_1 j_2 \dots} + \dot{\vartheta} s - \mathcal{L}.$$

Компоненты (14) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле

$$\mathcal{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d_a^l) \mathcal{Q}_l - (\partial_\lambda d_c^{j_1 j_2 \dots}) \mathcal{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s(\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Из компонент (13) формируется контравариантный вектор Умова–Пойнтинга:

$$\Gamma^\mu = S_{.l}^{\mu} \dot{x}^l + \mathcal{M}_{.l}^{\mu} \dot{d}_a^l + \mathcal{M}_{.j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots} - j_R^{\mu} \dot{\vartheta} \quad (\mu = 1, 2, 3).$$

Компоненты (12) тензора энергии-импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность вычислить тензор напряжений Эшелби:

$$-P_{.\lambda}^{\mu} = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{.l}^{\mu} (\partial_\lambda x^l) + \mathcal{M}_{.l}^{\mu} (\partial_\lambda d_a^l) + \mathcal{M}_{.j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} (\partial_\lambda d_c^{j_1 j_2 \dots}) - j_R^{\mu} (\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3).$$

4-ковариантный закон сохранения, соответствующий вариационным симметриям действия в форме трансляций пространственно-временных координат $\partial_\mu T_{.\lambda}^{\mu} = 0$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$), естественным образом распадается на два симметричных канонических уравнения баланса энергии и псевдоимпульса термоупругого поля: $-\dot{\mathcal{H}} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0$, $-\dot{\mathcal{P}}_\lambda + \partial_\mu P_{.\lambda}^{\mu} = 0$.

Теоретико-полевой подход (и лагранжев формализм) применим только к тем полям, в которых сохраняется постоянной полная энергия. Он не отражает того обстоятельства, что в реальном эволюционирующем поле полная энергия убывает, трансформируясь в другие виды энергии, например в тепловую энергию, т. е. происходит рассеяние энергии, сопровождающееся возрастанием энтропии. Однако не стоит и сужать возможности такого подхода. Возможность освобождения (стока) энергии может быть учтена не столько в уравнениях поля, сколько сингулярностями поля.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

Библиографический список

1. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
2. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
4. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. Vol. 17, № 5. P. 85–112.
5. Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии-импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 58–77.
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Теоретико-полевые формулировки и модели нелинейной гиперболической микрополярной термоупругости // XXXVI Дальневосточная мат. шк.-семинар им. акад. Е. В. Золотова : сб. докл. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 137–142.



8. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 71–79.
9. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Ковариантная форма уравнений совместности на поверхностях сильного разрыва в микрополярном термоупругом континууме: гиперболическая теория // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVI Междунар. конф., 16–19 окт. 2012 г., Ростов-на-Дону. Т. II. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2012. С. 99–103.

Covariant Field Equations and d -tensors of Hyperbolic Thermoelastic Continuum with Fine Microstructure

V. A. Kovalev¹, Yu. N. Radayev²

¹Moscow City Government University of Management, Russia, 107045, Moscow, Sretenka str., 28, vlad_koval@mail.ru

²Institute for Problems in Mechanics of RAS, Russia, 119526, Moscow, Vernadskogo av., 101, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

A non-linear mathematical model of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure is proposed. The model is described in terms of 4-covariant field theoretical formalism. Fine microstructure is represented by d -tensors, playing role of extra field variables. A Lagrangian density for hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure is given and the corresponding least action principle is formulated. 4-covariant field equations of hyperbolic thermoelasticity are obtained. Constitutive equations of microstructural hyperbolic thermoelasticity are discussed. Virtual microstructural inertia is added to the considered action density. It is also concerned to the thermal inertia. Variational symmetries of the thermoelastic action are used to formulate covariant conservation laws in a plane space–time.

Key words: thermoelasticity, microstructure, field, extra field, action, Lagrangian, covariance, symmetry, conservation law, d -tensor, 4-current, energy–momentum tensor.

References

1. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of the field theory: variational symmetries and geometric invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 p. (in Russian).
2. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave problems of the field theory and thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, 328 p. (in Russian).
3. Ovsianikov L. V. *Grupповой анализ дифференциальных уравнений* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka, 1978, 400 p. (in Russian).
4. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1964, vol. 17, no. 5, pp. 85–112.
5. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909, 226 p. (in French).
6. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Derivation of energy-momentum tensors in the theories of hyperbolic micropolar thermoelasticity. *Mech. Sol.* 2011, vol. 46, no. 5, pp. 705–720.
7. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Teoretiko-polevyye formulirovki i modeli nelineinoi giperbolicheskoi mikropoliarnoi termouprugosti [Covariant field formulations and models of non-linear hyperbolic micropolar thermoelasticity]. *XXXVI Dal'nevostochnaia matematicheskaiia shkola-seminar im. akad. E. V. Zolotova*. Vladivostok, 2012, pp. 137–142 (in Russian).
8. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. On precisely conserved quantities of coupled micropolar thermoelastic field. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 71–79 (in Russian).
9. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Kовариантная форма уравнений совместности на поверхностях сильного разрыва в микрополярном термоупругом континууме: гиперболическая теория [Covariant forms of jump equations on shock surfaces in micropolar thermoelastic continuum: a hyperbolic theory]. *Trudy XVI Mezhdunarodnoi konferentsii «Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoi sredy»*. vol. II. Rostov on Don, 2012, pp. 99–103 (in Russian).



УДК 501.1

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОРЕЛЬЕФА И ИЗМЕРЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ОТКЛИКА СОВРЕМЕННЫХ БИОПОЛИМЕРНЫХ ШОВНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НАНОИНДЕНТИРОВАНИИ

А. Г. Кучумов¹, В. Н. Солодько², В. А. Самарцев³, В. А. Гаврилов⁴, Е. С. Чайкина⁵

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, kuchumov@inbox.ru

²Аспирант кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий, Пермский государственный национальный исследовательский университет

³Доктор медицинских наук, заведующий кафедрой общей хирургии лечебного факультета, Пермская государственная медицинская академия им. акад. Е. А. Вагнера, samarcev-v@mail.ru

⁴Ординатор кафедры общей хирургии лечебного факультета, Пермская государственная медицинская академия им. акад. Е. А. Вагнера, samarcev-v@mail.ru

⁵Магистрант кафедры теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Исследование свойств современных шовных материалов (хирургических нитей) является актуальной задачей биомеханики. Для повышения эффективности использования нитей в практике необходим анализ структуры и упругих свойств методами атомно-силовой микроскопии и растровой электронной микроскопии. В результате построены зависимости сила-глубина проникновения для определения значения модуля упругости нити на микроуровне в зависимости от локализации области индентирования, а также проведена качественная и количественная оценки шероховатости поверхности нити на площадках размерами 5×5 и 10×10 мкм.

Ключевые слова: атомно-силовая микроскопия (АСМ), биополимер, шовный материал, наноиндентирование, показатель Хёрста.

ВВЕДЕНИЕ

Хирургический шовный материал — это инородная нить, применяемая для соединения тканей с целью образования рубца [1]. Различают рассасывающиеся и нерассасывающиеся, а также синтетические и естественные шовные материалы (рис. 1) [2].

По способности к биодеструкции к быстро рассасывающимся шовным материалам относят нити на основе кетгута, полигликолевой кислоты, полилактина 910 (срок рассасывания от 15 до 90 сут). В группу длительно рассасывающихся хирургических нитей входят полидиоксанон и полигликонат

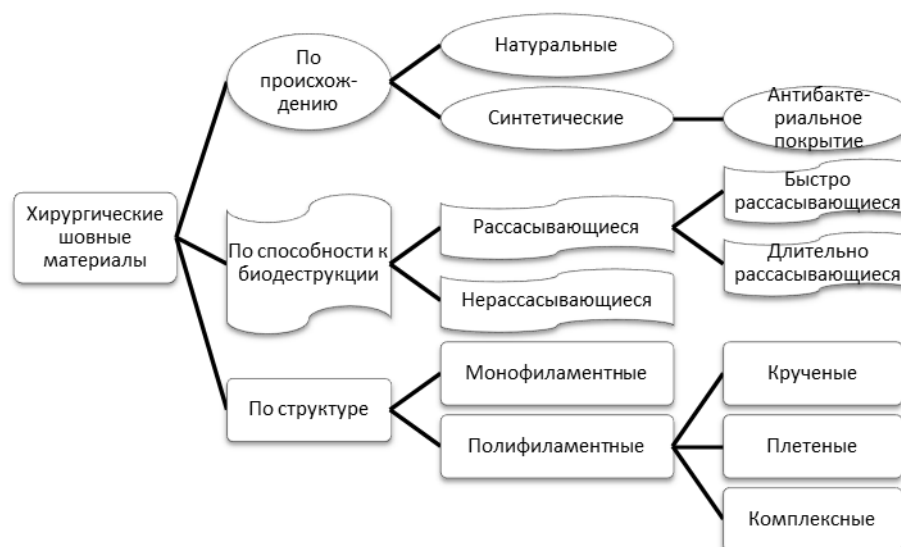


Рис. 1. Классификация шовных материалов



(срок рассасывания до 180 сут). По структуре мононити (монофиламентные) представляют собой в сечении однородную структуру с гладкой поверхностью. Такие нити отличаются отсутствием «эффекта пилы», а также меньшей выраженностью реакции организма. Полифиламентные нити в сечении состоят из множества нитей. Крученые нити изготавливаются путем скручивания нескольких филамент по оси; плетеные нити — путем плетения многих филамент по типу каната. Комплексные нити наиболее распространены в настоящее время. Это плетеные нити, пропитанные или покрытые полимерным материалом. За счет полимерного покрытия снижается «эффект пилы». Синтетические рассасывающиеся шовные материалы обладают высокой прочностью, биосовместимостью и неплохими манипуляционными свойствами [2–4]. Наиболее популярные рассасывающиеся шовные материалы, используемые в современной хирургии, — *Vicryl*, *Monocryl*, *Safil*, *Polysorb*, которые являются биополимерами молочной кислоты и ее производных мономеров [5–7]. Существуют также традиционные нерассасывающиеся шовные материалы — *Prolene*, *Ethilon*, *Mersilen* [8, 9].

Преимуществом рассасывающихся нитей перед другими шовными материалами являются прогнозируемые сроки рассасывания [10]. При этом срок рассасывания не зависит от толщины нити, типа ткани, условий кровоснабжения, ферментативной и иммунной активности и т. п.

Поэтому, попадая в ткань, нить подвергается гидролизу, через некоторое время дефрагментируется (этот срок называется сроком потери прочности нити), затем деполимеризуется, распадаясь на мономеры — в частности, на молочную и гликолевую кислоту, которые затем в цикле Кребса распадаются до углекислого газа и воды. Этот второй срок именуется сроком полного рассасывания нити и, как правило, в 2–3 раза превышает срок полной потери прочности [9]. При рассасывании происходит потеря прочностных свойств нити. С позиций механики деформируемого твердого тела объект данного исследования может быть рассмотрен как конструктивный элемент, обладающий структурной неоднородностью, макроразрушению которого предшествует разрушение отдельных составляющих на мезо-, микро- и наноровнях [11–13].

Для анализа взаимодействия шовного материала с мягкими тканями при ушивании операционной раны на микро- и наноровнях происходят различные химические, биологические и механические процессы, связанные с ростом и заживлением биологической ткани, рассасыванием нити, адгезией и другими эффектами [2]. Таким образом, знание механических свойств шовного материала не только на макроуровне, но и на более мелких уровнях крайне необходимо для построения многоуровневой (*multi-scale*) модели взаимодействия нити и мягких тканей при ушивании раны [1, 14–16].

Исследованию и расчёту механических свойств современных шовных материалов на макроуровне посвящены работы [3, 4]. В статье [3] представлены результаты квазистатических испытаний на разрыв и растяжение-сжатие нескольких типов нитей для исследования влияния биологических сред [в частности, желчи] на прочность шовных материалов и влияние на сроки рассасывания.

При исследовании полимерных нитей также применяются методы наномеханики, такие как атомно-силовая микроскопия (бесконтактный режим исследования поверхности) [12, 17, 18], растровая электронная микроскопия [19], конфокальная лазерная сканирующая микроскопия и флуоресцентная микроскопия [20], рентгеноспектральный микроанализ [18] для изучения мельчайших деталей структуры при деградации, взаимодействии с живыми тканями [21, 22] и бактериями [23, 24] для профилактики инфекций при хирургическом вмешательстве [25, 26].

Целью данной работы является сравнение структуры, механических свойств и оценка микрорельефа рассасывающихся полифиламентных (*Vicryl*) и нерассасывающихся монофиламентных (*Prolene*) шовных материалов на микро- и наноровне с помощью методов атомно-силовой микроскопии и растровой электронной микроскопии. Предполагается, что исследования позволят уточнить механизм влияния микро- и наноструктуры шовных материалов на механические свойства и объяснить природу его поведения на макроуровне.

Статья состоит из следующих разделов. В § 1 представлены оригинальные изображения структуры поверхностей нитей *Vicryl* и *Prolene*, полученные с помощью растровой электронной микроскопии. В § 2 представлена топология поверхностей образцов на площадках с размерами 5×5 , 10×10 мкм. Оценка поверхностей проводилась с помощью использования фрактального показателя Хёрста. § 3 содержит результаты наноидентификации шовных биополимеров — представлены зависимости «сила-глубина проникновения».



1. РАСТРОВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ МИКРОСКОПИЯ НИТЕЙ

Предварительно исследование морфологии поверхности нитей было проведено с помощью растровой электронной микроскопии. Исследования проводились в лаборатории кафедры технологии неорганических веществ Пермского национального исследовательского политехнического университета на растровом электронном микроскопе S-3400N (*Hitachi, Japan*). Объектами исследования являлись два типа нитей: монофиламентная нерассасывающаяся нить *Prolene* (3/0) (диаметр 0.2–0.249 мм) и синтетическая полифиламентная рассасывающаяся нить *Vicryl* (3/0) (диаметр 0.2–0.249 мм). Исследование биополимерных шовных материалов проводилось в двух режимах: детекция вторичных электронов для изучения микрорельефа поверхности образца и рентгеноспектрального микроанализа для химического анализа.

Облучение образца пучком электронов приводит к образованию отражённых и вторичных электронов. Детекция вторичных электронов несет информацию о топологии поверхности, поскольку сильнее всего зависит от его рельефа, тогда как отраженные электроны несут информацию о распределении электронной плотности (области, обогащенные элементом с большим атомным номером, выглядят ярче).

Для проведения исследований образцы фиксировались на алюминиевой подложке на проводящий углеродный скотч. Для получения более контрастных изображений предварительно было проведено снятие заряда с образца при введении в вакуумную камеру.

На рис. 2, 3 показаны оригинальные изображения нитей *Prolene* и *Vicryl* при различной степени увеличения. Из рисунков видно, что поверхности нитей сильно различаются, вследствие способа их изготовления. Поверхность нити *Vicryl* более шероховатая, поскольку этот шовный материал является полифиламентным (т. е. плетеным из нескольких очень тонких нитей).

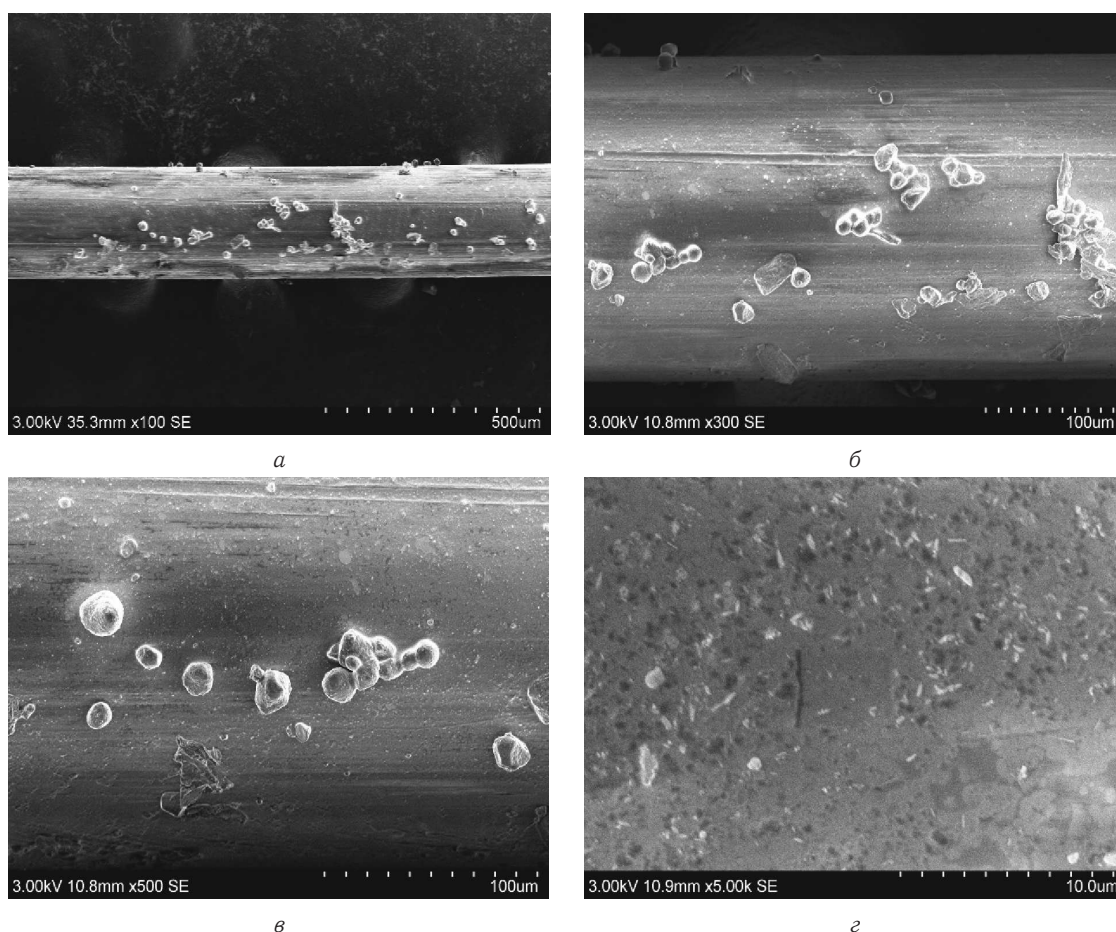


Рис. 2. Шовный материал *Prolene*: изображения, полученные с помощью растрового электронного микроскопа: *а* — увеличение $\times 100$; *б* — $\times 300$; *в* — $\times 500$; *г* — $\times 5000$

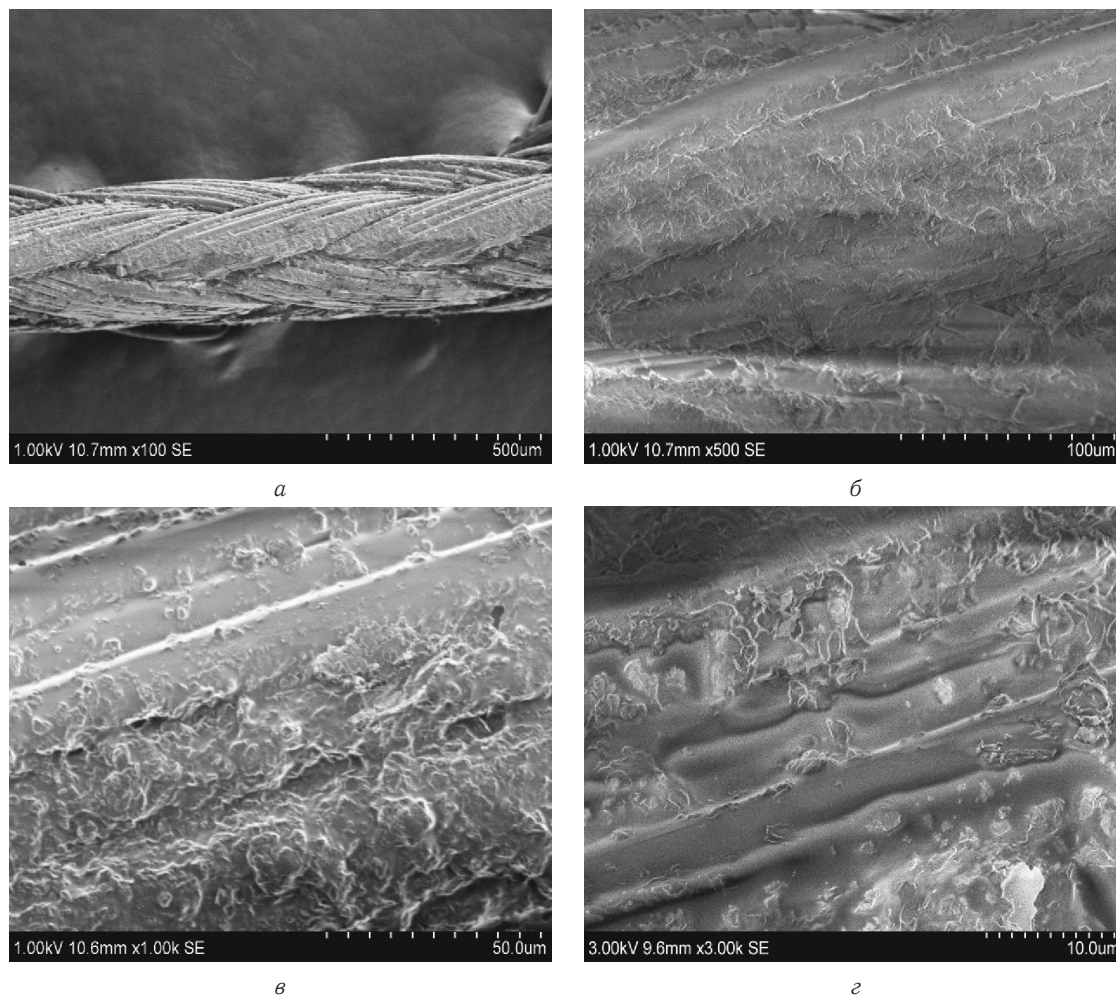


Рис. 3. Шовный материал *Vicryl*: изображения, полученные с помощью растрового электронного микроскопа: *а* — увеличение $\times 100$; *б* — $\times 300$; *в* — $\times 500$; *г* — $\times 5000$

2. ОЦЕНКА ТОПОЛОГИИ ПОВЕРХНОСТИ ШОВНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ

Экспериментальное исследование биополимерных шовных материалов производилось на атомно-силовом микроскопе ICON (Bruker, USA) в лаборатории кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета. Для индентирования был выбран конусный алмазный индентор (радиус закругления зонда $r = 15$ нм). Образцы нитей диаметром 0.3 мм и длиной около 3 мм наклеивались на металлическую подложку во избежание проскальзывания при индентировании.

Далее подложка с образцом помещалась в прибор и производилось позиционирование индентора для АСМ-сканирования (исследования шероховатости поверхности образца). При экспериментальном исследовании первоначально с помощью видеокамеры регистрировалось оптическое изображение образца на металлической подложке на макроуровне. Затем с помощью механической системы микро-позиционирования при оптическом контроле положения индентора выбирался участок для АСМ-измерений. Дальнейшее уменьшение участка визуализации объекта в пределах характерных размеров проводилось с помощью пьезоэлектрического АСМ-сканера. Получение карты высот поверхности проводилось в полуконтактном режиме работы микроскопа. Размеры сканируемой площадки были взяты равными 5×5 мкм и 10×10 мкм.

На рис. 4, 5 представлены результаты АСМ-сканирований шовных материалов. Дальнейшей задачей работы являются оценка и сравнение параметров поверхностей.

Качество поверхности традиционно характеризуются шероховатостью — среднеарифметическим отклонением, максимальной высотой неровностей, средним шагом неровностей профиля и т. д. [27] рассматриваемых типов нитей.

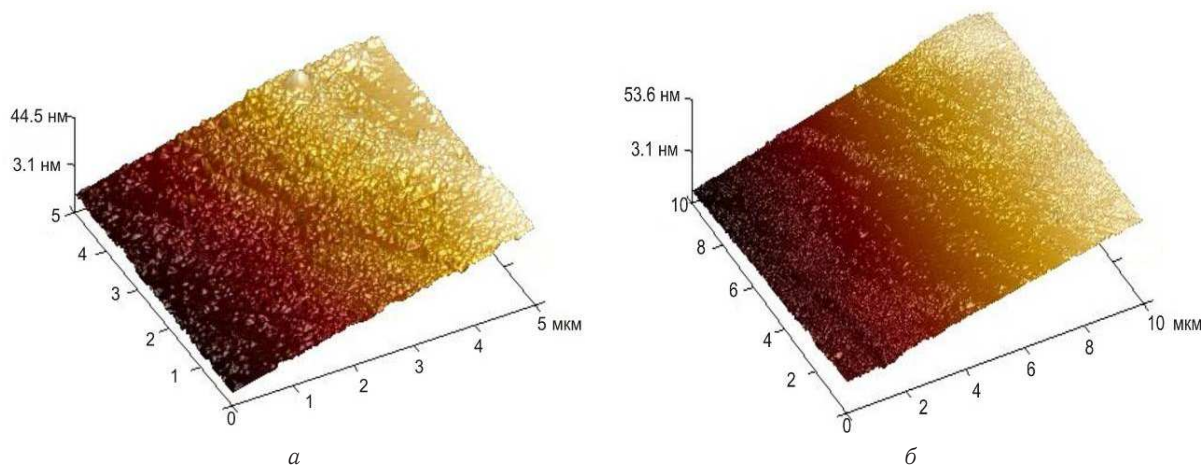


Рис. 4. Микрорельеф поверхности нити *Prolene* в различных диапазонах: *a* — профиль площадки размерами 5×5 мкм; *б* — профиль площадки, размер 10×10 мкм

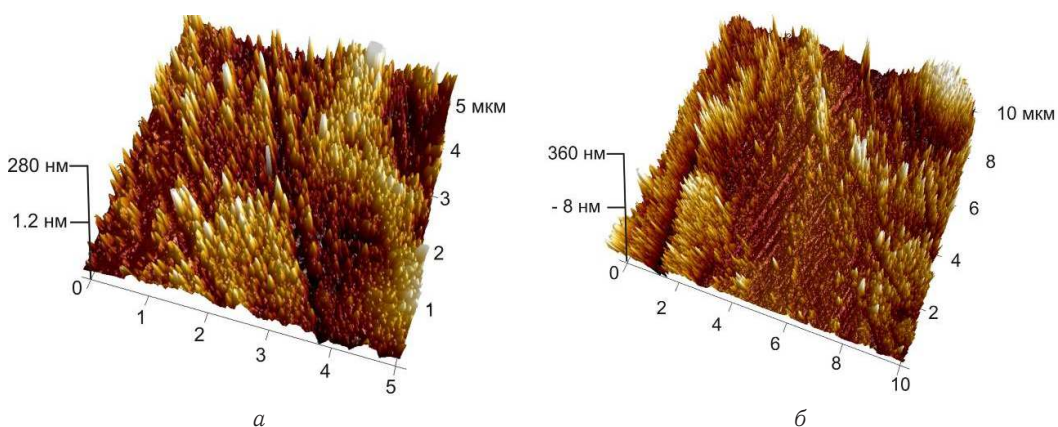


Рис. 5. Микрорельеф поверхности нити *Vicryl* в различных диапазонах: *a* — профиль площадки, размер 5×5 мкм; *б* — профиль площадки, размер 10×10 мкм

Одной из наиболее распространенных характеристик является параметр шероховатости Ra , который определяется как отклонение высот рельефа от средней поверхности:

$$Ra = \frac{1}{N} \sum_{x,y} |z(x,y) - z_{mean}(x,y)|, \quad (1)$$

где N — число точек в матрице значений высот.

