

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2025

Том 25

Выпуск 3



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS





Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2025 Том 25

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Антонов С. Ю., Антонова А. В.** О кратностях некоторых градуированных кохарактеров матричной супералгебры  $M^{(2,2)}(F)$  306

**Belkina T. A., Kurochkin S. V., Tarkhova A. E.** Asymptotics of optimal investment behavior under a risk process with two-sided jumps  
[Белкина Т. А., Курочкин С. В., Тархова А. Е. Асимптотики оптимального инвестиционного поведения в модели риска с двусторонними скачками] 316

**Yurko V. A.** Solution of the inverse spectral problem for differential operators on a finite interval with complex weights  
[Юрко В. А. Решение обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов на конечном интервале с комплексными весами] 325

#### Механика

**Дегилевич Е. А., Смирнов А. С.** Колебания конечномерных моделей растяжимой цепной линии 332

**Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А.** Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть II. Алгоритмы исследования оболочечных конструкций 345

**Крылова Е. Ю., Барышев Д. А., Трибис И. А., Андрейченко Д. К., Папкина И. В.** Статика и динамика сетчатой нанопластины с электрическим приводом 366

**Муслов С. А., Сухочев П. Ю.** К вопросу о физическом смысле материальных констант гиперупругих моделей 380

**Радченко В. П., Глебов В. Е.** Влияние геометрической формы надреза на релаксацию остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре при термоэкспозиции 391

**Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В.** Термосиловое резонансное нагружение трехслойной пластины 406

**Тукмаков Д. А.** Численное исследование коагуляции дисперсных включений при вдуве капельных фракций в поток запыленной среды 419

#### Информатика

**Тяпаев Л. Б., Анашин В. С.** Дендрограммы электроэнцефалограмм и их характеристика на основе метрик 434

### Приложение

#### Юбилей

**Бредихин Д. А., Макеев Н. Н., Поплавский В. Б.** Наследие Вагнера. К 90-летию кафедры геометрии Саратовского государственного университета 442

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

#### Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

#### Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

#### Верстка

Халова Виктория Анатольевна

#### Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

#### Адрес учредителя, издателя

#### и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49,  
52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.08.2025.

Подписано в свет 29.08.2025.

Выход в свет 29.08.2025.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 17,67 (19,0).

Тираж 100 экз. Заказ 80-Т

Отпечатано в типографии  
Саратовского университета.

#### Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2025



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

Website: <https://mmi.sgu.ru>

### Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

- Antonov S. Yu., Antonova A. V.** Multiplicities of some graded cocharacters of the matrix superalgebra  $M^{(2,2)}(F)$  306

- Belkina T. A., Kurochkin S. V., Tarkhova A. E.** Asymptotics of optimal investment behavior under a risk process with two-sided jumps 316

- Yurko V. A.** Solution of the inverse spectral problem for differential operators on a finite interval with complex weights 325

#### Mechanics

- Degilevich E. A., Smirnov A. S.** Oscillations of finite-dimensional models of an extensible catenary 332

- Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A.** Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part II. Algorithms for studying shell structures 345

- Krylova E. Yu., Baryshev D. A., Tribis I. A., Andreichenko D. K., Papkova I. V.** Statics and dynamics of an electrically driven mesh nanoplate 366

- Muslov S. A., Sukhochev P. Yu.** On the question of the physical interpretation of material constants of hyperelastic models 380

- Radchenko V. P., Glebov V. E.** The effect of the geometric shape of an incision on the relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder during thermal exposure 391

- Starovoitov E. I., Leonenko D. V.** Thermal force resonant loading of a three-layer plate 406

- Tukmakov D. A.** Numerical study of coagulation of dispersed inclusions during injection of droplet fractions into a flow of dusty medium 419

#### Computer Sciences

- Тырапов L. B., Anashin V. S.** Dendrograms of electroencephalograms and their characterization based on metrics 434

### Appendix

#### Anniversaries

- Bredikhin D. A., Makeev N. N., Poplavski V. B.** Legacy of Viktor Wagner. On the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University 442

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Пурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

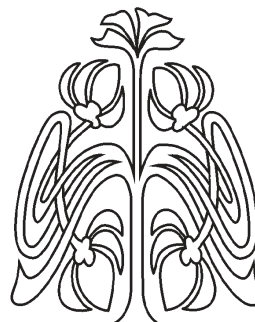
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

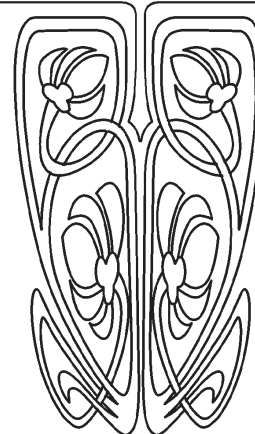
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**







## МАТЕМАТИКА

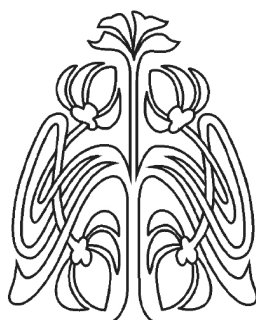
Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 306–315

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 306–315

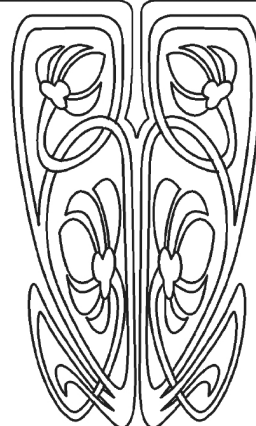
<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-306-315>

EDN: <https://elibrary.ru/AWFIHL>



Научный  
отдел



Научная статья

УДК 512

### О кратностях некоторых градуированных кохарактеров матричной супералгебры $M^{(2,2)}(F)$

С. Ю. Антонов<sup>1✉</sup>, А. В. Антонова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский инновационный университет имени В. Г. Тимирязова (ИЭУП), Россия, 420111, г. Казань, ул. Московская, д. 42

<sup>2</sup>Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51

**Антонов Степан Юрьевич**, преподаватель кафедры высшей математики, antonovst-vm@rambler.ru, ORCID: 0000-0003-1705-3929, AuthorID: 110936

**Антонова Алина Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, antonovakazan@rambler.ru, ORCID: 0000-0001-7047-7275, SPIN: 4476-9689, AuthorID: 279836

**Аннотация.** Пусть  $F$  — произвольное поле характеристики нуль,  $M^{(m,k)}(F)$  — матричная супералгебра над  $F$ . Из теории алгебр с полиномиальными тождествами известно, что супералгебра  $M^{(m,k)}(F)$  имеет конечный базис  $\mathbb{Z}_2$ -градуированных тождеств. Поэтому естественным образом возникает задача описания этого базиса. На данный момент времени такого описания нет. Прежде всего, это связано с тем, что отсутствуют какие-либо эффективные методы нахождения обычных или  $\mathbb{Z}_2$ -градуированных тождеств супералгебры  $M^{(m,k)}(F)$ . Тем не менее при некоторых значениях  $m, k$  такие тождества найти все же удастся. Для этого используют либо компьютерные вычисления, либо хорошо развитый аппарат теории представлений симметрической группы  $S_n$  и общей линейной группы  $GL_p$ . Более точно для нахождения  $\mathbb{Z}_2$ -градуированных тождеств супералгебры  $M^{(m,k)}(F)$  при малых значениях  $m, k$  изучают последовательность  $\{\chi_n\}$  характеров представлений либо групп  $S_r \times S_{n-r}$ , либо группы  $GL_p \times GL_p$ . Для каждой такой группы строят свое векторное  $F$ -пространство в свободной алгебре  $F\{Y \cup Z\}$ . При этом относительно действия группы  $S_r \times S_{n-r}$  ( $GL_p \times GL_p$ ) на свое векторное пространство оно имеет структуру левого  $S_r \times S_{n-r}$  ( $GL_p \times GL_p$ ) модуля. Однако оказывается, что с вычислительной точки зрения работать с последовательностью характеров представлений группы  $GL_p \times GL_p$  предпочтительнее. В данной работе изучается последовательность  $GL_p \times GL_p$ -характеров  $\{\chi_n\}$  матричной супералгебры  $M^{(2,2)}(F)$ . При этом используется тот факт, что между парами разбиений  $(\lambda, \mu)$ , где  $\lambda \vdash r$ ,  $\mu \vdash n - r$ , и неприво-



димыми  $GL_p \times GL_p$ -модулями между парами разбиений  $(\lambda, \mu)$ , где  $\lambda \vdash r$ ,  $\mu \vdash n - r$ , и неприводимыми  $GL_p \times GL_p$ -модулями существует взаимнооднозначное соответствие. Кроме того, мы исследуем только те кратности в разложении характера  $\chi_n$ , которые связаны с неприводимыми  $GL_p \times GL_p$ -модулями, находящимися в соответствии с парами разбиений  $(\lambda, \mu)$  вида  $(0, \mu)$ . Показано, что если высота  $h(\mu)$  диаграммы Юнга  $D_\mu$  разбиения  $\mu$ , участвующего в разложении характера  $\chi_n$ , не больше пяти, то кратность  $m_{(0, \mu)}$  неприводимого  $GL_p \times GL_p$ -характера отлична от нуля.

**Ключевые слова:** стандартный многочлен, супералгебра, неприводимый характер, диаграмма Юнга, симметрическая группа, общая линейная группа

**Для цитирования:** Антонов С. Ю., Антонова А. В. О кратностях некоторых градуированных кохарактеров матричной супералгебры  $M^{(2,2)}(F)$  // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 306–315. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-306-315](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-306-315), EDN: [AWFIHL](https://www.edn.ru/AWFIHL)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Multiplicities of some graded cocharacters of the matrix superalgebra $M^{(2,2)}(F)$

S. Yu. Antonov<sup>1✉</sup>, A. V. Antonova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Kazan Innovative University, 42 Moskovskaya St., Kazan 420111, Russia

<sup>2</sup>Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnoselskaya St., Kazan 420066, Russia

Stepan Yu. Antonov, antonovst-vm@rambler.ru, ORCID: [0000-0003-1705-3929](https://orcid.org/0000-0003-1705-3929), AuthorID: [110936](https://authorid.ru/110936)

Alina V. Antonova, antonovakazan@rambler.ru, ORCID: [0000-0001-7047-7275](https://orcid.org/0000-0001-7047-7275), SPIN: [4476-9689](https://spin.ru/4476-9689), AuthorID: [279836](https://authorid.ru/279836)

**Abstract.** Let  $F$  be an arbitrary field of characteristic zero, and let  $M^{(m,k)}(F)$  be a matrix superalgebra over  $F$ . It is known from the theory of algebras with polynomial identities that the superalgebra  $M^{(m,k)}(F)$  has a finite basis of  $Z_2$ -graded identities. Therefore, the problem of describing such a basis arises naturally. At the present moment of time, there is no such description. First of all, this is due to the fact that there are no effective methods for finding the usual or  $Z_2$ -graded identities of a superalgebra  $M^{(m,k)}(F)$ . Nevertheless, for some values of  $m, k$ , such identities can still be found. For this purpose, one uses either computer computations or the well-developed apparatus of the representation theory of the symmetric group  $S_n$  and the general linear group  $GL_p$ . More precisely, to find  $Z_2$ -graded identities of a superalgebra  $M^{(m,k)}(F)$  for small values of  $m, k$ , one studies the sequence  $\{\chi_n\}$  of characters of representations of either groups  $S_r \times S_{n-r}$  or group  $GL_p \times GL_p$ . For each such group, one constructs a vector  $F$ -space in the free algebra  $F\{Y \cup Z\}$ . At the same time, with respect to the action of group  $S_r \times S_{n-r}$  ( $GL_p \times GL_p$ ) on its vector space, it has the structure of a left  $S_r \times S_{n-r}$  ( $GL_p \times GL_p$ ) module. However, it turns out that it is computationally preferable to work with the characters representation sequence of the group  $GL_p \times GL_p$ . In this paper, we study the sequence of  $GL_p \times GL_p$ -characters  $\{\chi_n\}$  of matrix superalgebra  $M^{(2,2)}(F)$ . This uses the fact that between pairs of partitions  $(\lambda, \mu)$ , where  $\lambda \vdash r$ ,  $\mu \vdash n - r$  and irreducible  $GL_p \times GL_p$ -modules, there is a one-to-one correspondence. Moreover, we investigate only those multiplicities in the decomposition of the character  $\chi_n$  that are associated with irreducible  $GL_p \times GL_p$ -modules corresponding to pairs of partitions  $(\lambda, \mu)$  of the form  $(0, \mu)$ . It is shown that if the height  $h(\mu)$  of the Young diagram  $D_\mu$  for a pair  $(0, \mu)$  is no more than five, then the multiplicity  $m_{0, \mu}$  of the irreducible  $GL_p \times GL_p$ -character  $\chi_n$  is different from zero.

**Keywords:** standard polynomial, superalgebra, irreducible character, Young diagram, symmetric group, general linear group

**For citation:** Antonov S. Yu., Antonova A. V. Multiplicities of some graded cocharacters of the matrix superalgebra  $M^{(2,2)}(F)$ . *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025,





## Введение

Пусть  $F$  — произвольное поле характеристики нуль,  $m, k$  — какие-нибудь натуральные числа,  $M_{m+k}(F)$  — алгебра всех  $(m+k) \times (m+k)$ -матриц над полем  $F$ ,  $M^{(m,k)}(F) = (M_{m+k}(F), M_0^{(m,k)}(F), M_1^{(m,k)}(F))$  — матричная супералгебра, градуированная подпространствами

$$M_0^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m \times m}(F) & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & D_{k \times k}(F) \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times k}(F) \\ A_{k \times m}(F) & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \right\},$$

$n_i(m, k, F)$  — наименьшая степень ненулевых тождеств подпространства  $M_i^{(m,k)}(F)$ .

Одной из задач теории  $PI$ -алгебр является описание базиса  $\mathbf{Z}_2$ -градуированных тождеств супералгебры  $M^{(m,k)}(F)$ . В настоящее время такое описание дано лишь для супералгебр  $M^{(1,1)}(F)$  и  $M^{(2,1)}(F)$  (см. [1, 2]). В общем случае решение этой задачи неизвестно. Тем не менее, из монографии [3] следует, что базис  $\mathbf{Z}_2$ -градуированных тождеств супералгебры  $M^{(m,k)}(F)$  конечен. В [4] доказано, что  $n_1(m, k, F) = 4 \min\{m, k\} - \delta_{mk} + \operatorname{sgn} |m - k|$ , там же (см. также [5]) приведены соответствующие минимальные тождества подпространства  $M_1^{(m,k)}(F)$ . Кроме того, из теоремы Амицура–Левицкого [6] вытекает, что  $n_0(m, k, F) = 2 \max\{m, k\}$ , а стандартный многочлен  $St_{n_0}$  является минимальным тождеством подпространства  $M_0^{(m,k)}(F)$ . Отметим также, что в работах [7–10] найдены базисы  $\mathbf{Z}_2$ -градуированных тождеств некоторых верхнетреугольных матричных супералгебр (см. также работу [11]).

На данный момент нет каких-то эффективных методов нахождения  $\mathbf{Z}_2$ -градуированных тождеств супералгебры  $M^{(m,k)}(F)$ . В некоторых случаях (см. [12]) удается найти такие тождества путем изучения последовательности  $\{\bar{\chi}_n^{gr}(M^{(m,k)}(F))\}_{n \in \mathbf{N}}$  ее градуированных кохарактеров.

Цель данной работы — исследование последовательности  $\{\bar{\chi}_n^{gr}(M^{(2,2)}(F))\}_{n \in \mathbf{N}}$  градуированных кохарактеров супералгебры  $M^{(2,2)}(F)$ . Следуя структуре работы [12], в первом разделе мы приводим необходимые сведения о некоторых модулях, которые используем в дальнейшем. Основной результат нашей работы приведен в следующем разделе.

## 1. Некоторые сведения о $F(\mathbf{GL}_m \times \mathbf{GL}_m)$ -модулях

Пусть  $F$  — произвольное поле характеристики нуль,  $\mathbf{Z}_2$  — группа вычетов по модулю 2,  $A$  — какая-либо ассоциативная  $\mathbf{Z}_2$ -градуированная алгебра над  $F$ ,  $F\{X\}$  — свободная ассоциативная алгебра над  $F$ , порожденная счетным множеством  $X = \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , которое представим в виде  $X = Y \cup Z$ , где  $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $Z = \{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  и  $Y \cap Z = \emptyset$ . После чего стандартным способом (см. [13]) построим совокупность  $(F_0\{X\}, F_1\{X\})$  векторных подпространств алгебры  $F\{X\}$ , относительно которой  $F\{X\}$  будет  $\mathbf{Z}_2$ -градуированной алгеброй, обозначаемой символом  $F\{X|\mathbf{Z}_2\}$ .

Далее, положим  $V_n^{\mathbf{Z}_2} = \operatorname{Span}_F\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, x_i \in \{y_i, z_i\}\}$ ,  $V_n^{\mathbf{Z}_2}(A) = V_n^{\mathbf{Z}_2} \cap T_2(A)$ , где  $T_2(A)$  — идеал  $\mathbf{Z}_2$ -градуированных тождеств супералгебры  $A$ ,  $S_n$  — симметрическая группа степени  $n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Кроме того, пусть  $m \in \mathbf{N}$ ,  $Y_m = \{y_1, \dots, y_m\}$ ,  $Z_m = \{z_1, \dots, z_m\}$ ,  $F\{Y_m \cup Z_m\}$  — подалгебра алгебры  $F\{X\}$ , порожденная конечным множеством  $Y_m \cup Z_m$ ,  $F\{Y_m \cup Z_m|\mathbf{Z}_2\}$  —  $\mathbf{Z}_2$ -градуированная подалгебра супералгебры  $F\{X|\mathbf{Z}_2\}$ ,  $F\{Y_m \cup Z_m\}(A) = F\{Y_m \cup Z_m\} \cap T_2(A)$ ,  $B_m^{(n)}$  — векторное подпространство пространства  $F\{Y_m \cup Z_m\}$ , порожденное всеми полиоднородными многочленами степени  $n$ . Далее, пусть  $B_m^{(n)}(A) = B_m^{(n)} \cap F\{Y_m \cup Z_m\}(A)$ ,  $GL_m = GL(m, F)$  — полная линейная матричная группа,  $GL_m \times GL_m$  — прямое произведение групп.



Определим левое действие группы  $GL_m \times GL_m$  на элементы векторного пространства  $F\{Y_m \cup Z_m\}$ , положив для любой пары  $(a, b) \in GL_m \times GL_m$ , где  $a = (a_{ij})$ ,  $b = (b_{ij})$ , и всякого монома  $M = M(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) \in F\{Y_m \cup Z_m\}$

$$(a, b)M(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) = M\left(\sum_{j=1}^m a_{1j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{mj} y_j, \sum_{k=1}^m b_{1k} z_k, \dots, \sum_{k=1}^m b_{mk} z_k\right),$$

которое затем продолжим до действия групповой алгебры  $F(GL_m \times GL_m)$ .

Нетрудно видеть, что так определенное действие превращает векторное пространство  $F\{Y_m \cup Z_m\}$  в левый  $F(GL_m \times GL_m)$ -модуль, а его векторные подпространства  $B_m^{(n)}$  и  $B_m^{(n)}(A)$  — в  $F(GL_m \times GL_m)$ -подмодули  $F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)}$  и  $F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)}(A)$  модуля  $F(GL_m \times GL_m)F\{Y_m \cup Z_m\}$ , причем  $F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)}(A) \leq F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)}$ . Тогда определен фактор-модуль  $F(GL_m \times GL_m)\bar{B}_m^{(n)}(A) = F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)} / F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)}(A)$ .

Так как модуль  $F(GL_m \times GL_m)\bar{B}_m^{(n)}(A)$  является конечномерным, то он вполне приводим. Пусть  $F(GL_m \times GL_m)N$  — какой-нибудь неприводимый  $F(GL_m \times GL_m)$ -подмодуль модуля  $F(GL_m \times GL_m)\bar{B}_m^{(n)}(A)$ . Из теории представлений группы  $GL_m \times GL_m$  известно, что существует биективное соответствие между неприводимыми  $F(GL_m \times GL_m)$ -модулями и парами разбиений  $(\lambda, \mu)$  чисел  $r$  и  $n-r$  соответственно, где  $r = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ ,  $p, q \leq m$ . Приведем соответствующее описание неприводимых  $F(GL_m \times GL_m)$ -модулей.

Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \vdash r$ ,  $p \leq m$ ,  $D_\lambda$  — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению  $\lambda$  с длинами столбцов  $(l_1, \dots, l_k)$ , здесь  $l_1 = p \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$ ,  $k = \lambda_1$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q) \vdash (n-r)$ ,  $q \leq m$ ,  $D_\mu$  — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению  $\mu$  с длинами столбцов  $(t_1, \dots, t_b)$ , где  $t_1 = q \geq t_2 \geq \dots \geq t_b$ ,  $b = \mu_1$ ,  $h(\mu)$  — высота диаграммы Юнга  $D_\mu$ ,  $St_h(x_1, \dots, x_h) = \sum_{\sigma \in S_h} \text{sgn } \sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(h)}$  — стандартный многочлен. Справедливы следующие теоремы (см. [14, 15]).

**Теорема 1.** Для любого неприводимого подмодуля  $F(GL_m \times GL_m)N_{\lambda, \mu}$  левого модуля  $F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)}$ , соответствующего паре разбиений  $(\lambda, \mu)$ , справедливы следующие утверждения:

1) модуль  $F(GL_m \times GL_m)N_{\lambda, \mu}$  порождается некоторым ненулевым многочленом

$$f_{\lambda, \mu} = f(y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{t_1}) = \left( \prod_{i=1}^k St_{l_i}(y_1, \dots, y_{l_i}) \prod_{j=1}^b St_{t_j}(z_1, \dots, z_{t_j}) \right) \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma,$$

где  $\alpha_\sigma \in F$ , а группа  $S_n$  действует на элементы векторного пространства  $B_m^{(n)}$  справа, т. е.  $(x_{i_1} \cdots x_{i_n})\sigma = x_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots x_{i_{\sigma^{-1}(n)}}$ , здесь  $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m$ ;

2) всякий ненулевой многочлен

$$f_{\lambda, \mu} = f(y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{t_1}) = \left( \prod_{i=1}^k St_{l_i}(y_1, \dots, y_{l_i}) \prod_{j=1}^b St_{t_j}(z_1, \dots, z_{t_j}) \right) \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma,$$

где  $\alpha_\sigma \in F$ , порождает некоторый неприводимый  $F(GL_m \times GL_m)$ -подмодуль  $F(GL_m \times GL_m)N_{\lambda, \mu}$  левого модуля  $F(GL_m \times GL_m)B_m^{(n)}$ ;

3) имеет место модульный изоморфизм  $F(GL_m \times GL_m)N_{\lambda, \mu} \cong FGL_m N_\lambda \otimes_F FGL_m N_\mu$ , где  $FGL_m N_\lambda$ ,  $FGL_m N_\mu$  — неприводимые  $FGL_m$ -модули для разбиений  $\lambda$  и  $\mu$ .

Из этой теоремы и сказанного выше вытекает следующая теорема.





**Теорема 2.** Для любого неприводимого  $F(GL_m \times GL_m)$ -подмодуля  $F(GL_m \times GL_m)N$  модуля  $F(GL_m \times GL_m)\bar{B}_m^{(n)}(A)$  справедлив изоморфизм  $F(GL_m \times GL_m)N \cong F(GL_m \times GL_m)N_{\lambda, \mu}$ , где  $(\lambda, \mu)$  — некоторая пара разбиений чисел  $r$  и  $n - r$  соответственно.