Для сравнения и оценки шероховатости поверхностей нитей использовался метод переменного интервала, на основании которого определялся фрактальный показатель Хёрста, который определяет, как меняется рельеф поверхности при перемасштабировании и отражает изменение наклона поверхности при переходе от одних масштабов к другим.

Метод переменного интервала для анализа трехмерных образов поверхности состоит в следующем. Поверхность разбивается сеткой с размером ячейки R , на каждой из которых определяется функция размаха высоты (разница между максимальным и минимальным значением высоты рельефа). Зависимость данной функции, усредненной по всем ячейкам от величины размера ячейки R , для самоафинных поверхностей носит степенной характер:

$$K(R) = \langle \max_{r' \in w_i} (z(r')) - \min_{r' \in w_i} (z(r')) \rangle_{w_i} \propto H^R, \quad (2)$$

где $z(r')$ — матрица значений высот в текущей ячейке w_i размера R , усреднение $\langle \dots \rangle_{w_i}$ производится по всем ячейкам [28, 29].

По наклону линейного участка зависимости (2), построенной в логарифмических координатах, можно определить показатель Хёрста H .



С целью проверки выполнения условия самоафинности поверхностей согласно подходу, описанному в [27], можно рассматривать одномерные профили в ортогональных направлениях. По определению

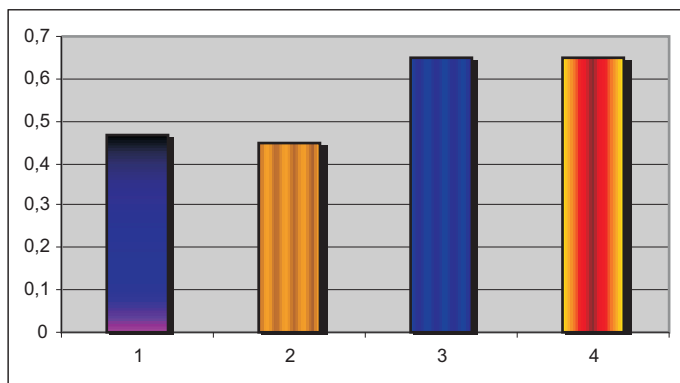


Рис. 6. Значения показателя Хёрста для шовных материалов *Prolene* и *Vicryl*: 1 — для нити *Vicryl* в продольном направлении; 2 — для нити *Vicryl* в перпендикулярном направлении; 3 — для нити *Prolene* в продольном направлении; 4 — для нити *Prolene* в перпендикулярном направлении

результаты вычисления показателя шероховатости (показателя Хёрста) для самоафинной поверхности должны совпадать, т.е. должна наблюдаться изотропия скейлинга в плоскости.

Таким образом, показатель Хёрста для профилей нити *Prolene* в двух взаимно перпендикулярных направлениях равен 0.47 и 0.45. Показатель Хёрста для профилей нити *Vicryl* — 0.65 и 0.651 соответственно (рис. 6). Следуя [30], где отмечено, что чем меньше H , тем более шероховата поверхность, можно сказать о более шероховатом профиле нити *Vicryl*, что согласуется с визуальными результатами, полученными в результате растровой электронной микроскопии (см. рис. 2, 3).

3. ОЦЕНКА УПРУГИХ СВОЙСТВ ОБРАЗЦОВ ПРИ НАНОИНДЕНТИРОВАНИИ

При выполнении процедуры наноиндентирования острый зонда, закрепленный на свободном крае гибкой микроконсоли, размещалось над исследуемой точкой поверхности образца с высокой точностью (до 10 нм). Далее образец перемещался с помощью сканера вертикально по направлению к зонду с контролем шага перемещения с точностью менее 1 нм (подвод). Затем осуществлялось движение образца в обратном направлении (отвод). При режиме статической силовой спектроскопии консоль зонда не совершает колебательных движений, и регистрируется величина изгиба микроконсоли Z_{defl} (3) в зависимости от положения зонда Z_{pos} (4). Данные представляются в виде так называемой кривой подвода-отвода. Изгиб консоли зонда жесткостью k после касания острием образца определяет приложенную силу:

$$P = kZ_{defl}, \tag{3}$$

где k — коэффициент жесткости консоли, который согласно тестовому индентированию составил 86 Н/м. Глубина деформирования материала в точке индентирования находится следующим образом:

$$H = Z_{defl} - Z_{pos}. \tag{4}$$

Предельная глубина наноиндентирования не превышала 80 нм. Для наноуровня упругая реакция шовных материалов на внешнее контактное давление есть результат функционирования сложной композиционной структуры, которая характеризует их чрезвычайно высокую несущую способность и прочность.

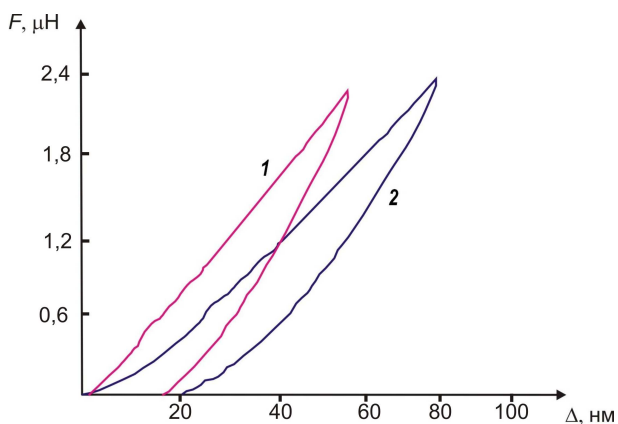


Рис. 7. Кривые индентирования для биополимерных шовных материалов: 1 — *Prolene*; 2 — *Vicryl*

В результате анализа данных были получены зависимости «сила-глубина проникновения» для нитей *Prolene* и *Vicryl* (рис. 7). Модуль Юнга оценивался с помощью процедуры контактного деформирования. Из анализа видно, что модуль Юнга шовного материала *Prolene* (1.19 ± 0.03 ГПа) выше, чем у *Vicryl* — (0.94 ± 0.018 ГПа).

Согласно испытаниям на растяжение-сжатие, проведенным на макроуровне в работе [3], модуль Юнга *Vicryl* несколько выше —



1.97 ГПа, что, возможно, обуславливается разными условиями испытаний, влиянием масштабного фактора [29], а также вязкоупругим поведением структурных элементов шовного материала, которые с учетом их расположения деформируются путем изгиба на макроуровне (исследование нити *Prolene* в данной работе представлено не было).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При растровой электронной и атомно-силовой микроскопии возможно точно выявить шовный материал, обладающий менее выраженными «пилящими» свойствами, что важно для наложения межорганных соустьев в хирургической гастроэнтерологии и гепатологии. Использование наноиндентирования для определения модуля упругости хирургических нитей позволяет осуществить их дифференциацию относительно каждого вида ушиваемых тканей человека. Представленные методики определения механических свойств хирургических шовных материалов позволяет проводить скрининг и дифференциацию рассасывающихся и нерассасывающихся современных хирургических шовных материалов.

В работе проведен анализ структуры и упругих свойств рассасывающегося шовного материала (хирургической нити) методами атомно-силовой микроскопии и растровой электронной микроскопии. Построены зависимости сила-глубина проникновения для определения значения модуля упругости нити на микроуровне в зависимости от локализации области индентирования, а также оценка шероховатости поверхности нити на площадках размерами 5×5 и 10×10 мкм. Рассчитать значение модуля упругости нити необходимо для построения многоуровневой модели, описывающей механическое поведение данного биополимера в задачах взаимодействия нити с мягкими тканями при ушивании операционных ран.

Авторы благодарят С. В. Смирнова и В. З. Пойлова (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра технологии неорганических веществ) за помощь при проведении исследований на растровом электронном микроскопе.

Библиографический список

1. Семенов Г. М., Петришин В. Л., Ковшова М. В. Хирургический шов. М. : OCR, 2001. 148 с.
2. Shishatskaya E. I., Volova T. G., Puzyr A. P., Mogilnaya O. A., Efremov S. N. Tissue response to the implantation of biodegradable polyhydroxyalkanoate sutures // J. Mater. Sci. Mater. Med. 2004. Vol. 15. P. 719–728.
3. Федоров А. Е., Самарцев В. А., Гаврилов В. А., Вильдеман В. Э., Словиков С. В. Экспериментальное исследование механических свойств современных хирургических рассасывающихся шовных материалов // Рос. журн. биомеханики. 2009. Т. 13, № 4. С. 78–84.
4. Шадрин В. В., Тепликов А. В. Манипуляционные свойства хирургических нитей // Рос. журн. биомеханики. 2001. Т. 5, № 3. С. 41–50.
5. Bezwada R. S., Jamiolkowski D. D., Lee In-Y., Agarwal V., Persivale J., Trenka-Benthin S., Emeta M., Suryadevara J., Yang A., Liu S. Monocryl suture : a new ultra-pliable absorbable monofilament suture // Biomaterials. 1995. Vol. 16. P. 1141–1148.
6. Taylor M. S., Daniels A. U., Andriano K. P., Heller J. Six bioabsorbable polymers : *in vitro* acute toxicity of accumulated degradation products // J. Appl. Biomater. 1994. Vol. 5. P. 151–157.
7. Tomihata K, Suzuki M, Oka T, Ikadab Y. A new resorbable monofilament suture // Polym Degrad Stab. 1998. Vol. 59. P. 13–18.
8. Altman G. H., Diaz F., Jakuba C., Calabro T., Horan R. L., Chen J., Lu H., Richmond J., Kaplan D. L. Silk-based biomaterials // Biomaterials. 2003. Vol. 24. P. 1141–1148.
9. Volenko A. V., Germanovich Ch. S., Gurova O. P., Shvets R. A. Capromed — an antibacterial suture material // Biomedical Engineering. 1994. Vol. 28, № 2. P. 98–100.
10. Amass W., Amass A., Tighe B. A review of biodegradable polymers: uses, current developments in the synthesis and characterization of biodegradable polyesters, blends of biodegradable polymers and recent advances in biodegradation studies // Polymer Intern. 1998. Vol. 47. P. 89–144.
11. Dao M., Chollacoop N., van Vliet K. J., Venkatesh T.A., Suresh S. Computational modeling of the forward and reverse problems in instrumented sharp indentation // Acta Mater. 2001. Vol. 49, № 19. P. 3899–3919.
12. Jagtap R. N., Ambre A. H. Overview literature on atomic force microscopy (AFM) : basic and its important applications for polymer characterization // Indian J. of Engineering and Materials Science. 2006. Vol. 13. P. 368–384.
13. Nishimura K. A., Mori R., Miyamoto W., Uchio Y. New technique for small and secure knots using slippery polyethylene sutures // Clinical Biomechanics. 2009. Vol. 24. P. 403–406.
14. Кучумов А. Г., Самарцев В. А., Чайкина Е. С., Гав-



- рилов В. А. Биомеханика шовных материалов в абдоминальной хирургии // Современные проблемы науки и образования. 2012. Т. 6, № 3. С. 1–13.
15. Ladeveze P., Nouy A., Loiseau O. A multiscale computational approach for contact problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2002. Vol. 191. P. 4869–4891.
16. Migliavacca F., Balossino R., Pennati G., Dubini G., Hsia T. Y., Leval M. R. de , Bove E. L. Multiscale modelling in bio-fluid dynamics: application to reconstructive paediatric cardiac surgery // *J. of Biomechanics.* 2006. Vol. 39. P. 1010–1020.
17. Chen X., Yang X., Pan J., Wang L., Xu K. Degradation Behaviors of Bioabsorbable P3/4HB Monofilament Suture *in Vitro* and *in Vivo* // *J. of Biomedical Materials Research Part B : Applied Biomaterials.* 2010. Vol. 92. P. 447–455.
18. Nandula D., Chalivendra V., Calvert P. Sub-micron scale mechanical properties of polypropylene fibers exposed to ultra-violet and thermal degradation // *Polymer Degradation and Stability.* 2006. Vol. 12. P. 2–14.
19. Deng M., Chen G., Burkley D., Zhou J., Jamiolkowski D. A study on in vitro degradation behavior of a poly(glycolide-co- L-lactide) monofilament // *Acta Biomater.* 2008. Vol. 4. P. 1382–1391.
20. Wang Y. W., Mo W. K., Yao H. L., Wu Q., Chen J. C., Chen G. Q. Biodegradation studies of poly (3-hydroxybutyrate-co-3-hydroxyhexanoate) // *Polym. Degrad. Stab.* 2004. Vol. 85. P. 815–821.
21. Garsia Pgez J. M., Carrera SanMartin A., Garcia Sestafe J. V., Jorge Herrero E., Navidad R., Cordon A., Castillo-Olivares J. L. Elastic behaviour of sutured calf pericardium : influence of the suture threads // *Biomaterials.* 1996. Vol. 17. P. 1677–1683.
22. Wainstein M., Anderson J., Elder J. S. Comparison of effects of suture materials on wound healing in a rabbit pyeloplasty model // *Urology.* 1997. Vol. 49. P. 261–264.
23. Engelsman A. F., Mei H. C., Ploeg R. J. The phenomenon of infection with abdominal wall reconstruction // *Biomaterials.* 2007. Vol. 28. P. 2314–2327.
24. Fry D. E. The economic costs of surgical site infection // *Surg. Infect.* 2002. Vol. 3, № 1. P. 37–43.
25. Cheadle W. G. Risk factors for surgical site infection // *Surg. Infect.* 2006. Vol. 7, № 1. P. 7–11.
26. Gilbert P., McBain A. J. Literature-based evaluation of the potential risks associated with impregnation of medical devices and implants with triclosan // *Surg. Infect.* 2002. Vol. 3. Suppl. 1. P. S55–S63.
27. Ерофеева Е. С., Ляпунова Е. А., Оборин В. А., Гилева О. С., Наймарк О. Б. Структурно-функциональный анализ твёрдых тканей зубов в оценке качества технологий отбеливания // *Рос. журн. биомеханики.* 2010. Т. 14, № 2. С. 47–55.
28. Berasategui E., Canalda C., Brau E., Miquel C. Surface roughness of finished composite resins // *J. Prosthet. Dent.* 1992. Vol. 68. P. 742–747.
29. Bouchaud E. Scaling properties of cracks // *J. Phys. : Condens. Matter.* 1997. Vol. 9. P. 4319–4344.
30. Salerno M., Giacomelli L., Derchi G., Patra N., Diaspro A. Atomic force microscopy in vitro study of surface roughness and fractal character of a dental restoration composite after air-polishing // *BioMedical Engineering OnLine.* 2010. Vol. 9, № 59. P. 2–11.

Investigation of Surface Roughness at Micro-scale and Mechanical Response in the Contemporary Bio-polymer Sutures by the Nanoindentation

A. G. Kuchumov¹, V. N. Solodko², V. A. Samartsev³, V. A. Gavrilov³, E. S. Chaykina¹

¹Perm National Research Polytechnic University, Russia, 614990, Perm, Komsomolski prospect, 29, kychymov@inbox.ru

²Perm State National Research University, Russia, 614990, Perm, Bukireva str., 15, vlad.solodko@gmail.com

³Academician EA Wagner Perm State Medical Academy, Russia, 614990, Perm, Kuibyshev str., 39, samarcev-v@mail.ru

An investigation of properties of contemporary suture materials (surgical threads) is the state-of-art challenge in biomechanics. To improve an effectiveness of sutures application, an analysis of structure and elastic properties by the atomic force microscopy and scanning electron microscopy is necessary to be performed. As a result, the force-indentation depth dependences were plotted to obtain the Young's modulus of the thread at micro-scale taking into account influence of indentation area localization; moreover, the thread surface roughness was evaluated at an area of 5×5 and 10×10 micrometers.

Key words: atomic force microscopy (AFM), biopolymer, suture material, nanoindentation, Hurst exponent.

References

1. Semenov G. M., Petrishin V. L., Kovshova M. V. Surgical suture. Moscow, OCR Publ. House, 2001, 148 p.
2. Shishatskaya E. I., Volova T. G., Puzyr A. P., Mogil'naya O. A., Efremov S. N. Tissue response to the implantation of biodegradable polyhydroxyalkanoate sutures. *J. Mater. Sci. Mater. Med.*, 2004, vol. 15, pp. 719–728.
3. Fedorov A. E., Samartsev V. A., Gavrilov V. A., Vildeman V. E., Slovikov S. V. Experimental investigation



- of the mechanical properties of the contemporary surgical resorbable suture materials. *Russian J. of Biomechanics*, 2009, vol. 13, no. 4, pp. 78–84.
4. Shadrin V. V., Teplikov A. V. Handling characteristics of surgical threads. *Russian J. of Biomechanics*, 2001, vol. 5, no. 3, pp. 41–50.
 5. Bezwada R. S., Jamiolkowski D. D., Lee In-Y., Agarwal V., Persivale J., Trenka-Benthin S., Emeta M., Suryadevara J., Yang A., Liu S. Monocryl suture : a new ultra-pliable absorbable monofilament suture. *Biomaterials*, 1995, vol. 16, pp. 1141–1148,
 6. Taylor M. S., Daniels A. U., Andriano K. P., Heller J. Six bioabsorbable polymers : *in vitro* acute toxicity of accumulated degradation products. *J. Appl. Biomater.*, 1994, vol. 5, pp. 151–157.
 7. Tomihata K., Suzuki M., Oka T., Ikadab Y. A new resorbable monofilament suture. *Polym Degrad Stab.*, 1998, vol. 59, pp. 13–18.
 8. Altman G. H., Diaz F., Jakuba C., Calabro T., Horan R. L., Chen J., Lu H., Richmond J., Kaplan D. L. Silk-based biomaterials. *Biomaterials*, 2003, vol. 24, pp. 1141–1148,
 9. Volenko A. V. , Germanovich Ch. S. , Gurova O. P. , Shvets R. A. Capromed — an antibacterial suture material. *Biomedical Engineering*, 1994, vol. 28, no. 2, pp. 98–100.
 10. Amass W., Amass A., Tighe B. A review of biodegradable polymers : uses, current developments in the synthesis and characterization of biodegradable polyesters, blends of biodegradable polymers and recent advances in biodegradation studies. *Polymer Int.*, 1998, vol. 47, pp. 89–144.
 11. Dao M., Chollacoop N., Vliet K. J. van, Venkatesh T. A., Suresh S. Computational modeling of the forward and reverse problems in instrumented sharp indentation. *Acta Mater.*, 2001, vol. 49, no. 19, pp. 3899–3919,
 12. Jagtap R. N., Ambre A. H. Overview literature on atomic force microscopy (AFM) : basic and its important applications for polymer characterization. *Indian J. of Engineering and Materials Science*, 2006, vol. 13, pp. 368–384.
 13. Nishimura K. A., Mori R., Miyamoto W., Uchio Y. New technique for small and secure knots using slippery polyethylene sutures. *Clinical Biomechanics*, 2009, vol. 24, pp. 403–406.
 14. Kuchumov A. G., Samartsev V. A., Chaykina E. S., Gavrilov V. A. Biomechanics of suture materials in the abdominal surgery. *Current problems of education and science*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 1–13.
 15. Ladeveze P., Nouy A., Loiseau O. A multiscale computational approach for contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2002, vol. 191, pp. 4869–4891.
 16. Migliavacca F., Balossino R., Pennati G., Dubini G., Hsia T. Y., Leval M. R. de, Bove E. L. Multiscale modelling in bio-fluid dynamics: application to reconstructive paediatric cardiac surgery. *J. of Biomechanics*, 2006, vol. 39, pp. 1010–1020,
 17. Chen X., Yang X., Pan J., Wang L., Xu K. Degradation Behaviors of Bioabsorbable P3/4HB Monofilament Suture *in Vitro* and *in Vivo*. *J. of Biomedical Materials Research. Pt. B: Applied Biomaterials.*, 2010, vol. 92, pp. 447–455.
 18. Nandula D., Chalivendra V., Calvert P. Sub-micron scale mechanical properties of polypropylene fibers exposed to ultra-violet and thermal degradation. *Polymer Degradation and Stability*, 2006, vol. 12, pp. 2–14.
 19. Deng M., Chen G., Burkley D., Zhou J., Jamiolkowski D. A study on *in vitro* degradation behavior of a poly(glycolide-co- L-lactide) monofilament. *Acta Biomater.*, 2008, vol. 4, pp. 1382–1391,
 20. Wang Y. W., Mo W. K., Yao H. L., Wu Q., Chen J. C., Chen G. Q. Biodegradation studies of poly(3-hydroxybutyrate-co-3-hydroxyhexanoate). *Polym. Degrad. Stab.*, 2004, vol. 85, pp. 815–821.
 21. Garsia Pgez J. M., Carrera SanMartin A., Garcia Sestafe J. V., Jorge Herrero E., Navidad R., Cordon A., Castillo-Olivares J. L. Elastic behaviour of sutured calf pericardium : influence of the suture threads. *Biomaterials*, 1996, vol. 17, pp. 1677–1683,
 22. Wainstein M., Anderson J., Elder J.S. Comparison of effects of suture materials on wound healing in a rabbit pyeloplasty model. *Urology*, 1997, vol. 49, pp. 261–264.
 23. Engelsman A. F., Mei H. C., Ploeg R. J. The phenomenon of infection with abdominal wall reconstruction. *Biomaterials*, 2007, vol. 28, pp. 2314–2327,
 24. Fry D. E. The economic costs of surgical site infection. *Surg. Infect.*, 2002, vol. 3, no. 1, pp. 37–43.
 25. Cheadle W. G. Risk factors for surgical site infection. *Surg. Infect.*, 2006, vol. 7, no. 1, pp. 7–11.
 26. Gilbert P., McBain A. J. Literature-based evaluation of the potential risks associated with impregnation of medical devices and implants with triclosan. *Surg. Infect.*, 2002, vol. 3, Suppl. 1, pp. S55–S63.
 27. Erofeeva E. S., Lyapunova E. A., Oborin V. A., Gileva O. S., Naimark O. B. Structural and functional analysis of hard tooth tissues In the estimation of quality of bleaching procedure. *Russian J. of Biomechanics*, 2010, vol. 14, no. 2, pp. 47–55.
 28. Berasategui E., Canalda C., Brau E., Miquel C. Surface roughness of finished composite resins. *J. Prosthet. Dent.*, 1992, vol. 68, pp. 742–747.
 29. Bouchaud E. Scaling properties of cracks. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 1997, vol. 9, pp. 4319–4344,
 30. Salerno M., Giacomelli L., Derchi G., Patra N., Diaspro A. Atomic force microscopy *in vitro* study of surface roughness and fractal character of a dental restoration composite after air-polishing. *BioMedical Engineering OnLine*, 2010, vol. 9, no. 59, pp. 2–11.



УДК 519.71

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧЕ О БОКОВОМ ДВИЖЕНИИ ГРУППЫ САМОЛЕТОВ

А. Ю. Литвин¹, В. Т. Приставко²

¹ Аспирант кафедры математической теории экономических решений, Санкт-Петербургский государственный университет, alybey@mail.ru

² Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории экономических решений, Санкт-Петербургский государственный университет, pvt1@yandex.ru

Слежение за динамическим объектом, не доступным непосредственному наблюдению, на практике усложняется из-за наличия случайных воздействий (шумов): порывы ветра отклоняют самолет от заданного курса, показания датчиков всегда содержат некоторую неточность. Для того чтобы уменьшить влияние шумов применяются фильтры. В статье предлагается осуществлять одновременную фильтрацию движения группы одинаковых объектов за счет постановки задачи в матричных переменных. Предлагается рассматривать управляемый фильтр. Введенный линейно-квадратичный критерий качества позволяет учитывать ограничения на управление фильтром, что делает его физически реализуемым. Доказаны утверждения, позволяющие получать оптимальные матричные фильтры. Полученное решение существует всегда, что может быть несправедливо для других фильтров.

Ключевые слова: матричная фильтрация, матрица n -ковариаций, квадратичный функционал качества, боковое движение самолета.

ВВЕДЕНИЕ

По проблемам современной теории фильтрации написано множество работ как теоретического, так и прикладного характера. Разработано множество подходов к решению различных технических задач. Однако сказанное справедливо главным образом по отношению к векторной теории фильтров, в то время как теория матричных фильтров, являющаяся естественным развитием векторной теории, разработана мало.

В статье поставлена и решена задача оптимальной фильтрации матричного гауссовского процесса. Применимость полученных результатов показана на примере задачи фильтрации бокового движения группы самолетов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на некотором полном вероятностном пространстве (Ω, F, \mathbb{P}) с неубывающим непрерывным справа семейством σ -подалгебр F задан $X = X_t, t \in [0, T], X_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — случайный матричный процесс диффузионного типа

$$dX_t = A_t X_t dt + b dw_t, \quad (1)$$

где, по предположению, w_t — гауссовский матричный процесс с независимыми нормально распределенными стандартными $N(0, 1)$ компонентами соответствующих размерностей, случайная матрица X_0 не зависит от матричной последовательности случайных воздействий w_t на систему уравнений, математическое ожидание $\mathbf{E}[X_0] = \bar{X}_0$ и матрица n -ковариаций $\mathbf{cov}(X_0, X_0) = \gamma_0$ заданы и конечны,

$$b = \|b_{ij}\|_{n \times l}, \quad A_t = \|a_{ij}(t)\|_{n \times n}.$$

Определение 1. Будем говорить, что случайный матричный процесс $\xi = (\xi_t) \in \mathbb{R}^{[n \times m]}, 0 \leq t \leq 1$, есть *сильное решение стохастического матричного дифференциального уравнения:*

$$d\xi_t = a(t, \xi)dt + b(t, \xi)dW_t, \quad a(t, \xi) = \|a_{ij}(t, \xi)\|_{n \times m}, \quad b(t, \xi) = \|b_{kl}(t, \xi)\|_{n \times p}$$

с F_0 -измеримым начальным условием $\xi_0 = \eta$, если при каждом $t, 0 < t \leq 1$, величины ξ_t являются F_t -измеримыми,

$$\mathbf{P} \left(\int_0^1 |a_{ij}(t, \xi)| dt < \infty \right) = 1, \quad \mathbf{P} \left(\int_0^1 b_{kl}^2(t, \xi) dt < \infty \right) = 1, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, p},$$



и с вероятностью 1 для каждого t , $0 \leq t \leq 1$,

$$\xi_t = \eta + \int_0^t a(s, \xi) ds + \int_0^t b(s, \xi) dW_s.$$

Замечание 1. Пусть $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — случайная матрица, которая имеет конечный второй момент, $t \in [0, N]$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда n -ковариационной матрицей $\mathbf{cov}(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{a}$ матрицы \tilde{x} называется

$$\tilde{a}_t = \mathbf{E}[\tilde{x}_t \tilde{x}_t^*] = \mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \dots & \tilde{x}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{n1} & \dots & \tilde{x}_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \dots & \tilde{x}_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{1m} & \dots & \tilde{x}_{nm} \end{pmatrix} \right].$$

Здесь и далее под знаком «*» понимается операция транспонирования. Видно, что $\tilde{a}_t = \|\tilde{a}_{ij}(t)\|_{n \times n}$ и является симметрическим набором обыкновенных ковариаций данной матрицы по столбцам.

Рассмотрим наблюдения для уравнения (1) в виде случайного матричного процесса диффузионного типа:

$$dY_t = H_t X_t dt + B dv_t, \quad (2)$$

где матрицы имеют следующие размерности: $Y_t - [\beta \times m]$, $H_t - [\beta \times n]$, $B - [\beta \times \delta]$, $v_t - [\delta \times m]$; v_t — гауссовский матричный процесс с независимыми нормально распределенными стандартными $\mathbf{N}(0, 1)$ компонентами.

Определение 2. *Линейным матричным фильтром заданной структуры* называется такой фильтр Z_t , изменение состояния которого описывается на вероятностном пространстве (Ω, F, \mathbb{P}) случайным процессом, определяемым системой линейных стохастических матричных дифференциальных уравнений вида

$$dZ_t = F_t Z_t dt + U_t dY_t, \quad (3)$$

где $Z_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$, F_t и U_t — неизвестные матричные функции размерностей $[n \times n]$, $[n \times \beta]$ соответственно; Z_0 — неизвестное, но неслучайное начальное условие; U_t принадлежит классу линейных функций: $U_t = \gamma_t \mu_t + \eta_t$; $\varepsilon_t = X_t - Z_t$ — матричная ошибка оценки; n -ковариационная матрица $\gamma_t = \mathbf{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t)$ положительно определенная, симметрическая размерности $[n \times n]$.

Определение 3. Управление U_t состоянием фильтра Z_t , для которого система уравнений (1)–(3) имеет единственное сильное решение, называется *допустимым*.

В качестве критерия работы фильтра Z_t рассмотрим следующий функционал $J(T, \gamma_t, U_t)$:

$$\begin{aligned} J(T, \gamma_t, U_t) &= \mathbf{Sp} \left(\mathbf{E}[\varepsilon_T^* \Theta_T \varepsilon_T + \int_0^T (\varepsilon_t^* P \varepsilon_t + U_t Q U_t^* \Theta_t + 2U_t R \Theta_t) dt] \right) = \\ &= \mathbf{Sp} \left(\gamma_T \Theta_T + \int_0^T (\gamma_t P + U_t Q U_t^* \Theta_t + 2U_t R \Theta_t) dt \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где Q — симметрическая положительно-определенная матрица размерности $[\beta \times \beta]$; P — симметрическая неотрицательно-определенная матрица размерности $[n \times n]$; Θ_T — положительно-определенная матрица размерности $[n \times n]$. Матрицы P , Q , R , Θ_T являются известными постоянными матрицами.

Скажем несколько слов о введенном функционале. В работах Р. Калмана и А. Н. Ширяева, посвященных проблемам фильтрации случайных процессов, в качестве критерия качества выступал минимум среднего квадрата ошибки. Однако полученное ими решение зависит от некоторой обратной матрицы, которая, вообще говоря, в некоторые моменты времени может не существовать. Введение управления фильтром, как будет показано, позволяет получить управление, лишенное этого недостатка. Кроме того, вполне очевидно, что введенный функционал является обобщением критерия минимума среднего квадрата ошибки. За счет выбора матрицы Q можно учесть ограничения на допустимые управления, что существенно для практической реализации фильтра.

Задача фильтрации. *Требуется найти в классе допустимых функций оптимальные параметры фильтра Z_t , для которых функционал J принимал бы наименьшее возможное значение, и ошибка фильтрации была бы несмещенной.*



2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ФИЛЬТРОВ

Для решения задачи фильтрации определим параметры F_t и U_t фильтра Z_t .

Теорема 1. Для того чтобы оценка фильтрации была несмещенной, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$F_t = A_t - U_t H_t, \quad Z_0 = \mathbf{E}[X_0]. \quad (5)$$

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, что оценка несмещенная, тогда $\mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0, \forall t \in [0, T]$. Согласно [1] система уравнений (1)–(3) имеет сильное решение:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t A_s X_s \mathbf{d}s + \int_0^t b \mathbf{d}w_s, \\ Z_t &= Z_0 + \int_0^t F_s Z_s \mathbf{d}s + \int_0^t U_s \mathbf{d}Y_s = Z_0 + \int_0^t (F_s Z_s + U_s H_s X_s) \mathbf{d}s + \int_0^t U_s B \mathbf{d}v_s. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varepsilon_t = X_t - Z_t$, получим:

$$\varepsilon_t = X_0 - Z_0 + \int_0^t (A_s X_s - F_s X_s - U_s H_s X_s) \mathbf{d}s + \int_0^t F_s \varepsilon_s \mathbf{d}s + \int_0^t (b \mathbf{d}w_s - U_s B) \mathbf{d}v_s. \quad (6)$$

Переходя к математическому ожиданию, имеем:

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t] = \mathbf{E}[X_0 - Z_0] + \int_0^t (A_s - F_s - U_s H_s) \mathbf{E}[X_s] \mathbf{d}s = 0.$$

Так как в общем случае $\mathbf{E}[X_t] \neq 0$, то отсюда следует необходимость условий теоремы.

Достаточность. Предположим, что имеют место равенства из условий теоремы, тогда из уравнения (6) следует, что

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t] = \mathbf{E}[\varepsilon_0] + \int_0^t F_s \mathbf{E}[\varepsilon_s] \mathbf{d}s.$$

Как известно, это интегральное уравнение имеет решение $\chi(t) = \mathbf{E}[\varepsilon_t] \Phi(t, t_0) \chi(0)$, где $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица уравнения. Но $\chi(0) = \mathbf{E}[\varepsilon_0] = \mathbf{E}[X_0] - Z_0 \equiv 0$, следовательно, $\mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0, \forall t \in [0, T]$. Достаточность доказана. \square

Для решения задачи фильтрации в целом необходимо рассмотреть динамику матрицы n -ковариаций γ_t . Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Матрица n -ковариаций γ_t является единственным, непрерывным решением обыкновенного матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\gamma}_t = A_t \gamma_t + \gamma_t A_t^* - U_t H_t \gamma_t - \gamma_t H_t^* U_t^* + b b^* + U_t B B^* U_t^* \quad (7)$$

с начальным условием γ_0 .

Доказательство. Из теоремы 1 следует:

$$\mathbf{d}\varepsilon_t = F_t \varepsilon_t \mathbf{d}t + b \mathbf{d}\omega_t - U_t B \mathbf{d}v_t.$$

К элементам матрицы $\mathbf{d}(\varepsilon_t \varepsilon_t^*)$ применим формулу замены переменных Ито (см. [1]):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\varepsilon_t \varepsilon_t^*) &= ((A_t - U_t H_t) \varepsilon_t \varepsilon_t^* + \varepsilon_t \varepsilon_t^* (A_t^* - H_t^* U_t^*) + b b^* + U_t B B^* U_t^*) \mathbf{d}t + \\ &+ b(\mathbf{d}\omega_t) \varepsilon_t^* + \varepsilon_t (\mathbf{d}\omega_t)^* b^* - U_t B(\mathbf{d}v_t) \varepsilon_t^* - \varepsilon_t (\mathbf{d}v_t)^* B^* U_t^*. \end{aligned}$$

Переходя к математическому ожиданию, получим равенство (7). Единственность решения доказывается аналогично теореме 12.3 из [1]. \square

Замечание 2. Заметим, что дифференциальное уравнение (7) можно рассматривать как билинейную матричную квадратичную систему управления с критерием качества (4) и классом допустимых управлений в виде линейных по γ_t матричных функций U_t [2]. Тогда имеет место теорема 2.



Теорема 2. Если существует такая постоянная матрица L размерности $[n \times n]$, что $|a_{ij}(t)| \leq L_{ij}$ и $|H_{ij}(t)| \leq L_{ij}$, то матрицы Z_t и γ_t являются единственными непрерывными решениями системы уравнений (3) и (7). При этом в классе допустимых управлений оптимальное по отношению к функционалу (4) управление существует и определяется формулой

$$U_t^{opt} = (\gamma_t H_t^* - R^*)(BB^* + Q)^{-1}, \quad (8)$$

а оптимальное значение функционала $J(U_t)$ имеет вид

$$J(U_t^{opt}) = \mathbf{Sp}(\gamma_0 \Theta_0 + \varphi_0), \quad (9)$$

где Θ_t, φ_t — решения матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\Theta}_t = -\Theta_t A_t - (A_t^* + 2H_t^*(BB^* + Q)^{-1}R)\Theta_t - P, \quad (10)$$

$$\dot{\varphi}_t = (\gamma_t H_t^*(BB^* + Q)^{-1}H_t \gamma_t - bb^* + R^*(BB^* + Q)^{-1}R)\Theta_t, \quad (11)$$

вдоль движения уравнения (1) с начальными условиями $\Theta(T) = \Theta_T, \varphi_T = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(t, \gamma_t) = \mathbf{Sp}(\gamma_t \Theta_t + \varphi_t),$$

где Θ_t, φ_t — матрицы вспомогательных переменных размерности $[n \times n]$. Предположим, что элементы этих матриц непрерывно-дифференцируемые по всем $t \in [0, T]$ функции, принимающие вещественные значения. Управление ищется оптимальным по отношению к демпфированию соответствующего функционала

$$V(t, \gamma_t) + \int_0^t f(\tau) \mathbf{d}\tau, \quad (12)$$

где $f(t)$ — след матрицы подинтегрального выражения, входящего в функционал (4). Тогда, как известно из [3], для того чтобы управление U_t было оптимальным, оно должно доставлять наименьшее значение производной W_t функционала (12) по времени вдоль движения системы управления $W_t = \mathbf{d}V(t, \gamma_t)/\mathbf{d}t + f(t)$ при $\partial W_t / \partial U_t = 0$, а вспомогательные переменные должны удовлетворять условиям $W_t = 0, \forall t \in [0, T]$ и $V(t, \gamma_t) = \mathbf{Sp}(\gamma_T \Theta_T)$. Дифференцируя V и подставляя значение правой части уравнения (7) вместе с подинтегральным выражением функционала (4), получим:

$$W_t = \mathbf{Sp}(\dot{\gamma}_t \Theta_t + \gamma_t \dot{\Theta}_t + \dot{\varphi}_t + f(t)) = \mathbf{Sp}(A_t \gamma_t \Theta_t + \gamma_t A_t^* \Theta_t - U_t H_t \gamma_t \Theta_t - \gamma_t H_t^* U_t^* \Theta_t + bb^* \Theta_t + U_t BB^* U_t^* \Theta_t + \gamma_t \dot{\Theta}_t + \dot{\varphi}_t + \gamma_t P + U_t Q U_t^* \Theta_t + 2U_t R \Theta_t) = 0. \quad (13)$$

Вычислим частные производные по U_t для следа от квадратных матриц этого выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U_t} \mathbf{Sp}(U_t H_t \gamma_t \Theta_t) &= \Theta_t^* \gamma_t^* H_t^*, \\ \frac{\partial}{\partial U_t} \mathbf{Sp}(U_t (BB^* + Q) U_t^* \Theta_t) &= \Theta_t^* U_t (BB^* + Q) + \Theta_t U_t (BB^* + Q), \\ \frac{\partial}{\partial U_t} \mathbf{Sp}(\gamma_t H_t^* U_t^* \Theta_t) &= \Theta_t^* \gamma_t^* H_t^*, \\ \frac{\partial}{\partial U_t} \mathbf{Sp}(U_t^* R \Theta_t) &= \Theta_t^* R^* = \Theta_t R^*, \end{aligned}$$

Учитывая, что γ_t, Q и Θ_t — симметрические матрицы, нетрудно вычислить $\partial W_t / \partial U_t = 0$:

$$\frac{\partial W_t}{\partial U_t} = 2\Theta_t(-\gamma_t H^* + U_t(BB^* + Q) + R^*) = 0.$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений размерности $[n \times \beta]$ для нахождения сигналов управления. Вследствие положительной определенности матрицы Q наилучшее приближенное решение (8) существует и единственно. Более того, оптимальное управление U_t^{opt} будет линейным по γ_t .

$$U_t^{opt} = (\gamma_t H_t^* - R^*)(BB^* + Q)^{-1} = \gamma_t \mu_t + \eta_t.$$



Обратная матрица $(BB^* + Q)^{-1}$ существует всегда в силу положительной определенности матрицы Q . Рассмотрим уравнение (13) для вычисления матриц Θ_t и φ_t . Заметим, что

$$\mathbf{Sp}(A\gamma_t\Theta_t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\psi_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{ji}a_{ij} = \mathbf{Sp}(\gamma_t\Theta_t A).$$

Используя условия управления объектом в конечное время действия (см. [3]) $W_t = 0, \forall t \in [0, T]$ и $V(T, \gamma_T) = \gamma_T\Theta_T$ для нахождения (9), в (13), посредством группировки слагаемых линейно зависящих от γ_t и остальных, получим матричные дифференциальные уравнения (10) для Θ_t и (11) для φ_t :

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_t &= -\Theta_t(A_t - \eta_t H_t + \eta_t(BB^* + Q)\mu_t^*) - (A_t^* - H_t^*\eta_t^* + \mu_t(BB^* + Q)\eta_t^* + 2\mu_t R)\Theta_t - P, \\ \dot{\varphi}_t &= (\gamma_t\mu_t H_t\gamma_t + \gamma_t H_t^*\mu_t^*\gamma_t - bb^* - \gamma_t\mu_t(BB^* + Q)\mu_t^*\gamma_t - \eta_t(BB^* + Q)\eta_t^* - 2\eta_t RQ)\Theta_t. \end{aligned}$$

Здесь $\mu_t = H_t^*(BB^* + Q)^{-1}$, $\eta_t = -R^*(BB^* + Q)^{-1}$. Аналогично теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов [3] нетрудно показать, что оптимальное значение функционала (4) дается формулой (9). Доказательство единственности и непрерывности процесса γ_t следует проводить аналогично доказательству теоремы 12.7, которое подробно приведено в [1]. При этом вполне очевидно, что матричная функция управления (8) соответствует предположениям, сделанным при доказательстве теоремы 1. \square

3. ЗАДАЧА О БОКОВОМ ДВИЖЕНИИ ГРУППЫ САМОЛЕТОВ

Автопилот канала управления боковым движением самолета, предназначенный для стабилизации направления полета (курса), и угла крена [4]. Движение самолета по крену, рысканию и скольжению взаимосвязаны и образуют в совокупности так называемое боковое движение. Это движение почти не связано с изменениями угла тангажа и вертикальными перемещениями самолета, т.е. с его «продольным» движением. Возмущенное боковое движение самолета относительно установившегося горизонтального полета описывается системой уравнений пятого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \omega_y + \frac{Z^\beta}{m_0 V_0} \beta + \frac{g}{V_0} \gamma, \\ \dot{\omega}_x &= \frac{I_{xy}}{I_x} \dot{\omega}_y + \frac{1}{I_x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial M_x}{\partial \omega_x} \omega_x + \frac{\partial M_x}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial M_x}{\partial \delta_e} \delta_e \right), \\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_{xy}}{I_y} \dot{\omega}_x + \frac{1}{I_y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial M_y}{\partial \omega_x} \omega_x + \frac{\partial M_y}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial M_y}{\partial \delta_n} \delta_n \right), \\ \dot{\gamma} &= \omega_x, \\ \dot{\psi} &= \omega_y, \end{aligned}$$

где возмущенные переменные имеют следующий смысл: β — угол скольжения, ψ — угол рыскания (курса), ω_y — угловая скорость рыскания, γ — угол крена, ω_x — угловая скорость крена, δ_n — угол отклонения руля направления, δ_e — угол отклонения элеронов.

Для самолета, имеющего вес $G_0 = 45000$ кг, летящего на высоте $h_0 = 9000$ м со скоростью $V_0 = 800$ км/час, типичны следующие значения коэффициентов системы:

$$\begin{aligned} \frac{Z^\beta}{m_0 V_0} &= -0.0297, & \frac{M_y^{\delta_n}}{I_y} &= 0.379, & \frac{M_x^{\delta_e}}{I_x} &= 1.580, \\ \frac{M_x^\beta}{I_x} &= -1.17, & \frac{M_x^{\omega_x}}{I_x} &= -0.790, & \frac{M_x^{\omega_y}}{I_x} &= 0.129, \\ \frac{M_y^\beta}{I_y} &= 0.379, & \frac{M_y^{\omega_x}}{I_y} &= -0.0125, & \frac{M_y^{\omega_y}}{I_y} &= -0.0096, \\ \frac{g}{V_0} &= 0.0438, & \frac{I_{xy}}{I_y} &= -0.0423, & \frac{I_{xy}}{I_x} &= -0.106. \end{aligned}$$

Здесь M_x^y обозначает соответствующую частную производную $\frac{\partial M_x}{\partial y}$.



Представим рассматриваемую систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,17 & -0,790 & 0,129 & 0 & 0 \\ 0,379 & -0,0125 & -0,0096 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,106\dot{\omega}_y + 1,580\delta_e \\ -0,0423\dot{\omega}_x + 0,379\delta_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В качестве стабилизирующего управления принимается следующее

$$\begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,317 & 0,069 & 1,01 & 0,076 & 0,551 \\ 0,177 & 0,737 & 0,388 & 1,03 & 0,834 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (14) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,106 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0423 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,4496 & -1,9544 & -0,4840 & -1,6274 & -1,3177 \\ 0,2589 & -0,0387 & -0,3924 & -0,0288 & -0,2088 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,4838 & -1,9592 & -0,4444 & -1,6316 & -1,3014 \\ 0,3216 & 0,0442 & -0,3735 & 0,0402 & -0,1538 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Таким образом получена система дифференциальных уравнений, описывающая устойчивое боковое движение. На основе полученной системы поставим задачу фильтрации бокового движения группы самолетов. Рассмотрим боковое движение группы из 6-ти самолетов при наличии случайных возмущений. Движение рассматриваемого объекта может быть описано следующим матричным дифференциальным уравнением:

$$dX_t = AX_t dt + b dw_t,$$

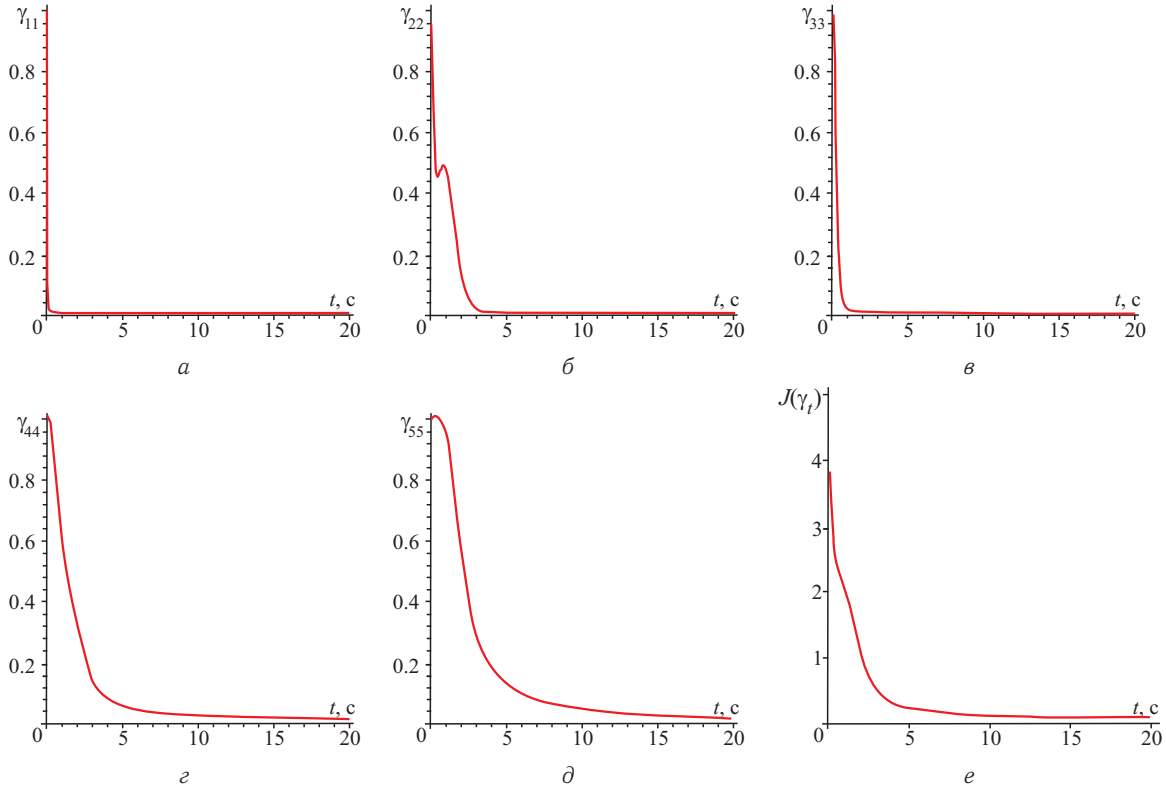
где $X - [5 \times 6]$, $A = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,4838 & -1,9592 & -0,4444 & -1,6316 & -1,3014 \\ 0,3216 & 0,0442 & -0,3735 & 0,0402 & -0,1538 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Матрицы, характеризующие наблюдение, полагаем известными (наблюдение ведется по первой строке матрицы X , т. е. по углу скольжения каждого самолета):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix}.$$



В условии задачи никаких реальных данных по ограничениям на управление нет, поэтому рассматривать их не будем. При таких условиях будем минимизировать средний квадрат ошибки, т.е. следующий функционал $J(\gamma_t) = \mathbf{Sp}(\gamma_T)$. На рисунке, *a–e* приведены результаты, полученные после применения оптимального матричного фильтра указанного типа для подавления случайных воздействий. Они свидетельствуют о высоком качестве фильтрации.



Графики γ_{ii} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) и $J(\gamma_t)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Матричные подходы к фильтрации случайных воздействий позволяют проводить одновременную фильтрацию большого числа динамических объектов. Реализация матричных подходов позволяет существенно снизить вычислительные затраты в сравнении с решением аналогичных задач векторными подходами.

Одним из главных достоинств представленных фильтров является их физическая реализуемость (имеется возможность учета ограничений на управление, что, как правило, имеет место в технических задачах).

В дальнейших работах будут показаны более сложные матричные уравнения, характеризующие взаимодействие рассматриваемых объектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00752).

Библиографический список

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). Теория вероятностей и математическая статистика. Т. 15. М. : Наука, 1974. 696 с.
2. Приставко В. Т. Матричные модели управления / НИИ химии СПбГУ. СПб., 2001. 255 с.
3. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М. : Наука, 1975. 495 с.
4. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М. : Мир, 1972. 544 с.



Optimal Filtration of Matrix Gaussian Random Processes in Planes Lateral Motion Problem

A. Yu. Litvin, V. T. Pristavko

Saint-Petersburg State University, Russia, 199034, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9, alybey@mail.ru, pvt1@yandex.ru

In practice, observation problem is more complex because of random influences (noises): wind effects plane course, sensor errors distort object position view. In order to reduce noise filters are used. Proposed to carry out a simultaneous filtering of identical objects motion by defining problem in matrix variables. To achieve physical realizability controlled matrix filter was proposed. Statements that allow to find the optimal solution was proved.

Key words: matrix filtration, n -covariance matrix, square-law functional.

References

1. Lipcer R. S., Sirjaev A. N. *Statistika sluchainykh protsessov (nelineinaya filtratsiya i smezhnye voprosy)* [Statistics of random processes (Nonlinear filtering and related problems)]. Probability Theory and Mathematical Statistics, vol. 15. Moscow, Nauka, 1974, 696 pp. (in Russian).
2. Pristavko V. T. *Matpichnye modeli upravleniia* [Matrix control models]. St. Petersburg, 2001, 255 p. (in Russian).
3. Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniia* [Lectures in control theory]. Moscow, Nauka, 1975. 495 pp. (in Russian).
4. Bryson A. E., Jr., Ho Yu-Chi. *Applied Optimal Control*. London, Waltham, Blaisdell Publ. Co., 1969. [Rus. ed.: Braison A., Kho Yu-Shi. *Prikladnaia teoriia optimal'nogo upravleniia*. Moscow, Mir, 1972, 544 p.]



ИНФОРМАТИКА

УДК 519.681.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛОВ

М. В. Давидович¹, П. А. Шиловский², Д. К. Андрейченко³

¹ Доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, DavidovichMV@info.sgu.ru

² Аспирант кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ShilovskyPA@info.sgu.ru

³ Доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, AndreichenkoDK@info.sgu.ru

В работе рассматриваются возможности использования технологий параллельных вычислений Message Passing Interface и Open Computing Language при моделировании металлических фотонных кристаллов методом функций Грина и интегральных уравнений. Анализируется эффективность этих технологий в рамках данной задачи, приводятся выводы о целесообразности их применения.