Пусть  $\bar{\psi}_m^{(n)}(A)$  — характер представления группы  $GL_m \times GL_m$  на левом модуле  $F(GL_m \times GL_m)\bar{B}_m^{(n)}(A)$ ,  $\bar{\psi}_{m,i}^{(n)}(A)$  — характер неприводимого представления группы  $GL_m \times GL_m$ . Тогда в силу теоремы 2 мы можем записать, что

$$\bar{\psi}_m^{(n)}(A) = \sum_{i=1}^k \bar{m}_i \bar{\psi}_{m,i}^{(n)}(A) = \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash (n-r)}} \bar{m}_{\lambda, \mu} \bar{\psi}_{m,(\lambda, \mu)}^{(n)} = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} \bar{m}_{\lambda, \mu} \bar{\psi}_{m,(\lambda, \mu)}^{(n)},$$

где  $\bar{\psi}_{m,(\lambda, \mu)}^{(n)}$  — характер неприводимого представления группы  $GL_m \times GL_m$ , соответствующий паре  $(\lambda, \mu)$ ,  $0 \leq \bar{m}_{\lambda, \mu}$  — кратность  $\bar{\psi}_{m,(\lambda, \mu)}^{(n)}$  в разложении характера  $\bar{\psi}_m^{(n)}(A)$ .

Пусть

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_{l_1+1} & \vdots & \vdots & a_r \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline \vdots & \vdots & & & \\ \hline \vdots & a_{l_1+l_2} & & & \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline a_{l_1} & & & & \\ \hline \end{array}, \quad T_\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline b_1 & b_{t_1+1} & \vdots & \vdots & b_{n-r} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline \vdots & \vdots & & & \\ \hline \vdots & b_{t_1+t_2} & & & \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline b_{t_1} & & & & \\ \hline \end{array} —$$

произвольные таблицы, элементы которых удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\{a_1, \dots, a_r\}, \{b_1, \dots, b_{n-r}\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\} = I_n$ ;
- 2)  $\{a_1, \dots, a_r\} \cap \{b_1, \dots, b_{n-r}\} = \emptyset$ .

Поставим в соответствие паре  $(T_\lambda, T_\mu)$  подстановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & l_1 & \dots & r & r+1 & r+2 & \dots & r+t_1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{l_1} & \dots & a_r & b_1 & b_2 & \dots & b_{t_1} & \dots & b_{n-r} \end{pmatrix}$$

и рассмотрим многочлен

$$f_{T_\lambda, T_\mu} = f(y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{t_1}) = \left( \prod_{i=1}^k St_{l_i}(y_1, \dots, y_{l_i}) \prod_{j=1}^b St_{t_j}(z_1, \dots, z_{t_j}) \right) \tau.$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Кратность  $\bar{m}_{\lambda, \mu}$  в разложении характера

$$\bar{\psi}_m^{(n)}(A) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} \bar{m}_{\lambda, \mu} \bar{\psi}_{m,(\lambda, \mu)}^{(n)}$$

супералгебры  $A$  тогда и только тогда не равна нулю, когда существует такая пара таблиц  $(T_\lambda, T_\mu)$ , для которой многочлен  $f_{T_\lambda, T_\mu}$  не является  $\mathbf{Z}_2$ -градуированным тождеством супералгебры  $A$ .



## 2. О градуированных кохарактерах супералгебры $M^{(2,2)}(F)$

Пусть  $A = M^{(2,2)}(F) = (M_4(F), M_0^{(2,2)}(F), M_1^{(2,2)}(F))$  — матричная супералгебра. Поскольку  $\dim M_0^{(2,2)}(F) = 8$ ,  $\dim M_1^{(2,2)}(F) = 8$ , то в силу работы [14] мы можем записать, что

$$\bar{\psi}_m^{(n)}(M^{(2,2)}(F)) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n, \\ h(\lambda) \leq 8, h(\mu) \leq 8}} \bar{m}_{\lambda, \mu} \bar{\psi}_{m, (\lambda, \mu)}^{(n)}.$$

В данной статье рассмотрен случай, когда  $(\lambda, \mu) = (0, \mu)$ ,  $h(\mu) \leq 5$ , где  $\mu$  — произвольное разбиение числа  $n$ , имеющее вид

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = \left( \sum_{i=1}^5 w_i, \sum_{i=2}^5 w_i, \sum_{i=3}^5 w_i, \sum_{i=4}^5 w_i, w_5 \right).$$

Здесь  $w_5 = \mu_5 \geq 0$ ,  $w_i = \mu_i - \mu_{i+1} \geq 0$  для  $i = \overline{1, 4}$  (в терминах диаграмм Юнга целое число  $w_i$  означает количество столбцов высоты  $i$  ( $i \in I_5$ ) в диаграмме  $D_\mu$ , разбиения  $\mu$ ). Тогда соответствующая разбиению  $\mu$  диаграмма  $D_\mu$  имеет вид

$$D_\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \leftarrow w_1 \rightarrow \\ \hline & & & \leftarrow w_2 \rightarrow & \\ \hline & & \leftarrow w_3 \rightarrow & & \\ \hline & \leftarrow w_4 \rightarrow & & & \\ \hline \leftarrow w_5 \rightarrow & & & & \\ \hline \end{array}$$

Пусть  $e_{11}, \dots, e_{44}$  — матричные единицы алгебры  $M_4(F)$ ,  $N_1 = e_{13} + e_{31}$ ,  $N_2 = e_{31} + e_{32}$ ,  $N_3 = e_{32} + e_{23}$ ,  $N_4 = e_{23}$ ,  $N_5 = \alpha_{13}e_{13} + \alpha_{23}e_{23} + \alpha_{31}e_{31} + \alpha_{32}e_{32} + \alpha_{14}e_{14} + \alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42}$ , где  $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{42}$  — произвольные ненулевые элементы поля  $F$ . Непосредственно проверяется справедливость следующих двух лемм.

**Лемма 1.** Для любого числа  $w_1 \in \mathbf{N}$  справедливы равенства

$$St_1^{w_1}(N_1) = N_1^{w_1} = \begin{cases} e_{13} + e_{31}, & \text{если } w_1 = 2k - 1, \ k \in \mathbf{N}, \\ e_{11} + e_{33}, & \text{если } w_1 = 2k, \ k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

**Лемма 2.** Для любого числа  $w_2 \in \mathbf{N}$  справедливо равенство

$$St_2^{w_2}(N_1, N_2) = e_{11} + e_{12} + (-1)^{w_2} e_{33}.$$

**Лемма 3.** Для любого числа  $w_3 \in \mathbf{N}$  справедливы равенства

$$St_3^{w_3}(N_1, N_2, N_3) = \begin{cases} 2^{(w_3-1)/2}(N_1 - N_3), & \text{если } w_3 = 2k - 1, \ k \in \mathbf{N}, \\ 2^{(w_3-2)/2}U, & \text{если } w_3 = 2k, \ k \in \mathbf{N}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $U = e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22} + 2e_{33}$ ,  $N_1 - N_3 = e_{13} + e_{31} - e_{23} - e_{32}$ .

**Доказательство.** Для каждой подстановки  $\sigma \in S_3$  найдем произведение  $N_{\sigma(1)}N_{\sigma(2)} \times \times N_{\sigma(3)}$ . Выписывая только индексы и опуская букву  $N$ , будем иметь:

$$123 = (e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23}) = (e_{13} + e_{31})e_{33} = e_{13}; \quad (2)$$

$$132 = (e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32}) = e_{12}(e_{31} + e_{32}) = 0; \quad (3)$$

$$231 = (e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31}) = e_{33}(e_{13} + e_{31}) = e_{31}; \quad (4)$$

$$213 = (e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23}) = e_{33}(e_{32} + e_{23}) = e_{32}; \quad (5)$$





$$312 = (e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32}) = e_{21}(e_{31} + e_{32}) = 0; \quad (6)$$

$$321 = (e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31}) = (e_{32} + e_{23})e_{33} = e_{23}. \quad (7)$$

Из равенств (2)–(7) следует, что  $St_3(N_1, N_2, N_3) = e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23} = N_1 - N_3$ .

Далее последовательно находим

$$\begin{aligned} St_3^2(N_1, N_2, N_3) &= (e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23})(e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23}) = \\ &= e_{11} - e_{12} + e_{33} + e_{33} - e_{21} + e_{22} = e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22} + 2e_{33} = U; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} St_3^3(N_1, N_2, N_3) &= U \cdot St_3(N_1, N_2, N_3) = (e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22} + 2e_{33})(e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23}) = \\ &= 2(e_{13} + e_{31} - e_{23} - e_{32}) = 2St_3(N_1, N_2, N_3); \end{aligned} \quad (9)$$

$$St_3^4(N_1, N_2, N_3) = 2St_3^2(N_1, N_2, N_3) = 2U; \quad (10)$$

$$St_3^5(N_1, N_2, N_3) = 2USt_3(N_1, N_2, N_3) = 4St_3(N_1, N_2, N_3). \quad (11)$$

Из равенств (8)–(11) по индукции получаем равенства (1).  $\square$

**Лемма 4.** Для любого числа  $w_4 \in \mathbf{N}$  справедливо равенство

$$St_4^{w_4}(N_1, N_2, N_3, N_4) = e_{11} + e_{22} + (-2)^{w_4}e_{33}.$$

**Доказательство.** Для каждой подстановки  $\sigma \in S_4$  найдем произведение  $N_{\sigma(1)}N_{\sigma(2)} \times N_{\sigma(3)}N_{\sigma(4)}$ . Выписывая только нижние индексы у этого произведения и учитывая равенства (2)–(7), будем иметь:

$$1234 = e_{13}e_{23} = 0;$$

$$1243 = (e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{32} + e_{23}) = (e_{11} + e_{12})e_{22} = e_{12};$$

$$1324 = 0;$$

$$1423 = (e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23}) = 0;$$

$$1342 = (e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{31} + e_{32}) = e_{12}(e_{21} + e_{22}) = e_{11} + e_{12};$$

$$1432 = (e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32}) = 0;$$

$$2314 = e_{31}e_{23} = 0;$$

$$2341 = (e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{13} + e_{31}) = e_{33}e_{21} = 0;$$

$$2134 = e_{32}e_{23} = e_{33};$$

$$2143 = (e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{32} + e_{23}) = 0;$$

$$2413 = (e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23}) = e_{33}e_{12} = 0;$$

$$2431 = (e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31}) = e_{33}e_{21} = 0;$$

$$3124 = 0;$$

$$3142 = (e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{31} + e_{32}) = 0;$$

$$3214 = e_{23}e_{23} = 0;$$

$$3241 = (e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{13} + e_{31}) = (e_{21} + e_{22})e_{21} = e_{21};$$

$$3421 = (e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31}) = e_{33}e_{33} = e_{33};$$

$$3412 = (e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32}) = e_{33}(e_{11} + e_{12}) = 0;$$

$$4123 = e_{23}e_{13} = 0;$$

$$4132 = 0;$$

$$4231 = e_{23}e_{31} = e_{21};$$

$$4213 = e_{23}e_{32} = e_{22};$$

$$4312 = 0;$$

$$4321 = e_{23}e_{23} = 0.$$



Отсюда следует, что

$$St_4(N_1, N_2, N_3, N_4) = -e_{12} + e_{11} + e_{12} - e_{33} + e_{21} - e_{33} - e_{21} + e_{22} = e_{11} + e_{22} - 2e_{33}.$$

Далее последовательно находим

$$St_4^2(N_1, N_2, N_3, N_4) = (e_{11} + e_{22} - 2e_{33})(e_{11} + e_{22} - 2e_{33}) = e_{11} + e_{22} + 4e_{33}; \quad (12)$$

$$St_4^3(N_1, N_2, N_3, N_4) = (e_{11} + e_{22} + 4e_{33})(e_{11} + e_{22} - 2e_{33}) = e_{11} + e_{22} - 8e_{33}. \quad (13)$$

Из (12), (13) заключаем, что

$$St_4^{w_4}(N_1, N_2, N_3, N_4) = e_{11} + e_{22} + (-2)^{w_4}e_{33}. \quad \square$$

По аналогии с леммой 4 доказывается следующая лемма.

**Лемма 5.** *Справедливы равенства:*

$$\begin{aligned} N_1 St_4(\bar{N}_1) &= 2\alpha_{13}e_{13} + \alpha_{14}e_{14} - \alpha_{13}e_{31}; \\ N_2 St_4(\bar{N}_2) &= (\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{31} + (\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{32}; \\ N_3 St_4(\bar{N}_3) &= (\alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{32})e_{32} + 2(\alpha_{13} - \alpha_{31} + \alpha_{32})e_{23} + \alpha_{14}e_{24}; \\ N_4 St_4(\bar{N}_4) &= 2(\alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{23} - \alpha_{31})e_{23} + (\alpha_{14} - \alpha_{24})e_{24}; \\ N_5 St_4(\bar{N}_5) &= -2\alpha_{13}e_{13} - 2\alpha_{23}e_{23} + \alpha_{31}e_{31} + \alpha_{32}e_{32} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42}, \end{aligned}$$

где  $\bar{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5)$ , а  $\bar{N}_i$  означает, что индекс  $i$  в  $\bar{N}$  пропущен.

**Лемма 6.** *Справедливо равенство*

$$St_5(\bar{N}) = \alpha_{14}e_{14} + \alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42}.$$

**Доказательство.** Учитывая лемму 5 и свойства стандартного многочлена, получаем

$$\begin{aligned} St_5(\bar{N}) &= \sum_{i=1}^5 (-1)^{i+1} N_i St_4(\bar{N}_i) = 2\alpha_{13}e_{13} + \alpha_{14}e_{14} - \alpha_{13}e_{31} - (\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{31} - \\ &\quad - (\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{32} + (\alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{32})e_{32} + 2(\alpha_{13} - \alpha_{31} + \alpha_{32})e_{23} + \alpha_{14}e_{24} - \\ &\quad - 2(\alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{23} - \alpha_{31})e_{23} - (\alpha_{14} - \alpha_{24})e_{24} - 2\alpha_{13}e_{13} - 2\alpha_{23}e_{23} + \alpha_{31}e_{31} + \\ &\quad + \alpha_{32}e_{32} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42} = \alpha_{14}e_{14} - (\alpha_{13} + \alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{31})e_{31} + \\ &\quad + (\alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{31} + \alpha_{13} + \alpha_{32})e_{32} + \\ &\quad + (2\alpha_{13} - 2\alpha_{31} + 2\alpha_{32} - 2\alpha_{13} - 2\alpha_{32} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} - 2\alpha_{23})e_{23} + \\ &\quad + \alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42} = \alpha_{14}e_{14} + \alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42}. \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.** *При  $\alpha_{14} = \alpha_{24} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 1$  верно равенство*

$$St_5(\bar{N}) = e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42}.$$

**Лемма 7.** *Для любого числа  $w_5 \in \mathbf{N}$  справедливы равенства*

$$St_5^{w_5}(\bar{N}) = \begin{cases} 2^{(w_5-1)/2} N_5, & \text{если } w_5 = 2k - 1, \ k \in \mathbf{N}, \\ 2^{(w_5-2)/2} M_0, & \text{если } w_5 = 2k, \ k \in \mathbf{N}, \end{cases} \quad (14)$$

где  $N_5 = e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42}$ ,  $M_0 = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} + 2e_{44}$ .





**Доказательство.** Учитывая лемму 6 и следствие 1, получаем

$$\begin{aligned} St_5^2(\bar{N}) &= (e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42})(e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42}) = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} + e_{44} + e_{44} = M_0; \\ St_5^3(\bar{N}) &= M_0 St_5(\bar{N}) = (e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} + 2e_{44})(e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42}) = \\ &= 2(e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42}) = 2St_5(\bar{N}) = 2N_5; \\ St_5^4(\bar{N}) &= 2St_5^2(\bar{N}) = 2M_0. \end{aligned}$$

Отсюда методом индукции приходим к равенствам (14).  $\square$

**Лемма 8.** Для произвольного разбиения  $\mu$  числа  $n$  такого, что  $h(\mu) \leq 5$ , и любых  $w_1, \dots, w_{h(\mu)} \in \mathbf{N}_0$  справедливо неравенство  $f_{D_\mu^*}(N_1, \dots, N_{h(\mu)}) \neq 0$ .

**Доказательство.** Учитывая леммы 1–3, 7 и полагая  $St_i^{w_i}(N_1, \dots, N_i) = 1$  при  $w_i = 0$ , нетрудно видеть, что

$$f_{D_\mu^*}(N_1, \dots, N_{h(\mu)}) = \prod_{i=h(\mu)}^1 St_i^{w_i}(N_1, \dots, N_i) \neq 0.$$

$\square$

**Теорема 3.** В разложении  $\bar{\psi}_m^{(n)}(M^{(2,2)}(F)) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n, \\ h(\lambda) \leq 8, h(\mu) \leq 8}} \bar{m}_{\lambda, \mu} \bar{\psi}_{m, (\lambda, \mu)}^{(n)}$  кратность  $\bar{m}_{0, \mu} \neq 0$

для всякого  $\mu \vdash n$  такого, что  $h(\mu) \leq 5$ .

**Доказательство.** Вытекает из леммы 8 и утверждения 1.  $\square$

### Список литературы

1. Di Vincenzo O. M. On the graded identities of  $M_{1,1}(E)$  // Israel Journal of Mathematics. 1992. Vol. 80, iss. 3. P. 323–335. DOI: [10.1007/BF02808074](https://doi.org/10.1007/BF02808074)
2. Аверьянов И. В. Базис градуированных тождеств супералгебры  $M_{1,2}(F)$  // Математические заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: [10.4213/mzm4298](https://doi.org/10.4213/mzm4298), EDN: [RLRASB](https://www.edn.ru/RLRASB)
3. Kemer A. R. Ideals of identities of associative algebras. Providence, RI : American Mathematical Society, 1991. 81 p. (Translations of Mathematical Monographs, vol. 87).
4. Антонов С. Ю. Наименьшая степень тождеств подпространства  $M_1^{(m,k)}(F)$  матричной супералгебры  $M^{(m,k)}(F)$  // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 11. С. 3–19. EDN: [PCOHZL](https://www.edn.ru/PCOHZL)
5. Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли III // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 142–150. DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150), EDN: [HMVRSQ](https://www.edn.ru/HMVRSQ)
6. Amitsur A. S., Levitzki J. Minimal identities for algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. 1950. Vol. 1, iss. 4. P. 449–463. DOI: [10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9)
7. Di Vincenzo O. M., Drensky V. The basis of the graded polynomial identities for superalgebras of triangular matrices // Communications in Algebra. 1996. Vol. 24, iss. 2. P. 727–735. DOI: [10.1080/00927879608825595](https://doi.org/10.1080/00927879608825595)
8. Centrone L., Silva V. R. T. On  $Z_2$ -graded identities of  $UT_2(E)$  and their growth // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 471. P. 469–499. DOI: [10.1016/j.laa.2014.12.035](https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.12.035)
9. Giambruno A., La Mattina D., Misso P. Polynomial identities on superalgebras: Classifying linear growth // Journal of Pure and Applied Algebra. 2006. Vol. 207, iss. 1. P. 215–240. DOI: [10.1016/j.jpaa.2005.09.006](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.09.006)
10. Valenti A. The graded identities of upper triangular matrices of size two // Journal of Pure and Applied Algebra. 2002. Vol. 172, iss. 2–3. P. 325–335. DOI: [10.1016/S0022-4049\(01\)00169-4](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(01)00169-4)
11. Di Vincenzo O. M.  $Z_2$ -graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices // Serdica Mathematical Journal. 2004. Vol. 30. P. 111–134.
12. La Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of  $3 \times 3$  matrices // Linear Algebra and its Applications. 2004. Vol. 384. P. 55–75. DOI: [10.1016/S0024-3795\(04\)00034-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5), EDN: [LAUZWJ](https://www.edn.ru/LAUZWJ)



13. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial identities and asymptotic methods. Providence, RI : American Mathematical Society, 2005. 352 p. (AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 122).
14. Drensky V., Giambruno A. Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for  $2 \times 2$  matrices with involution // Canadian Journal of Mathematics. 1994. Vol. 46, iss. 4. P. 718–733. DOI: [10.4153/CJM-1994-040-6](https://doi.org/10.4153/CJM-1994-040-6)
15. Giambruno A.  $GL \times GL$ -representations and  $*$ -polynomial identities // Communications in Algebra. 1986. Vol. 14, iss. 5. P. 787–796. DOI: [10.1080/00927878608823335](https://doi.org/10.1080/00927878608823335)

### References

1. Di Vincenzo O. M. On the graded identities of  $M_{1,1}(E)$ . *Israel Journal of Mathematics*, 1992, vol. 80, iss. 3, pp. 323–335. DOI: [10.1007/BF02808074](https://doi.org/10.1007/BF02808074)
2. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra  $M_{1,2}(F)$ . *Mathematical Notes*, 2009, vol. 85, iss. 3-4, pp. 467–483. DOI: [10.1134/S0001434609030195](https://doi.org/10.1134/S0001434609030195), EDN: [MWWJGX](#)
3. Kemer A. R. *Ideals of identities of associative algebras*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 87. Providence, RI, American Mathematical Society, 1991. 81 p.
4. Antonov S. Yu. The least degree of identities in the subspace  $M_1^{(m,k)}(F)$  of the matrix superalgebra  $M^{(m,k)}(F)$ . *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, iss. 11, pp. 1–16. DOI: [10.3103/S1066369X12110011](https://doi.org/10.3103/S1066369X12110011), EDN: [RGLOQZ](#)
5. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. III. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 142–150 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150), EDN: [HMVRSQ](#)
6. Amitsur A. S., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 1, iss. 4, pp. 449–463. DOI: [10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9)
7. Di Vincenzo O. M., Drensky V. The basis of the graded polynomial identities for superalgebras of triangular matrices. *Communications in Algebra*, 1996, vol. 24, iss. 2, pp. 727–735. DOI: [10.1080/00927879608825595](https://doi.org/10.1080/00927879608825595)
8. Centrone L., Silva V. R. T. On  $Z_2$ -graded identities of  $UT_2(E)$  and their growth. *Linear Algebra and its Applications*, 2015, vol. 471, pp. 469–499. DOI: [10.1016/j.laa.2014.12.035](https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.12.035)
9. Giambruno A., La Mattina D., Misso P. Polynomial identities on superalgebras: Classifying linear growth. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2006, vol. 207, iss. 1, pp. 215–240. DOI: [10.1016/j.jpaa.2005.09.006](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.09.006)
10. Valenti A. The graded identities of upper triangular matrices of size two. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2002, vol. 172, iss. 2–3, pp. 325–335. DOI: [10.1016/S0022-4049\(01\)00169-4](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(01)00169-4)
11. Di Vincenzo O. M.  $Z_2$ -graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices. *Serdica Mathematical Journal*, 2004, vol. 30, pp. 111–134.
12. La Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of  $3 \times 3$  matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, vol. 384, pp. 55–75. DOI: [10.1016/S0024-3795\(04\)00034-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5), EDN: [LAUZWJ](#)
13. Giambruno A., Zaicev M. *Polynomial identities and asymptotic methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 122. Providence, RI, American Mathematical Society, 2005. 352 p.
14. Drensky V., Giambruno A. Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for  $2 \times 2$  matrices with involution. *Canadian Journal of Mathematics*, 1994, vol. 46, iss. 4, pp. 718–733. DOI: [10.4153/CJM-1994-040-6](https://doi.org/10.4153/CJM-1994-040-6)
15. Giambruno A.  $GL \times GL$ -representations and  $*$ -polynomial identities. *Communications in Algebra*, 1986, vol. 14, iss. 5, pp. 787–796. DOI: [10.1080/00927878608823335](https://doi.org/10.1080/00927878608823335)

Поступила в редакцию / Received 17.11.2024

Принята к публикации / Accepted 19.03.2025

Опубликована / Published 29.08.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 316–324

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 316–324

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-316-324>

EDN: <https://elibrary.ru/AXCYPW>

Article

## Asymptotics of optimal investment behavior under a risk process with two-sided jumps

T. A. Belkina<sup>1</sup>✉, S. V. Kurochkin<sup>2</sup>, A. E. Tarkhova<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Central Economics and Mathematics Institute RAS, 47 Nakhimovsky Prosp., Moscow 117418, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” RAS, 40 Vavilova St., Moscow 119333, Russia

<sup>3</sup>Sberbank of Russia PSC, Novosibirsk, Russia

**Tatiana A. Belkina**, [tati.belkina@gmail.com](mailto:tati.belkina@gmail.com), ORCID: [0000-0001-7384-0025](https://orcid.org/0000-0001-7384-0025), SPIN: [9513-8256](https://orcid.org/9513-8256), AuthorID: [12222](https://orcid.org/12222)

**Sergey V. Kurochkin**, [kuroch@ccas.ru](mailto:kuroch@ccas.ru), ORCID: [0000-0001-9484-6012](https://orcid.org/0000-0001-9484-6012), SPIN: [1857-9863](https://orcid.org/1857-9863), AuthorID: [6896](https://orcid.org/6896)

**Anna E. Tarkhova**, [a.tarkhova5@yandex.ru](mailto:a.tarkhova5@yandex.ru)

**Abstract.** We study an optimal investment control problem for an insurance company having two business branches, life annuity insurance and non-life insurance. The company can invest its surplus into a risk-free asset and a risky asset with the price dynamics given by a geometric Brownian motion. The optimization objective is to maximize the survival probability of the total portfolio over the infinite time interval. In the absence of investments, the portfolio surplus is described by a stochastic process involving two-sided jumps and a continuous drift. Downward jumps correspond to the claim sizes, and upward jumps are interpreted as random gains that arise at the final moments of the life annuity contracts' realizations (i.e., at the moments of death of policyholders) as a result of the release of unspent funds. The drift is determined by the difference between premiums in the non-life insurance contracts and the annuity payments. The solving to the optimization problem that yields the maximal survival probability, as well as the optimal strategy, is related to the classical solution of the corresponding Hamilton – Jacobi – Bellman (HJB) equation, if this solution exists. In the considered risk model, HJB includes integral operators of two types: Volterra and non-Volterra ones. The presence of the latter makes the asymptotic analysis of the solution quite complicated. However, for the case of small jumps (when the jumps have exponential distributions), we obtained asymptotic representations of solutions for both small and large values of the initial surplus.