Ключевые слова: параллельные вычисления, MPI, OpenCL, фотонные кристаллы.

ВВЕДЕНИЕ

Металлические фотонные кристаллы (МФК) в приближении идеальной проводимости металлических объектов широко исследовались последние три десятилетия [1–7]. Для анализа МФК используются аналитические [1–3, 5], прямые численные [4] и численно-аналитические методы [5–7], основанные на методе функций Грина и интегральных уравнений. Последние позволяют получить дисперсионные уравнения (ДУ) в замкнутой форме в приближении тонких проволочных включений и с учетом одной или нескольких гармоник тока. Решение таких дисперсионных уравнений требует большое количество вычислений, что делает практически невозможным получение результатов моделирования за адекватное время традиционными последовательными способами. Поэтому актуальным становится модификация существующих или разработка новых методов для запуска на вычислительных системах с использованием различных технологий параллельных вычислений. В рамках данной статьи будут рассмотрены различные аспекты использования технологий Message Passing Interface (MPI) и Open Computing Language (OpenCL) при моделировании МФК. Цель работы — проанализировать эффективность использования технологий параллельных вычислений MPI и OpenCL при моделировании металлических фотонных кристаллов.

1. ОБЗОР ТЕХНОЛОГИИ MPI

Message Passing Interface — это спецификация для написания библиотек передачи сообщений, разработанная как стандарт для систем с распределённой памятью, систем передачи сообщений и параллельных вычислений. MPI основан на модели передачи сообщений, в которой данные из адресного пространства одного процесса передаются в адресное пространство другого процесса посредством передачи сообщений.

Программная модель MPI представлена следующими элементами.

- Группы процессов. Каждая группа определяет упорядоченную коллекцию процессов и область видимости при операциях взаимодействия.
- Коммуникаторы. Объекты данного типа предоставляют все операции взаимодействия в MPI. Каждый процесс для коммуникатора имеет свой независимый номер, и все процессы составляют упорядоченную топологию. Коммуникаторы делятся на два типа:
 - интра-коммуникаторы. Обеспечивают взаимодействие между процессами из одной группы.
 - интер-коммуникаторы. Обеспечивают взаимодействие между двумя группами процессов.
- Точка-точка операции. Осуществляют взаимодействие между двумя процессами из одной группы. Часто используемым примером является вызов MPI_Send, который позволяет внутри одной группы передать данные одного процесса другому.



- Коллективные операции. Осуществляют взаимодействие среди всех процессов в группе. Типичным примером является вызов `MPI_Bcast`, который берёт данные из одного процесса и отправляет их всем остальным процессам из той же группы.
- Типизация операций. Многие операции в MPI требуют, чтобы был указан тип передаваемых данных. Хотя стандартом MPI определены некоторые типы данных (`MPI_INT`, `MPI_DOUBLE` и т. д.), возможно создавать свои собственные типы и использовать их для передачи в сообщениях [8, 9].

2. ОБЗОР ТЕХНОЛОГИИ OPENCL

Open Computing Language — это промышленный открытый стандарт программирования под различные платформы, в том числе центральные и графические процессоры. Он включает в себя язык программирования, интерфейс программирования приложений, библиотеки и системное окружение для разработки программного обеспечения.

Для описания стандарта используют иерархию следующих моделей.

- Модель платформы. Состоит из хоста (запускающего устройства), на котором расположено одно или несколько OpenCL-совместимых устройств. Каждое из таких устройств разделено на выполняющие модули, состоящие из элементов обработки, производящих вычисления.
- Модель выполнения. Выполнение разделено на две части:
 - хост-программа. Задаёт контекст выполнения вместе с индексным пространством OpenCL программы (ядра);
 - ядро. Выполняется непосредственно на OpenCL устройстве. Каждому элементу индексного пространства сопоставляется свой экземпляр ядра — рабочего элемента, выполняющегося на элементе обработки устройства. Рабочие элементы объединяются в группы.
- Модель памяти. Каждый рабочий элемент имеет доступ к четырём областям памяти:
 - глобальная память. Предоставляет доступ на чтение и запись для всех рабочих элементов из всех групп;
 - постоянная память. Остаётся постоянной в течение всего времени выполнения ядра;
 - локальная память. Разделяется внутри одной группы рабочих элементов и доступна на чтение и запись;
 - личная память. Относится к одному рабочему элементу и не доступна для остальных.
- Программная модель. Поддерживаются следующие программные модели:
 - модель параллельных данных. Определяет вычисление в виде последовательности инструкций, применённых к нескольким элементам объекта памяти. Индексное пространство, связанное с выполнением OpenCL программы, определяет рабочие элементы и соотношение данных с ними;
 - модель параллельных заданий. Определяет процесс вычисления, при котором каждый экземпляр ядра выполняется независимо от индексного пространства [10].

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ МФК

Рассмотрим трехмерный МФК, состоящий из металлических проволочных стержней с длиной l и радиусом проволочек r , периодически расположенных по осям x , y , z , с периодами соответственно a , b и c в среде (матрице) с диэлектрической проницаемостью ε . Проволочки считаем тонкими: $r \ll l$, $l < \min(a, b, c)$ и ориентированными по оси z . Согласно модели ток течет только по оси проволочки, а его плотность имеет вид

$$\mathbf{J} = \mathbf{z}_0 \delta(x) \delta(y) \sum_{s=1}^N I_s \cos(k_s z), \quad (15)$$

где \mathbf{z}_0 — орт-вектор оси z , N — количество учитываемых гармоник тока, $k_s = (2s - 1)\pi/l$.

Для МФК будем использовать скалярную ФГ периодически расположенных сфазированных источников (периодическую ФГ) [5]. Плотность тока (15) создаёт только одну z компоненту вектор-потенциала A_z , через которую можно выразить электрическое и магнитное поля. Для первого имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{\text{grad}(\text{div}) + k_0^2 \varepsilon}{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{z}_0 A_z. \quad (16)$$



Далее нам потребуется только компонента E_z электрического поля, так как только для нее следует учитывать граничные условия. После интегрирования (15) с ФГ получаем A_z , что согласно (16) дает

$$E_z = \frac{2}{iw\varepsilon_0\varepsilon abc} \sum_{s=1}^N (-1)^s I_s k_s \sum_{m,n,k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{k_z k l}{2}\right) \frac{(k_0^2 \varepsilon - k_{zk}^2) \exp(-i[k_{xm}x + k_{yn}y + k_{zk}z])}{(k_{kz}^2 - k_s^2)(k_{xm}^2 + k_{yn}^2 + k_{zk}^2 - k_0^2 \varepsilon)}. \quad (17)$$

Компонента (17) должна обратиться в нуль на поверхности проволоочки. Применяя метод Галеркина, имеем:

$$\int_{-l/2}^{l/2} E_z(x, y, z) \cos(k_{s'} z) dz = 0. \quad (18)$$

В (18) точка (x, y) принадлежит окружности: $x^2 + y^2 = r^2$. Целесообразно усреднить по всем точкам окружности, записав $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$ и проинтегрировав по углу. При этом возникают функции Бесселя:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\pm ir(k_{xm} \cos(\varphi) + k_{yn} \sin(\varphi))) d\varphi = J_0(r \sqrt{k_{xm}^2 + k_{yn}^2}),$$

вместо экспонент получим:

$$a_{mn}(k_x, k_y) = J_0(r \sqrt{k_{xm}^2 + k_{yn}^2}). \quad (19)$$

Соотношения (17) и (18) приводят к системе линейных алгебраических уравнений, определитель которой Δ должен быть равен нулю. Собственно,

$$F(k_0, \mathbf{k}) = \Delta = 0$$

и есть искомое ДУ. Теперь матричные элементы согласно (18) и (19) можно записать так:

$$E_{ss'} = \frac{4k_s k_{s'}}{iw\varepsilon_0\varepsilon abc} (-1)^{s+s'} \sum_{m,n,k=-M}^M \cos^2\left(\frac{k_z k l}{2}\right) \frac{(k_0^2 \varepsilon - k_{zk}^2) a_{mn}(k_x, k_y)}{(k_{kz}^2 - k_s^2)(k_{kz}^2 - k_{s'}^2)(k_{xm}^2 + k_{yn}^2 + k_{zk}^2 - k_0^2 \varepsilon)},$$

где $(M+1)^3$ — количество учитываемых плоских волн (пространственных гармоник).

Решая ДУ, получим зонные диаграммы, на основе которых можно выразить диэлектрическую проницаемость. Данный метод может быть модифицирован для решения кольцевых и квадратных проволоочных структур, что позволяет рассчитывать различные конфигурации МФК.

4. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Процесс решения ДУ представляет собой разбиение области поиска корня на участки и поиска такого участка, на котором функция $F(k_0, \mathbf{k})$ меняет знак. Заметим, что наличие полюсов при смене знака в знаменателе (17) делает применение более эффективных методов поиска нецелесообразным. В связи с этим возможно распараллеливание вычислений, при котором каждому процессу отдаётся своя область поиска. В данном случае удобно использовать технологию MPI.

Для расчёта была взята структура со следующими входными параметрами: $l = 0.5$, $r = 0.05$, $a = b = c = 1$, $M = 10$, $N = 1$, $k_z = 0$, область поиска k_0 — от 0.1 до 6.2 с шагом 0.005. Значения k_x и k_y взяты из диапазона между точек $M(\pi/a, \pi/b)$, $G(0, 0)$, $X(\pi/a, 0)$, $M(\pi/a, \pi/b)$ по 10 значений из каждого отрезка.

В роли параллельной вычислительной системы выступала связка из трёх машин с двумя четырёхъядерными процессорами Intel Xeon E5345 @ 2.33ГГц на каждой — всего 24 ядра. Была использована широко известная реализация стандарта MPI – MPICH2 [11]. Вычисления проводились в числах с плавающей точкой двойной точности, учитывалось среднее из трёх запусков.

Для конфигураций с различным числом работающих процессов в табл. 1 приведены величины времени выполнения в секундах и ускорения в сравнении с последовательным вариантом. Для сохранения точности данные приведены с учётом сотых долей.



Как можно видеть из результатов, конфигурация с 24 работающими процессами справляется с аналогичной задачей в 21.94 раза быстрее, чем последовательный вариант, что лишь на 8,6% меньше, чем максимально возможные показатели. Конечно, рост величины ускорения будет замедляться с дальнейшим увеличением количества процессов из-за возрастания нагрузки на сеть. В нашем случае процессы лишь обмениваются итоговыми результатами для каждого k_x и k_y , что делает нагрузку на сеть минимальной. Таким образом, использование технологии MPI оправданно в задаче поиска корня при решении ДУ.

Далее заметим, что при решении ДУ требуется вычисление суммы тройного ряда для каждого матричного элемента. Здесь целесообразно применить параллельные вычисления. Для расчёта суммы ряда была применена технология OpenCL.

В качестве вычислительной системы выступала связка из двухъядерного процессора Intel Pentium E2140 @ 2.81 ГГц и графического ускорителя AMD Radeon HD 6950, поддерживающего технологию OpenCL (E2140 + HD6950). Входные данные были взяты из предыдущего примера.

Для проверки эффективности данной технологии была получена зависимость времени выполнения от размерности рядов. Для сравнения были приведены измерения для 24-ядерной вычислительной системы, рассмотренной выше ($6 \times E5345$). Полученные значения для наглядности округлены до целых секунд. Результаты представлены в табл. 2.

По результатам видно, что при использовании графического ускорителя и технологии OpenCL время вычислений растёт медленнее, чем размерность ряда. Особенно это заметно в лёгких режимах, где основную роль на себя берут накладные расходы, связанные с переключением контекста между центральным процессором и графическим ускорителем. В случае же 24-ядерной системы можно наблюдать практически линейное увеличение времени вычислений при увеличении размерности рядов.

Рассмотрим абсолютные показатели обеих конфигураций. В лёгких режимах, где велика роль накладных расходов на выполнение OpenCL приложения, система на базе графического ускорителя серьёзно проигрывает системе из 24 ядер. В тяжёлых режимах наблюдается обратная ситуация. В самом ресурсоёмком случае, при количестве элементов ряда, равном 1030301, применение технологии OpenCL и рядового графического ускорителя даже при маломощном центральном процессоре позволило добиться выигрыша в скорости более чем в 3 раза. Таким образом, можно сделать вывод, что технологию OpenCL с данным графическим ускорителем выгодно использовать при расчёте рядов достаточно большой размерности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения данной работы была доказана эффективность использования технологий параллельных вычислений MPI и OpenCL в решении задачи моделирования металлических фотонных кристаллов. Данные технологии позволяют существенно сократить время вычислений, что делает их применение целесообразным.

Библиографический список

1. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J. Youngs I. Extremely low frequency plasmons in metallic meso structures // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 4773–4776.
2. Sievenpiper D. F., Sickmiller M. E., Yablonovitch E. 3D wire mesh photonic crystals // Phys. Rev. Lett. 1996, Vol. 76. P. 2480–2483.
3. Simovski C. R., Belov P. A. Low-frequency spatial dispersion in wire media // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 046616(1–8).
4. Zhao Y., Belov P. A., Hao Y. Modelling of wave propagation in wire media using spatially dispersive finite-difference time-domain method : numerical aspects // IEEE Trans. 2007. Vol. AP-55, № 6. P. 1506–1513.

Таблица 1

Зависимость времени выполнения и ускорения от числа работающих процессов

Число процессов	Время, с	Ускорение
1	117,38	1
4	29,44	3,99
8	14,82	7,92
12	9,96	11,78
16	7,67	15,30
20	6,21	18,90
24	5,35	21,94

Таблица 2

Зависимость времени выполнения от размерности рядов

Размерность ряда	$6 \times E5345$ время, с	$E2140 + HD6950$ время, с
9261	5	48
68921	44	52
226981	151	77
531441	355	120
1030301	693	198



5. Давидович М. В. Фотонные кристаллы: функции Грина, интегродифференциальные уравнения, результаты моделирования // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 2. С. 150–163.
6. Давидович М. В., Стефюк Ю. В., Шиловский П. А. Металлические проволочные фотонные кристаллы. Анализ электрофизических свойств // ЖТФ. 2012. Т. 82, вып. 3. С. 7–14.
7. Давидович М. В., Стефюк Ю. В., Шиловский П. А., Явчуновская С. В. Материальные параметры металлических проволочных фотонных кристаллов // Излучение и рассеяние электромагнитных волн ИРЭМВ-2011 : тр. конф. Таганрог, 2011. С. 246–250.
8. Shilovsky P., Atmakin D., Khvatov I. Using message passing interface technology for solving mathematical physics problems on parallel calculating systems // Presenting Academic Achievements to the World. Saratov, 2010. P. 125–129.
9. Message Passing Interface Forum. MPI: A Message Passing Interface Standard. Version 2.2. URL: <http://www.mpi-forum.org/docs/mpi-2.2/mpi22-report.pdf> (дата обращения: 14.05.2012).
10. The OpenCL specification. Version 1.2. URL: <http://www.khronos.org/registry/cl/specs/opencl-1.2.pdf> (дата обращения: 14.05.2012).
11. Gropp W., Lusk E., Doss N., Skjellum A. A high-performance, portable implementation of the MPI message passing interface standard. // Parallel Computing. 1996, September. Vol. 22, № 6. P. 789–828.

Using Parallel Computing Technologies for Modeling of Metallic Photonic Crystals

M. V. Davidovich, P. A. Shilovsky, D. K. Andreichenko

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, DavidovichMV@info.sgu.ru, ShilovskyPA@info.sgu.ru, AndreichenkoDK@info.sgu.ru

This article presents opportunities of using parallel computing technologies Message Passing Interface and Open Computing Language for modeling of metallic photonic crystals with the method of Green's functions and integral equations. The efficiency of these technologies is analyzed and the results are presented.

Key words: parallel computing, MPI, OpenCL, photonic crystals.

References

1. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J., Youngs I. Extremely low frequency plasmons in metallic meso structures. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 4773–4776.
2. Sievenpiper D. F., Sickmiller M. E., Yablonovitch E. 3D wire mesh photonic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 2480–2483.
3. Simovski C. R., Belov P. A. Low-frequency spatial dispersion in wire media. *Phys. Rev. E.*, 2004, vol. 70, pp. 046616(1–8).
4. Zhao Y., Belov P. A., Hao Y. Modelling of wave propagation in wire media using spatially dispersive finite-difference time-domain method : numerical aspects. *IEEE Trans.*, 2007, vol. AP-55, no. 6, pp. 1506–1513.
5. Davidovich M. V. Photonic crystals : Green's functions, integro-differential equations and simulation results. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2006, vol. 49, Issue 2, pp. 150–163.
6. Davidovich M. V., Stephuk J. V., Shilovskii P. A. Electrophysical properties of metallic wire photonic crystals. *Technical Physics*, 2012, vol. 57, iss. 3, pp. 320–327.
7. Davidovich M. V., Stephuk J. V., Shilovsky P. A., Yavchunovskaya S. V. Material'nye parametry metallicheskih provolochnykh fotonnykh kristallov [Material parameters of metallic wire photonic crystals]. *Izluchenie i rasseianie elektromagnitnykh voln IREMV-2011 : tr. konf.* [Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves RSEMW-2011: Proc. conf.]. Taganrog, 2011, pp. 246–250.
8. Shilovsky P., Atmakin D., Khvatov I. Using message passing interface technology for solving mathematical physics problems on parallel calculating systems. *Presenting Academic Achievements to the World*, Saratov, 2010, pp. 125–129.
9. Message Passing Interface Forum. MPI : A Message Passing Interface Standard. Version 2.2. Available at: <http://www.mpi-forum.org/docs/mpi-2.2/mpi22-report.pdf> (accessed 14 May 2012).
10. The OpenCL specification. Version 1.2. Available at: <http://www.khronos.org/registry/cl/specs/opencl-1.2.pdf> (accessed 14 May 2012).
11. Gropp W., Lusk E., Doss N., Skjellum A. A high-performance, portable implementation of the MPI message passing interface standard. *Parallel Computing*, 1996, September, vol. 22, no. 6, pp. 789–828.



УДК 519.95

УПОРЯДОЧЕННЫЕ АВТОМАТЫ И ТОЛЕРАНТНЫЕ ОБРАЗЫ КДА

И. П. Мангушева

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, MangushevalP@info.sgu.ru

Рассматривается конечный детерминированный автомат (КДА), множества состояний, входных и выходных символов которого частично упорядочены (упорядоченный автомат). Определяется отображение КДА на упорядоченный автомат, названное p -морфизмом. Показано что так называемые толерантные образы, построенные по отношению стабильной толерантности на множестве состояний КДА, являются частным случаем упорядоченных автоматов, связанных с исходным p -морфизмом. Определяются необходимые и достаточные условия, при которых упорядоченный автомат является толерантным образом заданного автомата.

Ключевые слова: конечный детерминированный автомат, толерантный образ, упорядоченный автомат, стабильная толерантность, покрытие, частичный порядок.

1. СТАБИЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В АВТОМАТАХ. КВАЗИФАКТОРИЗАЦИЯ. МОРФИЗМЫ ПО ТОЛЕРАНТНОСТЯМ

В данном параграфе в краткой форме приведен материал из [1], на базе которого проводится исследование.

Пусть S — непустое множество. Любое подмножество $\rho \subseteq S \times S$, где $S \times S$ — декартов квадрат множества S , называется *бинарным отношением* на множестве S .

Бинарное отношение ρ на множестве S называется:

- 1) *рефлексивным*, если $(\forall s \in S) ((s, s) \in \rho)$,
- 2) *симметричным*, если $(\forall s_1, s_2 \in S) ((s_1, s_2) \in \rho \rightarrow (s_2, s_1) \in \rho)$,
- 3) *транзитивным*, если $(\forall s_1, s_2, s_3 \in S) ((s_1, s_2) \in \rho \& (s_2, s_1) \in \rho \rightarrow (s_1, s_3) \in \rho)$.

Бинарное отношение, обладающее свойствами 1, 2 и 3 одновременно, называется *отношением эквивалентности* и обычно обозначается через ε . Если отношение обладает свойствами 1 и 2, то оно называется *отношением толерантности* и обычно обозначается через τ .

Бинарное отношение $\rho \subseteq S \times S$ называется *антисимметричным*, если

$$(\forall s_1, s_2 \in S) ((s_1, s_2) \in \rho \& (s_2, s_1) \in \rho \rightarrow s_1 = s_2).$$

Отношение ρ на множестве S называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Отношение порядка на произвольном множестве S обычно обозначается знаком \leq . Если S — непустое множество, а \leq — отношение порядка на нем, то пара (S, \leq) называется *упорядоченным (или частично упорядоченным) множеством*.

Множество S с заданным на нем отношением толерантности τ называется *пространством толерантности* и обозначается $\langle S, \tau \rangle$.

Покрытием множества S называется совокупность непустых подмножеств этого множества, объединение которых совпадает с S .

Множество $L \subseteq S$ называется *предклассом* в $\langle S, \tau \rangle$ (или τ -предклассом), если любые два его элемента s и t толерантны (т. е. находятся в отношении толерантности τ).

Множество $B \subseteq S$ называется *классом толерантности* в $\langle S, \tau \rangle$ (или τ -классом), если B есть максимальный предкласс. Множество всех классов толерантности отношения толерантности τ образует покрытие базового множества. Далее покрытие множества S всеми классами толерантности τ будем обозначать B_τ .

Утверждение 1 [2]. Пусть τ — отношение толерантности на множестве S . Тогда для любых двух элементов, находящихся в отношении τ , существует, по крайней мере, один содержащий их τ -класс.

Следствие. Пусть B_1, B_2, \dots, B_m — всевозможные классы толерантности τ . Тогда

$$\tau = \bigcup_{i=1}^m (B_i \times B_i).$$

Через $T(S)$ будем обозначать множество всех толерантностей произвольного множества S .



Рассмотрим конечный детерминированный автомат Мили [2, 3] $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y — конечные алфавиты состояний, входных и выходных символов соответственно, а $\delta : S \times X \rightarrow S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ — функция выходов.

Отношение μ на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ назовем *стабильным*, если

$$(\forall s_1, s_2 \in S) (\forall x \in X) ((s_1, s_2) \in \mu \rightarrow (\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \mu). \quad (1)$$

Особый интерес представляют отношения толерантности, обладающие свойствами стабильности. Они называются *стабильными толерантностями*.

С толерантностью τ однозначно связано покрытие множества $B_\tau = \{B_i\}$, где B_i — классы покрытия B_τ .

Это покрытие обладает свойством:

$$(\forall B_i) (\forall x \in X) (\exists B_j) (\{\delta(s, x)\}_{s \in B_i} \subseteq B_j). \quad (2)$$

Это означает, что функция переходов под действием любого входного символа переводит все элементы одного и того же класса покрытия целиком в другой класс.

Множество стабильных толерантностей автомата A обозначается $ST(A)$.

Пусть B_τ, C_ρ, D_ξ — покрытия классами в пространствах толерантностей $\langle S, \tau \rangle, \langle X, \rho \rangle, \langle Y, \xi \rangle$ соответственно.

Рассмотрим процедуру построения автомата по заданной тройке толерантностей (τ, ρ, ξ) и покрытиям B_τ, C_ρ, D_ξ .

Пусть $B_\tau = \{B_i\}, C_\rho = \{C_j\}, D_\xi = \{D_k\}$. Введем обозначения: $s_\tau = \bigcap \{B_i | s \in B_i\}$ — пересечение всех классов покрытия B_τ , содержащих элемент s , $x_\rho = \bigcap \{C_j | x \in C_j\}$, $y_\xi = \bigcap \{D_k | y \in D_k\}$. Через S/τ будем обозначать множество классов покрытия B_τ , построенного по толерантности τ , и их всевозможных непустых пересечений. Аналогично через X/ρ обозначим классы и их всевозможные непустые пересечения из C_ρ , а через Y/ξ — классы и их непустые пересечения из D_ξ .

Рассмотрим три отображения:

$$\varphi'_\tau : S \rightarrow S/\tau, \quad \varphi'_\tau(s) = s_\tau, \quad (3)$$

$$\psi'_\rho : X \rightarrow X/\rho, \quad \psi'_\rho(x) = x_\rho, \quad (4)$$

$$\theta'_\xi : Y \rightarrow Y/\xi, \quad \theta'_\xi(y) = y_\xi. \quad (5)$$

Пусть Q и G обозначают элементы множества S/τ и X/ρ соответственно, т. е. $Q = B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}$, $G = C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_l}$.

Определим функции δ', λ' следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta' : S/\tau \times X/\rho &\rightarrow S/\tau, \\ \delta'(Q, G) &= \bigcap \left\{ B_i | B_i \supseteq \left\{ \delta(s, x) \right\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right\} = \left(\left\{ \delta(s, x) \right\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\tau \end{aligned} \quad (6)$$

— пересечение всех классов покрытия B_τ , содержащих множество $\left\{ \delta(s, x) \right\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}}$;

$$\begin{aligned} \lambda' : S/\tau \times X/\rho &\rightarrow Y/\xi, \\ \lambda'(Q, G) &= \left(\left\{ \lambda(s, x) \right\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Элементами множеств $S/\tau, X/\rho$ и Y/ξ являются подмножества множеств S, X и Y соответственно, поэтому на $S/\tau, X/\rho$ и Y/ξ существует частичный порядок по включению.

Рассмотрим автомат $A' = (S/\tau, X/\rho, Y/\xi, \delta', \lambda')$. Процедура его построения называется *квазифакторизацией*, а автомат A' — *квазифактор-автоматом*. Его также обозначают $A_{\tau, \rho, \xi}$. Таким образом, содержательно квазифактор-автомат — это автомат, «работающий» на классах покрытий B_τ, C_ρ, D_ξ и их пересечениях.

Анализируя шаги процедуры квазифакторизации, следует выделить момент, заслуживающий особого внимания. При определении функций δ' и λ' по формулам (6) и (7) может оказаться, что множество $\left\{ \delta(s, x) \right\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}}$ или $\left\{ \lambda(s, x) \right\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}}$ не покрывается целиком ни одним классом соответствующих



покрытий. В результате получается, что функции δ' и λ' не определены. Теорема 1 описывает условия корректности процедуры.

Лемма 1. Для произвольного покрытия $B = \{B_i\}$ произвольного множества Z и произвольных непустых подмножеств $Z_1, Z_2 \subseteq Z$, где $Z_1 \subseteq Z_2$, справедливо

$$\bigcap \{B_i | B_i \supseteq Z_1\} \subseteq \bigcap \{B_i | B_i \supseteq Z_2\},$$

если Z_2 покрывается хотя бы одним классом покрытия B .

Пусть τ — стабильная толерантность на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, $\tau \in ST(A)$.

Построим отношение $\rho(\tau)$ на X по заданной стабильной толерантности τ и отношение $\xi(\tau, \rho)$ на Y по τ и заданному отношению толерантности ρ на X соответственно согласно (8), (9):

$$(x_1, x_2) \in \rho(\tau) \leftrightarrow (\forall s_1, s_2 \in S) ((s_1, s_2) \in \tau \rightarrow (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau), \quad (8)$$

$$(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho) \leftrightarrow (\exists (s_1, s_2) \in \tau) (\exists (x_1, x_2) \in \rho) (y_1 = \lambda(s_1, x_1) \& y_2 = \lambda(s_2, x_2)). \quad (9)$$

В [1] показано, что $\rho(\tau)$ и $\xi(\tau, \rho)$ — толерантности.

Теорема 1. Процедура квазифакторизации для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ по заданным толеранностям τ, ρ и ξ на множествах S, X и Y соответственно корректна (функции переходов и выходов квазифактор-автомата $A_{\tau, \rho, \xi}$ определены) тогда и только тогда, когда $\tau \in ST(A)$, $\rho \subseteq \rho(\tau)$, $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$.

Отображение $\theta : P \rightarrow Q$, где P, Q — частично упорядоченные множества, называется *изотонным*, или сохраняющим порядок, если

$$(\forall x, y \in P) (x \leq y \rightarrow \theta(x) \leq \theta(y)). \quad (10)$$

Изотонное отображение, допускающее изотонное обратное отображение, называется *изоморфизмом*. Другими словами, изоморфизм между двумя частично упорядоченными множествами есть взаимно-однозначное соответствие между ними, которое удовлетворяет условию (10) и условию

$$(\forall x, y \in P) (\theta(x) \leq \theta(y) \rightarrow x \leq y). \quad (11)$$

Свойство (11) называется *обратной изотонностью* отображения θ .

Теорема 2. Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Для квазифактор-автомата $A_{\tau, \rho, \xi}$ автомата A , определяемого соотношениями (3)–(7), в котором τ, ρ, ξ удовлетворяют теореме 1, для любых $s \in S$ и $x \in X$ справедливо

$$\varphi'(\delta(s, x)) \subseteq \delta'(\varphi'(s), \psi'(x)), \quad (12)$$

$$\theta'(\lambda(s, x)) \subseteq \lambda'(\varphi'(s), \psi'(x)). \quad (13)$$

Теорема 3. Для произвольного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ функции переходов и выходов его квазифактор-автомата $A_{\tau, \rho, \xi} = (S/\tau, X/\rho, Y/\xi, \delta', \lambda')$ изотонны, т. е.

$$\begin{aligned} & (\forall Q_1, Q_2 \in S/\tau) (\forall G_1, G_2 \in X/\rho) (Q_1 \subseteq Q_2 \& G_1 \subseteq G_2 \rightarrow \\ & \rightarrow \delta'(Q_1, G_1) \subseteq \delta'(Q_2, G_2) \& \lambda'(Q_1, G_1) \subseteq \lambda'(Q_2, G_2)). \end{aligned}$$

Автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ будем называть *упорядоченным*, если каждое из множеств S, X, Y частично упорядочено.

Пусть дан упорядоченный автомат $A = (S_A, X_A, Y_A, \delta_A, \lambda_A)$. Упорядоченный автомат $B = (S_B, X_B, Y_B, \delta_B, \lambda_B)$ назовем *изоморфным* автомату A , если существует тройка взаимно-однозначных сюръективных отображений (φ, ψ, θ) , где $\varphi : S_A \rightarrow S_B$, $\psi : X_A \rightarrow X_B$, $\theta : Y_A \rightarrow Y_B$, такая, что для любых $s \in S, x \in X$

$$\varphi(\delta_A(s, x)) = \delta_B(\varphi(s), \psi(x)), \quad \theta(\lambda_A(s, x)) = \lambda_B(\varphi(s), \psi(x)),$$

причем каждое из отображений φ, ψ, θ есть изоморфизм соответствующих частично упорядоченных множеств.

Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Упорядоченный автомат $\tilde{A} = (\tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$ назовем *толерантным образом* A , если он изоморфен некоторому квазифактор-автомату автомата A .



Пусть $(\varphi', \psi', \theta')$ — отображения, определяемые (3)–(5) в процедуре квазифакторизации, автомата A в квазифактор-автомат A' , $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})$ — изоморфизм A' на некоторый толерантный образ \tilde{A} . Тогда тройку отображений $(\varphi, \psi, \theta) = (\tilde{\varphi} \cdot \varphi', \tilde{\psi} \cdot \psi', \tilde{\theta} \cdot \theta')$, где $(\tilde{\varphi} \cdot \varphi')(s) = \tilde{\varphi}(\varphi'(s))$, $\psi(x) = \tilde{\psi}(\psi'(x))$, $\theta(y) = \tilde{\theta}(\theta'(y))$, назовем *морфизмом по стабильной толерантности* автомата A в автомат \tilde{A} .

Следующие теоремы распространяют свойства квазифактор-автоматов на толерантные образы.

Теорема 4. Пусть (φ, ψ, θ) — морфизм по стабильной толерантности автомата A в автомат \tilde{A} , тогда для любых $s \in S$, $x \in X$

$$\varphi(\delta(s, x)) \leq \tilde{\delta}(\varphi(s), \psi(x)), \quad \theta(\lambda(s, x)) \leq \tilde{\lambda}(\varphi(s), \psi(x)).$$

Теорема 5. Для произвольного автомата A функции переходов и выходов его толерантного образа $\tilde{A} = (\tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$ изотонны, т. е.

$$(\forall x, x' \in \tilde{X}) (\forall s, s' \in \tilde{S}) (s \leq s' \& x \leq x' \rightarrow \tilde{\delta}(s, x) \leq \tilde{\delta}(s', x') \& \tilde{\lambda}(s, x) \leq \tilde{\lambda}(s', x')).$$

2. P-МОРФИЗМЫ И ТОЛЕРАНТНЫЕ ОБРАЗЫ

Пусть (Z, \leq) — частично упорядоченное множество, $z, z' \in Z$. Элемент $d \in Z$ называется нижней границей, или *пересечением*, или наибольшей нижней гранью z и z' (обозначение: $d = z \wedge z'$), если $d \leq z$, $d \leq z'$ и для любых $x \in Z$ из $x \leq z$ и $x \leq z'$ следует, что $x \leq d$.

Элемент $g \in Z$ называется *верхней границей*, или *объединением*, или наименьшей верхней гранью z и z' (обозначение: $g = z \vee z'$), если $z \leq g$, $z' \leq g$ и из $z \leq x$ и $z' \leq x$ следует, что $g \leq x$.

Понятия пересечения и объединения естественным образом могут быть распространены на любое множество элементов из Z .

Элемент $m \in Z$ называется *максимальным* в множестве Z , если не существует $z \in Z$ такого, что $m < z$. Соответственно элемент $m' \in Z$ *минимальный* в множестве Z , если не существует $z \in Z$ такого, что $z < m'$.

Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и упорядоченный автомат $\bar{A} = (\bar{S}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$.

Тройку всюду определенных отображений (φ, ψ, θ) , где $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$, $\psi : X \rightarrow \bar{X}$, $\theta : Y \rightarrow \bar{Y}$, назовем *морфизмом по частичным порядкам*, или коротко *p-морфизмом* автомата A в автомат \bar{A} , если для любых $s \in S$, $x \in X$

$$\varphi(\delta(s, x)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s), \psi(x)), \tag{14}$$

$$\theta(\lambda(s, x)) \leq \bar{\lambda}(\varphi(s), \psi(x)). \tag{15}$$

Далее для произвольного отображения φ через $\text{Im } \varphi$ будем обозначать множество образов при отображении φ .

Теорема 6. Пусть дан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и упорядоченный автомат $\bar{A} = (\bar{S}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$. Автомат \bar{A} является толерантным образом автомата A тогда и только тогда, когда

- 1) существует p-морфизм (φ, ψ, θ) автомата A в автомат \bar{A} ;
- 2) функции $\bar{\delta}$ и $\bar{\lambda}$ автомата \bar{A} изотонны, т. е.

$$(\forall s, s' \in \bar{S}) (\forall x, x' \in \bar{X}) (s \leq s' \& x \leq x' \rightarrow \bar{\delta}(s, x) \leq \bar{\delta}(s', x') \& \bar{\lambda}(s, x) \leq \bar{\lambda}(s', x')); \tag{16}$$

- 3) для частично упорядоченных множеств (\bar{S}, \leq) и (\bar{Y}, \leq) выполняются следующие условия:

- а) всякий элемент z частично упорядоченного множества Z однозначно представим в виде пересечения множества максимальных элементов z' таких, что $z' \geq z$, $Z = S, Y$;
- б) $\bar{S}_{\min} \subseteq \text{Im } \varphi$, $\bar{Y}_{\min} \subseteq \text{Im } \theta$, где \bar{S}_{\min} , \bar{Y}_{\min} — множества минимальных элементов множеств \bar{S} , \bar{Y} соответственно;
- в) каждый элемент z частично упорядоченного множества Z однозначно определяется множеством элементов z' таких, что $z' \leq z$ и $z' \in \text{Im } \zeta$, где $\zeta = \varphi$ для $Z = S$ и $\zeta = \theta$ для $Z = Y$;

$$4) (\forall \bar{s} \in \bar{S}) (\forall \bar{x} \in \bar{X}) (\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) = \bigvee_{\substack{s: \varphi(s) \leq \bar{s} \\ x: \psi(x) \leq \bar{x}}} \varphi(\delta(s, x)) \& \bar{\lambda}(\bar{s}, \bar{x}) = \bigvee_{\substack{s: \varphi(s) \leq \bar{s} \\ x: \psi(x) \leq \bar{x}}} \theta(\lambda(s, x))).$$



Доказательство. Достаточность. Покажем, что \bar{A} является толерантным образом A , т.е. \bar{A} изоморфен квазифактор-автомату по некоторым толерантностям τ, ρ, ξ и покрытиям B_τ, C_ρ, D_ξ , если для \bar{A} выполняются условия 1)–4) теоремы.

Пусть $\bar{S}_{\max}, \bar{X}_{\max}, \bar{Y}_{\max}$ — множества максимальных элементов множеств $\bar{S}, \bar{X}, \bar{Y}$ соответственно. Для каждого $\bar{s}_i \in \bar{S}_{\max}$ определим $B_i = \bigcup_{\substack{\bar{s} \leq \bar{s}_i \\ \bar{s} \in \text{Im } \varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s})$, где $\varphi^{-1}(\bar{s}) = \{s \in S | \varphi(s) = \bar{s}\}$ — полный

прообраз \bar{s} при отображении φ , т.е. $\varphi^{-1} : \bar{S} \rightarrow P(S)$, где $P(S)$ — множество всех подмножеств множества S . Согласно п. 3), б) и в) теоремы каждое из множеств B_i не пусто и $B_i \neq B_j$, если $i \neq j$.

Поскольку φ — всюду определенное отображение, то из определения B_i следует, что $\bigcup_i \{B_i | \bar{s}_i \in \bar{S}_{\max}\} = S$, таким образом, совокупность всех B_i образует покрытие множества S . По покрытию $\{B_i\}$ однозначно восстановим толерантность τ_0 согласно следствию из утверждения 1.

Аналогичным образом построим покрытие $\{D_j\}$ на Y , $D_j = \bigcup_{\substack{\bar{y} \leq \bar{y}_j \\ \bar{y} \in \text{Im } \theta}} \theta^{-1}(\bar{y})$, где $\bar{y}_j \in \bar{Y}_{\max}$,

$$\theta^{-1}(\bar{y}) = \{y \in Y | \theta(y) = \bar{y}\}.$$

По системе $\{D_j\}$ однозначно восстанавливается толерантность ξ_0 на Y , $D_{\xi_0} = \{D_j\}$.

На X аналогично получим покрытие $\{C_k\} : C_k = \bigcup_{\substack{\bar{x} \leq \bar{x}_k \\ \bar{x} \in \text{Im } \psi}} \psi^{-1}(\bar{x})$, где $\bar{x}_k \in \bar{X}_{\max}$,

$\psi^{-1}(\bar{x}) = \{x \in X | \psi(x) = \bar{x}\}$. По системе $\{C_k\}$ однозначно восстанавливается толерантность ρ_0 . Обозначим $C_{\rho_0} = \{C_k\}$.

Покажем, что *квазифактор-автомат* для заданного автомата A , толерантностей τ_0, ρ_0, ξ_0 и покрытий $B_{\tau_0}, C_{\rho_0}, D_{\xi_0}$ *существует*, т.е. согласно теореме 1 $\tau_0 \in ST(A)$, $\rho_0 \subseteq \rho(\tau_0)$, $\xi_0 \supseteq \xi(\tau_0, \rho_0)$.

1. Покажем, что $\tau_0 \in ST(A)$, т.е. выполняется (1).

Из определения τ_0 следует, что

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \leftrightarrow (\exists \bar{s}_0 \in \bar{S}) (\varphi(s_1) \leq \bar{s}_0 \& \varphi(s_2) \leq \bar{s}_0). \quad (17)$$

Тогда, используя п. 2) теоремы, получаем:

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \rightarrow (\forall \bar{x} \in \bar{X}) (\bar{\delta}(\varphi(s_1), \bar{x}) \leq \bar{\delta}(\bar{s}_0, \bar{x}) \& \bar{\delta}(\varphi(s_2), \bar{x}) \leq \bar{\delta}(\bar{s}_0, \bar{x})). \quad (18)$$

Тройка отображений (φ, ψ, θ) — p -морфизм A в \bar{A} , поэтому из (14) следует

$$(x \in X) (\varphi(\delta(s_1, x)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s_1), \psi(x)) \stackrel{(18)}{\leq} \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x)) \& \varphi(\delta(s_2, x)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s_2), \psi(x)) \leq \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x))),$$

или

$$(\forall x \in X) (\varphi(\delta(s_1, x)) \leq \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x)) \& \varphi(\delta(s_2, x)) \leq \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x))).$$

Таким образом, на основании (17) можно утверждать, что

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \rightarrow (\forall x \in X) ((\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \tau_0).$$

Тем самым показано, что $\tau_0 \in ST(A)$.

2. Покажем, что $\rho_0 \subseteq \rho(\tau_0)$, т.е. согласно (8)

$$(x_1, x_2) \in \rho_0 \rightarrow (\forall s_1, s_2 \in S) ((s_1, s_2) \in \tau_0 \rightarrow (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau_0).$$

По построению ρ_0

$$(x_1, x_2) \in \rho_0 \leftrightarrow (\exists \bar{x}_0 \in \bar{X}) (\psi(x_1) \leq \bar{x}_0 \& \psi(x_2) \leq \bar{x}_0). \quad (19)$$

Пусть $(s_1, s_2) \in \tau_0$, тогда согласно (14)

$$\varphi(\delta(s_1, x_1)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s_1), \psi(x_1)) \stackrel{(19)}{\leq} \bar{\delta}(\varphi(s_1), \bar{x}_0), \quad \varphi(\delta(s_2, x_2)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s_2), \psi(x_2)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s_2), \bar{x}_0).$$

На основании (17) $(\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau_0$.

3. Покажем, что $\xi_0 \supseteq \xi(\tau_0, \rho_0)$, т.е. согласно (9)

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \& (x_1, x_2) \in \rho_0 \rightarrow (\lambda(s_1, x_1), \lambda(s_2, x_2)) \in \xi_0.$$



Аналогично (17) справедливо

$$(y_1, y_2) \in \xi_0 \leftrightarrow (\exists \bar{y}_0 \in \bar{Y}) (\theta(y_1) \leq \bar{y}_0 \& \theta(y_2) \leq \bar{y}_0). \quad (20)$$

Пусть $(s_1, s_2) \in \tau_0$ и $(x_1, x_2) \in \rho_0$, тогда, так как \bar{A} — образ A при p -морфизме с изотонными функциями $\bar{\delta}$ и $\bar{\lambda}$, то из (17) и (19) следует

$$\begin{aligned} (\exists \bar{s}_0 \in \bar{S}) (\exists \bar{x}_0 \in \bar{X}) (\theta(\lambda(s_1, x_1)) \stackrel{(15)}{\leq} \bar{\lambda}(\varphi(s_1), \psi(x_1)) \leq \bar{\lambda}(\bar{s}_0, \bar{x}_0) \& \\ \& \theta(\lambda(s_2, x_2)) \stackrel{(15)}{\leq} \bar{\lambda}(\varphi(s_2), \psi(x_2)) \leq \bar{\lambda}(\bar{s}_0, \bar{x}_0)), \end{aligned}$$

поскольку согласно п. 2) теоремы $\bar{\lambda}$ изотонна. Тогда на основании (20) можно утверждать, что $(\lambda(s_1, x_1), \lambda(s_2, x_2)) \in \xi_0$.

Тем самым доказано, что $\xi_0 \supseteq \xi(\tau_0, \rho_0)$.

Теперь покажем, что квазифактор-автомат A' , построенный по толерантностям τ_0, ρ_0, ξ_0 и покрытиям $B_{\tau_0}, C_{\rho_0}, D_{\xi_0}$ изоморфен \bar{A} , т.е. существует тройка взаимно-однозначных отображений (π, μ, ν) , где $\pi : \bar{S} \rightarrow S/\tau_0, \mu : \bar{X} \rightarrow X/\rho_0, \nu : \bar{Y} \rightarrow Y/\xi_0$, такая, что для любых $\bar{s} \in \bar{S}, \bar{x} \in \bar{X}$

$$\pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})) = \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})), \quad (21)$$

$$\nu(\bar{\lambda}(\bar{s}, \bar{x})) = \bar{\lambda}(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})). \quad (22)$$

Кроме того, согласно определению изоморфизма упорядоченных автоматов должно выполняться следующее:

$$(\forall \bar{s}_1, \bar{s}_2 \in \bar{S}) (\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2 \rightarrow \pi(\bar{s}_1) \subseteq \pi(\bar{s}_2)), \quad (23)$$

$$(\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{X}) (\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \rightarrow \mu(\bar{x}_1) \subseteq \mu(\bar{x}_2)), \quad (24)$$

$$(\forall \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{Y}) (\bar{y}_1 \leq \bar{y}_2 \rightarrow \nu(\bar{y}_1) \subseteq \nu(\bar{y}_2)), \quad (25)$$

т.е. каждое из отображений π, μ, ν есть изоморфизм соответствующих упорядоченных множеств.

Рассмотрим следующее отображение $\pi : \bar{S} \rightarrow P(S)$:

$$\pi(\bar{s}) = \bigcup_{\substack{\bar{s}' \leq \bar{s} \\ \bar{s}' \in \text{Im } \varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}') = \{s \in S \mid \varphi(s) \leq \bar{s}\}. \quad (26)$$

Согласно определению B_{τ_0} отображение π каждому элементу \bar{s} из \bar{S} однозначно ставит в соответствие либо класс, либо пересечение классов из B_{τ_0} , что следует из п. 3) теоремы. Поясним это.

Непосредственно из определения B_{τ_0} и п. 3), в) теоремы следует, что π устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством максимальных элементов множества \bar{S} и множеством классов B_i из B_{τ_0} .

Пусть теперь $\bar{s} \notin \bar{S}_{\max}$. Согласно п. 3), а) теоремы всякий элемент $\bar{s} \in \bar{S}$ однозначным образом можно представить в виде $\bar{s} = \bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k}$, где $\bar{s}_{i_j} \in \bar{S}_{\max}, 1 \leq j \leq k$.

Покажем, что

$$\pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k}) = \pi(\bar{s}_{i_1}) \cap \dots \cap \pi(\bar{s}_{i_k}). \quad (27)$$

Пусть $s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k})$, тогда из (26)

$$\varphi(s_0) \leq \bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k}.$$

Отсюда $\varphi(s_0) \leq \bar{s}_{i_1} \& \dots \& \varphi(s_0) \leq \bar{s}_{i_k}$, а поэтому $s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \& \dots \& s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_k})$, т.е. $s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \cap \dots \cap \pi(\bar{s}_{i_k})$. С другой стороны, справедливо

$$s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \cap \dots \cap \pi(\bar{s}_{i_k}) \leftrightarrow s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \& \dots \& s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_k}) \leftrightarrow \varphi(s_0) \leq \bar{s}_{i_1} \& \dots \& \varphi(s_0) \leq \bar{s}_{i_k}.$$

Согласно определению операции пересечения « \wedge » $\varphi(s_0) \leq \bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k}$, но тогда $s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k})$. Тем самым (27) доказано. Поскольку $\bar{s}_{i_j} \in \bar{S}_{\max}, 1 \leq j \leq k$, то $\pi(\bar{s}_{i_j})$ — классы покрытия B_{τ_0} .



Построим обратное отображение $\pi^{-1} : S/\tau_0 \rightarrow \bar{S}$. По построению π устанавливает взаимно-однозначное соответствие между максимальными элементами \bar{S} и классами B_{τ_0} , поэтому полагаем $\pi^{-1}(B_i) = \bar{s}_i$, где $B_i \in B_{\tau_0}$, а $\bar{s}_i \in \bar{S}_{\max}$ — соответствующий максимальный элемент множества \bar{S} .

Рассмотрим теперь произвольный элемент множества S/τ_0 :

$$\begin{aligned} B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k} &= \pi(\bar{s}_{i_1}) \cap \dots \cap \pi(\bar{s}_{i_k}) = \left(\bigcup_{\substack{\bar{s} \leq \bar{s}_{i_1} \\ \bar{s} \in \text{Im } \varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}) \right) \cap \dots \\ &\dots \cap \left(\bigcup_{\substack{\bar{s} \leq \bar{s}_{i_k} \\ \bar{s} \in \text{Im } \varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}) \right) = \bigcup_{\substack{\bar{s} \leq \bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k} \\ \bar{s} \in \text{Im } \varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}) = \pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k}). \end{aligned}$$

Это позволяет доопределить π^{-1} следующим образом:

$$\pi^{-1}(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = \pi^{-1}(B_{i_1}) \wedge \dots \wedge \pi^{-1}(B_{i_k}) = \bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{s}_{i_k}.$$

По построению очевидно, что $\pi^{-1}\pi(\bar{s}) = \bar{s}$, $\bar{s} \in \bar{S}$.

Таким образом, π — взаимно-однозначное отображение множества \bar{S} автомата \bar{A} на множество S/τ_0 классов и их непустых пересечений толерантности τ_0 на множестве S .

Покажем, что выполняется (23). Пусть $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in \bar{S}$. Импликация $\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2 \rightarrow \pi(\bar{s}_1) \subseteq \pi(\bar{s}_2)$ следует из (26). Пусть теперь справедливо $\pi(\bar{s}_1) \subseteq \pi(\bar{s}_2)$, т. е. $(\forall s \in S) (s \in \pi(\bar{s}_1) \rightarrow s \in \pi(\bar{s}_2))$. Отсюда согласно (26) $(\forall s \in S) (\varphi(s) \leq \bar{s}_1 \rightarrow \varphi(s) \leq \bar{s}_2)$. Но это означает, что $\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2$. Тем самым (23) доказано.

Подобно тому, как это сделано для множества \bar{S} автомата \bar{A} , можно построить отображения $\nu : \bar{Y} \rightarrow Y/\xi_0$ и $\mu : \bar{X} \rightarrow X/\rho_0$ по формулам $\nu(\bar{y}) = \bigcup_{\substack{\bar{y}' \leq \bar{y} \\ \bar{y}' \in \text{Im } \theta}} \theta^{-1}(\bar{y}')$ и $\mu(\bar{x}) = \bigcup_{\substack{\bar{x}' \leq \bar{x} \\ \bar{x}' \in \text{Im } \psi}} \psi^{-1}(\bar{x}')$ и доказать

их взаимнооднозначность и обратнотонность.

Докажем теперь (21). Согласно определению функции δ' (формулы (6))

$$\delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})) = (\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in \pi(\bar{s}) \\ x \in \mu(\bar{x})}})_{\tau_0}.$$

Из (26) следует

$$(s \in \pi(\bar{s}) \leftrightarrow \varphi(s) \leq \bar{s}) \& (x \in \mu(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(x) \leq \bar{x}). \quad (28)$$

Поскольку (φ, ψ, θ) — p -морфизм, то, используя п. 2) теоремы (свойство изотонности функций $\bar{\delta}$ и $\bar{\lambda}$), получаем:

$$(\forall s \in \pi(\bar{s})) (\forall x \in \mu(\bar{x})) (\varphi(\delta(s, x)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s), \psi(x)) \stackrel{(28)}{\leq} \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})).$$

Но тогда согласно (28) и определению отображения π справедливо

$$(\forall s \in \pi(\bar{s})) (\forall x \in \mu(\bar{x})) (\delta(s, x) \in \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}))),$$

что равносильно

$$\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in \pi(\bar{s}) \\ x \in \mu(\bar{x})}} \subseteq \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})).$$

Отсюда на основании леммы 1

$$\delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})) \subseteq \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})), \quad (29)$$

Поскольку, как показано выше, $\pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}))$ — класс или пересечение классов толерантности τ_0 , поэтому $(\pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})))_{\tau_0} = \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}))$.

Покажем теперь обратное включение, т. е.

$$(\forall s^0 \in S) (s^0 \in \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})) \rightarrow s^0 \in \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x}))).$$

По определению π

$$s^0 \in \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})) \leftrightarrow \varphi(s^0) \leq \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) \leftrightarrow (\exists \bar{s}' \in \text{Im } \varphi) (\bar{s}' \leq \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) \& s^0 \in \varphi^{-1}(\bar{s}')). \quad (30)$$

Предположим, что $s^0 \notin \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x}))$.