**Keywords:** insurance, two-sided jumps, optimal investments, risky asset, survival probability, Hamilton – Jacobi – Bellman equation

**For citation:** Belkina T. A., Kurochkin S. V., Tarkhova A. E. Asymptotics of optimal investment behavior under a risk process with two-sided jumps. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 316–324. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-316-324](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-316-324), EDN: [AXCYPW](https://elibrary.ru/AXCYPW)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.624,519.86

## Асимптотики оптимального инвестиционного поведения в модели риска с двусторонними скачками

Т. А. Белкина<sup>1</sup>✉, С. В. Курочкин<sup>2</sup>, А. Е. Тархова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Центральный экономико-математический институт РАН, Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский просп., д. 47





<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

<sup>3</sup>ПАО Сбербанк, Россия, г. Новосибирск

**Белкина Татьяна Андреевна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, tati.belkina@gmail.com, ORCID: [0000-0001-7384-0025](https://orcid.org/0000-0001-7384-0025), SPIN: [9513-8256](https://sp.inria.fr/9513-8256), AuthorID: [12222](https://authorid.ru/12222)

**Курочкин Сергей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, kuroch@ccas.ru, ORCID: [0000-0001-9484-6012](https://orcid.org/0000-0001-9484-6012), SPIN: [1857-9863](https://sp.inria.fr/1857-9863), AuthorID: [6896](https://authorid.ru/6896)

**Тархова Анна Евгеньевна**, риск-менеджер, a.tarkhova5@yandex.ru

**Аннотация.** Исследуется проблема оптимального управления инвестициями для страховой компании, имеющей два направления бизнеса: страхование пожизненной ренты и рисковое страхование (не связанное со страхованием жизни). Компания может инвестировать свой излишек в безрисковый актив и рисковый актив с динамикой цен, заданной геометрическим броуновским движением. Целью оптимизации является максимизация вероятности неразорения по суммарному портфелю на бесконечном интервале времени. При отсутствии инвестиций излишек портфеля описывается стохастическим процессом, включающим двусторонние скачки и непрерывный детерминированный снос. Скачки вниз соответствуют размерам требований по рисковому страхованию, а скачки вверх интерпретируются как случайные доходы, возникающие в конечные моменты реализации договоров пожизненной ренты (т. е. в моменты смерти страхователей) в результате высвобождения неизрасходованных средств. Непрерывный снос определяется разностью между премиями по договорам рискового страхования и аннуитетными платежами. Решение задачи оптимизации, которое дает максимальную вероятность неразорения, а также оптимальную стратегию, связано с классическим решением соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (HJB), если это решение существует. В рассматриваемой модели риска HJB включает интегральные операторы двух типов: вольтерровские и невольтерровские. Наличие последних делает асимптотический анализ решения достаточно сложным. Однако для случая малых скачков (когда скачки имеют показательное распределение) получены асимптотические представления решений как для малых, так и для больших значений начального резерва.

**Ключевые слова:** страхование, двусторонние скачки, инвестиции, рисковый актив, вероятность неразорения, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

**Для цитирования:** Belkina T. A., Kurochkin S. V., Tarkhova A. E. Asymptotics of optimal investment behavior under a risk process with two-sided jumps [Белкина Т. А., Курочкин С. В., Тархова А. Е. Асимптотики оптимального инвестиционного поведения в модели риска с двусторонними скачками] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 316–324. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-316-324](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-316-324), EDN: [AXCYPW](https://edn.ru/AXCYPW)  
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

The optimal investor behavior whose objective is to minimize the ruin probability in the presence of uncontrollable stochastic cash flow, or a risk process, was first studied in [1]. It was assumed that the risk process (for example, the surplus of an insurer) is described by Brownian motion with drift and the risky stock price following a geometric Brownian motion. Such a model of the surplus process for the insurer can be obtained as a result of the diffusion approximation of the net claims process in the classical Cramér-Lundberg (CL) model [2]. For the case when there is no risk-free interest rate, it was shown in [1] that the non-constrained optimal policy is to always invest a constant amount of money into a risky asset (regardless of the level of surplus). If the interest rate is positive, the optimal control is a state-dependent function. In particular, for the case of zero correlation between the processes of insurance risk and of asset price, it was shown that the optimal amount tends to zero as the surplus tends to infinity.

For the CL model (a compound Poisson risk model with negative jumps and positive deterministic drift), the structure of the optimal strategy changes crucially at least, at low level of surplus:

a constant amount (CA) strategy, which is similar to the one described above, cannot be optimal, because it leads to immediate ruin at zero initial surplus. This is contrary with to a non-zero survival probability at zero initial surplus in the absence of investments. Moreover, as shown in [3, 4], the optimal amount tends to zero as the surplus tends to zero. Nevertheless, the optimal strategy requires borrowing money when the surplus level is close to zero.

Of course, borrowing restrictions can also lead to significant changes in the optimal investment behaviors; moreover, unexpected effects can arise in the zone of low surplus levels. For the CL model, the optimal investment problem with limited leveraging level and allowed shortselling was studied in [5]: it was shown that some unusual strategy (short-selling the high return stock to earn interest) can be optimal when a strong investment constraint on borrowing (money) and buying (stock) is imposed. As for the optimal investment strategy in the CL model at large levels of surplus, it turns out to be asymptotically close to some CA strategy in the case of small jumps in the risk process (i.e., in the case when exponential moments of jumps are finite, see, e.g., [6, 7]).

In the case of zero interest rate, some (non-zero) CA strategy again becomes optimal for arbitrary initial surplus (not only asymptotically) if we consider a compound Poisson risk model with small positive jumps and negative deterministic drift (see [8]), which is interpreted as a *life annuity insurance model* [2]. In the general case of a non-negative interest rate, a limit value of the optimal amount at zero surplus is also not zero for this model, as well as for the diffusion risk model [1] and for the CL model perturbed by diffusion [9].

Let us recall that, as stated above, in the CL model, the corresponding limit (at zero surplus) is equal to zero. As will be shown below for a more general model with *two-sided jumps*, this fact can be established a priori (i.e., before solving the optimization problem), and it is important for formulating the correct condition on the solution to Hamilton–Jacobi–Bellman equation (HJB equation) as the optimal survival probability function (in particular, this condition allows us to reject the solution corresponding to the CA strategy). We show in this paper that in the case of exponential distributions of jumps, the optimal strategy, the value function, and some additionally introduced function satisfy a system of nonlinear ordinary differential equations (ODE) of the first order with initial conditions depending on an unknown parameter. This parameter can be calculated after solving the problem for the ODE with a parameter using the normalization condition. As a result of the asymptotic study of the ODE system, we obtain asymptotic representations for the optimal strategy and the value function.

## 1. The model description and optimization problem

We will consider below the optimal investment problem in the presence of an uncontrollable risk process with two-sided jumps. This process can be considered as a surplus process of an insurance portfolio that combines surpluses for two types of insurance business: life and non-life insurance (see [10, 11] and references there). The total portfolio surplus is of the form

$$R_t = u + ct + \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Here  $R_t$  is the total portfolio surplus at time  $t \geq 0$ ;  $u$  is the initial surplus,  $c$  is the difference between the premium rate in non-life insurance and the life annuity rate (or the pension payments per unit of time), assumed to be deterministic and fixed.  $N_1(t)$  is a homogeneous Poisson process with intensity  $\lambda_1 > 0$  that, for any  $t > 0$ , determines the number of random revenues up to the time  $t$ ;  $Y_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) are independent identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.) with a distribution function  $G(z)$  ( $G(0) = 0$ ,  $\mathbf{E}Y_1 = n < \infty$ ,  $n > 0$ ) that determine the revenue sizes and are assumed to be independent of  $N_1(t)$ . These random revenues arise at the final moments of the life annuity contracts' realizations. Further,  $N(t)$  is a homogeneous Poisson process with intensity  $\lambda > 0$  that, for any  $t > 0$ , determines the number of claims up to the time  $t$ ;  $Z_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) are i.i.d. r.v. with a distribution function  $F(z)$  ( $F(0) = 0$ ,  $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$ ,



$m > 0$ ) that determine the claim sizes and are assumed to be independent of  $N(t)$ . In addition, we assume that the processes of total premiums and total payments are independent. If  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda > 0$ , we have a CL model (only with the second sum in (1)); if  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda = 0$  (only with the first sum in (1)), this is the life annuity insurance model.

Suppose that at time  $t$ , the insurance company invests a fraction  $\alpha_t$  of the surplus to a risky asset whose price follows a geometric Brownian motion  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t$ , where  $\mu$  is the stock return rate,  $\sigma$  is the volatility, and  $w := \{w_t\}_{t \geq 0}$  is a standard Brownian motion independent of  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $Y_i$ 's and  $Z_i$ . The rest fraction  $(1 - \alpha_t)$  of the surplus is invested in a risk-free asset which evolves as  $dP_t = rP_t dt$ , where  $r$  is the interest rate.

With dynamic investment control, denoted by  $\pi := \{\alpha_s\}_{s \geq 0}$ , the surplus process is governed by

$$dX_t^\pi = (\mu - r)\alpha_t X_t^\pi dt + rX_t^\pi dt + \sigma\alpha_t X_t^\pi dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = u, \quad (2)$$

where  $R_t$  is defined by (1).

**Definition 1.** A control policy  $\pi := \{\alpha_s\}_{s \geq 0}$  is said to be *admissible* if  $\alpha_t$  satisfies the following conditions:

- (i)  $\alpha_t$  is  $\mathcal{F}_t$  predictable where  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  is a filtration generated by processes  $\{w_t\}_{t \geq 0}$  and  $\{R_t\}_{t \geq 0}$ ;
- (ii)  $\alpha_t X_t^\pi$  is square integrable over any finite time interval almost surely.

Note that we do not impose assumption  $0 \leq \alpha_t \leq 1$  for  $t \geq 0$ . This means that we allow both borrowing and shortselling, and  $\alpha_t \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

We denote by  $\Pi$  the set of all admissible controls. The survival probability of the process  $X_t^\pi$  defined in (2) under policy  $\pi \in \Pi$  is  $\varphi^\pi(u) = \mathbf{P}(X_t^\pi \geq 0, t \geq 0)$ , and the maximal survival probability (the value function) is

$$V(u) = \sup_{\pi \in \Pi} \varphi^\pi(u). \quad (3)$$

It is clear that  $V(u)$  is a non-decreasing function by its definition. If we assume that  $V$  is twice continuously differentiable, then it solves the following HJB equation:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 u^2 V''(u) + V'(u) [(\alpha(\mu - r) + r)u + c] - (\lambda + \lambda_1)V(u) + \right. \\ \left. + \lambda \int_0^u V(u - z) dF(z) + \lambda_1 \int_0^\infty V(u + z) dG(z) \right\} = 0, \quad u > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Preliminary results for the case $r=0$ : Lundberg bounds for ruin probabilities under CA strategies and lower bound for the value function

Let us return to the controlled process of the form (2) and denote  $A_t := \alpha_t X_t^\pi$ . Then  $A_t$  is an amount of money invested in a risky asset at the moment  $t$ , and equation (2) can be rewritten as

$$dX_t^\pi = (\mu - r)A_t dt + rX_t^\pi dt + \sigma A_t dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = u.$$

If  $r = 0$  and  $A_t \equiv A$  for some constant  $A$ , then we have a CA strategy and the corresponding process (for brevity, we will denote it as  $X_t^A$ ) satisfies the equation

$$dX_t^A = \mu A dt + \sigma A dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = u. \quad (5)$$

This process can be considered as a process  $R_t$  perturbed by diffusion with drift (in the case  $A \neq 0$ ). Assuming finiteness of exponential moments of  $Y_1$  and  $Z_1$ , we can write the equation

$$\lambda(M_{Z_1}(\gamma) - 1) + \lambda_1(M_{-Y_1}(\gamma) - 1) - (c + \mu A)\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \gamma^2 = 0,$$



where  $M_Z(\gamma)$  is the moment generating function of r.v.  $Z$ . It can be checked that if there exists a positive  $\gamma(A)$  satisfying the last equation (so-called adjustment coefficient), then the process  $\exp(-\gamma X_t^A)$  is a *martingale* with mean equal to  $\exp\{-\gamma(A)u\}$ . This property allows us to obtain the Lundberg bounds for the ruin probability  $\Psi^A(u) = 1 - \varphi^A(u)$ :  $\Psi^A(u) \leq K \exp\{-\gamma(A)u\}$  for some constant  $K$ ,  $0 < K \leq 1$  (for the CL model perturbed by diffusion see, e.g., [12]). It is easy to understand that, for  $\gamma = \sup_A \gamma(A)$ , the maximizer  $A^*$  is also the minimizer for the equation

$$\inf_A \left[ \lambda(M_{Z_1}(\gamma) - 1) + \lambda_1(M_{-Y_1}(\gamma) - 1) - (c + \mu A)\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \gamma^2 \right] = 0,$$

therefore, we get  $A^* = \frac{\mu}{\sigma^2 \gamma}$ , where  $\gamma$  is a positive solution of the equation

$$\lambda M_{Z_1}(\gamma) + \lambda_1 M_{-Y_1}(\gamma) = \lambda + \lambda_1 + c\gamma + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \quad (6)$$

(for the case  $\lambda_1 = 0$ , i.e., in CL model with investments, the corresponding equation see in [7]). Let us introduce the following assumption:

**(A)**  $c > 0$ ; the *safety loading* is positive, i.e.,  $c + \lambda_1 n - \lambda m > 0$ .

If the assumption **(A)** holds, then the positive solution of the equation (6) is unique (we will see it below for the case of exponential distributions of jumps). Thus, we get the best estimate in the set of all CA strategies:  $\Psi^{A^*}(u) \leq K \exp\{-\gamma u\}$ , hence, for the value function (3) the following inequality holds:  $V(u) \geq 1 - K \exp\{-\gamma u\}$  for some constant  $K$ ,  $0 < K \leq 1$  (recall that  $\gamma$  is a positive solution to equation (6)). This is in contrast with the power asymptotic representation at infinity of the survival probability in the case when the whole of the surplus or some of its constant proportion is invested in a risky asset; see [10] and comments in [11].

*The case of exponential distributions of jumps*

Let  $F(z) = 1 - e^{-z/m}$ ,  $G(z) = 1 - e^{-z/n}$ ,  $m, n > 0$ . Then the equation (6) can be rewritten in the form

$$\frac{\lambda}{1 - \gamma m} = \lambda + c\gamma + \frac{\lambda_1 \gamma n}{1 + \gamma n} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}. \quad (7)$$

For simplicity, we will assume here that assumption **(A)** is fulfilled. In the case  $\mu = 0$  (without investments), it is easy to see that there exists a unique positive solution  $\gamma_0 < 1/m$  of (7) (at the point  $1/m$  we have a vertical asymptote:  $1/(1 - \gamma m) \rightarrow \infty$ ,  $\gamma \uparrow 1/m$ ). The Figure shows the graph of a convex function of  $\gamma$  defined on the left side of the equation (7) and two graphs of concave functions defined on the right side of the equation (7) for  $\mu = 0$  (lower curve)

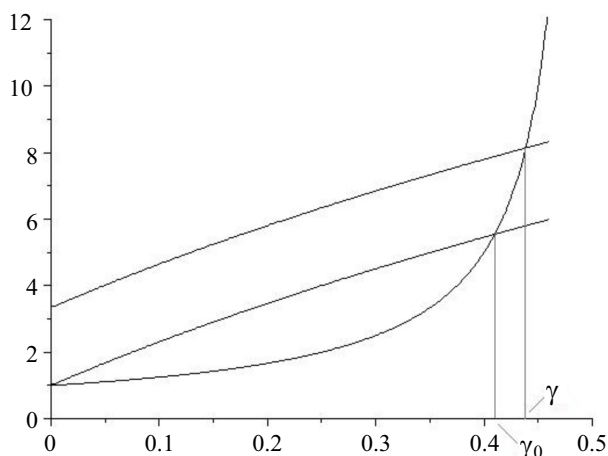


Figure. Adjustment coefficients

and for  $\mu > 0$  (upper curve). The intersection points correspond to the solutions of the equation (7): it is obvious that  $\gamma_0 < \gamma < 1/m$ , where  $\gamma$  satisfies (7) for  $\mu > 0$ .

Thus, CA strategy  $A_t \equiv A^*$  gives the best Lundberg bound among all CA strategies, including zero strategy  $A_t \equiv 0$  (without investment). However, let us show that any CA strategy  $A_t \equiv A$ ,  $A \neq 0$  is worse than zero strategy for small levels of the surplus. Thus, any CA strategy  $A_t \equiv A$ ,  $A \neq 0$  cannot be optimal for the optimization problem (3). Indeed, for the survival probability  $\varphi^A(u)$  of the process (5), where  $A \neq 0$ , we have the condition



$\varphi^A(0) = 0$  due to Brownian perturbation. Moreover, it can be shown that  $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi^A(u) = 0$ . At the same time, in the case of zero CA strategy and exponential distributions of jumps it is easy to obtain (using the method of integro-differential equations (IDE); in a more general case, see, for example, [11]) the exact formula for survival probability  $\varphi^0(u)$ :

$$\varphi^0(u) = 1 - (1 - \gamma_0 m) \exp(-\gamma_0 u), \quad (8)$$

where  $\gamma_0$  is defined above. Therefore,  $\varphi^0(0) = \gamma_0 m > 0$ , and we see that CA strategies cannot be optimal. But in [7] it was shown that, for the CL model with small claim sizes, the optimal strategy as a function of the surplus converges, as the surplus tends to infinity, to the value  $A^* = \frac{\mu}{\sigma^2 \gamma_1}$  that maximizes the corresponding adjustment coefficient, where  $\gamma_1$  is the unique positive solution to equation (6) (or (7) in the case of exponential distributions of claim sizes) with  $\lambda_1 = 0$ . In addition, the Cramér-Lundberg approximation for the minimal ruin probability was obtained: there exists a constant  $\varsigma \in (0, \infty)$  such that  $\lim_{u \rightarrow \infty} (1 - V(u)) \exp(\gamma_1 u) = \varsigma$ .

In what follows, we will show (for the case of exponential distributions of jumps) that similar asymptotic representations for the optimal strategy and value function can also be obtained for a more general risk model, i.e., for  $\lambda_1 \geq 0$ ; the case of non-negative interest rate will also be included. For this we propose to use the asymptotic analysis of solutions to a certain singular problem for a system of nonlinear ODE, which is satisfied by an optimal strategy, a value function and a certain additionally introduced function.

### 3. General case (non-negative $r$ ): Conditions for the solutions of HJB equation

Let us turn to the HJB equation (4). Suppose  $V$  is a twice continuously differentiable function and  $V$  solves (4). Let us also assume that  $V$  satisfies the conditions

$$\lim_{u \rightarrow \infty} V(u) = 1, \quad (9)$$

$$V'(u) > 0, \quad V''(u) < 0, \quad u > 0. \quad (10)$$

(Note that if the second derivative of the function  $V(u)$  is non-negative at some point  $u > 0$ , the supremum in (4) is not achieved. The condition (9) is obvious in the case of a positive safety loading taking into account (8); in the general case it can be justified by the results [10] about the asymptotic representation for the survival probability at a constant proportion of risky assets ( $\alpha_t \equiv \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ) in the insurer's surplus). Then the maximizer of the right side of the HJB equation has the form

$$\alpha^* = \alpha_V^*(u) := -\frac{(\mu - r)V'(u)}{\sigma^2 u V''(u)}. \quad (11)$$

Taking the expression (11) in (4), we obtain the nonlinear integro-differential equation (IDE)

$$\begin{aligned} (ru + c)V'(u) - (\lambda + \lambda_1)V(u) + \lambda \int_0^u V(u - z) dF(z) + \lambda_1 \int_0^\infty V(u + z) dG(z) = \\ = \frac{(\mu - r)^2 (V'(u))^2}{2\sigma^2 V''(u)}, \quad u > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Denote  $A(u) = u\alpha_V^*(u)$ , then

$$A(u) = -\frac{(\mu - r)V'(u)}{\sigma^2 V''(u)}. \quad (13)$$

Note that for reasons similar to those that require to rejecting the CA strategy producing the Brownian disturbance, we must also conclude that the function  $A(u)$  satisfies the condition

$$A(+0) = \lim_{u \rightarrow +0} A(u) = 0. \quad (14)$$

Then, setting  $u \rightarrow 0$  in (12) in the assumption of finiteness of  $V'(+0) = \lim_{u \rightarrow +0} V'(u)$  and taking to account the relations (13), (14), we obtain the following non-local condition:

$$cV'(+0) - (\lambda + \lambda_1)V(0) + \lambda_1 \int_0^\infty V(z) dG(z) = 0. \quad (15)$$

*The case of exponential distributions: Singular problem for ODE system*

Let us introduce the function

$$R(u) := \frac{\exp(u/n)}{V'(u)} \int_u^\infty \exp(-z/n) V'(z) dz. \quad (16)$$

Note that, taking into account integration by parts in (15) with  $G(y) = 1 - \exp(-y/n)$ , the condition (15) can be rewritten in the following form:

$$cV'(+0) - \lambda V(0) + \lambda_1 V'(+0) R(+0) = 0. \quad (17)$$

From this we conclude that  $V'(+0) > 0$  (recall that  $V(0) > 0$  for the value function in the considered model in view of the formula (8) for the survival probability in the absence of investments; as its consequence we have  $V(0) \geq \gamma_0 m$ ).