Из определения δ' следует

$$s^0 \in \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})) \leftrightarrow (\forall B_i \in B_{\tau_0}) (B_i \supseteq \{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in \pi(\bar{s}) \\ x \in \mu(\bar{x})}} \rightarrow s^0 \in B_i).$$

Тогда

$$s^0 \notin \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})) \leftrightarrow (\exists B_{i_0} \in B_{\tau_0}) (B_{i_0} \supseteq \{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in \pi(\bar{s}) \\ x \in \mu(\bar{x})}} \& s^0 \notin B_{i_0}).$$

По построению B_{τ_0} для B_{i_0} существует элемент $\bar{s}_{i_0} \in \bar{S}_{\max}$ такой, что

$$B_{i_0} = \bigcup_{\substack{\bar{s}' \leq \bar{s}_{i_0} \\ \bar{s}' \in \text{Im } \varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}'),$$

тогда

$$s^0 \notin B_{i_0} \leftrightarrow \neg(\varphi(s^0) \leq \bar{s}_{i_0}). \quad (31)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in \pi(\bar{s}) \\ x \in \mu(\bar{x})}} \subseteq B_{i_0} &\leftrightarrow (\forall s \in \pi(\bar{s})) (\forall x \in \mu(\bar{x})) (\varphi(\delta(s, x)) \leq \bar{s}_{i_0}) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\forall \varphi(s) \leq \bar{s}) (\forall \psi(x) \leq \bar{x}) (\varphi(\delta(s, x)) \leq \bar{s}_{i_0}). \end{aligned}$$

Отсюда, используя п. 4) теоремы, получаем:

$$\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) = \bigvee_{\substack{s: \varphi(s) \leq \bar{s} \\ x: \varphi(x) \leq \bar{x}}} \varphi(\delta(s, x)) \leq \bar{s}_{i_0}, \quad \text{или} \quad \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) \leq \bar{s}_{i_0}. \quad (32)$$

Объединяя (30) и (32), получаем:

$$\varphi(s^0) \leq \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) \leq \bar{s}_{i_0} \leftrightarrow \varphi(s^0) \leq \bar{s}_{i_0}.$$

Таким образом, получено противоречие с (31). Тем самым доказано включение $\pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})) \subseteq \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x}))$, что вместе с (29) доказывает (21).

Равенство (22) доказывается аналогичным образом.

Необходимость. Надо показать, что для произвольного толерантного образа автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ выполняются условия 1)–4) теоремы. Для этого в силу изоморфизма достаточно проверить аналогичные свойства для произвольного квазифактор-автомата A' автомата A .

Свойство 1) следует из теоремы 2, свойство 2) — из теоремы 3, свойство 3) — из определения квазифактор-автомата. Покажем, что выполняется 4), т. е.

$$\bigcup_{\substack{s: \varphi'(s) \subseteq Q \\ x: \psi'(x) \subseteq G}} \varphi'(\delta(s, x)) = \delta'(Q, G), \quad (33)$$

$$\bigcup_{\substack{s: \varphi'(s) \subseteq Q \\ x: \psi'(x) \subseteq G}} \theta'(\lambda(s, x)) = \lambda'(Q, G), \quad (34)$$

где φ', ψ', θ' определяются (3)–(5) для толерантностей τ_0, ρ_0, ξ_0 , по которым строится квазифактор-автомат $A', Q \in S/\tau_0, G \in X/\rho_0$.

Докажем равенство (33) для функции переходов. Согласно (12) теоремы 2 и теореме 3 для любых $s : \varphi'(s) \subseteq Q$ и $x : \psi'(x) \subseteq G$ справедливо

$$\varphi'(\delta(s, x)) \subseteq \delta'(\varphi'(s), \psi'(x)) \subseteq \delta'(Q, G),$$

но тогда

$$\bigcup_{\substack{s: \varphi'(s) \subseteq Q \\ x: \psi'(x) \subseteq G}} \varphi'(\delta(s, x)) \subseteq \delta'(Q, G).$$



Докажем обратное включение. Пусть $s^0 \in \delta'(Q, G)$. Покажем, что

$$s^0 \in \bigcup_{\substack{s:\varphi'(s) \subseteq Q \\ x:\psi'(x) \subseteq G}} \varphi'(\delta(s, x))$$

методом от противного. Предположим, что $s^0 \notin \bigcup_{\substack{s:\varphi'(s) \subseteq Q \\ x:\psi'(x) \subseteq G}} \varphi'(\delta(s, x))$, тогда по определению функции φ' отсюда следует

$$s^0 \notin \bigcup_{\substack{s:\varphi'(s) \subseteq Q \\ x:\psi'(x) \subseteq G}} \bigcap \{B_i | \delta(s, x) \in B_i\} = \bigcup_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \bigcap \{B_i | \delta(s, x) \in B_i\}.$$

Используя свойство дистрибутивности операции объединения относительно операции пересечения множеств, получим:

$$s^0 \notin \bigcap_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \bigcup \{B_i | \delta(s, x) \in B_i\} = \bigcap \{B_i | B_i \supseteq \{\delta(s, x) \}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}}\}.$$

Или по определению функции δ' $s^0 \notin \delta'(Q, G)$. Мы получили противоречие условию. Тем самым (33) доказано полностью.

Равенство (34) доказывается аналогично. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В [1] показано, что понятие морфизма по толерантности является естественным обобщением понятия гомоморфизма. Теоремы 4–6 показывают, что морфизм по толерантности, в свою очередь, является частным видом p -морфизма, а именно такого, для которого выполняются условия 2)–4) теоремы 6. Однако морфизм по толерантности обладает таким несомненным достоинством, как конструктивность, и, следовательно, если возникает необходимость для заданного автомата в построении p -морфизма, то дает пример такого построения.

Библиографический список

1. Мангушева И. П. Морфизмы по стабильным толеранностям конечных автоматов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 80–90.
2. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.
3. Карпов Ю. Г. Теория автоматов. СПб.: Питер, 2003. 208 с.

Ordered Automata and Tolerant Images of FDA

I. P. Mangusheva

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya str., 83, MangushevaIP@info.sgu.ru

Finite deterministic automaton (FDA) with partially ordered (an ordered automaton) sets of states, input and output symbols is described in the article. The mapping of FDA on an ordered automaton, which is named « p -morphism» is defined. It is shown that so called tolerant images, which are constructed with the help of compatible tolerances on the set of states of FDA, are particular case of ordered automata, which are connected with the original automaton by a p -morphism. Necessary and sufficient conditions are defined, under which an ordered automaton is a tolerant image of the original one.

Key words: finite deterministic automaton, tolerant image, ordered automaton, compatible tolerance, covering, partial order.

References

1. Mangusheva I. P. Morphismes based on compatible tolerances of finite automata. *Izv. Sarat. Universiteta. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 80–90 (in Russian).
2. Bogomolov A. M., Saliy V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997. 368 p. (in Russian).
3. Karpov U. G. *Teoriia avtomatov* [Automata theory]. St. Petersburg, Piter, 2003, 208 p. (in Russian).



УДК 519.17

Т-НЕПРИВОДИМОЕ РАСШИРЕНИЕ ДЛЯ ОБЪЕДИНЕНИЯ ЦЕПЕЙ И ЦИКЛОВ

Д. Ю. Осипов

Студент факультета компьютерных наук и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: st_hill@mail.ru

Расширением n -вершинного графа G называется граф H с $n + 1$ вершинами такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H . Тривиальное расширение графа G — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G). Т-неприводимым расширением графа G называется расширение графа G , получаемое из тривиального расширения данного графа удалением максимально возможного набора добавленных при построении тривиального расширения ребер. В данной работе описано одно из ТНР для произвольного объединения цепей и циклов.

Ключевые слова: граф, Т-неприводимое расширение, объединение цепей и циклов.

В данной статье все понятия и определения приводятся в соответствии с [1].

Неориентированным графом (далее графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α (множество ребер) — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V . Ребро с концами $u, v \in V$ обозначим через uv . Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \in V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$. Подграф по определению максимален, если он получается из исходного графа удалением одной вершины и всех связанных с нею ребер. Максимальный подграф графа G , полученный удалением вершины v , обозначим через $G - v$. Через $G - uv$ обозначается граф, получающийся из G удалением ребра uv .

Под вложением графа G в граф H понимается инъективное отображение множества вершин графа G в множество вершин графа H , сохраняющее свойство смежности (т. е. если вершины u, v смежны в G , то $\varphi(u), \varphi(v)$ смежны в H).

Расширением n -вершинного графа G называется граф H с $n + 1$ вершинами такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H . Простейшим примером расширения графа G будет его тривиальное расширение — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Понятие расширения графа тесно связано с вопросами отказоустойчивости дискретных систем. Если граф G рассматривать как функциональную модель некоторого устройства Σ , то расширение H графа G можно воспринимать как схему отказоустойчивой реализации этого устройства: при отказе любого элемента (что истолковывается как удаление из H соответствующей вершины и всех связанных с нею ребер) в неповрежденной части обнаруживается работоспособная модель для Σ .

При таком подходе естественно возникает вопрос об оптимальности отказоустойчивой реализации для данной системы, т. е. о получении такого расширения H графа G , которое не содержало бы «лишних» ребер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа [2, 3], другой — его Т-неприводимое расширение [4].

Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством ребер. В общем случае при построении минимального расширения возникает необходимость добавлять ребра в исходный граф, т. е. менять всю систему, моделируемую этим графом. Но иногда технически важно найти решение следующей задачи: построить оптимальное расширение данного графа, сохраняя его первоначальную конструкцию (т. е. не меняя связей внутри него). Существует следующая процедура:

- построить тривиальное расширение исходного графа;
- удалять из полученного графа ребра до тех пор, пока будет выполняться свойство расширения.

Полученные графы назовем Т-неприводимыми расширениями (для краткости ТНР) графа G . Для произвольного графа количество неизоморфных ТНР неизвестно.

Покажем примеры ТНР для некоторых классов графов. Для n -вершинной цепи единственным ТНР является $(n + 1)$ -вершинный цикл. Для n -вершинного цикла единственным ТНР является тривиальное расширение исходного цикла.

У графа, представленного на рис. 1, а есть два неизоморфных ТНР, которые изображены на рис. 1, б, в.

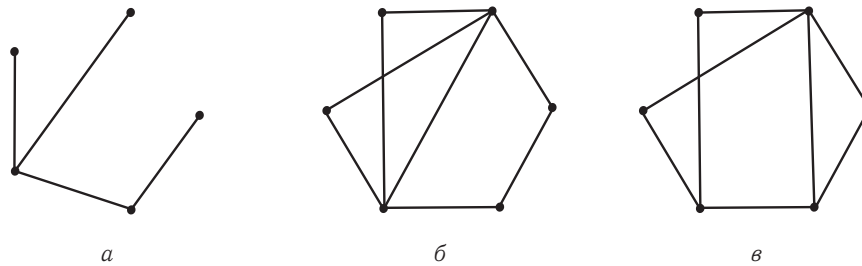


Рис. 1

Известна следующая задача: зная ТНР для заданных графов, найти ТНР для их объединения. Некоторые частные случаи были рассмотрены в работах С. Г. Курносовой. Например, ею были найдены ТНР для объединений полных графов, объединений циклов, объединений цепей и для объединений колес, а также найдено одно из ТНР для объединения графа с его ТНР [5].

В теоремах 1 и 2 рассматривается частный случай: объединение цикла и нескольких цепей. В теореме 3 дается общее решение задачи о нахождении ТНР для произвольного объединения цепей и циклов. Результаты работы были анонсированы в [6].

Теорема 1. Пусть граф G является объединением n -вершинного цикла и некоторого множества цепей произвольной длины, кроме $(n-1)$ -вершинных цепей. Тогда одним из ТНР для G будет граф, получаемый из G добавлением новой вершины и ребер, соединяющих ее со всеми вершинами цикла и с концами всех цепей.

Доказательство. Пусть граф G является объединением n -вершинного цикла и m цепей произвольной длины. Обозначим через v_1, \dots, v_n вершины цикла, а через $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ — вершины i -й цепи, состоящей из n_i вершин ($n_i \neq n, i = \overline{1, m}$). Пусть граф H построен в соответствии с условием теоремы. Добавленную вершину в графе H обозначим через w .

Докажем, что H — одно из ТНР для G .

1. Покажем, что граф H является расширением графа G . Удалим произвольную вершину v из H . Тогда эта вершина может быть добавленной вершиной w , одной из вершин цикла или одной из вершин произвольной цепи.

- $v = w$. Граф G естественным образом вкладывается в граф $H - v$.
- $v = v_j$. Из n -вершинного цикла удалена одна вершина, тогда удаленную вершину в цикле заменим вершиной w . Граф G вкладывается в граф $H - v$.
- $v = u_j^i$ ($j = \overline{1, n_i}; i = \overline{1, m}$). Цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_{j-1}^i, \dots, u_1^i, w, u_{n_i}^i, \dots, u_{j+1}^i$ графа $H - u_j^i$ ($j = \overline{2, n_i - 1}$). Если $v = u_1^i$, цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_2^i, \dots, u_{n_i}^i, w$ графа $H - u_1^i$. Если $v = u_{n_i}^i$, цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $w, u_1^i, \dots, u_{n_i-1}^i$ графа $H - u_{n_i}^i$. Тогда граф G вкладывается в граф $H - v$.

Мы получили, что при удалении произвольной вершины v из графа H , граф G вкладывается в граф $H - v$, а значит, граф H является расширением графа G .

2. Докажем свойство неприводимости. Удалим произвольное ребро wv из H . Тогда этим ребром может быть ребро, соединяющее вершину w и одну из вершин цикла, либо ребро, соединяющее вершину w и один из концов произвольной цепи.

- $v = v_j$. Из графа $H - wv$ достаточно удалить вершину смежную с v_j , тогда степень вершины v_j будет равна 1, а следовательно, в полученный граф невозможно вложения n -вершинного цикла (так как все вершины в цикле имеют степень, равную 2). Граф $H - wv$ не является расширением для G .
- $v = u_j^i$ ($j = 1, n_i; i = \overline{1, m}$). Из графа $H - wv$ достаточно удалить вершину смежную с u_j^i , тогда вершина u_j^i будет изолированной вершиной, а следовательно, цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ не вкладывается в полученный граф. Граф $H - wv$ не является расширением для G .

Мы получили, что никакой граф, полученный удалением из H одного ребра, не является расширением графа G , а следовательно, граф H будет ТНР для графа G . \square

На рис. 2, а представлен граф, удовлетворяющий условию теоремы 1, а на рис. 2, б — одно из его ТНР, построенное в соответствии с теоремой 1.

Теорема 2. Пусть граф G является объединением n -вершинного цикла и некоторого множества цепей, среди которых имеются $(n-1)$ -вершинные цепи. Тогда одним из ТНР для G будет граф, получаемый из G добавлением новой вершины и ребер, соединяющих ее с концами всех цепей.

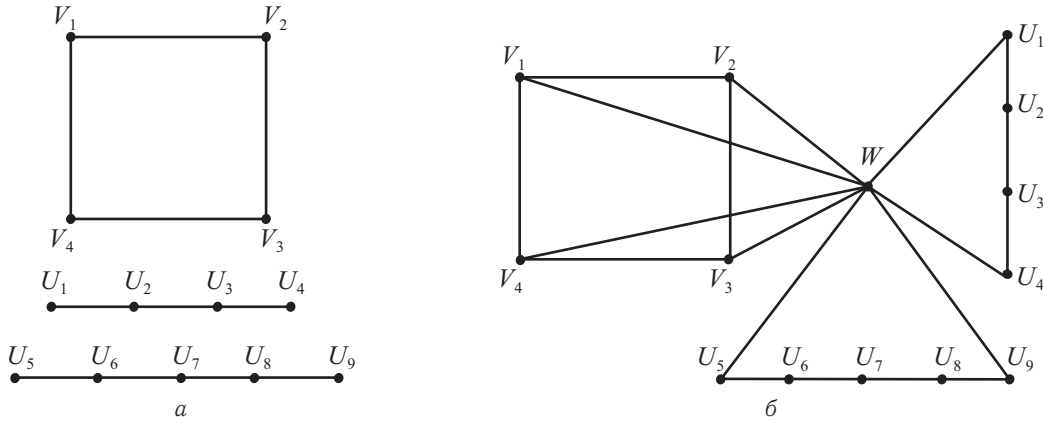


Рис. 2

Доказательство. Пусть граф G является объединением n -вершинного цикла и m цепей произвольной длины. Обозначим через v_1, \dots, v_n вершины цикла, а через $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ вершины i -й цепи, состоящей из n_i вершин ($\exists n_i = n, i = \overline{1, m}$). Пусть граф H построен в соответствии с условием теоремы. Добавленную вершину в графе H обозначим через w .

Докажем, что H — одно из ТНР для G .

1. Покажем, что граф H является расширением графа G . Удалим произвольную вершину v из H . Тогда эта вершина может быть добавленной вершиной w , одной из вершин цикла или одной из вершин произвольной цепи.

- $v = w$. Граф G естественным образом вкладывается в граф $H - v$.

- $v = v_j$. Пусть $u_1^i, \dots, u_{n_i-1}^i$ — одна из цепей, состоящих из $(n_i - 1)$ -вершин, тогда $u_1^i, \dots, u_{n_i-1}^i, w, u_1^i$ образуют n -вершинный цикл, а вершины $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n$ в любом случае образуют $(n - 1)$ -вершинную цепь. Тогда граф G вкладывается в граф $H - v$.

- $v = u_j^i$ ($j = \overline{1, n_i}; i = \overline{1, m}$). Цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_{j-1}^i, \dots, u_1^i, w, u_{n_i}^i, \dots, u_{j+1}^i$ графа $H - u_j^i$ ($j = \overline{2, n_i - 1}$). Если $v = u_1^i$, цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_2^i, \dots, u_{n_i}^i, w$ графа $H - u_1^i$. Если $v = u_{n_i}^i$, цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $w, u_1^i, \dots, u_{n_i-1}^i$ графа $H - u_{n_i}^i$. Тогда граф G вкладывается в граф $H - v$.

Мы получили, что при удалении произвольной вершины v из графа H граф G вкладывается в граф $H - v$, а значит, граф H является расширением графа G .

2. Докажем свойство неприводимости. Удалим произвольное ребро wv из H . Тогда этим ребром может быть ребро, соединяющее вершину w и один из концов произвольной цепи.

- $v = u_j^i$ ($j = 1, n_i; i = \overline{1, m}$). Из графа $H - wv$ достаточно удалить вершину, смежную с u_j^i , тогда вершина u_j^i будет изолированной вершиной, а следовательно, цепь $u_1^i, \dots, u_{n_i}^i$ не вкладывается в полученный граф. Граф $H - wv$ не является расширением для G .

Мы получили, что никакой граф, полученный удалением из H одного ребра, не является расширением графа G , а следовательно, граф H будет ТНР для графа G . \square

На рис. 3, а представлен граф, удовлетворяющий условию теоремы 2, а на рис. 3, б — одно из его ТНР, построенное в соответствии с теоремой 2.

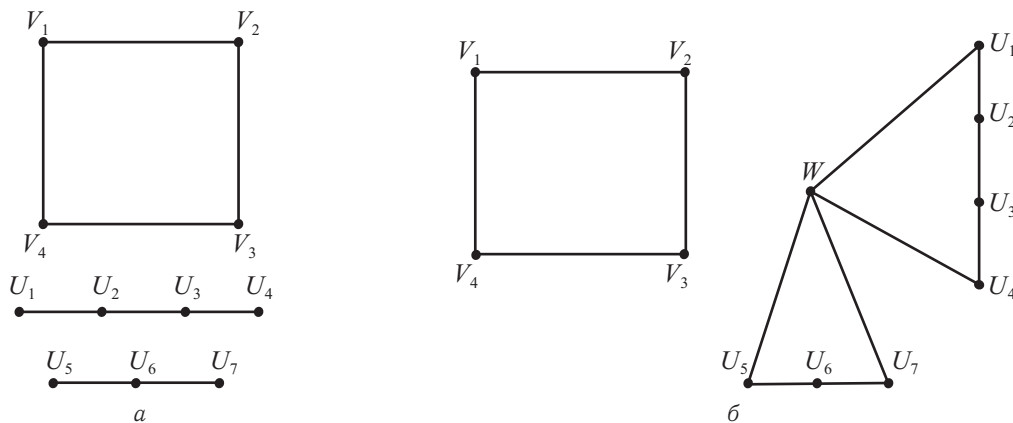


Рис. 3



Следующая теорема решает задачу о построении ТНР для графов, являющихся объединением произвольного количества цепей и циклов.

Теорема 3. Пусть граф G является объединением n циклов и m цепей произвольной длины: $G = \bigcup_{i=1}^n C_i \cup \bigcup_{j=1}^m P_j$. Пусть $H_i = C_i \cup \bigcup_{j=1}^m P_j$, $1 \leq i \leq n$. Тогда одним из ТНР для графа G будет объединение ТНР, построенных в соответствии с теоремой 1 или теоремой 2 для графов H_i .

Доказательство. Пусть граф G является объединением n циклов и m цепей произвольной длины: $G = \bigcup_{i=1}^n C_i \cup \bigcup_{j=1}^m P_j$. Пусть $H_i = C_i \cup \bigcup_{j=1}^m P_j$, $1 \leq i \leq n$. Можно заметить, что $G = \bigcup_{i=1}^n H_i$. Тогда нужно доказать, что $H = \bigcup_{i=1}^n \text{ТНР}_{1,2}(H_i)$, где H — одно из ТНР для G , а $\text{ТНР}_{1,2}(H_i)$ — функция, которая строит ТНР для графов в соответствии с теоремой 1 или теоремой 2. Доказательство теоремы производится с помощью метода математической индукции. Индукция по n — число циклов в графе.

Базис индукции: $n = 1$.

Пусть G является объединением одного цикла и m цепей произвольной длины. Тогда $G = H_1$, а $H = \text{ТНР}_{1,2}(H_1)$ — одно из ТНР для графа G . Данный частный случай рассматривается и доказывается в теоремах 1 и 2.

Предположение индукции:

Предположим, что условие теоремы выполнено для всех $k < n$, т.е. условие выполнено для графа G , являющемся объединением $n-1$ циклов и m цепей произвольной длины. Тогда $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i$, а $H = \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{ТНР}_{1,2}(H_i)$ — одно из ТНР для графа G .

Шаг индукции:

Докажем, что условие теоремы выполняется для $k = n$. Таким образом, $G = \bigcup_{i=1}^n H_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i \cup H_n$. Положим $G' = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i$ и $G'' = H_n$. Получим, что $G = G' \cup G''$. Построим $H = \bigcup_{i=1}^n \text{ТНР}_{1,2}(H_i) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{ТНР}_{1,2}(H_i) \cup \text{ТНР}_{1,2}(H_n)$, тогда $H = H' \cup H''$, где H' и H'' — ТНР для графов G' и G'' соответственно. Докажем, что H — одно из ТНР для G .

1. Покажем, что граф H является расширением графа G . Удалим произвольную вершину v из H . Тогда вершина v принадлежит либо множеству вершин графа H' , либо множеству вершин графа H'' (так как $H = H' \cup H''$).

- Если вершина v принадлежит множеству вершин графа H' , то цикл C_n вкладывается в граф $H - v$ (так как удаленная вершина принадлежит множеству вершин графа H' , а вершины цикла C_n не принадлежат), а циклы C_1, \dots, C_{n-1} и цепи P_1, \dots, P_m вкладываются в граф $H - v$, так как H' является расширением для графа G' , являющегося объединением циклов C_1, \dots, C_{n-1} , и цепей P_1, \dots, P_m .

- Если вершина v принадлежит множеству вершин графа H'' , то циклы C_1, \dots, C_{n-1} вкладываются в граф $H - v$ (так как удаленная вершина принадлежит множеству вершин графа H'' , а вершины циклов C_1, \dots, C_{n-1} не принадлежат), а цикл C_n и цепи P_1, \dots, P_m вкладываются в граф $H - v$, так как H'' является расширением для графа G'' , являющегося объединением цикла C_n и цепей P_1, \dots, P_m .

Мы получили, что при удалении произвольной вершины v из графа H граф G вкладывается в граф $H - v$, а значит, граф H является расширением графа G .

2. Докажем свойство неприводимости. Удалим произвольное ребро wv из H , где w — добавленная вершина. Тогда это ребро принадлежит либо множеству ребер графа H' , либо множеству ребер графа H'' (так как $H = H' \cup H''$).

- Если ребро wv принадлежит множеству ребер графа H' , то из графа $H - wv$ можно удалить такую вершину, принадлежащую множеству вершин графа H' (например, вершину, смежную с вершиной v), что граф $H - wv$ не являлся бы расширением для графа G . Это справедливо, так как граф H' является ТНР для графа G' , являющегося объединением циклов C_1, \dots, C_{n-1} , и цепей P_1, \dots, P_m , а следовательно, при удалении произвольного ребра wv из графа H' , граф $H' - wv$ не является расширением для G' и, значит, граф H не является расширением для G .

- Если ребро wv принадлежит множеству ребер графа H'' , то из графа $H - wv$ можно удалить такую вершину, принадлежащую множеству вершин графа H'' (например, вершину, смежную с вершиной v), что граф $H - wv$ не являлся расширением для графа G . Это справедливо, так как граф H'' является ТНР для графа G'' , являющегося объединением цикла C_n , и цепей P_1, \dots, P_m , а следовательно, при удалении произвольного ребра wv из графа H'' , граф $H'' - wv$ не является расширением для G'' и, значит, граф H не является расширением для G .



Мы получили, что никакой граф, полученный удалением из H одного ребра, не является расширением графа G , а следовательно, граф H будет ТНР для графа G . \square

На рис. 4, a представлен граф, удовлетворяющий условию теоремы 3, а на рис. 4, b — одно из его ТНР, построенное в соответствии с теоремой 3.

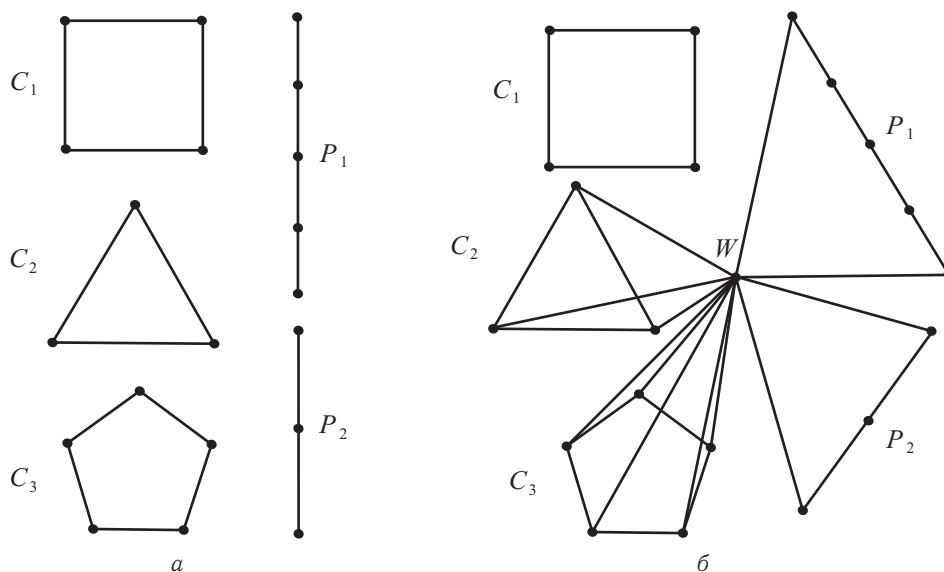


Рис. 4

Библиографический список

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997. 368 с.
2. Hayes P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. 25. P. 875–884.
3. Абросимов М. Б. Минимальные расширения объединения некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 3–11.
4. Салий В. Н. Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2001. Вып. 6. С. 63–65.
5. Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 113–125.
6. Осипов Д. Ю. Т-неприводимые расширения для объединения цепей и циклов // Компьютерные науки и информационные технологии. Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. С. 245–246.

T-irreducible Extension for Union of Paths and Cycles

D. U. Osipov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, st_hill@mail.ru

A graph H with $n + 1$ nodes is an extension of a graph G with n nodes if each maximal subgraph of H contains G . Trivial extension of a graph G is the connection of graph G and the singleton graph (i.e. we add one node to the graph G and this node join with each node of G). T-irreducible extension of graph G is an extension of the graph G which is obtained by removing maximal set of edges from the trivial extension of G . One of T-irreducible extensions is constructed for an arbitrary union of cycles and paths.

Key words: graph, T-irreducible extensions, union of paths and cycles.

References

1. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997, 368 p. (in Russian).
2. Hayes P. A graph model for fault-tolerant computing system. *IEEE Trans. Comput.*, 1976, vol. 25, pp. 875–884.
3. Abrosimov M. B. Minimal'nye rasshireniia ob"edineniia nekotorykh grafov [Minimal extensions for union of some graphs]. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenii* [Theoretical Problems of Informatics and its applications]. Saratov, 2001, iss. 4, pp. 3–11 (in Russian).
4. Salii V. N. Zero knowledge proofs in problems on ex-



tensions of graphs. *Vestnik Tomskogo Gos. Univ.*, 2001, iss. 6, pp. 63–65 (in Russian).

5. Kurnosova S. G. T-neprivodimye rasshireniia dlia nekotorykh klassov grafov [T-irreducible extensions for some classes graphs]. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenii* [Theoretical Problems of In-

formatics and its applications]. Saratov, 2004, iss. 6, pp. 113–125 (in Russian).

6. Osipov D. Yu. T-neprivodimye rasshireniia dlia ob'edineniia tsepei i tsiklov [T-irreducible extensions for union of paths and cycles]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii*. Saratov, 2012, pp. 245–246 (in Russian).

УДК 519.7

ОБ ОЦЕНКЕ ДЛИНЫ СЛОВА, РАЗЛИЧАЮЩЕГО ДВЕ ВЕРШИНЫ ПОМЕЧЕННОГО НЕОРГРАФА

С. В. Сапунов

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, sapunov.sv@iamm.ac.donetsk.ua

Рассматривается задача различения вершин помеченного неорграфа по ассоциированным с ними языкам в алфавите меток. Показано, что верхняя оценка длины слова, различающего две вершины графа, равна половине от числа его вершин.

Ключевые слова: графы с помеченными вершинами, языки в алфавите меток вершин, различение вершин графа.

ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой теоретической кибернетики является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и его операционной среды) [1, 2]. Взаимодействие таких систем зачастую представляется как процесс перемещения автомата по помеченному графу или лабиринту среды. Такое представление интенсивно развивается в работах В. Б. Кудрявцева и его школы [3]. Одной из центральных и актуальных как в теоретическом, так и в прикладном аспектах проблем, возникающих при исследованиях взаимодействия автоматов и графов, является проблема анализа или распознавания свойств графа при различной априорной информации и при различных способах взаимодействия автомата и графа. Один из подходов к решению проблемы анализа графа операционной среды основывается на том, что операционная среда рассматривается как граф с помеченными вершинами. Такие графы возникли первоначально как блок-схемы и схемы программ, а в настоящее время находят применение в задачах навигации роботов [4]. В монографии Ю. В. Капитоновой и А. А. Летичевского [2] с вершинами таких графов естественным образом связаны языки в алфавите меток вершин и показано, что эти языки регулярны и не содержат пустого слова.

В настоящей статье рассматривается задача различения вершин неориентированных графов с помеченными вершинами. Объектом анализа графа выбран язык, ассоциированный с вершиной, то есть множество всех последовательностей меток, соответствующих путям, исходящим из вершины. Ранее автором было найдена достижимая линейная оценка длины слова, различающего две вершины ориентированного помеченного графа, детерминированного по разметке окрестностей вершин [5]. В настоящей работе показано, что для неориентированного помеченного графа эта оценка может быть уменьшена вдвое.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Неопределяемые понятия общеизвестны и их можно найти, например, в [6].

Помеченным графом назовем конечный простой связный неориентированный граф с помеченными вершинами $G = (V, E, M, \mu)$, где V — множество вершин, $|V| = n$, E — множество ребер (т.е. неупорядоченных пар вершин), M — множество меток, $|M| = m$, $\mu : V \rightarrow M$ — сюръективная функция разметки вершин. Под окрестностью Γ_v вершины $v \in V$ будем понимать множество всех вершин, смежных с v . Путем в графе G назовем последовательность вершин $p = v_1 \dots v_k$ такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 1, \dots, k - 1$. Число $k \in \mathbb{N}$ назовем длиной пути p . Меткой $\mu(p)$ пути p назовем слово $w = \mu(v_1) \dots \mu(v_k)$ в алфавите меток M . Будем говорить, что слово w определяется вершиной v_1 . Длину слова w будем обозначать через $d(w)$. Путь с меткой w , начинающейся в вершине v , будем обозначать $p(v, w)$. Инверсией слова $w = \mu(v_1) \dots \mu(v_k)$ назовем слово $w^{-1} = \mu(v_k) \dots \mu(v_1)$.



Множество L_v всех слов $w \in M^+$, определяемых вершиной v , будем называть языком этой вершины. Граф G будем называть приведенным, если для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ из $v_1 \neq v_2$ следует $L_{v_1} \neq L_{v_2}$.

Определим на M^+ частичную операцию \circ композиции слов. Пусть $x, y \in M$, $w_1, w_2 \in M^*$, тогда $w_1x \circ xw_2 = w_1xw_2$ и $w_1x \circ yw_2$ не определено, если $x \neq y$. Композицию k экземпляров слова w будем обозначать w^k .

Введем операцию $\star : V \times M^+ \rightarrow 2^V$ соотношением: для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ через $v \star w$ обозначим множество всех вершин $h \in V$ таких, что существует путь p , соединяющий вершины v и h , и $\mu(p) = w$. Ясно, что если слово $w \in L_v$, то $|v \star w| > 0$ и $|v \star w| = 0$ — в противном случае.

Слово w' называется подсловом слова w , если существуют слова w_1 и w_2 (возможно, однобуквенные) такие, что $w = w_1 \circ w' \circ w_2$. Если $d(w_1) = 1$ ($d(w_2) = 1$), то слово w' называется начальным отрезком (финальным отрезком) слова w .

2. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Функцию разметки $\mu : V \rightarrow M$ будем называть детерминированной или Д-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $g, h \in \Gamma(v)$ из $g \neq h$ следует $\mu(g) \neq \mu(h)$. Помеченный граф G с детерминированной функцией разметки будем называть детерминированным, или Д-графом.

В [7] было показано, что из определения Д-графа вытекают следующие его свойства:

1) помеченный граф G является Д-графом тогда и только тогда, когда для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|v \star w| \leq 1$, причем $|v \star w| = 1$, если $w \in L_v$ и $|v \star w| = 0$ — в противном случае;

2) для любых различных вершин $v_1, v_2 \in V$ и любого слова $w \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ расстояние между вершинами $v_1 \star w$ и $v_2 \star w$ не меньше 4.

3. РАЗЛИЧИЕ ВЕРШИН

Будем говорить, что вершины $v_1, v_2 \in V$ неотличимы, если $L_{v_1} = L_{v_2}$. В противном случае будем называть эти вершины отличимыми.

Следующая теорема дает оценку длины слова, различающего две вершины связного Д-графа.

Теорема 1. Пусть G является связным приведенным СД-графом. Тогда для любых вершин $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$, длина кратчайшего слова из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ не превосходит $n/2$.

Доказательство. Если $\mu(v_1) \neq \mu(v_2)$, то однобуквенное слово $w = \mu(v_1)$ (или $w = \mu(v_2)$) является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ и $d(w) \leq n/2$.

Пусть $\mu(v_1) = \mu(v_2)$. Так как граф G приведенный и связный, то $L_{v_1} \setminus L_{v_2} \neq \emptyset$, $L_{v_2} \setminus L_{v_1} \neq \emptyset$ и, следовательно, $L_{v_1} \oplus L_{v_2} \neq \emptyset$.

Пусть слово u является меткой некоторого кратчайшего пути из v_1 в v_2 . Ясно, что $4 \leq d(u) \leq n$. Действительно, ограничение $d(u)$ снизу вытекает из определения Д-графа, а ограничение сверху определяется числом вершин графа.

Предположим, что $d(u) = n$. По определению Д-графа слово u не может быть палиндромом, следовательно, $u \notin L_{v_2}$. Определим максимальную возможную длину слова $w \in L_{v_1} \oplus L_{v_2}$. Представим слово u в виде композиции его подслов: $u = u_1 \circ u_2 \circ u_3$.

Рассмотрим граф на рис. 1. Здесь стрелкой обозначается направление прохождения пути в соответствии с чтением его метки слева направо.

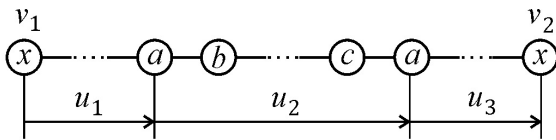


Рис. 1

Из определения Д-графа следует, что $d(u_2) \geq 4$.

Легко видеть, что максимальное значение $d(w)$ достигается при условии, что $u_3 = u_1^{-1}$ и $d(u_2) = 4$. Действительно, слово $u_1b \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$, слово $u_1c \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ и любое из этих слов может быть выбрано в качестве слова w . Оценим длину слова w . В данном случае $n = 2d(u_1) + 2$. Отсюда $d(u_1) =$

$n/2 - 1$. Следовательно, $d(w) = n/2$. Пусть $d(u) < n$. Если $u \in L_{v_1} \oplus L_{v_2}$, то, рассуждая аналогично вышеизложенному, получим, что длина кратчайшего слова из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ не превосходит $n/2$.

Пусть для некоторого натурального k выполняется $\{(u^{-1})^k, u^k\} \subseteq L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Пусть, далее, существует кратчайший начальный отрезок u_1^{-1} слова u^{-1} такой, что $(u^{-1})^k \circ u_1^{-1} \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ и $2 \leq d(u_1) \leq d(u)$. Положим, что существует начальный отрезок u_2 слова u такой, что $u^k \circ u_2 \in L_{v_2}$ и $d(u_1) \leq d(u_2) \leq d(u)$.



Рассмотрим граф на рис. 2. Здесь $1 \leq d(u_3) \leq d(u) - 1$. По построению слово $w = (u^{-1})^k \circ u \circ u_1^{-1}$ является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$. Оценим длину слова w . В данном случае $n \geq (2k + 1)d(u) + 2d(u_1) - 2k - 3$ и $d(w) \leq kd(u) + d(u_1) - k$. Отсюда $d(w) \leq \frac{kn - d(u_1)}{2k + 1} \leq n/2$ для любого $k \geq 1$.

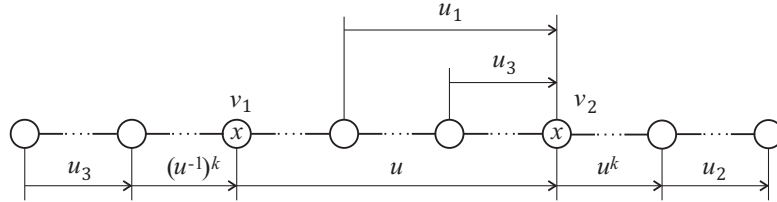


Рис. 2

Пусть для любого натурального k слово $u^k \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Так как граф G конечен, то для некоторого $l \leq k$ выполняется $v_1 \star u^l = v_1$. Обозначим через w кратчайшее слово из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ и положим для определенности, что $w \in L_{v_2}$. Пусть $w = w'y$, где $y \in M$.

Предположим, что пути $p(v_1, w')$ и $p(v_2, w)$ являются простыми (рис. 3).

Пусть пути $p(v_2, w)$ и $p(v_1, w')$ не имеют общих вершин с путем $p(v_1, u^l)$, кроме вершин v_1 и v_2 . Если $d(u) \geq d(w)$, то $d(w) < n/2$. Действительно, пути $p(v_1, w')$ и $p(v_1, u^l)$ содержат в сумме больше вершин, чем путь $p(v_2, w)$.

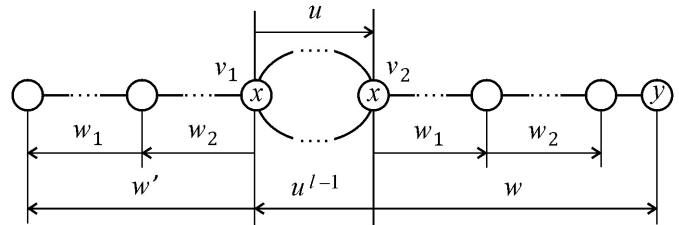


Рис. 3

Пусть $d(w) > d(u)$ и $d(w') = d(u^k \circ u_1)$, где $u = u_1 \circ u_2$. Ясно, что $d(w') \geq 4$. Тогда существует начальный отрезок w'_u слова w' такой, что $d(w'_u) = d(u^{k-1} \circ u_1)$ и $u \circ w'_u \in L_{v_1}$. Следовательно, $u \circ w'_u \in L_{v_2}$ и существует путь $p(v_2, u \circ w'_u)$. Тогда существует начальный отрезок w'_{u_2} слова w' такой, что $d(w'_{u_2}) = d(u^{k-2} \circ u_1)$ и $u^2 \circ w'_{u_2} \in L_{v_1}$. Следовательно, $u^2 \circ w'_{u_2} \in L_{v_2}$ и существует путь $p(v_2, u^2 \circ w'_{u_2})$. Рассуждая далее по индукции, получим, что существуют пути $p(v_2, u^3 \circ w'_{u_3}), \dots, p(v_2, u^{k-1} \circ w'_{u_{k-1}})$. Наконец, существует начальный отрезок w'_{u_1} слова w' такой, что $d(w'_{u_1}) = d(u_1)$ и $u^k w'_{u_1} \in L_{v_1}$. Тогда $u^k \circ w'_{u_1} \in L_{v_2}$ и существует путь $p(v_2, u^k \circ w'_{u_1})$.

С другой стороны, слово $u^{-1} \circ w'_u \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, u^{-1} \circ w'_u)$. Тогда слово $(u^{-1})^2 \circ w'_{u_2} \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, (u^{-1})^2 \circ w'_{u_2})$. Рассуждая далее по индукции, получим, что существуют пути $p(v_1, (u^{-1})^3 \circ w'_{u_3}), \dots, p(v_1, (u^{-1})^{k-1} \circ w'_{u_{k-1}})$. Наконец, существует слово $(u^{-1})^k \circ w'_{u_1} \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, (u^{-1})^k \circ w'_{u_1})$ (рис. 4).

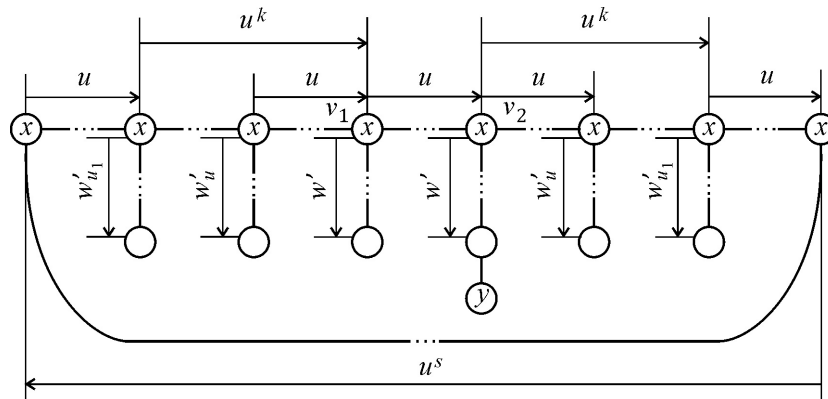


Рис. 4

Оценим длину слова w . В данном случае $n \geq ld(u) - l + 2d(w) - 3 + A$, где $A = (k + 1)kd(u) + 2(k + 1)d(u_1) - (k + 1)k - 2k$. Тогда $d(w) \leq \frac{n}{2} - \frac{l}{2}d(u) + \frac{1}{2}(l - 3) - \frac{A}{2}$. Следовательно, $d(w) < n/2$ при любых допустимых значениях l и $d(u)$.

Пусть слово w_1 совпадает с собственным начальным отрезком слова u^{l-1} . Легко видеть, что в этом случае, по крайней мере, последняя вершина пути $p(v_2, w)$ не принадлежит пути $p(v_2, u^{l-1})$.

Рассмотрим граф на рис. 5. Здесь $w = w_1 \circ w_2 y$, $u = w_1 \circ u_1$, и слово w'_2 является начальным отрезком слова w_2 .

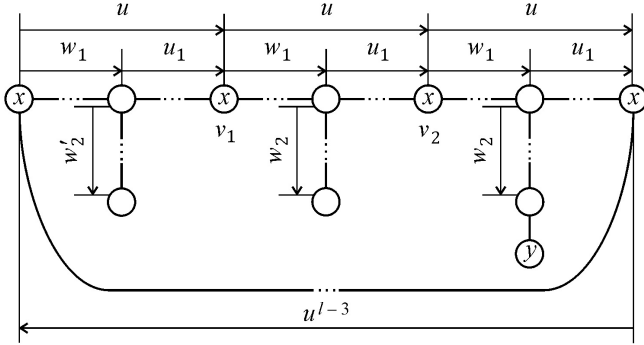


Рис. 5

$d(u_1) \geq d(w_1)$. Оценим длину слова w . В данном случае $n \geq 2d(u) + 2d(w_2) - 3$. Подставим в это неравенство выражения $d(w_2) = d(w) - d(w_1) + 1$ и $d(w_1) = d(u) - d(u_1) + 1$. Тогда $n \geq 2d(w) + 2d(u_1) - 3$. Отсюда $d(w) \leq \frac{n}{2} - \left(d(u_1) - \frac{3}{2}\right)$. Вычитаемое в правой части всегда больше 0, так как $d(u_1) > 1$. Следовательно, $d(w) < n/2$.

Пусть $w = u^k \circ u_1 \circ w_2 y$, где $y \in M$, $u = u_1 \circ u_2$. Здесь $k \leq (l-1)/2$. Действительно, в противном случае слово $u^{k-1} \circ w_2 y \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$, что невозможно.

Так как w является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$, то слово $u^k \circ u_1 \circ w_2 \in L_{v_1}$ и существует путь $p(v_1, u^k \circ u_1 \circ w_2)$. Тогда слово $u^{k-1} \circ u_1 \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, u^{k-1} \circ u_1 \circ w_2)$. Рассуждая по индукции, получаем, что существуют пути $p(v_1, u^{k-2} \circ u_1 \circ w_2), \dots, p(v_1, u \circ u_1 \circ w_2)$ и $p(v_1, u_1 \circ w_2)$. Из последнего следует, что слово $u_2^{-1} \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, u_2^{-1} \circ w_2)$. Тогда слово $u^{-1} \circ u_2^{-1} \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, u^{-1} \circ u_2^{-1} \circ w_2)$. Следовательно, слово $(u^{-1})^2 \circ u_2^{-1} \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, (u^{-1})^2 \circ u_2^{-1} \circ w_2)$. Рассуждая по индукции, получаем, что существуют пути $p(v_1, (u^{-1})^3 \circ u_2^{-1} \circ w_2), \dots, p(v_1, (u^{-1})^{k-1} \circ u_2^{-1} \circ w_2)$. Таким образом, в графе G существует, по крайней мере, $((2k-2)d(w_2) - (2k-2))$ вершин, не принадлежащих пути $p(v_2, w)$ (рис. 6).

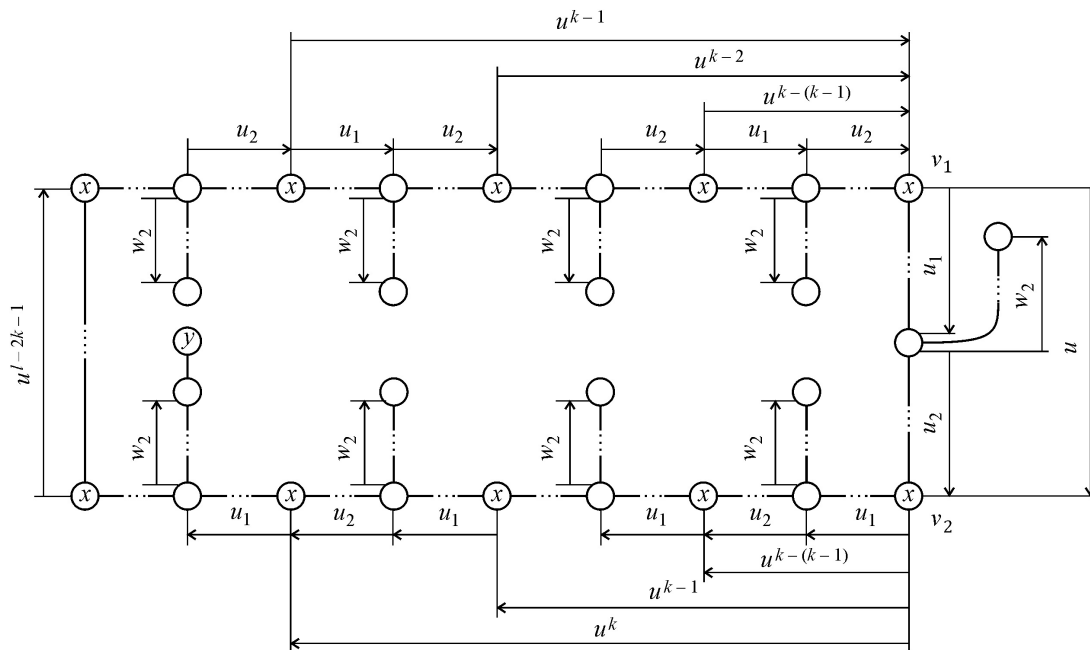


Рис. 6



Оценим длину слова u . В данном случае $n \geq ld(u) - l + d(w_2) + A$, где $A = (2k - 2)d(w_2) - (2k - 2)$. Отсюда, $d(u) \leq \frac{n}{l} + 1 - \frac{1}{l}d(w_2) - A$. Ясно, что $d(u)$ тем больше, чем меньше A . Следовательно, от величины A зависит и величина $d(w)$. Значение A обращается в 0, если $d(w_2) = 1$. Следовательно, в этом случае $d(w)$ достигает максимума при прочих равных условиях.

Пусть $d(w_2) = 1$. Рассмотрим граф на рис. 7. Здесь $u_1 \circ u_2 = u$, $u^k \circ u_1 y = w$. Если $d(u^k \circ u_1) < d((u^{-1})^{l-k-1} \circ u_2^{-1})$, то $(u^{-1})^{l-k-1} \circ u_2^{-1} y \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$ и $d((u^{-1})^{l-k-1} \circ u_2^{-1} y) < d(w)$, что невозможно. Следовательно, $k \leq (l - 1)/2$ и $d(u_1) \leq d(u)/2$. Оценим длину слова w . В данном случае $n \geq ld(u) - l + 1$. Отсюда $d(u) \leq (n + l - 1)/l$. Так как $d(w) = d(u^k \circ u_1 y) = kd(u) - k + d(u_1)$, то $d(w) \leq (kn + kl - k)/l + d(u_1) - k$. Так как $d(u_1) \leq d(u)/2$ и $k \leq (l - 1)/2$, то $d(w) \leq n/2$.

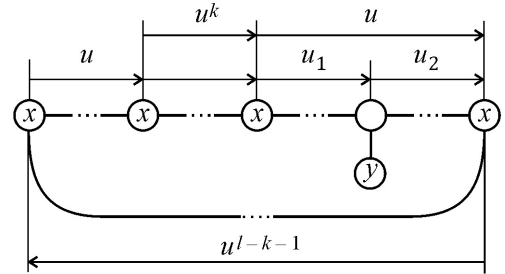


Рис. 7

Предположим, что путь $p(v_2, w)$ содержит цикл, например, $p(v_2 \star w_1, w_2 \circ w_3)$ (рис. 8). Здесь G' обозначает неориентированное дерево с корнем в вершине v_1 , ветви которого помечены всеми начальными отрезками слова w . Принципы выделения подграфа G' из графа G будут объяснены ниже.

Пусть путь $p(v_1, w')$ содержит цикл $p(v_1 \star w_1, w_2 \circ w_3)$. По определению Д-графа путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_4)$ определен единственным образом. Тогда слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$, а слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$. Легко видеть, что $d(w_1 \circ w_2 \circ w_4 y) < d(w)$. Следовательно, $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y$ является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$, что невозможно.

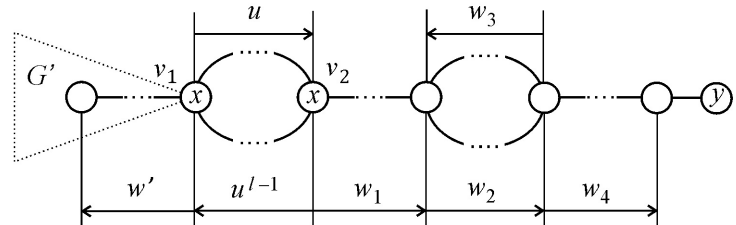


Рис. 8

Пусть пути $p(v_2, w)$ и $p(v_1, w')$ не имеют общих вершин с путем $p(v_1, u^l)$, кроме вершин v_1 и v_2 . Если $d(u) \geq d(w)$, то $d(w) < n/2$. Действительно, так как путь $p(v_1, u)$ является простым по определению, то длина слова u не превосходит n/l , а минимальное возможное значение l равно 2.