**Theorem 1.** *Let  $c > 0$ ,  $F(z) = 1 - e^{-z/m}$ ,  $G(z) = 1 - e^{-z/n}$ ,  $m, n > 0$ . If there exists a twice continuously differentiable solution  $V$  of equation (12) with the conditions (9), (10) and (15), then:*

1) pair of functions  $A$ ,  $R$ , defined in (13), (16), is a solution of the following singular initial problem for nonlinear ODE system:

$$\begin{cases} r - \lambda_1 - \lambda - (ru + c) \left[ \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 A(u)} - \frac{1}{m} \right] + \\ + \frac{\mu - r}{2} \left[ A'(u) + \frac{1}{m} A(u) - \frac{(\mu - r)}{\sigma^2} \right] + \lambda_1 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) R(u) = 0, \\ R'(u) = R(u) \left( \frac{1}{n} + \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 A(u)} \right) - 1 \end{cases} \quad (18)$$

with initial conditions (14) and (17) and unknown parameter  $V(0)/V'(+0) > c/\lambda$ ;

2)  $V(u)$  is the maximal survival probability for the process (2) in the class of all admissible control policies, i.e.  $V(u)$  is the solution of the optimization problem (3); optimal control has the form  $\alpha_t^* = A(X_t^*)/X_t^*$ , where  $X_t^*$ ,  $t \geq 0$ , is the corresponding solution of equation (2);

3) the functions  $V$ ,  $A$ ,  $R$  have the following asymptotic representations:

a) for small values of the surplus

$$\begin{aligned} A(u) &\sim \frac{2\sqrt{c}}{\sigma} \sqrt{u}, \quad u \rightarrow 0, \\ R(u) &\sim \frac{\lambda V(0)/V'(+0) - c}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{(\mu - r)}{\sigma \sqrt{c}} \sqrt{u} \right) - \frac{r}{\lambda_1} u, \quad u \rightarrow 0, \\ V(u) &\sim V(0) + V'(+0) \left( u - \frac{2(\mu - r)}{3\sqrt{c}\sigma} u^{3/2} \right), \quad u \rightarrow 0; \end{aligned}$$

b) for large values of the surplus in the the case  $r > 0$ :

$$A(u) \sim \frac{(\mu - r)m}{\sigma^2} + \left( \frac{\lambda}{r} - 1 \right) \frac{(\mu - r)m^2}{\sigma^2} \frac{1}{u}, \quad u \rightarrow \infty,$$





$$R(u) \sim \frac{mn}{m+n} + \left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) \frac{n^2 m^2}{(m+n)^2} \frac{1}{u}, \quad u \rightarrow \infty,$$

$$V(u) \sim 1 - K \exp\left(-\frac{u}{m}\right) u^{\left(\frac{\lambda}{r}-1\right)}, \quad u \rightarrow \infty;$$

in the case  $r = 0$ :

$$A(u) \sim \frac{\mu}{\sigma^2 \gamma}, \quad u \rightarrow \infty,$$

$$R(u) \sim \frac{n}{1 + \gamma n}, \quad u \rightarrow \infty,$$

$$V(u) \sim 1 - K \exp(-\gamma u), \quad u \rightarrow \infty,$$

where  $\gamma$  is the unique positive solution of equation (7) and  $K > 0$ .

Recall that  $\gamma < 1/m$ ; compare also the asymptotic representations at infinity for the case  $r = 0$  with the results of the Section 2 for CA strategies.

The proof of the theorem is too long, we will not give it here. Note only that the equation for  $A$  can be obtained similarly to the corresponding equation in [9] (not containing the function  $R$ ); the equation for  $R$  is derived by direct differentiation in (16), taking into account the relation (13). The statement 2) about the solution of the optimization problem is proved using verification arguments; asymptotic representations at infinity were found in the form of asymptotic series in inverse powers of the argument; asymptotic representations at zero were obtained by the asymptotic investigation of transformed ODE system (18) with the replacement of the function  $R$  by another function  $D$ , linearly related to  $A$ ,  $R$  and  $ru$ , while  $D(+0) = V(0)/V'(+0)$ . It remains to be noted that this parameter can be determined numerically as a result of solving the initial ODE problem formulated above, and finally,  $V(0)$  is determined using the normalization condition (9) for the solution obtained with a fixed parameter. Numerical calculations require additional studies of the ODE system.

## References

1. Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin. *Mathematics of Operations Research*, 1995, vol. 20, iss. 4, pp. 937–958. DOI: [10.1287/moor.20.4.937](https://doi.org/10.1287/moor.20.4.937)
2. Grandell J. *Aspects of risk theory*. New York, Springer-Verlag, 1991. 175 p. DOI: [10.1007/978-1-4613-9058-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9058-9)
3. Hipp C., Plum M. Optimal investment for insurers. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2000, vol. 27, iss. 2, pp. 215–228. DOI: [10.1016/S0167-6687\(00\)00049-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(00)00049-4)
4. Hipp C., Plum M. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. *Finance and Stochastics*, 2003, vol. 7, pp. 299–321. DOI: [10.1007/s007800200095](https://doi.org/10.1007/s007800200095)
5. Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M. Optimal constrained investment in the Cramer–Lundberg model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2014, vol. 2014, iss. 5, pp. 383–404. DOI: [10.1080/03461238.2012.699001](https://doi.org/10.1080/03461238.2012.699001)
6. Gaier J., Grandits P., Schachermayer W. Asymptotic ruin probabilities and optimal investment. *The Annals of Applied Probability*, 2003, vol. 13, iss. 3, pp. 1054–1076. DOI: [10.1214/aoap/1060202834](https://doi.org/10.1214/aoap/1060202834)
7. Hipp C. Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2004, vol. 2004, iss. 5, pp. 321–335. DOI: [10.1080/03461230410000538](https://doi.org/10.1080/03461230410000538)
8. Belkina T. A., Konyukhova N. B., Kurochkin S. V. Optimal control of investment in a collective pension insurance model: Study of singular nonlinear problems for integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, iss. 9, pp. 1438–1454. DOI: [10.1134/S0965542522090056](https://doi.org/10.1134/S0965542522090056)
9. Belkina T., Luo Sh. Asymptotic investment behaviors under a jump-diffusion risk process. *North American Actuarial Journal*, 2017, vol. 21, iss. 1, pp. 36–62. DOI: [10.1080/10920277.2016.1246252](https://doi.org/10.1080/10920277.2016.1246252)
10. Kabanov Yu., Pukhlyakov N. Ruin probabilities with investments: Smoothness, integro-differential and ordinary differential equations, asymptotic behavior. *Journal of Applied Probability*, 2022, vol. 59, iss. 2, pp. 556–570. DOI: [10.1017/jpr.2021.74](https://doi.org/10.1017/jpr.2021.74)



11. Belkina T. A., Ogareva A. S. Risky investments and survival probability in the insurance model with two-sided jumps: Problems for integrodifferential equations and ordinary differential equation and their equivalence. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 278–285. DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-3-278-285](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-278-285), EDN: [HYOWQI](https://www.edn.ru/HYOWQI)
12. Dufresne F., Gerber H. U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1991, vol. 10, iss. 1, pp. 51–59. DOI: [10.1016/0167-6687\(91\)90023-Q](https://doi.org/10.1016/0167-6687(91)90023-Q)

Поступила в редакцию / Received 12.01.2025

Принята к публикации / Accepted 19.03.2025

Опубликована / Published 29.08.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 325–331

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 325–331

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-325-331>

EDN: <https://elibrary.ru/FNDYXI>

Article

## Solution of the inverse spectral problem for differential operators on a finite interval with complex weights

V. A. Yurko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vjacheslav A. Yurko, YurkoVA@sgu.ru, ORCID: 0000-0002-4853-0102, SPIN: 5783-9055, AuthorID: 2934

**Abstract.** Non-self-adjoint second-order ordinary differential operators on a finite interval with complex weights are studied. Properties of spectral characteristics are established, and the inverse problem of recovering operators from their spectral characteristics is investigated. For this class of nonlinear inverse problems, an algorithm for constructing the global solution is obtained. To study this class of inverse problems, we develop ideas of the method of spectral mappings.

**Keywords:** differential operators, complex weight, spectral characteristics, inverse problem, method of spectral mappings

**For citation:** Yurko V. A. Solution of the inverse spectral problem for differential operators on a finite interval with complex weights. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 325–331. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-325-331](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-325-331), EDN: FNDYXI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 539.374

## Решение обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов на конечном интервале с комплексными весами

В. А. Юрко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, YurkoVA@sgu.ru, ORCID: 0000-0002-4853-0102, SPIN: 5783-9055, AuthorID: 2934

**Аннотация.** Исследуются несамосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы второго порядка на конечном интервале с комплексными весами. Установлены свойства спектральных характеристик и изучается обратная задача восстановления операторов по их спектральным характеристикам. Для этого класса нелинейных обратных задач получен алгоритм для построения глобального решения. Для исследования этого класса обратных задач используется развитие идей метода спектральных отображений.

**Ключевые слова:** дифференциальные операторы, комплексный вес, спектральные характеристики, обратная задача, метод спектральных отображений

**Для цитирования:** Yurko V. A. Solution of the inverse spectral problem for differential operators on a finite interval with complex weights [Юрко В. А. Решение обратной спектральной задачи для





дифференциальных операторов на конечном интервале с комплексными весами] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 325–331. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-325-331](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-325-331), EDN: [FNDYXI](https://www.edn.ru/FNDYXI)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

We consider the boundary value problem  $L$  for the differential equation

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad 0 < x < T, \quad (1)$$

subject to the Robin boundary conditions

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(T) + Hy(T) = 0, \quad (2)$$

and the jump conditions at an interior point  $b \in (0, T)$ :

$$y(b+0) = d_1 y(b-0), \quad y'(b+0) = y(b-0)/d_1 + d_2 y(b-0). \quad (3)$$

Here  $\lambda$  is the spectral parameter,  $q(x)$  and  $r(x)$  are complex-valued functions,  $q(x) \in L(0, T)$ , and  $r(x) = a_k^2$  for  $x \in (b_{k-1}, b_k)$ , where  $0 = b_0 < b_1 = b < b_2 = T$ . The numbers  $h$ ,  $H$ ,  $a_k$ , and  $d_k$  are complex, and  $a_k \neq 0$ ,  $d_1 \neq 0$ . For definiteness, let  $\arg d_1 \in [0, \pi)$ .

We study the inverse spectral problem for the boundary value problem (1)–(3). Inverse spectral problems consist in recovering operators from their spectral characteristics. Such problems play an important role in mathematics and have many applications in natural science and technology. Inverse spectral problems are also used for solving nonlinear integrable evolution equations of mathematical physics. Inverse problems for the classical Sturm–Liouville operators (when  $r(x) \equiv 1$ ,  $d_1 = 1$ , and  $d_2 = 0$ ) have been studied fairly completely (see [1] and the historical review therein). Inverse problems for arbitrary order differential operators and systems with arbitrary characteristic numbers are more difficult. They have been solved later by the method of spectral mappings (see the monographs [2, 3] and the references therein). Inverse problems on spatial networks are an important and popular part of the inverse problem theory; in the review paper [4], one can find the main results on inverse problems on spatial networks. Boundary value problems with discontinuous weights and jump conditions at interior points have been considered in many papers, but mostly for the case with real weights. In the case when  $r(x) \equiv 1$  (i.e.,  $a_k = 1$ ), the boundary value problem  $L$  satisfying conditions (3) was studied in [5–9] and other papers. Inverse problems for a real weight  $r(x)$  were studied in [10–15] and other works. Inverse problems for the boundary value problem  $L$  with complex-valued weights were studied in [16, 17], where only uniqueness results were obtained.

Note that complex-valued weights appear, in particular, in the study of the interaction of electromagnetic waves with layered media possessing both dielectric and magnetic properties [18]. Moreover, a number of problems for Sturm–Liouville equations on curves in the complex plane can be reduced to the boundary-value problem  $L$  of the form (1)–(3) on a real interval. In the present paper, we establish properties of the spectral characteristics for  $L$  and study the inverse spectral problem of recovering parameters of  $L$  from the given spectral characteristics. For this class of nonlinear inverse problems, an algorithm for constructing the global solution is obtained. To study this class of inverse problems, we develop ideas related to the method of spectral mappings [2].

## 1. Spectral data

Let  $l_k := b_k - b_{k-1}$  and  $a_k = r_k \exp(i\varphi_k)$ ,  $r_k > 0$ ,  $0 \leq \varphi_2 < \varphi_1 < \pi$ . We assume that the following regularity condition holds:  $\omega_{\pm} := d_1 a_2 \pm a_1/d_1 \neq 0$ . Denote by  $\Phi(x, \lambda)$  the solution of (1) such that (3) holds and  $U(\Phi) = 1$ ,  $V(\Phi) = 0$ . Let  $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$ . We will also use the solutions  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\psi(x, \lambda)$ ,  $S(x, \lambda)$  of Equation (1) satisfying (3) and the conditions



$\varphi(0, \lambda) = 1$ ,  $\varphi'(0, \lambda) = h$ ,  $S(0, \lambda) = 0$ ,  $S'(0, \lambda) = 1$ ,  $\psi(T, \lambda) = 1$ ,  $\psi'(T, \lambda) = -H$ . Denote  $D(x, \lambda, \mu) := (\lambda - \mu)^{-1} \langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle$ , where  $\langle y(x), z(x) \rangle := y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$ . The function

$$\Delta(\lambda) := \langle \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle = -V(\varphi) = U(\psi) \quad (4)$$

does not depend on  $x$ , and it is called the characteristic function for  $L$ . The eigenvalues  $\Lambda := \{\lambda_k\}_{k \geq 0}$  of  $L$  coincide with the zeros of the entire function  $\Delta(\lambda)$ . Clearly,

$$\Phi(x, \lambda) = S(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda)/\Delta(\lambda), \quad M(\lambda) = \Delta_0(\lambda)/\Delta(\lambda), \quad (5)$$

where  $\Delta_0(\lambda) := \psi(0, \lambda) = V(S)$ . Using (4) and (5) one gets

$$\langle \varphi(x, \lambda), \Phi(x, \lambda) \rangle \equiv 1. \quad (6)$$

Let  $\lambda = \rho^2$ ,  $\lambda_k = \rho_k^2$ . Consider the half-planes  $\Pi_k^\pm := \{\rho : \pm \operatorname{Im}(\rho a_k) > 0\}$ ,  $k = 1, 2$ , and denote

$$S_1 = \Pi_1^+ \cap \Pi_2^+, \quad S_2 = \Pi_1^- \cap \Pi_2^+, \quad S_3 = \Pi_1^- \cap \Pi_2^-, \quad S_4 = \Pi_1^+ \cap \Pi_2^-.$$

Then  $S_j = \{\rho : \arg \rho \in (\theta_j, \theta_{j+1})\}$ , where  $\theta_1 = \theta_5 = -\varphi_2$ ,  $\theta_2 = \pi - \varphi_1$ ,  $\theta_3 = \pi - \varphi_2$ ,  $\theta_4 = -\varphi_1$ . For sufficiently small  $\delta > 0$ , we construct the sectors  $S_{j,\delta} := \{\rho : \arg \rho \in (\theta_j + \delta, \theta_{j+1} - \delta)\}$ .

Let  $\{e_k(x, \rho)\}_{k=1,2}$ ,  $x \in [0, b]$  and  $\{E_k(x, \rho)\}_{k=1,2}$ ,  $x \in [b, T]$  be the Birkhoff-type fundamental systems of solutions (FSS's) of Equation (1) with the asymptotics as  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,  $\rho \in \overline{S_j}$ ,  $\nu = 0, 1$  (see [1]):

$$\begin{aligned} e_k^{(\nu)}(x, \rho) &= ((-1)^{k-1} i \rho a_1)^\nu \exp((-1)^{k-1} i \rho a_1 x) [1], \quad x \in [0, b], \\ E_k^{(\nu)}(x, \rho) &= ((-1)^{k-1} i \rho a_2)^\nu \exp((-1)^{k-1} i \rho a_2 (x - b)) [1], \quad x \in [b, T], \end{aligned}$$

where  $[1] = 1 + O(1/\rho)$ . The functions  $e_k^{(\nu)}(x, \rho)$  and  $E_k^{(\nu)}(x, \rho)$  are regular for  $\rho \in S_j$ ,  $|\rho| > \rho^*$  and continuous for  $\rho \in \overline{S_j}$ ,  $|\rho| \geq \rho^*$  for some  $\rho^* > 0$ . Using these FSS's and the jump conditions (3) we get the following asymptotical formulas as  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,  $\nu = 0, 1$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(x, \lambda) &= \left( (i \rho a_1)^\nu \exp(i \rho a_1 x) [1] + (-i \rho a_1)^\nu \exp(-i \rho a_1 x) [1] \right) / 2, \quad x \in [0, b], \\ \varphi^{(\nu)}(x, \lambda) &= \left( \left( \omega_+ \exp(i \rho a_1 l_1) [1] + \omega_- \exp(-i \rho a_1 l_1) [1] \right) (i \rho a_2)^\nu \exp(i \rho a_2 (x - b)) [1] + \right. \\ &\quad \left. + \left( \omega_- \exp(i \rho a_1 l_1) [1] + \omega_+ \exp(-i \rho a_1 l_1) [1] \right) (-i \rho a_2)^\nu \exp(-i \rho a_2 (x - b)) [1] \right) / (4 a_2), \quad x \in [b, T], \\ \psi^{(\nu)}(x, \lambda) &= \left( \left( \omega_+ \exp(i \rho a_2 l_2) [1] - \omega_- \exp(-i \rho a_2 l_2) [1] \right) (i \rho a_1)^\nu \exp(i \rho a_1 (b_1 - x)) [1] + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\omega_- \exp(i \rho a_2 l_2) [1] + \omega_+ \exp(-i \rho a_2 l_2) [1] \right) (-i \rho a_1)^\nu \exp(-i \rho a_1 (b_1 - x)) [1] \right) / (4 a_1), \quad x \in [0, b], \\ \psi^{(\nu)}(x, \lambda) &= \left( (-i \rho a_2)^\nu \exp(i \rho a_2 (T - x)) [1] + (i \rho a_2)^\nu \exp(-i \rho a_2 (T - x)) [1] \right) / 2, \quad x \in [b, T]. \end{aligned}$$

In view of (4), these formulas yield

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (-i \rho) \left( \left( \omega_+ \exp(i \rho a_1 l_1) [1] + \omega_- \exp(-i \rho a_1 l_1) [1] \right) \exp(i \rho a_2 l_2) [1] - \right. \\ &\quad \left. - \left( \omega_- \exp(i \rho a_1 l_1) [1] + \omega_+ \exp(-i \rho a_1 l_1) [1] \right) \exp(-i \rho a_2 l_2) [1] \right) / 4, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7)$$

$$M(\lambda) = \pm (i \rho a_1)^{-1} [1], \quad \rho \in \Pi_1^\pm. \quad (8)$$

Using (7) by the known technique (see [1, Ch. 1]) we obtain that the spectrum  $\Lambda$  of  $L$  consists of two subsequences  $\Lambda = \{\lambda_k\} = \{\lambda_{k1}\} \cup \{\lambda_{k2}\}$ , and

$$\rho_{kj} = \sqrt{\lambda_{kj}} = \frac{k\pi}{r_j l_j} \exp(i\theta_{3-j}) + C_j + O(1/k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (9)$$



where  $C_1 = -(2ia_1l_1)^{-1} \ln(-\omega_-/\omega_+)$ ,  $C_2 = (2ia_2l_2)^{-1} \ln(\omega_+/\omega_-)$ . Moreover,

$$\begin{aligned} |\Delta(\lambda)| &\geq C|\rho\mathcal{E}_1(\rho l_1)\mathcal{E}_2(\rho l_2)|, \quad |M(\lambda)| \leq C/|\rho|, \quad \lambda \in G_\delta, \\ |\varphi(x, \lambda)| &\leq C|\mathcal{E}_1(\rho x)|, \quad x \in (0, b), \quad \forall \lambda, \\ |\varphi(x, \lambda)| &\leq C|\mathcal{E}_1(\rho x)\mathcal{E}_2(\rho(x-b))|, \quad x \in (b, T), \quad \forall \lambda, \\ |\Phi(x, \lambda)| &\leq C|\rho\mathcal{E}_1(\rho x)|^{-1}, \quad x \in (0, b), \quad \lambda \in G_\delta, \\ |\Phi(x, \lambda)| &\leq C|\rho\mathcal{E}_1(\rho x)\mathcal{E}_2(\rho(x-b))|^{-1}, \quad x \in (b, T), \quad \lambda \in G_\delta, \end{aligned} \quad (10)$$

where  $G_\delta := \{\rho : |\rho - \rho_k| \geq \delta, \mathcal{E}_k(\rho x) := \exp(\pm i\rho a_k x) \text{ for } \rho \in \Pi_k^\pm, x \in l_k\}$ . Let  $m_k$  be the multiplicity of the eigenvalue  $\lambda_k$  ( $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+m_k-1}$ ), and put

$$S := \{k \geq 1 : \lambda_{k-1} \neq \lambda_k\} \cup \{0\}.$$

It follows from (9) that for sufficiently large  $k$  ( $k > k^*$ ) all eigenvalues are simple, i.e.,  $m_k = 1$  for  $k > k^*$ . Similar to [19] one gets

$$M(\lambda) = \sum_{k \in S} \sum_{\nu=0}^{m_k-1} \frac{M_{k+\nu}}{(\lambda - \lambda_k)^{\nu+1}}, \quad (11)$$

where  $\sum_{\nu} \frac{M_{k+\nu}}{(\lambda - \lambda_k)^{\nu+1}}$  is the principal part of  $M(\lambda)$  in a neighborhood of  $\lambda_k$ . The sequence  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \geq 0}$  is called the Weyl sequence of  $L$ , and the data  $W = \{\lambda_k, M_k\}_{k \geq 0}$  are called the spectral data of  $L$ . Similar to (9) we calculate  $\mathcal{M} = \{M_{k1}\} \cup \{M_{k2}\}$ , and

$$M_{k1} = \frac{2}{a_1^2 l_1} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad M_{k2} = \frac{8}{\omega_- \omega_+ l_2} \exp\left(\frac{2k\pi r_1 l_1}{r_2 l_2} (\cos \alpha + i \sin \alpha)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad (12)$$

as  $k \rightarrow \infty$ . Here  $\alpha := \varphi_1 - \varphi_2 + \pi/2$ . Note that  $\cos \alpha < 0$ , since  $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ . Using (7), (9), (10), (12) and the asymptotical formulas for  $\varphi(x, \lambda)$  and  $\psi(x, \lambda)$ , we obtain the estimates

$$|\varphi(x, \lambda_{k1})| \leq C, \quad |\varphi(x, \lambda_{k2})| \leq C \exp\left(\frac{-k\pi r_1 l_1 \cos \alpha}{r_2 l_2}\right), \quad x \in [0, T]. \quad (13)$$

It follows from (8) and (9) that

$$a_1 = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} (i\rho M(\lambda))^{-1}, \quad \rho \in \Pi_1^+, \quad (14)$$

$$l_1 = b = -\lim_{k \rightarrow \infty} (k\pi/(a_1 \rho_{k1})), \quad l_2 = T - l_1, \quad a_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (k\pi/(l_2 \rho_{k2})), \quad (15)$$

$$A := \omega_+/\omega_- = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(2i\rho_{k2} a_2 l_2), \quad d_1 = \sqrt{(a_1(A+1))/(a_2(A-1))}. \quad (16)$$

## 2. Inverse problem

In this paper, we consider the following **Inverse problem**:

*Given the Weyl function  $M(\lambda)$  (or the spectral data  $W$ ), construct  $L$ .*

According to (11), the specification of the Weyl function is equivalent to the specification of the spectral data.

Firstly, we will prove the uniqueness theorem. For this purpose, together with  $L$  we consider a boundary value problem  $\tilde{L}$  of the same form but with  $\tilde{q}(x)$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{r}(x)$ ,  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{d}_1$ ,  $\tilde{d}_2$  instead of  $q(x)$ ,  $b$ ,  $r(x)$ ,  $h$ ,  $H$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ . We agree that if a certain symbol  $\chi$  denotes an object related to  $L$ , then  $\tilde{\chi}$  will denote an analogous object related to  $\tilde{L}$ .

**Theorem 1.** *If  $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$  (or  $W = \tilde{W}$ ), then  $L = \tilde{L}$ . Thus, the specification of the Weyl function (or the spectral data) uniquely determines the functions  $q(x)$ ,  $r(x)$ , and the parameters  $b$ ,  $h$ ,  $H$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ .*



**Proof.** It follows from (14)–(16) that  $b = \tilde{b}$ ,  $a_k = \tilde{a}_k$ ,  $d_1 = \tilde{d}_1$ . We construct the functions

$$\mathcal{P}_0 = \Phi\tilde{\varphi} - \varphi\tilde{\Phi}, \quad \mathcal{P}_1 = \varphi\tilde{\Phi}' - \Phi\tilde{\varphi}'. \quad (17)$$

In view of (6), this yields

$$\varphi = \mathcal{P}_1\tilde{\varphi} + \mathcal{P}_0\tilde{\varphi}', \quad \Phi = \mathcal{P}_1\tilde{\Phi} + \mathcal{P}_0\tilde{\Phi}', \quad \mathcal{P}_1 - 1 = \varphi(\tilde{\Phi}' - \Phi') - \Phi(\tilde{\varphi}' - \varphi'). \quad (18)$$

Using (5), (17), (18) and the asymptotical formulas for  $\varphi$  and  $\psi$ , we infer

$$|\mathcal{P}_1(x, \lambda) - 1| \leq C/|\rho|, \quad |\mathcal{P}_0(x, \lambda)| \leq C/|\rho|, \quad \rho \in G_\delta \cap \tilde{G}_\delta. \quad (19)$$

Taking (5), (17) and the assumption of the theorem into account, we conclude that the functions  $\mathcal{P}_k(x, \lambda)$  are entire in  $\lambda$  for each  $x$ . Together with (19), this yields  $\mathcal{P}_1(x, \lambda) \equiv 1$ ,  $\mathcal{P}_0(x, \lambda) \equiv 0$ . Using (18) we calculate  $\varphi(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda)$ ,  $\Phi(x, \lambda) \equiv \tilde{\Phi}(x, \lambda)$ , hence  $L = \tilde{L}$ .  $\square$

Let us go on to deriving a constructive solution to the inverse problem. For this purpose, we will use ideas of the method of spectral mappings [2]. We will reduce our nonlinear inverse problem to the solution of the so-called *main equation*, which is a linear equation in a corresponding Banach space of sequences. We give a derivation of the main equation, and prove its unique solvability. Using the solution of the main equation we provide an algorithm for the solution of the inverse problem considered. For simplicity, in the sequel we confine ourselves to the case when the function  $\Delta(\lambda)$  has only simple zeros (the general case requires minor technical modifications).

Let the Weyl function  $M(\lambda)$  and the spectral data  $W$  be given. Using (14)–(16), we compute  $b$ ,  $a_k$ , and  $d_1$ . Then we choose a model boundary value problem  $\tilde{L}$  such that  $\tilde{b} = b$ ,  $\tilde{a}_k = a_k$ ,  $\tilde{d}_1 = d_1$ , and arbitrary in the rest (for example, we can take  $\tilde{q} = 0$ ). Let  $\theta_k := 1$  if  $\lambda_k = \lambda_{k1}$ , and  $\theta_k := \exp(-k\pi r_1 l_1 (r_2 l_2)^{-1} \cos \alpha)$  if  $\lambda_k = \lambda_{k2}$ . Denote

$$\xi_k := |\rho_k - \tilde{\rho}_k| + |M_k - \tilde{M}_k|\theta_k^2, \quad z_{k0} := \lambda_k, \quad z_{k1} := \tilde{\lambda}_k, \quad \beta_{k0} := M_k, \quad \beta_{k1} := \tilde{M}_k.$$

By virtue of (9) and (12), one has  $\xi_k = O(1/k)$ . Consider the functions

$$\begin{aligned} \varphi_{kj}(x) &:= \varphi(x, z_{kj}), \quad \tilde{\varphi}_{kj}(x) := \tilde{\varphi}(x, z_{kj}), \quad j = 0, 1, \\ B_{ni,kj}(x) &:= D(x, z_{ni}, z_{kj})\beta_{kj}, \quad \tilde{B}_{ni,kj}(x) := \tilde{D}(x, z_{ni}, z_{kj})\beta_{kj}, \quad i, j = 0, 1, \\ f_{k0}(x) &:= (\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x))/(\xi_k\theta_k), \quad f_{k1}(x) := \varphi_{k1}(x)/\theta_k, \\ A_{n0,k0}(x) &:= (B_{n0,k0}(x) - B_{n1,k0}(x))\xi_k\theta_k/(\xi_n\theta_n), \\ A_{n1,k1}(x) &:= (B_{n1,k0}(x) - B_{n1,k1}(x))\theta_k/\theta_n, \quad A_{n1,k0}(x) := B_{n1,k0}(x)\xi_k\theta_k/\theta_n, \\ A_{n0,k1}(x) &:= (B_{n0,k0}(x) - B_{n1,k0}(x) - B_{n0,k1}(x) + B_{n1,k1}(x))\theta_k/(\xi_n\theta_n). \end{aligned}$$

Similarly  $\tilde{f}_{kj}(x)$  and  $\tilde{A}_{ni,kj}(x)$  are defined. Using (9), (12), (13) and the asymptotical formulas for  $\varphi(x, \lambda)$  we get

$$|f_{kj}(x)|, |\tilde{f}_{kj}(x)| \leq C, \quad |A_{ni,kj}(x)|, |\tilde{A}_{ni,kj}(x)| \leq C\xi_k(|n - k| + 1)^{-1}. \quad (20)$$

Denote by  $V$  the set of indices  $u = (n, i)$ , where  $n \geq 0$ ,  $i = 0, 1$ .

**Theorem 2.** *The following relation holds*

$$\tilde{f}_{ni}(x) = f_{ni}(x) + \sum_{(k,j) \in V} \tilde{A}_{ni,kj}(x)f_{kj}(x), \quad (n, i) \in V, \quad (21)$$

where the series converge absolutely and uniformly on  $x \in [0, T]$  and  $\lambda$  on compact sets.



**Proof.** Consider the contours  $\Gamma_N := \{\lambda : |\lambda| = R_N\}$ , where  $R_N \rightarrow \infty$  such that  $\Gamma_N \subset G_\delta$ .

Denote  $\mathcal{S}_k := \{\rho : \text{Im}(\rho a_k) = 0\}$ ,  $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S} := \{\rho : \text{dist}(\mathcal{S}_0, \rho) = \delta\}$ , where  $\delta > 0$  is such that  $\Lambda \cup \tilde{\Lambda} \subset \text{int } \mathcal{S}$ . Let  $\gamma$  be the image of  $\mathcal{S}$  in the  $\lambda$ -plane, and  $\Gamma'_N := \Gamma_N \cap \text{int } \gamma$ ,  $\Gamma''_N := \Gamma_N \setminus \Gamma'_N$ ,  $\gamma_N^* := \gamma \cap \text{int } \Gamma_N$ . Denote by  $\gamma_N := \gamma_N^* \cup \Gamma'_N$  and  $\gamma_N^0 := \gamma_N^* \cup \Gamma''_N$  the closed contours with counterclockwise circuit. Applying Cauchy's integral formula we get

$$\mathcal{P}_k(x, \lambda) - \delta_{1k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N^0} \frac{\mathcal{P}_k(x, \mu) - \delta_{1k}}{\lambda - \mu} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{\mathcal{P}_k(x, \mu)}{\lambda - \mu} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\mathcal{P}_k(x, \mu) - \delta_{1k}}{\lambda - \mu} d\mu,$$

where  $k = 0, 1$ ,  $\lambda \in \text{int } \gamma_N^0$ , and  $\delta_{jk}$  is the Kronecker delta. Taking (18) into account we calculate

$$\varphi(x, \lambda) = \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \left( \tilde{\varphi}(x, \lambda) \mathcal{P}_1(x, \mu) + \tilde{\varphi}'(x, \lambda) \mathcal{P}_0(x, \mu) \right) \frac{d\mu}{\lambda - \mu} + \varepsilon_N(x, \lambda).$$

In view of (19), one has  $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N(x, \lambda) = 0$  uniformly in  $x \in [0, T]$  and  $\lambda$  on compact sets. Taking (17) and (5) into account we obtain

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \tilde{D}(x, \lambda, \mu) (M(\mu) - \tilde{M}(\mu)) \varphi(x, \mu) d\mu + \varepsilon_N(x, \lambda).$$

Note that the terms with  $S(x, \lambda)$  and  $\tilde{S}(x, \lambda)$  are zero because of Cauchy's theorem. Using the residue theorem we get the relation

$$\tilde{\varphi}_{ni}(x) = \varphi_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \tilde{B}_{ni,k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \tilde{B}_{ni,k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right),$$

which is equivalent to (21). □

By similar arguments, we calculate

$$A_{ni,kj}(x) - \tilde{A}_{ni,kj}(x) + \sum_{(l,s) \in V} \tilde{A}_{ni,ls}(x) A_{ls,kj}(x) = 0, \quad (n, i), (k, j) \in V. \quad (22)$$

Let  $f(x) = [f_u(x)]_{u \in V}$ ,  $A(x) = [A_{u,v}(x)]_{u,v \in V}$ ,  $\tilde{f}(x) = [\tilde{f}_u(x)]_{u \in V}$ ,  $\tilde{A}(x) = [\tilde{A}_{u,v}(x)]_{u,v \in V}$ . We denote by  $m$  the Banach space of bounded sequences  $\chi = [\chi_u]_{u \in V}$  with the norm  $\|\chi\| = \sup_{u \in V} |\chi_u|$ . According to (20), one has that for each fixed  $x$ , the operators  $I + \tilde{A}(x)$  and  $I - A(x)$ , acting from  $m$  to  $m$ , are linear bounded operators. Relations (21) and (22) can be written as follows:

$$\tilde{f}(x) = (I + \tilde{A}(x))f(x), \quad (I + \tilde{A}(x))(I - A(x)) = I.$$

Symmetrically one has  $f(x) = (I - A(x))\tilde{f}(x)$ ,  $(I - A(x))(I + \tilde{A}(x)) = I$ . Thus, for each fixed  $x$ , the operator  $I + \tilde{A}(x)$  has a bounded inverse operator, hence the linear equation  $\tilde{f}(x) = (I + \tilde{A}(x))f(x)$  is uniquely solvable. This equation is called *the main equation* of the inverse problem. Solving the main equation we find the vector  $f(x)$ , and also the solutions  $\varphi_{ni}(x) = \varphi(x, \lambda_{ni})$  of Equation (1); hence, we can construct  $q(x)$ ,  $h$ ,  $H$ , and  $d_2$ . Thus, the solution of the inverse problem can be found by the following algorithm.

**Algorithm.** Given the Weyl function  $M(\lambda)$  and the spectral data  $W$ .

1. Calculate  $b$ ,  $a_k$ , and  $d_1$  via (14)–(16).
2. Choose a model boundary value problem  $\tilde{L}$  such that  $\tilde{b} = b$ ,  $\tilde{a}_k = a_k$ ,  $\tilde{d}_1 = d_1$ .
3. Construct  $\tilde{f}(x)$  and  $\tilde{A}(x)$  (see above).
4. Find  $f(x) = [f_u]_{u \in V}$  by solving the main equation  $\tilde{f}(x) = (I + \tilde{A}(x))f(x)$ .
5. Calculate  $\varphi_{n1}(x) = f_{n1}(x)\theta_n$ ,  $\varphi_{n0} = \varphi_{n1}(x) + f_{n0}(x)\xi_n\theta_n$ .
6. Find  $q(x)$ ,  $h$ ,  $H$  and  $d_2$  using (1)–(3).



**Remark 1.** We can also calculate  $q(x)$  by the formula  $q(x) = \tilde{q}(x) - 2\mathcal{F}(x)$ , where

$$\mathcal{F}(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \left( M_{k0} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - M_{k1} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x) \right).$$

### References

1. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm–Liouville problems and their applications*. New York, NOVA Science Publishers, 2001. 305 p.
2. Yurko V. A. *Method of spectral mappings in the inverse problem theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series, vol. 31. Berlin, Boston, De Gruyter, 2002. 303 p. DOI: [10.1515/9783110940961](https://doi.org/10.1515/9783110940961)
3. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the theory of inverse spectral problems]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 384 p. (in Russian).
4. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks. *Russian Mathematical Surveys*, 2016, vol. 71, iss. 3, pp. 539–584. DOI: [10.1070/RM9709](https://doi.org/10.1070/RM9709)
5. Krueger R. J. Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties. *Journal of Mathematical Physics*, 1982, vol. 23, iss. 3, pp. 396–404. DOI: [10.1063/1.525358](https://doi.org/10.1063/1.525358)
6. Anderssen R. S. The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of rotational eigenfrequencies of the Earth. *Geophysical Journal International*, 1977, vol. 50, iss. 2, pp. 303–309. DOI: [10.1111/j.1365-246X.1977.tb04175.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1977.tb04175.x)
7. Hald O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1984, vol. 37, iss. 5, pp. 539–577. DOI: [10.1002/cpa.3160370502](https://doi.org/10.1002/cpa.3160370502)
8. Yurko V. A. Boundary value problems with discontinuity conditions at an interior point of the interval. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, iss. 8, pp. 1266–1269. DOI: [10.1007/BF02754199](https://doi.org/10.1007/BF02754199)
9. Yurko V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, vol. 10, iss. 2, pp. 141–164. DOI: [10.1080/10652460008819282](https://doi.org/10.1080/10652460008819282)
10. Belishev M. Inverse spectral indefinite problem for the equation  $y'' + \lambda p(x)y = 0$  on an interval. *Functional Analysis and Its Applications*, 1987, vol. 21, iss. 2, pp. 146–148. DOI: [10.1007/BF01078029](https://doi.org/10.1007/BF01078029)
11. Daho K., Langer H. Sturm–Liouville operators with an indefinite weight functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematics*, 1977, vol. 78, iss. 1–2, pp. 161–191. DOI: [10.1017/S0308210500009914](https://doi.org/10.1017/S0308210500009914)
12. Andersson L.-E. Inverse eigenvalue problems with discontinuous coefficients. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, iss. 2, pp. 353–397. DOI: [10.1088/0266-5611/4/2/004](https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/2/004)
13. Coleman C., McLaughlin J. Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative, Part I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1993, vol. 46, iss. 2, pp. 145–184. DOI: [10.1002/cpa.3160460203](https://doi.org/10.1002/cpa.3160460203)
14. Coleman C., McLaughlin J. Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative, Part. II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1993, vol. 46, iss. 2, pp. 185–212. DOI: [10.1002/cpa.3160460204](https://doi.org/10.1002/cpa.3160460204)
15. Freiling G., Yurko V. Inverse problems for differential equations with turning points. *Inverse Problems*, 1997, vol. 13, iss. 5, pp. 1247–1263. DOI: [10.1088/0266-5611/13/5/010](https://doi.org/10.1088/0266-5611/13/5/010)
16. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with complex weights. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2018, vol. 26, iss. 10, pp. 1396–1403. DOI: [10.1080/17415977.2017.1400030](https://doi.org/10.1080/17415977.2017.1400030)
17. Yurko V. A. An inverse problem for Sturm–Liouville operators on the half-line with complex weights. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2019, vol. 27, iss. 3, pp. 439–443. DOI: [10.1515/jiip-2018-0044](https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0044)
18. Golubkov A. A., Kuryshova Yu. V. Inverse problem for Sturm–Liouville operators on a curve. *Tamkang Journal of Mathematics*, 2019, vol. 50, iss. 3, pp. 349–359. DOI: [10.5556/j.tkm.50.2019.3368](https://doi.org/10.5556/j.tkm.50.2019.3368)
19. Buterin S. On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm–Liouville operator on a finite interval. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, vol. 335, iss. 1, pp. 739–749. DOI: [10.1016/j.jmaa.2007.02.012](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.02.012)

Поступила в редакцию / Received 30.08.2024

Принята к публикации / Accepted 25.09.2024

Опубликована / Published 29.08.2025



## МЕХАНИКА

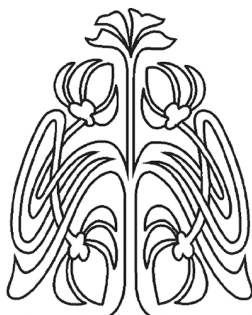
Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 332–344

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 332–344

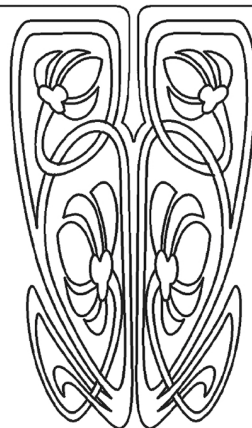
<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344>

EDN: <https://elibrary.ru/GTSNSZ>



Научный  
отдел



Научная статья

УДК 534.014

### Колебания конечномерных моделей растяжимой цепной линии

Е. А. Дегилевич<sup>1,2✉</sup>, А. С. Смирнов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., д. 61

<sup>2</sup>ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации», Россия, 197350, г. Санкт-Петербург, дор. в Каменку, д. 74, лит. А, пом. часть, пом. 1-Н

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

**Дегилевич Егор Алексеевич**, <sup>1</sup>аспирант, <sup>2</sup>руководитель направления по инжинирингу и конструированию оборудования, DegilevichEgor@gmail.com, ORCID: [0000-0003-0142-4561](https://orcid.org/0000-0003-0142-4561), SPIN: [2976-3360](https://elibrary.ru/29763360), AuthorID: [1076938](https://elibrary.ru/1076938)

**Смирнов Алексей Сергеевич**, <sup>1</sup>младший научный сотрудник лаборатории мехатроники; <sup>3</sup>ассистент Высшей школы механики и процессов управления, smirnov.alexey.1994@gmail.com, ORCID: [0000-0002-6148-0322](https://orcid.org/0000-0002-6148-0322), SPIN: [5464-2279](https://elibrary.ru/54642279), AuthorID: [947771](https://elibrary.ru/947771)

**Аннотация.** Настоящая статья посвящена исследованию собственных частот колебаний конечномерных моделей растяжимой гибкой цепной линии. Приводятся аналитическое решение для двухгантельной и трехгантельной моделей, а также результаты компьютерного моделирования двадцатигантельной схемы растяжимой цепной линии. В случае аналитического подхода применяется координатный метод решения, при котором расписываются координаты сосредоточенных масс гантельных схем в отклоненном положении. В случае численного подхода используется программный комплекс MSC.ADAMS, позволяющий анализировать статику, кинематику и динамику многотельных систем. Полученные результаты для рассматриваемых моделей растяжимой цепной линии находятся в хорошем качественном соответствии между собой. Кроме того, при рассмотрении предельных переходов от растяжимого варианта к нерастяжимому также наблюдается хорошая согласованность ожидаемых эффектов с найденными результатами. Для конечномерной двадцатигантельной модели нерастяжимой цепной линии с сосредоточенными параметрами проводится сопоставление первых трех безразмерных частот



с частотами непрерывной модели, значения которых были найдены ранее. Наблюдается отличная схожесть результатов, подтверждающих применимость двадцатигантельной схемы для описания динамики цепной линии на низших частотах колебаний. Помимо определения частот, привычных для классической нерастяжимой цепной линии, проводится анализ новых «мигрирующих» частот, которые появляются вследствие возникновения дополнительных степеней свободы из-за учета растяжимости. Строятся частотные зависимости от параметра, характеризующего податливость цепной линии, что позволяет оценить, как быстро «мигрирующие» частоты перемещаются из высокочастотного диапазона в зону низших частот по мере ослабления жесткости цепи. Полученные формулы и рассмотренные модели имеют как теоретическую ценность, так и хорошую применимость для прикладных задач.

**Ключевые слова:** цепная линия, частоты колебаний, растяжимость, конечномерная модель

**Для цитирования:** Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Колебания конечномерных моделей растяжимой цепной линии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 332–344. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344), EDN: [GTSNSZ](https://gtsnsz.ru)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Oscillations of finite-dimensional models of an extensible catenary

E. A. Degilevich<sup>1,2✉</sup>, A. S. Smirnov<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoy Pr. V. O., St. Petersburg 199178, Russia

<sup>2</sup>Gazpromneft Industrial Innovations LLC, 74 A Road to Kamenka, St. Petersburg 197350, Russia

<sup>3</sup>Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia

**Egor A. Degilevich**, DegilevichEgor@gmail.com, ORCID: [0000-0003-0142-4561](https://orcid.org/0000-0003-0142-4561), SPIN: [2976-3360](https://spin.ru/2976-3360), AuthorID: [1076938](https://authorid.ru/1076938)

**Alexey S. Smirnov**, smirnov.alexey.1994@gmail.com, ORCID: [0000-0002-6148-0322](https://orcid.org/0000-0002-6148-0322), SPIN: [5464-2279](https://spin.ru/5464-2279), AuthorID: [947771](https://authorid.ru/947771)

**Abstract.** This article is devoted to the study of natural oscillation frequencies of finite-dimensional models of a stretchable flexible catenary. An analytical solution for two- and three-dumbbell models is presented, as well as the results of computer modeling of a twenty-dumbbell model of a stretchable catenary. In the case of an analytical approach, a coordinate solution method is used, in which the coordinates of the concentrated masses of dumbbell models in a deflected position are calculated. In the case of the numerical approach, the MSC.ADAMS software package is used, which allows analyzing the statics, kinematics, and dynamics of multibody systems. The results obtained for the considered stretchable catenary models are in good qualitative agreement with each other. Besides, when considering the limit transitions from the stretchable variant to the non-stretchable one, there is also a good consistency of the expected effects with the found results. For a finite-dimensional twenty-dumbbell model of a non-stretchable catenary with concentrated parameters, the first three dimensionless frequencies are compared with the frequencies of a continuous model, the values of which were found earlier. There is an excellent similarity of the results, confirming the applicability of the twenty-dumbbell scheme for describing the dynamics of catenary at low oscillation frequencies. In addition to determining the frequencies familiar to the classical non-stretchable catenary, an analysis of new “migrating” frequencies is carried out, which appear as a result of the emergence of additional degrees of freedom due to the consideration of stretchability. Frequency dependencies on the parameter characterizing the compliance of the catenary are constructed, which allows for estimating how quickly the “migrating” frequencies move from the high-frequency range to the low-frequency zone as the stiffness of the chain weakens. The formulas obtained and the models considered have both theoretical value and good applicability for applied tasks.





**Keywords:** catenary, oscillation frequencies, stretchability, finite-dimensional model

**For citation:** Degilevich E. A., Smirnov A. S. Oscillations of finite-dimensional models of an extensible catenary. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 332–344 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344), EDN: [GTSNSZ](https://gtsnsz.ru)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Исследованию цепной линии (ЦЛ) [1], являющейся важным звеном различных конструкций и достаточно самобытным объектом, с помощью которого можно описать в том или ином приближении линии электропередач (ЛЭП), веревочные мосты и цепи, посвящено множество статей. Одним из самых популярных направлений изучения ЦЛ являются работы, связанные с численным моделированием ЛЭП под действием ветра. Так, например, в работах [2, 3] проводится вибрационный анализ с приложением нагрузок к модели ЦЛ, представляющей собой балку Бернулли – Эйлера. Стоит отметить, что зачастую приходится прибегать к упрощениям моделей ЦЛ, которые могут заключаться как в искажении ее формы, к примеру, представление ЦЛ в виде параболы [4] или дуги окружности [5], так и в переходе от непрерывных моделей с распределенными параметрами к конечномерным моделям с сосредоточенными параметрами [6]. Одним из самых эффективных способов исследования ЦЛ является именно разделение цепи на звенья с применением метода конечных элементов (МКЭ), что позволяет анализировать цепи в различных конфигурациях, к примеру, выполнять модальный расчет разновысотных ЦЛ [7], учитывать специфические свойства цепей и прикладывать нестандартные нагрузки [8].