Пусть $d(u) < d(w)$ и $w = w_1 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4 y$. Предположим, что длины слов w_1, w_2, w_3, w_4 совпадают и $s = 1$. Тогда существует путь $P(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4)$, не содержащий циклов. Слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_2}$ и его длина меньше, чем $d(w)$. Следовательно, это слово принадлежит L_{v_1} и существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_4 y)$. Так как $d(w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4 y) < d(w)$, то $w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4 y)$. Так как $d(w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4 y) < d(w)$, то $w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4 y)$. Слово $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_4 y \in L_{v_2}$ и его длина меньше, чем $d(w)$. Следовательно, это слово принадлежит L_{v_1} и существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_4 y)$. Так как длины слов $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_1^{-1}$, $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1} \circ w_4$, $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1}$ меньше, чем $d(w)$, то все эти слова принадлежат $L_{v_1} \cap L_{v_2}$, и существуют пути с соответствующими метками из вершины v_1 (рис. 9).

Оценим число $n(G')$ вершин в подграфе G' . В данном случае $n(G') \geq 3d(w_1) + 4d(w_2) + 4d(w_3) + 4d(w_4) - 9$. Легко видеть, что $d(w) = d(w_1) + 2d(w_2) + d(w_3) + d(w_4) - 3$. Таким образом, значение $d(w)$, по крайней мере, в 2 раза меньше, чем число вершин в подграфе G' . Следовательно, $d(w) < n/2$. С ростом параметра s число вершин в подграфе G' будет только возрастать. Таким образом, значение $d(w)$ не превысит $n/2$.

Предположим, что одно из слов $w_1, w_1 \circ w_2$ или $w_1 \circ w_2 \circ w_4$ является начальным отрезком слова u^l (или $(u^{-1})^l$). Пусть для определенности слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4$ является начальным отрезком u^l . По определению Д-графа все вершины пути $p(v_2, w_1 \circ w_2 \circ w_4)$ являются также вершинами пути $p(v_1, u^l)$. Так как $w_1 \circ w_2 \circ w_4 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$, то все вершины пути $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_4)$ являются также вершинами пути $p(v_1, u^l)$. Тогда число вершин подграфа G' , не являющихся вершинами пути $p(v_1, u^l)$, уменьшится на $d(w_1) + d(w_2) + d(w_4) - 2$. Таким образом, число таких вершин будет больше, чем $d(w)$. Следовательно, и в этом случае $d(w) < n/2$. \square



References

1. Glushkov V. M., Tsejtlyn G. E., Yuschenko E. L. *Algebra. Iazyki. Programirovanie* [Algebra. Languages. Programming]. Kiev, Naukova dumka, 1989, 378 p. (in Russian).
2. Kapitonova Yu. V., Letichevsky A. A. *Matematicheskaya teoriya proektirovaniya vychislitel'nykh sistem* [Mathematical Theory of Computational Systems Design]. Moscow, Nauka, 1988, 298 p. (in Russian).
3. Kilibarda G., Kudryavtsev V. B., Ushchumlich Sh. Independent systems of automata on mazes. *Diskretnaya matematika*, 2003, vol. 15, no. 2, pp. 3–39 (in Russian).
4. Dudek G., Jenkin M. *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge University Press, 2000, 280 p.
5. Sapunov S. V. Ekvivalentnost' pomechennykh grafov [Vertex Labeled Graphs Equivalence. *Trudy IPMM NANU*, 2002, vol. 7, pp. 162–167 (in Russian).
6. Hopcroft J. E., Motwani R., Ullman J. D. *Vvedenie v teoriyu avtomatov, iazykov i vychislenii* [Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation]. Moscow, Izdat. dom «Williams», 2002, 528 p. (in Russian).
7. Grunsky I. S., Sapunov S. V. Reconstruction of the graph of operating environment of mobile robot by vertex-labeling sufficient for further navigation. *Iskusstvennyj intellekt*, 2012, no. 4, pp. 420–428 (in Russian).
8. Grunsky I. S., Sapunov S. V. Identifikatsiya verшин pomechennykh grafov [Vertex Identification on Vertex Labeled Graphs]. *Trudy IPMM NANU*, 2010, vol. 21, pp. 86–97 (in Russian).

УДК 519.872

АНАЛИЗ ЗАМКНУТЫХ НЕНАДЕЖНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

И. Е. Тананко¹, Н. П. Фокина²

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, TanankoIE@info.sgu.ru

²Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: FokinaNP.sgu@gmail.com

Рассматривается замкнутая ненадежная сеть массового обслуживания с групповыми переходами. Основным результатом статьи является стационарное распределение вероятностей состояний сетей обслуживания данного типа.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, ненадежный прибор, групповые переходы требований, анализ сетей массового обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сети массового обслуживания широко используются в качестве моделей больших сложных дискретных стохастических систем с сетевой структурой. Существует большой класс систем, изменение состояния которых происходит через фиксированные, как правило, равные интервалы времени. К таким системам относятся, например, сети, в которых используется асинхронный способ передачи данных (так называемые сети АТМ). Данная технология основана на передаче данных в виде ячеек фиксированного размера. Другим примером является конвейерное производство, в котором процесс преобразования и перемещения изделий разделен на последовательность стадий. Достаточно точными моделями перечисленных систем являются сети массового обслуживания с дискретным временем.

Основная сложность исследования сетей массового обслуживания с дискретным временем заключается в возможности наступления одновременно нескольких событий. Точные методы анализа сетей массового обслуживания с тандемной и циклической топологией и геометрически распределенными длительностями обслуживания требований системами уже получены [1, 2]. В статьях [3, 4] получило продолжение развитие методов анализа сетей такого класса. В статье [3] дается точный метод анализа тандемных сетей обслуживания с произвольным входящим потоком требований. В статье [4] рассматривается замкнутая циклическая сеть обслуживания с системами, имеющими геометрически распределенную длительность обслуживания требований. Исследуются асимптотические свойства характеристик систем обслуживания сетей такого класса при увеличении числа систем в сети обслуживания.



Использование дискретной шкалы времени в сетях массового обслуживания с общей топологией приводит к тому, что требования могут поступать в системы обслуживания группами.

В [5] рассматриваются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований, с дискретным и непрерывным временем. Вводится маршрутная цепь Маркова, описывающая переходы групп требований. Доказано существование стационарного распределения маршрутной цепи. При условии, что функция интенсивности обслуживания группы требований имеет определенный вид, доказана теорема о существовании распределения вероятностей состояний сети обслуживания в мультипликативной форме. Еще представлены стационарные распределения вероятностей числа требований в системах обслуживания до поступления и после ухода из них групп требований [6]. В статье [7], в отличие от [5], рассматриваются исключительно замкнутые сети массового обслуживания с дискретным временем, с групповым поступлением и обслуживанием требований. Для определенного класса функций интенсивности обслуживания групп требований получено стационарное распределение вероятностей состояний сети обслуживания. В качестве моделей сетей связи в [8, 9] использованы открытые сети массового обслуживания с дискретным временем, которые являются практическим приложением результатов статей [5–7]. Существенным вкладом в развитие теории сетей массового обслуживания с дискретным временем являются результаты, где длительности обслуживания требований являются экспоненциально распределенными случайными величинами [10]. При этом выход обслуженных требований из систем замкнутой сети обслуживания синхронизирован во времени. Таким образом, рассматриваемая сеть обслуживания является сетью с групповыми переходами требований. Получены выражения для средних характеристик систем обслуживания.

Исследование систем и сетей массового обслуживания с ненадежными элементами и дискретным временем является новым направлением развития теории массового обслуживания. Работы, посвященные надежности систем и сетей массового обслуживания, сводятся к исследованию свойств и разработке методов анализа систем и сетей массового обслуживания с изменяемыми во времени параметрами.

Примером является исследование ненадежных систем обслуживания, в которых прибор может переходить из работоспособного состояния в неработоспособное и обратно. Неработоспособное состояние характеризуется тем, что интенсивность обслуживания прибора равна нулю на всем протяжении времени восстановления прибора. В частности, в статье [11] рассматривается ненадежная система обслуживания типа $Geo/D/1$ с дискретным временем. Получены вероятности блокировки требований в системе обслуживания в момент перехода прибора в неработоспособное состояние. Также [12] представлены характеристики ненадежной системы обслуживания, в которой вновь приходящие в систему требования могут ее покинуть с определенной вероятностью, если застанут прибор в неработоспособном состоянии. К тому же [13] рассматривается открытая сеть массового обслуживания с общей топологией и несколькими классами требований. Длительность обслуживания требований системами сети имеет геометрическое распределение. Требования из источника поступают в сеть с интенсивностью, зависящей от числа требований в сети обслуживания. Приборы систем могут переходить в неработоспособное состояние и восстанавливаться через случайные интервалы времени. Эволюция этой сети обслуживания описывается цепью Маркова, получено стационарное распределение вероятностей состояний сети обслуживания.

В данной статье рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания. Каждая из систем обслуживания содержит число приборов, равное числу требований в сети. Длительность обслуживания требований в каждой из систем является экспоненциально распределенной случайной величиной. Моменты выхода требований из систем обслуживания синхронизированы во времени, поэтому переходы требований между системами осуществляются группами через фиксированные интервалы времени. Для этой сети обслуживания получено стационарное распределение вероятностей состояний, а также выражения для средних характеристик систем обслуживания.

1. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Пусть N — замкнутая сеть массового обслуживания с L системами массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, содержащими H одинаковых обслуживающих приборов. Предполагается, что длительность обслуживания требований в системе S_i имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i .



В сети обслуживания находится H требований одного класса. Вероятности перехода требований между системами сети обслуживания определяются маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, L$, где θ_{ij} — вероятность того, что требование после обслуживания в системе S_i перейдет в систему S_j . Состояние сети N определяется вектором $s = (s_i)$, $i = 1, \dots, L$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i . Обозначим через X множество состояний сети, $I = \{1, \dots, L\}$ — множество номеров систем массового обслуживания.

Для синхронизации событий, реализуемых в сети N в процессе ее функционирования, используется последовательность интервалов времени фиксированной длительности ζ , называемых *слотами*. Моменты начала и окончания слота обозначим соответственно через η и τ .

Система S_i , $i = 1, \dots, L$, в течение каждого слота может находиться в работоспособном состоянии или в неработоспособном. При пребывании системы S_i в работоспособном состоянии каждый из H приборов этой системы может обслуживать требования с интенсивностью μ_i . Если же система S_i находится в неработоспособном состоянии, то $\mu_i = 0$ для всех приборов системы обслуживания.

В сети N выполняются следующие правила упорядочения одновременных событий: все поступления и уходы требований, а также изменение состояния работоспособности систем обслуживания производятся в конце соответствующих слотов. Если в течение одного слота имеет место поступление, уход и изменение состояния работоспособности, всегда полагаем, что сначала производится уход, затем поступление требований и в завершение — изменение состояния работоспособности.

В момент η определяется состояние сети $s = (s_i)$, $i = 1, \dots, L$, в котором сеть пребывает в течение слота. Если сеть N находится в работоспособном состоянии, требования, завершившие обслуживание в системе в течение слота, остаются в этих системах до момента τ . В момент τ формируется вектор $d = (d_i)$, $i = 1, \dots, L$, требований, выходящих после завершения обслуживания из систем, где $d_i \leq s_i$ — число требований, выходящих из системы S_i . Вектор d затем преобразуется в вектор $a = (a_i)$, $i = 1, \dots, L$, требований, входящих в конце слота в системы обслуживания сети. В векторе a компонента a_j , $j \in I$, — число требований, которые поступят в систему S_j . Так как сумма элементов вектора d равна сумме элементов вектора a , будет сформировано новое состояние сети обслуживания $s' = s - d + a$. Все векторы d и a будем называть векторами перемещений. Множество всех векторов перемещений обозначим через Y .

Длительности пребывания систем S_i , $i = 1, \dots, L$, в работоспособном или неработоспособном состояниях являются геометрически распределенными случайными величинами с параметрами α_i и β_i соответственно. При этом, если система S_i в момент времени τ находится в работоспособном состоянии, то с вероятностью α_i она перейдет в неработоспособное состояние, в котором будет пребывать в течение, по крайней мере, одного слота. С вероятностью $1 - \alpha_i$ система обслуживания останется в работоспособном состоянии.

Обозначим через A_i и B_i случайные величины, отображающие число слотов, в течение которых система S_i находится в работоспособном и неработоспособном состояниях соответственно.

Тогда вероятности пребывания системы обслуживания S_i в работоспособном и неработоспособном состояниях соответственно:

$$P(A_i = n) = (1 - \alpha_i)^{n-1} \alpha_i \quad \text{и} \quad P(B_i = n) = (1 - \beta_i)^{n-1} \beta_i,$$

где $n = \{1, 2, \dots\}$.

Переход системы обслуживания S_i из неработоспособного в работоспособное состояние осуществляется с вероятностью β_i . С вероятностью $1 - \beta_i$ система обслуживания с момента η останется в неработоспособном состоянии.

Требования, находящиеся в неработоспособной системе S_i , ожидают ее восстановления. Требования, завершившие обслуживание в работоспособных системах обслуживания, могут поступать в системы, находящиеся в неработоспособном состоянии в соответствии с маршрутной матрицей Θ .

Эволюцию сети N можно рассматривать как два независимо протекающих параллельно процесса: процесс отказов и восстановлений систем массового обслуживания и вложенный в него процесс обслуживания и переходов групп требований между системами обслуживания.



2. ПРОЦЕСС ОТКАЗОВ И ВОССТАНОВЛЕНИЙ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим последовательность уходов и поступлений требований в момент τ с учетом надежности системы обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$. Возможны 4 варианта.

1. Система обслуживания находится в работоспособном состоянии в момент времени η . Тогда в предыдущем слоте (до момента η) происходит следующая последовательность событий: уход обслуженных требований, поступление требований из смежных систем обслуживания.

2. В момент τ система S_i находилась в работоспособном состоянии, а с момента η будет находиться в неработоспособном состоянии. Тогда в текущем слоте имеет место следующая последовательность событий: уход обслуженных требований из системы S_i , поступление требований из смежных систем обслуживания и переход системы S_i в неработоспособное состояние.

3. Система S_i находится в неработоспособном состоянии до и после момента η . В этом случае в текущем слоте требования могут только поступать в рассматриваемую систему из других систем обслуживания. Обслуживание требований, находящихся в неработоспособной системе не производится и не предполагается уход необслуженных требований из неработоспособной системы.

4. В момент τ система S_i находилась в неработоспособном состоянии, а с момента η будет находиться в работоспособном состоянии. Тогда в текущем слоте в эту систему могут поступить требования из смежных систем обслуживания, обслуживание и уход требований из этой системы не производится.

Найдем математическое ожидание длительности обслуживания требований ненадежным прибором изолированной системы обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$.

В дальнейшем, если это не требуется, не будем использовать индексы, обозначающие номер системы обслуживания. Обозначим через b вероятность того, что требование будет ожидать восстановления этого прибора, μ — интенсивность обслуживания требований одним прибором, β — вероятность восстановления системы обслуживания. Известно, что

$$E(B) = 1/\beta.$$

Длительность обслуживания требования ненадежным прибором может быть представлена последовательностью счетного числа этапов обслуживания. Первый этап длительностью $1/\mu$ отображает процесс полного обслуживания требования абсолютно надежным прибором. После завершения первого этапа обслуживания с вероятностью $1 - b$ завершается обслуживание требования и оно покидает систему. С вероятностью b наступает второй этап длительностью $1/\beta$, отображающий пребывание системы обслуживания в неработоспособном состоянии. Третий и последующие этапы длительностью $1/\beta$ отображают возможность заставить требование за повторными ожиданиями восстановления системы обслуживания. Второй и последующие этапы наступают с вероятностью b и с вероятностью $1 - b$ алгоритм представления обслуживания требования ненадежным прибором заканчивается.

Обозначим \tilde{v} — математическое ожидание длительности обслуживания требования ненадежным прибором. Тогда

$$\tilde{v} = \mu^{-1} + b(\beta^{-1} + b(\beta^{-1} + \dots)) = \mu^{-1} + b\beta^{-1}(1 + b + b^2 + \dots) = \mu^{-1} + \frac{b}{(1 - b)\beta}.$$

Определим вероятность b . Поскольку момент начала обслуживания требования находится в интервале времени, когда прибор работоспособен, то длительность интервала времени с момента начала обслуживания требования до момента отказа прибора системы обслуживания является геометрически распределенной случайной величиной с параметром α . Тогда

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} P(A = k)e^{-\mu k \zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^{k-1} e^{-\mu k \zeta}.$$

Здесь $e^{-\mu k \zeta}$ — вероятность того, что для обслуживания требования необходимо больше $k\zeta$ единиц времени; $P(A = k)$ — вероятность того, что длительность пребывания системы обслуживания в работоспособном состоянии равна k слотам.



Заметим, что длительность обслуживания требований ненадежным прибором не является экспоненциально распределенной случайной величиной. Поэтому стационарное распределение вероятностей состояний сети массового обслуживания не имеет мультипликативной формы.

В работе [14] показано, что для многих практических приложений и, в частности, для исследования ненадежных сетей, допустимо использование в качестве моделей замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с абсолютно надежными системами, но с измененным вектором интенсивностей обслуживания.

В данном случае вместо сети N с ненадежными системами обслуживания будем в дальнейшем использовать экспоненциальную сеть массового обслуживания \tilde{N} с абсолютно надежными системами обслуживания, которая является приближением исходной сети N . Все параметры сети \tilde{N} совпадают с соответствующими параметрами сети обслуживания N за исключением интенсивностей обслуживания. В качестве интенсивности обслуживания требований прибором системы обслуживания сети \tilde{N} будем использовать $\tilde{\mu} = 1/\tilde{\nu}$.

3. ПРОЦЕСС ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПЕРЕХОДОВ ГРУПП ТРЕБОВАНИЙ

Представим основные вероятностно-временные характеристики процесса обслуживания и переходов групп требований замкнутой сети массового обслуживания [15].

Если сеть \tilde{N} находится в состоянии $s \in X$, то с вероятностью $p(s, d)$ формируется вектор $d \in Y$, который затем с вероятностью $p(d, a)$ преобразуется в вектор $a \in Y$.

Пусть в начале слота в системе S_i , $i = 1, \dots, L$, пребывает s_i требований. Тогда вероятность завершения обслуживания в течение этого слота d_i требований определяется биномиальным распределением с параметром $\tilde{\mu}_i \zeta$, $0 \leq \tilde{\mu}_i \zeta \leq 1$. Тогда

$$p(s, d) = \prod_{i=1}^L \binom{s_i}{d_i} (\tilde{\mu}_i \zeta)^{d_i} (1 - \tilde{\mu}_i \zeta)^{s_i - d_i}.$$

При независимой маршрутизации требований в сети обслуживания вероятности преобразования вектора d в вектор a имеют вид [16]

$$p(d, a) = \sum_{d_{ij} \in D} \prod_{i=1}^L \binom{d_i}{d_{i1}, \dots, d_{iL}} \prod_{j=1}^L \theta_{ij}^{d_{ij}}, \quad d, a \in Y,$$

где $D = \left\{ d_{ij}, i = 1, \dots, L, j \in V_j : \sum_{i=1}^L d_{ij} = a_j \right\}$, V_i — множество номеров выходных смежных с S_i систем обслуживания.

На множестве Y определим маршрутную цепь Маркова W с вероятностями переходов

$$\gamma(d, a) = \begin{cases} p(d, a), & \text{если } p(s, d) > 0, \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где δ_{da} — символ Кронекера, $d, a \in Y$.

Интенсивность перехода сети обслуживания из состояния s в состояние s' определяется выражением

$$p(s, s') = \sum_{\substack{d, a \in Y \\ s' = s - d + a}} p(s, d, a),$$

где $p(s, d, a)$ — условная вероятность перехода цепи W из состояния d в состояние a при пребывании сети \tilde{N} в состоянии s

$$p(s, d, a) = p(s, d) \gamma(d, a), \quad s \in X, \quad d, a \in Y.$$

Стационарное распределение $\pi = (\pi(s))$, $s \in X$, вероятностей состояний сети обслуживания является решением уравнения $\pi P = \pi$ с условием

$$\sum_{s \in X} \pi(s) = 1,$$



где $P = (p(s, s'))$, $s, s' \in X$, матрица вероятностей переходов сети обслуживания.

Используя стационарное распределение, можно вычислить основные стационарные характеристики сети \tilde{N} . Математическое ожидание (м. о.) числа требований в системе S_i

$$\bar{s}_i = \sum_{k=1}^H k \sum_{\substack{s \in X: \\ s_i = k}} \pi(s), \quad i = 1, \dots, L.$$

Поскольку число требований в сети \tilde{N} равно числу приборов в каждой из систем обслуживания, то м. о. длительности пребывания требований в системе S_i

$$\tilde{v}_i = 1/\tilde{\mu}_i, \quad i = 1, \dots, L.$$

Интенсивность потока групп требований в систему S_i определяется из формулы Литтла

$$\lambda_i = \bar{s}_i/\tilde{v}_i, \quad i = 1, \dots, L.$$

Математическое ожидание длительности пребывания системы S_i соответственно в работоспособном и неработоспособном состояниях

$$E(A_i) = 1/\alpha_i, \quad E(B_i) = 1/\beta_i, \quad i = 1, \dots, L.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе ненадежные сети массового обслуживания с групповыми переходами требований могут быть использованы в качестве моделей стохастических систем с сетевой структурой и дискретным временем функционирования, таких как, например, сети связи и компьютерные сети. Предложенный метод анализа сетей обслуживания обеспечивает возможность исследования свойств систем этого класса для решения задач, связанных с их проектированием и модификацией.

Библиографический список

1. Morrison J. A. Two discrete-time queues in tandem // IEEE Trans. Commun. 1979. Vol. 27, № 3. P. 563–573.
2. Вохта О., Kelly F., Konheim A. The product form for sojourn time distributions in cyclic exponential queues // J. of ACM. 1984. Vol. 31. P. 128–133.
3. Neely M. J. Exact queueing analysis of discrete time tandems with arbitrary arrival processes // IEEE Proc. of the Intern. Conf. of Commun. Paris, 20–24 June, 2004. P. 1–5.
4. Pestien V., Ramakrishnan S. Monotonicity and asymptotic queue-length distribution in discrete-time networks // Queueing Systems. 2002. Vol. 40. P. 313–331.
5. Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
6. Henderson W., Taylor P. G. Some new results on queueing networks with batch movement // J. Appl. Prob. 1991. Vol. 28. P. 409–421.
7. Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., van Dijk N. M. Closed queueing networks with batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
8. Henderson W., Northcote B. S., Taylor P. G. Triggered batch movement in queueing networks // Queueing Systems. 1995. Vol. 21. P. 125–141.
9. Woodward M. E. Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues // Computer Communications. 1998. Vol. 21. P. 1530–1543.
10. Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П. Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 41–46.
11. Bakeva V., Kolev N. Minimization of the blocking time of the unreliable Geo/G_d/1 queueing system // Math. Commun. 1999. Vol. 4. P. 1–10.
12. Liu Z., Gao S. Reliability indices of a Geo/G/1/1 Erlang loss system with active breakdowns under Bernoulli schedule // Intern. J. of Manag. Sci. and Eng. Manag. 2010. Vol. 5(6). P. 433–438.
13. Malchin C., Daduna H. Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model // Queueing Systems. 2010. Vol. 65, № 4. P. 385–421.
14. Vinod B., Altiok T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // J. Opl. Res. Soc. 1986. Vol. 37, № 3. P. 309–316.
15. Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П. Метод анализа сетей массового обслуживания



ния с групповыми переходами требований // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 143–145.

16. Boucherie R. J., Dijk N. M. van Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // *Adv. Appl. Probab.* 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.

Analysis of Closed Unreliable Queueing Networks with Batch Movements of Customers

I. E. Tananko, N. P. Fokina

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, TanankolE@info.sgu.ru, FokinaNP.sgu@gmail.com

Closed unreliable queueing network with batch movements is considered. The main result of the paper is the steady state distribution for given type queueing networks.

Key words: queueing networks, unreliable server, batch movements of customers, analysis of queueing networks.

References

- Morrison J. A. Two discrete-time queues in tandem. *IEEE Trans. Commun.*, 1979, vol. 27, no. 3, pp. 563–573.
- Boxma O., Kelly F., Konheim A. The product form for sojourn time distributions in cyclic exponential queues. *J. of ACM.*, 1984, vol. 31, pp. 128–133.
- Neely M. J. Exact queueing analysis of discrete time tandems with arbitrary arrival processes. *IEEE Proc. of the Intern. Conf. of Commun.*, Paris, 20-24 June 2004, pp. 1–5.
- Pestien V., Ramakrishnan S. Monotonicity and asymptotic queue-length distribution in discrete-time networks. *Queueing Systems.*, 2002, vol. 40, pp. 313–331.
- Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services. *Queueing Systems.*, 1990, vol. 6, pp. 71–88.
- Henderson W., Taylor P. G. Some new results on queueing networks with batch movement. *J. Appl. Prob.*, 1991, vol. 28, pp. 409–421.
- Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., van Dijk N. M. Closed queueing networks with batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 59–70.
- Henderson W., Northcote B. S., Taylor P. G. Triggered batch movement in queueing networks. *Queueing Systems*, 1995, vol. 21, pp. 125–141.
- Woodward M. E. Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues. *Computer Communications*, 1998, vol. 21, pp. 1530–1543.
- Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of heterogeneous queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 41–46 (in Russian).
- Bakeva V., Kolev N. Minimization of the blocking time of the unreliable $Geo/G_d/1$ queueing system. *Math. Commun.*, 1999, vol. 4, pp. 1–10.
- Liu Z., Gao S. Reliability indices of a $Geo/G/1/1$ Erlang loss system with active breakdowns under Bernoulli schedule. *Int. J. of Manag. Sci. and Eng. Manag.*, 2010, vol. 5(6), pp. 433–438.
- Malchin C., Daduna H. Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model. *Queueing Systems*, 2010, vol. 65, no. 4, pp. 385–421.
- Vinod B., Altiok T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality. *J. Opl. Res. Soc.*, 1986, vol. 37, no. 3, pp. 309–316.
- Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. A method for analysis of queueing networks with batch movements of customers. *Comp. Nauki i Inf. Tech. : Mater. Mejdun. Nauch. Conf. Saratov*, 2009, pp. 142–145 (in Russian).
- Boucherie R. J., van Dijk N. M. Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions. *Adv. Appl. Probab.*, 1991, vol. 23, no. 1, pp. 152–187.