Классическая модель ЦЛ нерастяжима, однако в реальности цепные системы, провода, звенья, соединенные упругими элементами, и другие объекты, которые могут в некотором приближении описываться уравнениями ЦЛ, обладают упругостью, способной вносить тот или иной вклад в динамические характеристики системы. В связи с этим целесообразно провести оценку того, как сильно будет влиять увеличение податливости цепи на частоты малых колебаний системы, а также проследить за появлением и значениями новых частот, возникающих вследствие растяжимости. Поскольку аналитическое решение непрерывной модели растяжимой ЦЛ весьма трудоемко, разумно рассмотреть модели ЦЛ с сосредоточенными параметрами, которые отлично себя зарекомендовали и при динамическом [6], и при силовом [8] анализе, показывая достаточно хорошее качественное и количественное приближение к непрерывной ЦЛ даже при небольшом количестве конечных элементов, из которых строится модель.

Программный комплекс MSC.ADAMS весьма хорошо себя зарекомендовал в задачах, связанных с моделированием многотельных систем для оценки их кинематики и динамики, что делает его мощным инструментом как в инженерном деле, так и в научной деятельности. В частности, можно найти работы, посвященные анализу цепных систем с применением MSC.ADAMS, к примеру, описание квазистатического поведения троса в системе цепных канатных дорог [9]. Кроме того, результаты симуляций дают достаточно близкие результаты к реальным экспериментам, как это было проверено в статье [10], где объектом исследования выступала система цепного привода конвейера. Прикладные пакеты дают возможность не только получить решение в случае громоздких систем, для которых аналитическое решение может быть весьма затруднено из-за нелинейностей и обилия параметров, но и выполнить расчеты для более простых систем с целью проверки аналитики.

В рамках настоящего исследования рассматриваются двух-, трех- и двадцатигантельные конечномерные модели растяжимой гибкой ЦЛ. Для первых двух гантельных схем приводятся строгие аналитические выкладки, а для последней осуществляются численные симуляции при помощи прикладных пакетов.



## 1. Двухгантельная модель

Рассмотрим простейшую конечномерную модель растяжимой ЦЛ с длиной  $L_0$  в недеформированном состоянии, состоящей из двух упругих гантелей длины  $l_0 = L_0/2$  и точечными грузами массы  $m/2$  на концах. Два точечных груза массы  $m/2$ , расположенные в шарнирах, не участвуют в движении, а центральный груз массы  $m$ , получаемый в результате слияния двух концевых грузов гантелей, совершает колебания. Гантели являются упругими и представляют собой пружины с жесткостью  $c$  каждая. Длина пролета для удобства принимается равной  $2a$ . Расчетные схемы рассматриваемой системы в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии приведены на рис. 1, а.

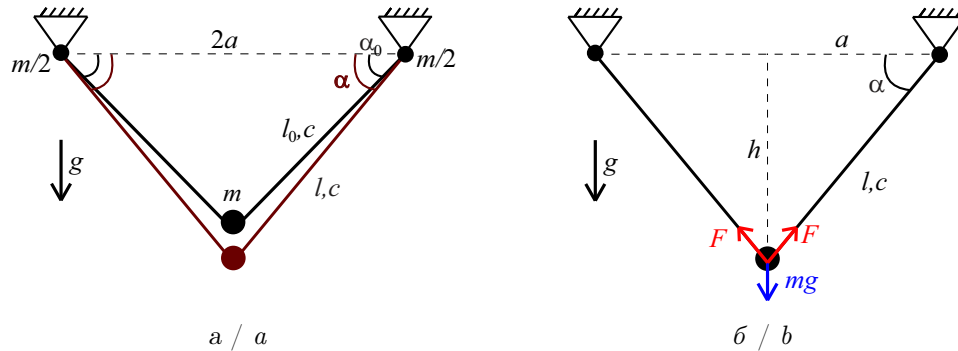


Рис. 1. Расчетные схемы двухгантельной модели целевой линии: а — в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии; б — силы упругости и тяжести в равновесном нагруженном состоянии (цвет онлайн)

Fig. 1. Calculation schemes of two-dumbbell model of a catenary: а is in an unloaded state and in equilibrium loaded state; б is forces of elasticity and gravity in equilibrium loaded state (color online)

Сила упругости, действующая в равновесном нагруженном состоянии на груз со стороны каждой упругой гантели, очевидно, равна  $F = mg/(2 \sin \alpha)$ , где  $\alpha$  — угол между гантелью и горизонталью в этом состоянии (рис. 1, б). Чтобы связать угол  $\alpha$  с аналогичным углом  $\alpha_0$  в недеформированном состоянии, следует учесть, что

$$l_0 = l - \Delta l = \frac{a}{\cos \alpha} - \frac{mg}{2c \sin \alpha} = \frac{2ac \sin \alpha - mg \cos \alpha}{c \sin 2\alpha}, \quad (1)$$

где  $l$  — это длина растянувшейся гантели, а  $\Delta l = F/c$  — ее деформация. На основе рис. 1 и формулы (1) нетрудно получить связь между указанными углами  $\alpha$  и  $\alpha_0$ :

$$\cos \alpha_0 = \frac{a}{l_0} = \frac{ac \sin 2\alpha}{2ac \sin \alpha - mg \cos \alpha}.$$

Двухгантельная модель растяжимой ЦЛ обладает двумя степенями свободы, в отличие от модели ЦЛ, состоящей из двух жестких гантелей, у которой отсутствуют степени свободы. Принятой схеме свойственны симметричная и антисимметричная формы колебаний, которые целесообразно рассмотреть по отдельности. Ясно, что при движении по симметричной форме колебаний груз массы  $m$  будет совершать вертикальные перемещения вдоль оси  $x$  (рис. 2, а), тогда как при движении по антисимметричной форме колебаний — горизонтальные смещения вдоль оси  $y$  (рис. 2, б). В первом случае в качестве обобщенной координаты следует принять вертикальное смещение груза  $\Delta x$ , а во втором случае — его горизонтальное смещение  $\Delta y$ .

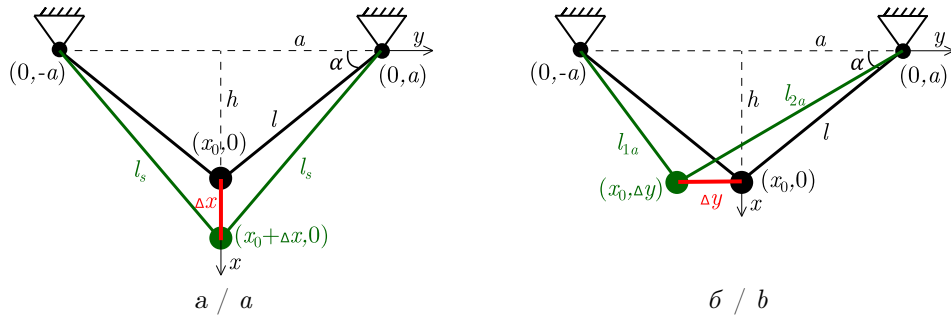


Рис. 2. Симметричные (а) и антисимметричные (б) колебания (цвет онлайн)

Fig. 2. Symmetrical (a) and antisymmetrical (b) oscillations (color online)

Используя координатный метод, можно вычислить длины упругих гантелей в равновесном и отклоненном положениях. Имеем:

$$\begin{aligned} l^2 &= x_0^2 + a^2, \quad l_s^2 = (x_0 + \Delta x)^2 + a^2 = l^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2, \\ l_{1a}^2 &= x_0^2 + (\Delta y + a)^2 = l^2 + 2a\Delta y + (\Delta y)^2, \\ l_{2a}^2 &= x_0^2 + (\Delta y - a)^2 = l^2 - 2a\Delta y + (\Delta y)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где индекс  $s$  относится к длинам обеих гантелей при симметричных колебаниях, а индексы  $1a$  и  $2a$  — к левой и правой гантелям соответственно при антисимметричных колебаниях. Выражая из (2) длины  $l_s$ ,  $l_{1a}$  и  $l_{2a}$  и раскладывая их в ряд Тейлора, находим деформации упругих гантелей с точностью до слагаемых второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta_s &= l_s - l \approx \frac{x_0}{l} \Delta x + \frac{l^2 - x_0^2}{2l^3} (\Delta x)^2, \\ \Delta_{1a} &= l_{1a} - l \approx \frac{a}{l} \Delta y + \frac{l^2 - a^2}{2l^3} (\Delta y)^2, \quad \Delta_{2a} = l_{2a} - l \approx -\frac{a}{l} \Delta y + \frac{l^2 - a^2}{2l^3} (\Delta y)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Кинетическая энергия системы при движении по симметричной и антисимметричной формам колебаний соответственно равна:

$$T_s = \frac{1}{2} m (\Delta \dot{x})^2, \quad T_a = \frac{1}{2} m (\Delta \dot{y})^2, \quad (4)$$

а потенциальная энергия в случае малых колебаний с учетом формул (3) и очевидных равенств  $x_0 = l \sin \alpha$ ,  $a = l \cos \alpha$  будет:

$$\begin{aligned} \Pi_s &= -mg\Delta x + 2 \left( F\Delta_s + \frac{1}{2} c \Delta_s^2 \right) = \left( c \sin^2 \alpha + \frac{mg \cos^3 \alpha}{2a \sin \alpha} \right) (\Delta x)^2, \\ \Pi_a &= F(\Delta_{1a} + \Delta_{2a}) + \frac{1}{2} c (\Delta_{1a}^2 + \Delta_{2a}^2) = \left( c \cos^2 \alpha + \frac{mg \sin 2\alpha}{4a} \right) (\Delta y)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где линейные по  $\Delta x$  и  $\Delta y$  слагаемые сокращаются, как это и должно быть. Инерционный и квазиупругий коэффициенты с учетом выражений (4) и (5) будут равны:

$$a_s = a_a = m, \quad c_s = 2c \sin^2 \alpha + \frac{mg \cos^3 \alpha}{a \sin \alpha}, \quad c_a = 2c \cos^2 \alpha + \frac{mg \sin 2\alpha}{2a},$$

и, следовательно, частоты малых колебаний примут вид

$$k_s = \sqrt{\frac{c_s}{a_s}} = \sqrt{\frac{2c}{m} \sin^2 \alpha + \frac{g \cos^3 \alpha}{a \sin \alpha}}, \quad k_a = \sqrt{\frac{c_a}{a_a}} = \sqrt{\frac{2c}{m} \cos^2 \alpha + \frac{g}{2a} \sin 2\alpha}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что в случае  $\alpha = \pi/4$  частоты  $k_s$  и  $k_a$  совпадают. Также из (6) следует, что при  $c \rightarrow \infty$  эти частоты при прочих заданных параметрах будут неограниченно возрастать, так что рассматриваемая модель будет переходить в двухгантельную модель нерастяжимой ЦЛ, которая не имеет степеней свободы. При уменьшении же жесткости  $c$  частоты, напротив, будут уменьшаться.



## 2. Трехгантельная модель

Рассмотрим теперь конечномерную модель растяжимой ЦЛ с длиной  $L_0$  в недеформированном состоянии, состоящую уже из трех упругих гантелей длины  $l_0 = L_0/3$ . При отсутствии деформаций боковые гантели образуют с горизонтальной прямой угол  $\alpha_0$ . Нетрудно понять, что в этом случае в движении участвуют два центральных груза массы  $m$ , получившиеся в результате слияния концевых грузов соседних гантелей. Расчетные схемы рассматриваемой системы в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии приведены на рис. 3, а.

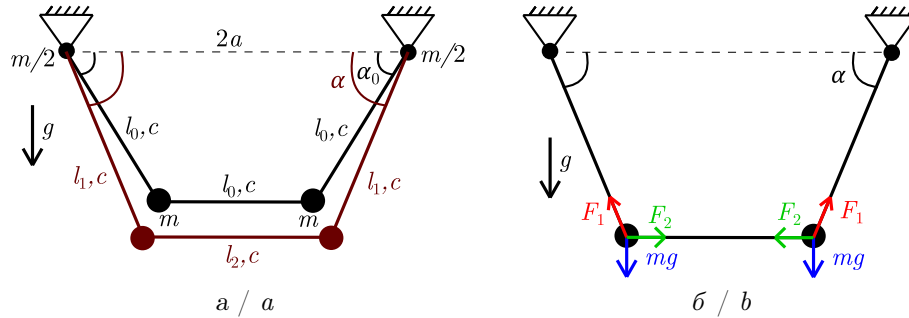


Рис. 3. Расчетные схемы трехгантельной модели цепной линии: а — в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии; б — силы упругости и тяжести в равновесном нагруженном состоянии (цвет онлайн)  
Fig. 3. Calculation schemes of three-dumbbell model of a catenary: а is in an unloaded state and in equilibrium loaded state; б is forces of elasticity and gravity in equilibrium loaded state (color online)

Записывая условие баланса сил в нагруженном равновесном положении в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси, находим упругие силы, действующие в этом положении на грузы со стороны упругих гантелей:  $F_1 = mg/\sin \alpha$  — со стороны боковых гантелей, и  $F_2 = mg \operatorname{ctg} \alpha$  — со стороны центральной гантели, причем  $\alpha$  — угол между боковыми гантелями и горизонталью (рис. 3, б). Ясно, что удлинения упругих гантелей в рассматриваемом состоянии равновесия определяются выражениями

$$\Delta l_1 = \frac{F_1}{c} = \frac{mg}{c \sin \alpha}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_2}{c} = \frac{mg}{c} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (7)$$

где индекс 1 относится к боковым гантелям, а индекс 2 — к центральной гантели. Длины гантелей  $l_1$  и  $l_2$  в равновесном нагруженном состоянии определяются выражениями  $l_1 = l_0 + \Delta l_1$ ,  $l_2 = l_0 + \Delta l_2$ . Дополняя их еще одним очевидным геометрическим соотношением  $2l_1 \cos \alpha + l_2 = 2a$  и принимая во внимание формулы (7), получим в результате следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2l_1 \cos \alpha + l_2 = 2a, \\ l_2 - \frac{mg}{c} \operatorname{ctg} \alpha = l_0, \\ l_1 - \frac{mg}{c \sin \alpha} = l_0, \end{cases} \quad (8)$$

решая которую, можно определить неизвестные величины: длины  $l_1$ ,  $l_2$  и угол  $\alpha$ .

Рассматриваемая система обладает четырьмя степенями свободы, в то время как в рамках трехгантельной модели ЦЛ с жесткими гантелями имеется лишь одна степень свободы. Нетрудно понять, что для этой модели также можно изучить в отдельности симметричные (рис. 4, а) и антисимметричные (рис. 4, б) колебания и найти соответствующие им частоты колебаний (по две для каждого типа колебаний). Ясно, что при симметричных колебаниях для перемещений левого и правого точечного грузов в проекциях на координатные оси  $x$  и  $y$  справедливы соотношения  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$ ,  $\Delta y_1 = -\Delta y_2 = -\Delta y$ , тогда как при антисимметричных колебаниях — соотношения  $\Delta x_1 = -\Delta x_2 = \Delta x$ ,  $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y$ . Это означает,



что в каждом случае в качестве обобщенных координат естественно принять величины  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

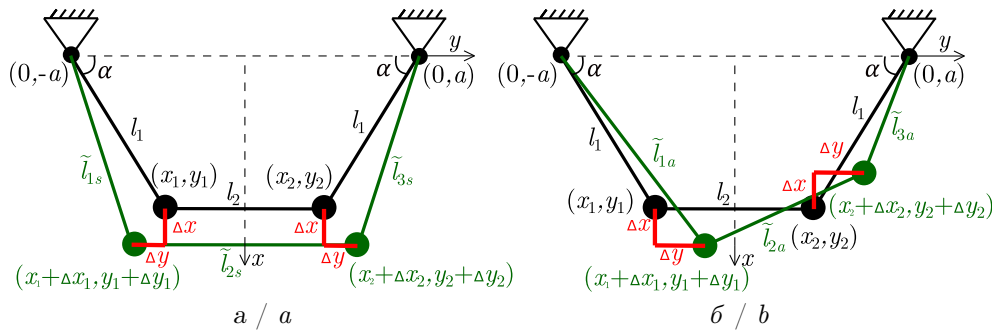


Рис. 4. Колебания трехгантельной модели: а — симметричные; б — антисимметричные (цвет онлайн)

Fig. 4. Three-dumbbell model oscillations: a — symmetrical; b — antisymmetrical (color online)

Для определения собственных частот малых колебаний будем по-прежнему использовать координатный метод. С этой целью выпишем выражения для квадратов длин гантелей в равновесном и отклоненном положениях:

$$\begin{aligned} l_1^2 &= x_1^2 + (y_1 + a)^2 = x_1^2 + y_1^2 + a^2 + 2ay_1, & l_2^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 4y_1^2, \\ \tilde{l}_{1s}^2 &= \tilde{l}_{3s}^2 = (x_1 + \Delta x)^2 + (y_1 - \Delta y + a)^2 = l_1^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2x_1\Delta x - 2\Delta y(y_1 + a), \\ \tilde{l}_{2s}^2 &= (x_2 + \Delta x - x_1 - \Delta x)^2 + (y_2 + \Delta y - y_1 + \Delta y)^2 = l_2^2 - 8y_1\Delta y + 4(\Delta y)^2, \\ \tilde{l}_{1a}^2 &= (x_1 + \Delta x)^2 + (y_1 + \Delta y + a)^2 = l_1^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2x_1\Delta x + 2\Delta y(y_1 + a), \\ \tilde{l}_{3a}^2 &= (x_2 - \Delta x)^2 + (y_2 + \Delta y - a)^2 = l_1^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2x_1\Delta x - 2\Delta y(y_1 + a), \\ \tilde{l}_{2a}^2 &= (x_2 - \Delta x - x_1 - \Delta x)^2 + (y_2 + \Delta y - y_1 - \Delta y)^2 = l_2^2 + 4(\Delta x)^2, \end{aligned}$$

где учтено, что  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = -y_1$ . Здесь индекс 1 у длины означает ее принадлежность к левой гантели, 2 — к центральной, 3 — к правой, а буквы  $s$  и  $a$  показывают, что отвечающие им выражения относятся к симметричным и антисимметричным колебаниям соответственно. Записывая выражения для деформаций гантелей и раскладывая их в ряд Тейлора, можно получить следующие формулы с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &\approx \frac{x_1}{l_1}\Delta x - \frac{a + y_1}{l_1}\Delta y + \frac{l_1^2 - x_1^2}{2l_1^3}(\Delta x)^2 + \frac{l_1^2 - (a + y_1)^2}{2l_1^3}(\Delta y)^2 + \frac{x_1(a + y_1)}{l_1^3}\Delta x\Delta y, \\ \Delta_{1a} &\approx \frac{x_1}{l_1}\Delta x + \frac{a + y_1}{l_1}\Delta y + \frac{l_1^2 - x_1^2}{2l_1^3}(\Delta x)^2 + \frac{l_1^2 - (a + y_1)^2}{2l_1^3}(\Delta y)^2 - \frac{x_1(a + y_1)}{l_1^3}\Delta x\Delta y, \\ \Delta_{3a} &\approx -\frac{x_1}{l_1}\Delta x - \frac{a + y_1}{l_1}\Delta y + \frac{l_1^2 - x_1^2}{2l_1^3}(\Delta x)^2 + \frac{l_1^2 - (a + y_1)^2}{2l_1^3}(\Delta y)^2 - \frac{x_1(a + y_1)}{l_1^3}\Delta x\Delta y, \\ \Delta_{2s} &= -2\Delta y, & \Delta_{2a} &\approx \frac{2}{l_2}(\Delta x)^2, & \Delta_{3s} &= \Delta_{1s}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выпишем теперь потенциальную энергию системы при симметричных и антисимметричных колебаниях:

$$\begin{aligned} \Pi_s &= -2mg\Delta x + \frac{1}{2}c(2\Delta_{1s}^2 + \Delta_{2s}^2) + 2F_1\Delta_{1s} + F_2\Delta_{2s}, \\ \Pi_a &= \frac{1}{2}c(\Delta_{1a}^2 + \Delta_{2a}^2 + \Delta_{3a}^2) + F_1(\Delta_{1a} + \Delta_{3a}) + F_2\Delta_{2a}, \end{aligned}$$



и после подстановки формул (9), а также учета того, что  $x_1 = l_1 \sin \alpha$ ,  $y_1 = -l_2/2$ ,  $F_1 = mg/\sin \alpha$  и  $F_2 = mg \operatorname{ctg} \alpha$ , она в квадратичной аппроксимации примет вид

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \left( mg \frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + c \sin^2 \alpha \right) (\Delta x)^2 + 2 \left( \frac{c \sin \alpha}{l_1} - \frac{mg}{l_1^2} \right) \left( a - \frac{l_2}{2} \right) \Delta x \Delta y + \\ &\quad + \left[ mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \left( \frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} + 2 \right) \right] (\Delta y)^2, \\ \Pi_a &= \left[ mg \left( \frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{l_2} \right) + c \sin^2 \alpha \right] (\Delta x)^2 + 2 \left( \frac{c \sin \alpha}{l_1} - \frac{mg}{l_1^2} \right) \left( a - \frac{l_2}{2} \right) \Delta x \Delta y + \\ &\quad + \left[ mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} \right] (\Delta y)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Что же касается кинетической энергии системы, то она, очевидно, как для симметричных, так и для антисимметричных колебаний равна

$$T = m [(\Delta \dot{x})^2 + (\Delta \dot{y})^2]. \quad (11)$$

Из (10) и (11) вытекает, что матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{xy} & C_{yy} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где элементы матрицы квазиупругих коэффициентов для симметричных и антисимметричных колебаний будут такими:

$$\begin{aligned} C_{xx_s} &= 2 \left( mg \frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + c \sin^2 \alpha \right), \quad C_{xy_s} = 2 \left( \frac{c \sin \alpha}{l_1} - \frac{mg}{l_1^2} \right) \left( a - \frac{l_2}{2} \right), \\ C_{yy_s} &= 2 \left[ mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \left( \frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} + 2 \right) \right], \\ C_{xx_a} &= 2 \left[ mg \left( \frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{l_2} \right) + c \sin^2 \alpha \right], \quad C_{xy_a} = C_{xy_s}, \\ C_{yy_a} &= 2 \left[ mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Записывая частотное уравнение  $\det(\mathbf{C} - k^2 \mathbf{A}) = 0$  и подставляя в него матрицы (12), получим после развертывания определителя следующее биквадратное уравнение:

$$k^4 - \frac{1}{2m} (C_{xx} + C_{yy}) k^2 + \frac{1}{4m^2} (C_{xx} C_{yy} - C_{xy}^2) = 0,$$

из которого можно найти частоты симметричных и антисимметричных колебаний:

$$\begin{aligned} k_{1s,2s} &= \sqrt{\frac{1}{4m} \left[ C_{xx_s} + C_{yy_s} \pm \sqrt{(C_{xx_s} - C_{yy_s})^2 + 4C_{xy_s}^2} \right]}, \\ k_{1a,2a} &= \sqrt{\frac{1}{4m} \left[ C_{xx_a} + C_{yy_a} \pm \sqrt{(C_{xx_a} - C_{yy_a})^2 + 4C_{xy_a}^2} \right]}, \end{aligned} \quad (14)$$

где также следует принять во внимание выражения (13).

Рассмотрим частный случай, когда жесткость упругих гантелей будет бесконечно большой, т. е. выполним предельный переход  $c \rightarrow \infty$ . Тогда из формул (8) легко видеть, что  $l_1 \rightarrow l_0$ ,  $l_2 \rightarrow l_0$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ , при этом  $l_0(2 \cos \alpha_0 + 1) = 2a$ . Ясно, что в этой ситуации обе симметричные частоты и большая антисимметричная частота будут неограниченно возрастать



при  $c \rightarrow \infty$ , тогда как низшая антисимметричная частота будет стремиться к конечному пределу, равному

$$k_1 = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^3 \alpha_0}{\sin \alpha_0}} \sqrt{\frac{g}{l_0}}.$$

Этот результат полностью совпадает с единственной частотой колебаний модели ЦЛ, состоящей из трех жестких гантелей [6], как этого и следовало ожидать.

Таким образом, на основе рассмотренных моделей ЦЛ с двумя и тремя упругими гантелями можно сделать вывод, что учет упругости приводит к появлению новых частот колебаний, которые отсутствовали у классической нерастяжимой модели ЦЛ, и они будут мигрировать из высокочастотного диапазона в низкочастотную область по мере увеличения податливости.

### 3. Двадцатигантельная модель

Наконец, проведем исследование модели растяжимой ЦЛ с длиной  $L_0$  в недеформированном состоянии, состоящей из  $n$  упругих гантелей длины  $l_0 = L_0/n$ , с применением программного комплекса MSC.ADAMS. Для определенности примем, что  $n = 20$ , т. е. будем рассматривать двадцатигантельную модель ЦЛ. Если двухгантельная модель растяжимой ЦЛ имела 2 степени свободы, а трехгантельная модель — 4 степени свободы, то двадцатигантельная модель растяжимой ЦЛ имеет уже 38 степеней свободы, в то время как нерастяжимая модель с двадцатью жесткими гантелями — только 18 степеней свободы. Обобщая на произвольный случай, можно заключить, что количество степеней свободы, а значит, и собственных частот, в зависимости от числа гантелей  $n$ , из которых состоит ЦЛ, будет равно  $2n - 2$  для модели растяжимой ЦЛ и  $n - 2$  для модели нерастяжимой ЦЛ, т. е. при учете растяжимости каждой гантели число степеней свободы возрастает на  $n$  единиц.

Начальное расположение всех точечных грузов определяется с использованием метода, детально описанного в [8], где для поиска равновесных углов гантельной схемы проводится минимизация потенциальной энергии системы с учетом связей. Каждая гантель представляет собой безынерционную пружину с двумя точечными грузами массы  $m/2$  на ее концах, и тем самым получается, что в местах шарнирного соединения гантелей располагаются точечные грузы массы  $m$ , которые представляют собой слившиеся воедино концевые грузы смежных гантелей. Рассматриваемая модель определяется 14 параметрами: длиной пролета  $2a$ , длиной одной недеформированной гантели  $l_0$ , ее массой  $m$ , ее жесткостью  $c$  и десятью углами, которые гантели составляют с горизонталью в ненагруженном состоянии. Первым этапом расчета собственных частот двадцатигантельной модели растяжимой ЦЛ является статический анализ, в результате которого система переходит из недеформированного состояния в равновесное нагруженное, когда гантели удлиняются из-за деформаций, вызванных силой тяжести. На втором этапе уже проводится модальный анализ для конфигурации системы, получившейся на первом этапе расчета.

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$\delta = \frac{L_0}{2a} - 1, \quad \varkappa = \beta q_0 a, \quad q_0 = \rho S g, \quad \beta = \frac{1}{ES}, \quad c = \frac{ES}{l_0}, \quad (15)$$

где безразмерный параметр  $\delta$  характеризует изменение длины ЦЛ  $L_0$  по отношению к длине пролета  $2a$ , безразмерный параметр  $\varkappa$  характеризует податливость ЦЛ, причем  $q_0$  — сила тяжести на единицу длины еще нерастянутой ЦЛ,  $\rho$  — плотность материала ЦЛ,  $S$  — площадь ее сечения,  $\beta$  — удельное относительное удлинение ЦЛ,  $E$  — модуль упругости материала ЦЛ,  $c$  — жесткость на растяжение упругой гантели длины  $l_0$  [11]. Поскольку масса одной гантели равна  $m = \rho S l_0$ , а  $l_0 = 2a(1 + \delta)/n$ , то с учетом выражений (15) можно получить формулу для  $c$  через безразмерные параметры  $\varkappa$  и  $\delta$ :

$$c = \frac{mgn^2}{4\varkappa a(1 + \delta)^2}. \quad (16)$$



Отметим, что соотношение (16) также потребуется при сравнении двух-, трех- и двадцатигантельной конечномерных моделей ЦЛ. Поскольку гантельные модели необходимо сопоставлять между собой при одинаковых значениях  $\varkappa$ , то жесткости гантелей  $s$  должны быть вычислены согласно конкретному количеству гантелей  $n$  рассматриваемой модели, что и отражено в формуле (16).

Двадцатигантельная конечномерная модель растяжимой ЦЛ приведена на рис. 5. Расчет собственных частот проводился при  $\delta = 0.3$  и при  $\delta = 0.05$ , а параметр  $\varkappa$  варьировался от 0 до 0.15.

На рис. 6 даны зависимости первых трех безразмерных частот модели  $p = k/k_0$ , где  $k_0 = \sqrt{g/2a}$ , а также две (первая симметричная и первая антисимметричная) «мигрирующие» частоты от величины  $\varkappa$ .

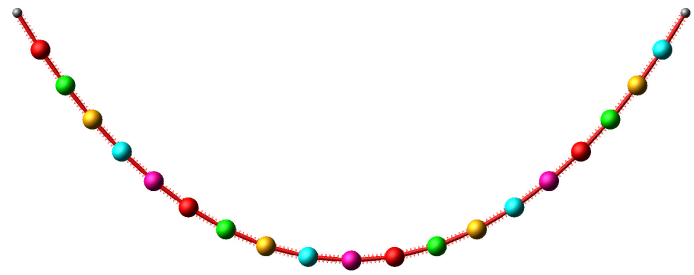


Рис. 5. Двадцатигантельная модель растяжимой цепной линии при  $\delta = 0.3$  (цвет онлайн)

Fig. 5. A twenty-dumbbell model of a stretchable catenary at  $\delta = 0.3$  (color online)

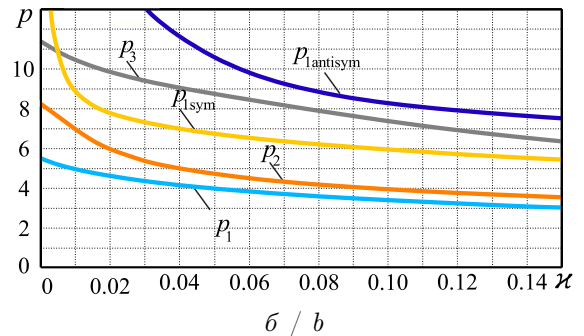
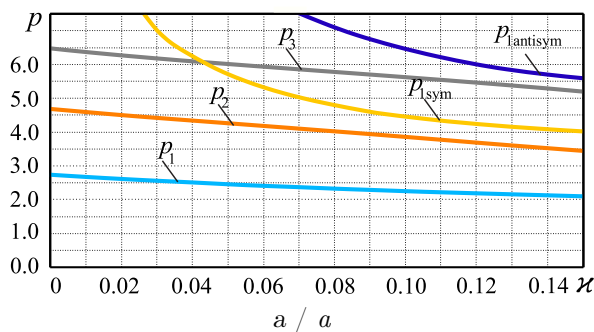


Рис. 6. Частоты колебаний двадцатигантельной модели растяжимой цепной линии от  $\varkappa$ : а — при  $\delta = 0.3$ ; б — при  $\delta = 0.05$  (цвет онлайн)

Fig. 6. The oscillation frequencies of a twenty-dumbbell model of stretchable catenary depending on  $\varkappa$ : а is for  $\delta = 0.3$ ; б is for  $\delta = 0.05$  (color online)

Из построенных графиков видно, как кривые, отвечающие «мигрирующим» частотам, с ростом параметра  $\varkappa$ , т. е. с ростом податливости, постепенно убывают, опускаясь в область низких частот, причем они могут пересекать кривые, соответствующие исходным частотам — тем частотам, которые имели конечные значения в случае нерастяжимости ЦЛ (т. е. когда  $\varkappa = 0$ ). При этом кривая для первой «мигрирующей» частоты с симметричной формой колебаний остается выше кривой для второй исходной частоты с симметричной формой, а кривая для второй «мигрирующей» частоты с антисимметричной формой колебаний располагается выше кривой для третьей исходной частоты с антисимметричной формой. Отметим, что чем меньше  $\delta$ , тем раньше «мигрирующие» частоты опускаются в область низких частот с ростом параметра  $\varkappa$ . Что касается исходных частот, то при увеличении параметра  $\varkappa$  они также уменьшаются, хотя это происходит и менее ощутимо по сравнению с убыванием «мигрирующих» частот, которые при малых  $\varkappa$  являются весьма большими, а при постепенном увеличении  $\varkappa$  начинают резко падать.

Подчеркнем, что значения исходных частот колебаний двадцатигантельной конечномерной модели ЦЛ при  $\varkappa = 0$ , которые также можно увидеть на рис. 6, достаточно близки к частотам колебаний ЦЛ при рассмотрении ее как модели с распределенными параметрами [6]. Так, для случая  $\delta = 0.05$  первая безразмерная частота колебаний двадцатигантельной модели нерастяжимой ЦЛ  $p_1 = 5.521$  отличается от аналогичной частоты непрерывной модели, равной 5.522, на 0.02%; вторая безразмерная частота  $p_2 = 8.275$  конечномерной



модели ниже второй частоты непрерывной модели, равной 8.345, на 0.8%; а третья частота  $p_3 = 11.42$  конечномерной модели ниже частоты непрерывной модели, равной 11.60, на 1.6%. При  $\delta = 0.3$  также наблюдается хорошее согласие между безразмерными частотами конечномерной и непрерывной моделей нерастяжимой ЦЛ: для первой частоты 2.737 против 2.745 (расхождение 0.3%), для второй частоты 4.680 против 4.718 (расхождение 0.8%), а для третьей частоты 6.483 против 6.587 (расхождение 1.6%).

На рис. 7 приведены графики зависимости безразмерной исходной первой частоты и двух «мигрирующих» частот для двадцатигантельной модели, а также для двух- и трехгантельной моделей, построенных на основе полученных ранее аналитических выражений (6) и (14) с учетом соотношения (16), от параметра  $\kappa$ .

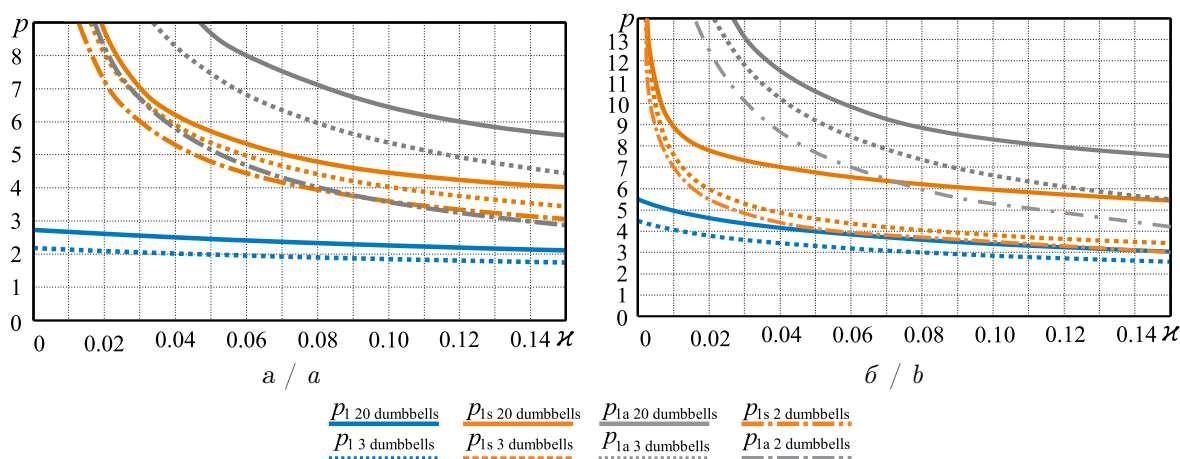


Рис. 7. Сравнение частот колебаний гантельных моделей целевой линии от  $\kappa$ : а — при  $\delta = 0.3$ ; б — при  $\delta = 0.05$  (цвет онлайн)

Fig. 7. Comparison of oscillation frequencies of dumbbell models of catenary depending on  $\kappa$ : а is for  $\delta = 0.3$ ; b is for  $\delta = 0.05$  (color online)

На рис. 7, а видно, как кривые, отвечающие «мигрирующим» частотам двухгантельной схемы, пересекаются, поскольку при  $\delta = 0.3$  угол  $\alpha_0$  оказывается чуть меньше  $\pi/4$ , и при увеличении податливости угол  $\alpha$  пересекает значение  $\pi/4$ , так что частоты колебаний меняются в последовательности, как это и оговаривалось ранее. Также стоит отметить хорошее приближение частот колебаний гантельных моделей с малым количеством звеньев к соответствующим частотам двадцатигантельной модели, которую уже можно считать в некоторой степени непрерывной моделью, по крайней мере, в отношении низших частот.

## Заключение

Проведенные в данной статье аналитический и численный расчеты колебаний растяжимой ЦЛ находятся в полном качественном соответствии друг с другом. Было показано влияние растяжимости ЦЛ на динамику системы, которое заключается не только в количественном уменьшении частот колебаний, но и в появлении новых «мигрирующих» в низкочастотную область частот. Рассмотренные конечномерные модели растяжимой ЦЛ могут быть полезны при продолжении статических и динамических исследований, посвященных не только ЦЛ, но и другим, более сложным цепным системам.

## Список литературы

1. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. Москва : Наука, 1980. 240 с.
2. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. Study on Galloping Oscillation of Iced Catenary System under Cross Winds // Shock and Vibration. 2017. Art. 1634292. DOI: [10.1155/2017/1634292](https://doi.org/10.1155/2017/1634292)
3. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. The catenary vibration response of high-speed



- electrified railway considering horizontal wind // Proceedings of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013)-Volume I. Lecture Notes in Electrical Engineering. Berlin, Heidelberg : Springer, 2014. Vol. 287. P. 45–54. DOI: [10.1007/978-3-642-53778-3\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-53778-3_5)
4. Hatibovic A., Kádár P. An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans // 2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE). Budapest, Hungary, 2018. P. 217–222. DOI: [10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137](https://doi.org/10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137)
5. Rawlins C. B. Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 273, iss. 4–5. P. 857–874. DOI: [10.1016/S0022-460X\(03\)00646-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00646-1)
6. Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем. Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 246 с. EDN: [XIOEBN](https://www.edn.ru/XIOEBN)
7. Klaycham K., Nguantud P., Athisakul C., Chucheeepsakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper // Ocean Systems Engineering. 2020. Vol. 10, iss. 1. P. 67–86. DOI: [10.12989/ose.2020.10.1.067](https://doi.org/10.12989/ose.2020.10.1.067)
8. Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Моделирование цепной линии и ее модификаций // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2021–2022 гг. Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. С. 24–41. EDN: [QSUXMG](https://www.edn.ru/QSUXMG)
9. Mwape C. J., Hong T. S., Wu W. B. Static Studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams // Advanced Materials Research. 2011. Vol. 328–330. P. 1031–1036. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031)
10. Suwanjumat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system // The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016). 2017. Vol. 95. Art. 06006. DOI: [10.1051/mateconf/20179506006](https://doi.org/10.1051/mateconf/20179506006)
11. Исполлов Ю. Г. Вычислительные методы в теории колебаний. Санкт-Петербург : Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 124 с. DOI: [10.18720/SPBPU/2/si20-160](https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/si20-160), EDN: [QJUVVH](https://www.edn.ru/QJUVVH)

## References

1. Merkin D. R. *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti* [Introduction to the mechanics of flexible thread]. Moscow, Nauka, 1980. 240 p. (in Russian).
2. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. Study on galloping oscillation of iced catenary system under cross winds. *Shock and Vibration*, 2017, art. 1634292. DOI: [10.1155/2017/1634292](https://doi.org/10.1155/2017/1634292)
3. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. The catenary vibration response of high-speed electrified railway considering horizontal wind. *Proceedings of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013)-Volume I. Lecture Notes in Electrical Engineering*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, vol. 287, pp. 45–54. DOI: [10.1007/978-3-642-53778-3\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-53778-3_5)
4. Hatibovic A., Kádár P. An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans. *2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE)*. Budapest, Hungary, 2018, pp. 217–222. DOI: [10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137](https://doi.org/10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137)
5. Rawlins C. B. Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, iss. 4–5, pp. 857–874. DOI: [10.1016/S0022-460X\(03\)00646-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00646-1)
6. Smirnov A. S., Degilevich E. A. *Kolebaniya tsepykh sistem* [Oscillations of chain systems]. St. Petersburg, POLYTECH-PRESS, 2021. 246 p. (in Russian). EDN: [XIOEBN](https://www.edn.ru/XIOEBN)
7. Klaycham K., Nguantud P., Athisakul C., Chucheeepsakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper. *Ocean Systems Engineering*, 2020, vol. 10, iss. 1, pp. 67–86. DOI: [10.12989/ose.2020.10.1.067](https://doi.org/10.12989/ose.2020.10.1.067)
8. Degilevich E. A., Smirnov A. S. Modeling of a catenary and its modifications. In: *Trudy seminara «Komp'yuternye metody v mekhanike sploshnoy sredy» 2021–2022 gg.* [Proceedings of the seminar “Computer methods in continuum mechanics”. 2021–2022]. St. Petersburg, POLYTECH-PRESS, 2022, pp. 24–41 (in Russian). EDN: [QSUXMG](https://www.edn.ru/QSUXMG)
9. Mwape C. J., Hong T. S., Wu W. B. Static studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams.



*Advanced Materials Research*, 2011, vol. 328–330, pp. 1031–1036. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031)

10. Suvanjumrat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system. *The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)*, 2017, vol. 95, art. 06006. DOI: [10.1051/mateconf/20179506006](https://doi.org/10.1051/mateconf/20179506006)
11. Ispolov Y. G. *Vychislitel'nye metody v teorii kolebaniy* [Computational methods in the theory of oscillations]. St. Petersburg, Polytechnic University Press, 2008. 124 p. (in Russian). DOI: [10.18720/SPBPU/2/si20-160](https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/si20-160), EDN: QJUVVH

Поступила в редакцию / Received 10.09.2024

Принята к публикации / Accepted 12.10.2024

Опубликована / Published 29.08.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 345–365

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 345–365

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365>

EDN: <https://elibrary.ru/HRAHSM>

Обзорная статья

УДК 539.3

## Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования.

### Часть II. Алгоритмы исследования оболочечных конструкций

В. В. Карпов, П. А. Бакусов<sup>✉</sup>, А. М. Масленников, А. А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4

**Карпов Владимир Васильевич**, доктор технических наук, профессор кафедры технологий информационного и математического моделирования, [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), ORCID: [0000-0001-7911-4067](https://orcid.org/0000-0001-7911-4067), SPIN: [7406-9199](https://spin.ru/7406-9199), AuthorID: [339002](https://authorid.ru/339002)

**Бакусов Павел Анатольевич**, старший преподаватель кафедры технологий информационного и математического моделирования, [bakusovpavel@gmail.com](mailto:bakusovpavel@gmail.com), ORCID: [0000-0003-1215-1183](https://orcid.org/0000-0003-1215-1183), SPIN: [5382-1252](https://spin.ru/5382-1252), AuthorID: [936766](https://authorid.ru/936766)

**Масленников Александр Матвеевич**, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики, [aleksmaslennikov@yandex.ru](mailto:aleksmaslennikov@yandex.ru), SPIN: [1464-6309](https://spin.ru/1464-6309), AuthorID: [541277](https://authorid.ru/541277)

**Семенов Алексей Александрович**, доктор технических наук, профессор кафедры технологий информационного и математического моделирования, [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com), ORCID: [0000-0001-9490-7364](https://orcid.org/0000-0001-9490-7364), SPIN: [9057-9882](https://spin.ru/9057-9882), AuthorID: [648893](https://authorid.ru/648893)

**Аннотация.** Математические модели деформирования тонких оболочек, описанные в первой части статьи, представляют собой или вариационную задачу о минимуме функционала энергии деформации оболочки, или краевую задачу для дифференциальных уравнений равновесий оболочки. И в том, и в другом случае задаются еще краевые условия исходя из вида закрепления контура оболочки. Для решения поставленных задач рассмотрены различные методы. Применяя метод Ритца к вариационной задаче о минимуме функционала энергии деформации оболочки или метода Бубнова – Галеркина к краевой задаче для дифференциальных уравнений равновесий оболочки, получаются системы алгебраических уравнений линейных или нелинейных. Применение метода конечных элементов (МКЭ) к решению задач теории оболочек также приводит к системам алгебраических уравнений, порядок которых может быть очень большим. Для решения линейных систем алгебраических уравнений может быть применен метод Гаусса, если порядок системы не превышает  $10^3$ . Если же порядок системы линейных алгебраических уравнений превышает  $10^3$ , то для решения таких систем применяют итерационные методы. Для решения нелинейных задач теории оболочек применяют методы продолжения решения по параметру. Если за параметр принимается нагрузка, то это будет метод последовательных нагружений В. В. Петрова, который позволяет свести решение нелинейных задач к последовательному решению линейных задач с изменяющимися на каждом этапе нагружения коэффициентами. Для решения нелинейных задач теории оболочек рассмотрен также метод итераций, когда нелинейные члены переносятся в правую часть и последовательно изменяются на каждом этапе итерации. Для решения нелинейных задач теории оболочек рассмотрен еще метод наискорейшего спуска. А. Л. Гольденвейзером разработан специальный метод — метод асимптотического интегрирования уравнений теории оболочек, который также описан в предлагаемой статье. Если уравнение равновесия оболочек содержит разрывные функции (единичные функции, дельта-функции), то Г. Н. Белосточным разработан специальный метод решения таких



уравнений, который также описан в статье. Приводятся примеры применения описанных методов для решения конкретных задач теории оболочек.

**Ключевые слова:** упругие тонкие оболочки, математическая модель, алгоритмы решения нелинейных задач, численные методы, устойчивость оболочек

**Для цитирования:** Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть II. Алгоритмы исследования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 345–365. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365), EDN: [HRAHSM](https://www.edn.ru/HRAHSM)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Review

## Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part II. Algorithms for studying shell structures

V. V. Karpov, P. A. Bakusov<sup>✉</sup>, A. M. Maslennikov, A. A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 2nd Krasnoarmeiskaya St., Saint Petersburg 190005, Russia

**Vladimir V. Karpov**, [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), ORCID: [0000-0001-7911-4067](https://orcid.org/0000-0001-7911-4067), SPIN: [7406-9199](https://www.spin.ru/7406-9199), AuthorID: [339002](https://www.authorid.ru/339002)

**Pavel A. Bakusov**, [bakusovpavel@gmail.com](mailto:bakusovpavel@gmail.com), ORCID: [0000-0003-1215-1183](https://orcid.org/0000-0003-1215-1183), SPIN: [5382-1252](https://www.spin.ru/5382-1252), AuthorID: [936766](https://www.authorid.ru/936766)

**Alexander M. Maslennikov**, [aleksmaslennikov@yandex.ru](mailto:aleksmaslennikov@yandex.ru), SPIN: [1464-6309](https://www.spin.ru/1464-6309), AuthorID: [541277](https://www.authorid.ru/541277)

**Alexey A. Semenov**, [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com), ORCID: [0000-0001-9490-7364](https://orcid.org/0000-0001-9490-7364), SPIN: [9057-9882](https://www.spin.ru/9057-9882), AuthorID: [648893](https://www.authorid.ru/648893)

**Abstract.** Mathematical models of a thin shell deformation, which are considered in the first part of the article, constitute either a variational problem of energy functional minimum in terms of shell deformation or a boundary problem for differential equations of shell equilibrium. In both cases, the boundary conditions are also introduced according to the type of shell fixation. To solve the specified tasks, the different methods are considered. Using either the Ritz method for the variational problem of energy functional minimum for shell deformation or the Bubnov–Galerkin method for the boundary problem for differential equations of shell equilibrium, we will get systems of linear or nonlinear equations. The finite element method (FEM) in application to shell theory problems also leads to systems of linear equations, and the order of the equations can be very large. It is possible to use the Gauss method to solve the linear systems of algebraic equations in case the system order is less than  $10^3$ . In another case, it is necessary to use iterative methods. For nonlinear tasks of thin shell theory, the parameter marching method is used. If the load is taken as a parameter, it is the V. V. Petrov’s sequential loading method. It allows transforming the nonlinear tasks into a consistent linear solution with coefficients varying at each stage of loading. For solving nonlinear problems of shell theory, we consider the iteration method, when the nonlinear terms are transferred to the right side and successively changed at each iteration stage. In the article, it is also considered the method of quickest descent. A. L. Goldenweiser developed the special method: The asymptotic-integration method of thin shell theory, which is described in the article. If the equilibrium equation of the shell contains the discontinuous function (unit functions, delta-functions), then for this case there is a special G. N. Bialystochy’s method, which is also specified in the article. Examples of the application of the described methods for solving specific problems of shell theory are also given.

**Keywords:** elastic thin shell, mathematical model, algorithms for solving nonlinear problems, numerical methods, stability of shells

**For citation:** Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A. Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part II. Algorithms for studying shell structures.





*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 345–365 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365), EDN: HRAHSM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

*Окончание.* Начало см.: Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410. DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410), EDN: YSOXDU

## Введение

В первой части данной публикации [1] приводятся сведения по истории развития теории тонких оболочек. Как и при разработке моделей деформирования пластин, при формировании основных соотношений теории оболочек применяются два подхода. Особенно широкое распространение получил подход, основанный на использовании определенных гипотез (например, гипотезы прямой нормали).

Изложение теории оболочек ведется на основе публикаций российских авторов (В. В. Новожилов [2], А. И. Лурье [3], А. Л. Гольденвейзер [4], Х. М. Муштари [5], В. З. Власов [6]). Рассматриваются ортогональная система координат и тонкие оболочки. Поэтому считается, что нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, малы по сравнению с другими напряжениями. Среда, заполняемая оболочкой, обладает свойством сплошности, поэтому деформации и напряжения являются непрерывными функциями. Поскольку изучаются малые перемещения (геометрически линейный вариант), то синусы и тангенсы углов заменяются самими углами, а косинусы — единицами.

Вначале излагается теория тонких оболочек, разработанная В. В. Новожиловым. Считается, что в слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности оболочки, параметры Ляме и кривизны оболочки изменяются в зависимости от  $z$ . Деформации в слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности, содержат члены при  $z$  в первой степени и во второй. Показано отличие соотношений теории оболочек, полученных А. Н. Лурье и А. Л. Гольденвейзером, когда их срединная поверхность отнесена к ортогональной системе координат. Приводятся соотношения теории тонких оболочек, полученные А. Л. Гольденвейзером, когда их срединная поверхность отнесена к произвольной косоугольной системе координат. Рассмотрены также соотношения для тонких оболочек в ортогональной системе координат, которая наиболее часто встречается при расчетах их напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости, когда в слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности, параметры Ляме и кривизны оболочек остаются такими же, как и в срединной поверхности.

Так как главным недостатком оболочек является возможность потери устойчивости, то рассматривается вариант оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, что повышает их жесткость и позволяет избежать потери устойчивости. Х. М. Муштари и В. З. Власов разработали упрощенный вариант оболочек, особенно эффективный при исследовании пологих оболочек. В 30–40-е гг. прошлого столетия стала развиваться нелинейная теория оболочек. Появилась возможность исследовать устойчивость оболочек с учетом нелинейных факторов, определять местные и общие формы потери устойчивости.

Отмечены ученые, внесшие существенный вклад в теорию метода расчета исследования прочности и устойчивости оболочек. Все эти сведения необходимы для разработки алгоритмов исследования прочности, устойчивости и колебания оболочек.

## 1. Методы расчета оболочечных конструкций

### 1.1. Методика решения вариационных и краевых задач теории оболочек

При исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости оболочечных конструкций математическая модель может быть получена в виде краевой задачи для дифференциального уравнения равновесия и краевых условий или в виде вариационной задачи о минимуме функционала полной потенциальной энергии деформаций конструкции и краевых условий. Рассмотрим методы решения таких задач.



Самым распространенным методом решения задач механики является метод конечных элементов (МКЭ). Применяя его получается система алгебраических уравнений, порядок которой может быть очень большим. Для линейных систем это решение вполне реально, в то время как для нелинейных — нереально.

Пусть задан функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки, представляющий собой разность потенциальной энергии деформации и работы внешних сил (поперечной нагрузки  $q$ ),

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \Phi(U, V, W, q) \, dx \, dy, \quad (1)$$

и краевых условий, т. е. условий закрепления контура оболочки. Если учитываются поперечные сдвиги, то в функционале еще будут присутствовать функции  $\Psi_x$  и  $\Psi_y$ . Необходимо найти при заданном значении нагрузки  $q$  функции  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям и дающие минимум функционалу (1).

Приближенное решение для функций  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  берется в виде суммы произведений неизвестных числовых параметров на известные функции, например,

$$U = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} U_{ij} X_1^i Y_1^j, \quad V = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} V_{ij} X_2^i Y_2^j, \quad W = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} W_{ij} X_3^i Y_3^j. \quad (2)$$

Здесь  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$  — неизвестные числовые параметры, которые умножаются на известные функции (аппроксимирующие функции), которые могут быть непрерывными и заданными на всей области, занимаемой оболочкой. В этом случае они должны удовлетворять заданным краевым условиям. Если область, занимаемая оболочкой, разбита на конечные элементы, то эти функции задаются на каждом конечном элементе, и в разложении (2) будут присутствовать еще знаки суммирования.

Если теперь (2) подставить в (1) и вычислить интегралы от известных функций, то функционал  $E_s$  сведется к функции  $E_{sf}$  от неизвестных числовых параметров и параметра нагрузки

$$E_{sf} = E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q), \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \quad (3)$$

Теперь исходная вариационная задача свелась к нахождению минимума этой функции, т. е. нахождению чисел  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , при которых функция (3) имеет минимум. Для этого существует несколько способов.

Пожалуй, самый естественный способ — это найти частные производные этой функции по неизвестным числовым параметрам и приравнять их к нулю (метод Ритца):

$$\frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \quad (4)$$

В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , методы решения которой рассмотрим ниже.

Если решается краевая задача для дифференциальных уравнений, то, подставив в них (2), получим невязку. Интеграл по области, занимаемой оболочкой, от произведения невязки на аппроксимирующие функции должен обращаться в нуль (метод Бубнова — Галеркина). В результате получим систему (4).

Для нахождения минимума функции (3) можно применить метод наискорейшего спуска, или метод покоординатного спуска, и итерационным процессом вычислить значения числовых параметров  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , чтобы в дальнейшем получить значение функций  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  при значении  $q = q_k$ , именно при любом значении нагрузки  $q_k$ .

Суть метода наискорейшего спуска состоит в следующем. Пусть  $M_1(U_{ij1}, V_{ij1}, W_{ij1})$  — некоторая точка существования функции (3), минимум которой нужно найти (т. е. нужно



найти  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$  при  $q = q_k$ , при которых с учетом (2) функционал (1) имеет минимум). Градиентом этой функции в точке  $M_1$  является вектор с проекциями в виде частных производных, вычисляемых в точке  $M_1$ :

$$\frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1).$$

Этот вектор указывает направление максимального роста функции  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$  в точке  $M_1$ . Луч с началом в точке  $M_1$ , целиком лежащий в области существования функции  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$  и направленный противоположно вектору-градиенту, и имеет следующие координаты:

$$U_{ij} = U_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), \quad V_{ij} = V_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), \quad W_{ij} = W_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1),$$

где  $t \geq 0$ .

Функция  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$  в точках этого луча будет сложной функцией одного аргумента  $t$

$$\varphi(t) = E_{sf} \left( U_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), V_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), W_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1), q_k \right).$$

Чтобы найти минимум этой функции, нужно получить корни уравнения  $\varphi'(t) = 0$ . Если  $t_1$  — один из этих корней, то можно перейти от точки  $M_1$  к точке  $M_2$  с координатами

$$U_{ij2} = U_{ij1} - t_1 \frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), \quad V_{ij2} = V_{ij1} - t_1 \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), \quad W_{ij2} = W_{ij1} - t_1 \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1).$$

Далее, за исходную принимается точка  $M_2$ , и аналогично находят точку  $M_3$ , затем  $M_4$ ,  $M_5$ , ...,  $M_n$ . Так постепенно приходят к точке минимума функции  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$ , т.е. находят значения  $U_{ijn}$ ,  $V_{ijn}$ ,  $W_{ijn}$ , которые при  $q = q_k$  дают минимум функции (3). Следует заметить, что процесс нахождения корней уравнения  $\varphi'(t) = 0$  вызывает определенные трудности, но есть методы, позволяющие находить эти корни приближенно.

Такая методика нахождения минимума функции (3) на основе метода наискорейшего спуска описана в работе [7].

Существует современная модификация метода наискорейшего спуска.

Теперь рассмотрим методы решения нелинейной системы (4). Здесь может быть несколько способов, но начинать решение нужно с нулевого по нагрузке состояния оболочки (т.е. при  $q = 0$ ,  $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $W = 0$ ). Далее все методы будут являться пошаговыми. Итак, при значении нагрузки  $q_k$  известны значения  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ . Нужно найти эти значения при нагрузке  $q_k + \Delta q_k = q_{k+1}$ .

Систему нелинейных уравнений (4) запишем в виде

$$F(X, q) = 0. \quad (5)$$

Здесь  $X = (U_{ij}, V_{ij}, W_{ij})^T$ ,  $F = (F_{1l}, F_{2l}, F_{3l})^T$ .

Система (5), если функционал имеет вид (1), — это система  $3N$  уравнений с  $3N$  неизвестными, которую более подробно можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_{1l}(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{nn}, V_{11}, V_{12}, \dots, V_{nn}, W_{11}, W_{12}, \dots, W_{nn}) &= 0, \\ F_{2l}(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{nn}, V_{11}, V_{12}, \dots, V_{nn}, W_{11}, W_{12}, \dots, W_{nn}) &= 0, \\ F_{3l}(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{nn}, V_{11}, V_{12}, \dots, V_{nn}, W_{11}, W_{12}, \dots, W_{nn}, q) &= 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь только в последних  $N$  уравнениях присутствует  $q$ . Система (5) содержит линейную часть уравнений и нелинейную, поэтому можно представить

$$F(X, q) = F^L(X) + F^N(X) + C_p \cdot q,$$

где  $F^L(X)$  — линейная часть уравнения, а  $F^N(X)$  — нелинейная его часть.



Самая простая методика решения нелинейных уравнений (5) основана на методе итераций. Нелинейные члены уравнений переносим в правую часть:

$$F^L(X) + C_p \cdot q = -F^N(X).$$

При  $q = q_k$  известно значение  $X_k$ , подставим эти значения в  $F^N(X)$  и решаем линейное уравнение

$$F^L(X_{k+1}) + C_p \cdot q_{k+1} = -F^N(X_k).$$

Найденное решение вновь подставляется в  $F^N(X)$ , и процесс продолжается до тех пор, пока, например, на  $k$ -й итерации прогиб  $W(x, y)$  не будет удовлетворять неравенству

$$\left| \frac{W^{k+1} - W^k}{W^{k+1}} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — заданное значение погрешности.

Эта методика позволяет находить решение задачи до первой критической нагрузки потери устойчивости оболочки, а далее итерационный процесс будет расходиться. Такая методика может быть использована не только для решения линейно-упругих задач, но и для нелинейно-упругих, а также задач ползучести. Эта методика описана в работе [8].

Зачастую необходимо исследовать НДС оболочки не только в докритической области, но и в закритической, т.е. находить не только верхнюю критическую нагрузку, но и нижнюю и другие критические нагрузки, если они есть (исследовать местную и общую потери устойчивости оболочки).

Чтобы провести такие исследования, нужно для решения нелинейного уравнения (3) применять метод продолжения решения по параметру [9]. Сходимость этого метода устанавливает теорема о неявных функциях (см. [9]).

Пусть известно некоторое решение нелинейного уравнения (5) при  $q = q_0$   $X_0(U_{ij0}, V_{ij0}, W_{ij0})$ , т.е.

$$X_0(q_0) = 0. \quad (6)$$

Продифференцируем (5) по параметру  $q$ . В результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{dq} + \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение с начальным условием (6) представляет собой начальную задачу для дифференциального уравнения первого порядка относительно  $\frac{dX}{dq}$ . Здесь  $\frac{\partial F}{\partial X} = J$  — матрица Якоби. Точки, где  $\det\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) \neq 0$ , называются регулярными, а точки, где  $\det\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) = 0$ , — особыми.

Применим для решения начальной задачи (7), (6) метод Эйлера, получим расчетную схему (при  $q = q_k$  решение известно)

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k, \quad q_{k+1} = q_k + \Delta q_k,$$

где  $\Delta q_k$  задается, а  $\Delta X_k$  находится из решения линейного алгебраического уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X_k, q_k) \Delta X_k + \frac{\partial F}{\partial q}(X_k, q_k) \Delta q_k = 0. \quad (8)$$

Описанная методика составляет суть метода последовательных нагружений [10].

Для решения этой системы линейных алгебраических уравнений можно применить метод Гаусса. Решив эту систему, находим  $\Delta X_k$ , т.е. значения  $\Delta U_{ij}^{(k)}$ ,  $\Delta V_{ij}^{(k)}$ ,  $\Delta W_{ij}^{(k)}$  при  $q = q_{k+1}$ . После чего находим накопленные к этому этапу значения параметров

$$U_{ij}^{(k+1)} = U_{ij}^{(k)} + \Delta U_{ij}^{(k)}, \quad V_{ij}^{(k+1)} = V_{ij}^{(k)} + \Delta V_{ij}^{(k)}, \quad W_{ij}^{(k+1)} = W_{ij}^{(k)} + \Delta W_{ij}^{(k)}, \quad q_{k+1} = q_k + \Delta q_k.$$



Таким образом, продолжая процесс последовательного увеличения нагрузки и решая линейные уравнения с изменяющимися от этапа к этапу накопленными значениями  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , доходим до первой критической нагрузки. При этой нагрузке  $\det(J) = 0$ . После прохождения этой точки процесс может быть продолжен, только приращение нагрузки  $\Delta q$  должно сменить знак на противоположный.

Рассмотренная схема решения начальной задачи (8) имеет первый порядок точности, поэтому для достижения приемлемой точности приходится брать достаточно малый шаг  $\Delta q$ . По сути дела, кривая «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » заменяется ломаной, состоящей из отрезков, касательных к истинной кривой «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ ».

Для увеличения точности расчетов нужно вместо схемы Эйлера применить, например, схему метода Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Применение более точных схем описано в работе [11].

Как уже было сказано ранее, точки, где  $\det(J) = 0$ , называются особыми. Особые точки соответствуют или предельным точкам (в них происходит резкий переход на новое равновесное состояние — потеря устойчивости оболочки), или точкам бифуркации (в этих точках появляется возможность разветвления решения).

Рассмотрим кроме матрицы Якоби  $J$  еще расширенную матрицу Якоби [12]

$$J_q = \left( \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial q} \right)$$

и набор, состоящий из матриц  $J_m$ , полученных из  $J_q$  вычеркиванием  $m$ -го столбца матрицы  $\frac{\partial F}{\partial X}$ .

В точке бифуркации, т. е. в точке ответвления нового решения [12] (рассматриваются поочередно случаи вычеркивания каждого столбца),  $\det(J) = 0$  и  $\det(J_m) = 0$ , а в предельной точке

$$\det(J) = 0, \quad \det(J_m) \neq 0.$$

Для обхода критических точек графика «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » можно или поменять параметр продолжения решения [13], или, не меняя параметр продолжения решения, применить следующую методику.

Начиная с нулевого ненагруженного состояния  $F(X_0, q_0) = 0$  за параметр продолжения решения принимается нагрузка, и на каждом этапе задается значение  $\Delta q_k$ . Решается линейное уравнение, вычисляются все неизвестные параметры и, кроме того, вычисляются  $\det(J)$  и наибольшее приращение прогиба

$$\Delta W^{(k)} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \Delta W_{ij}^{(k)} X_3^i Y_3^j.$$

При подходе к критической точке графика «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ », когда при следующем шаге нагружения уже нагрузка  $q_k$  будет больше критической, касательная к кривой «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » меняет направление и происходит смена знака наибольшего приращения прогиба, т. е.  $\Delta W^{(k)} \Delta W^{(k-1)} < 0$  и  $\det(J)$  вблизи критической нагрузки будет близок к нулю. В этом случае необходимо изменить знак на противоположный и у  $\Delta q_k$ , и у  $\Delta X_k$ . Если же хотя бы одно из условий  $\Delta W^{(k)} \Delta W^{(k-1)} < 0$ ,  $\det(J) = 0$  не выполняется, процесс продолжается с прежним значением  $\Delta q_k$ .

Для обхода критических точек графика «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » при использовании метода продолжения решения по параметру нагрузки можно предложить следующий алгоритм, записанный в виде блок-схемы (рис. 1).

При  $\Delta q > 0$  в момент перехода через критическую точку графика  $W = W(q)$  касательная к графику кривой меняет свое направление (рис. 2).



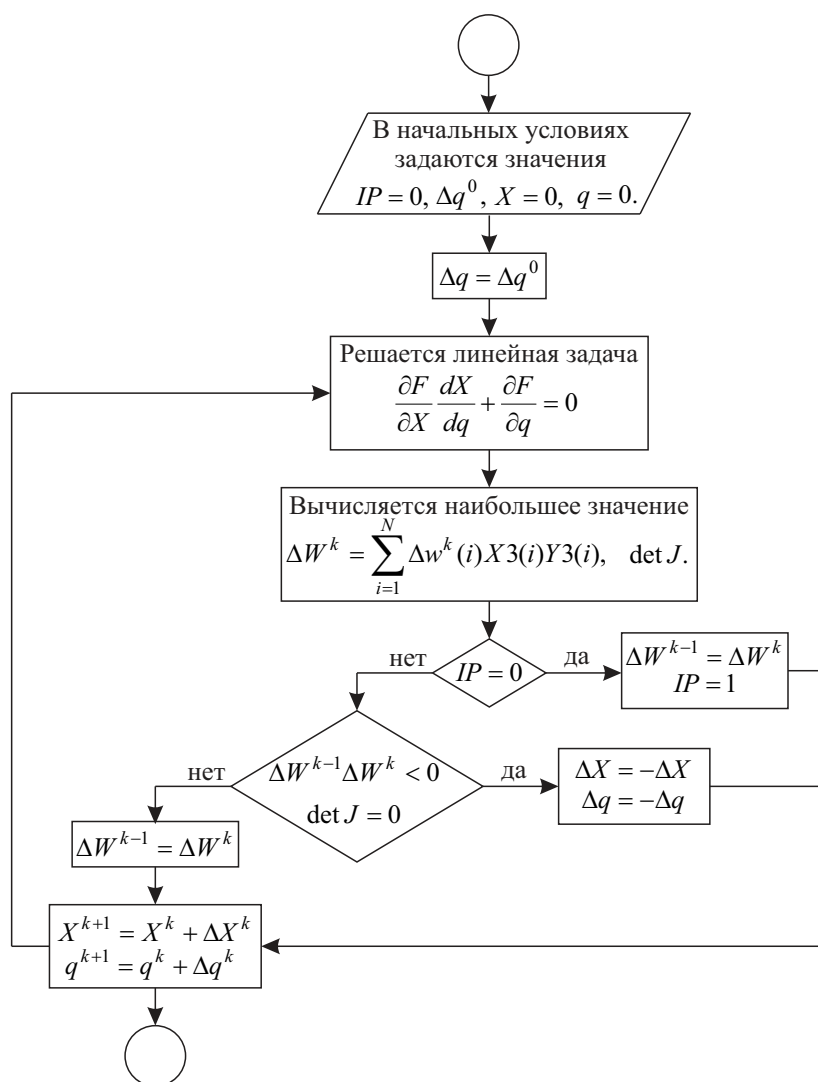


Рис. 1. Блок-схема обхода критических точек  
Fig. 1. Flowchart for traversing critical points

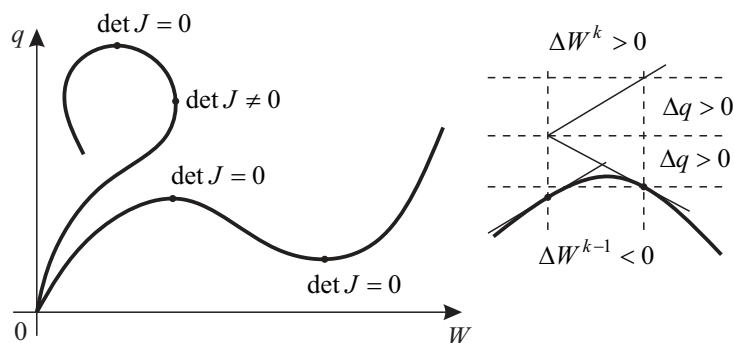


Рис. 2. Графическое изображение критических точек  
Fig. 2. Graphical representation of critical points

В настоящее время для решения нелинейных задач разработан метод продолжения решения по наилучшему параметру [14], когда движение от точки графика «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » происходит не по касательной, а по некоторой кривой, т.е. наилучшим парамет-



ром продолжения решения является длина дуги, вычисляемая вдоль кривой, которая этим решением является. Для удобства дальнейших преобразований систему (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} F(X, q) &= F(\tilde{X}) = 0, \\ X &= (U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}) = (X_1, X_2, \dots, X_{3N}), \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}, \\ \tilde{X} &= (U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q) = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{3N+1}), \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Наряду с матрицей Якоби  $J = [\frac{\partial F}{\partial X}]$ , будем рассматривать расширенную матрицу Якоби

$$J_q = \left[ J, \frac{\partial F}{\partial \tilde{X}_{3N+1}} \right].$$

Теперь выберем наилучший, в некотором смысле, параметр продолжения решения. Будем считать, что неизвестные в (9) зависят от некоторого параметра  $\lambda$ ,  $\tilde{X} = \tilde{X}(\lambda)$ . Фактически это равносильно введению нового неизвестного, которое не входило явно в уравнение (9). Чтобы определить этот параметр, необходимо дополнительное соотношение, устанавливающее связь между  $X_i$  и  $\lambda$ . Эта связь имеет вид

$$d\lambda^2 = d\tilde{X}_1^2 + d\tilde{X}_2^2 + \dots + d\tilde{X}_{3N+1}^2.$$

Введенный таким образом параметр  $\lambda$  требует совместного решения уравнения (9) и  $\sum_{i=1}^{3N+1} \frac{d\tilde{X}_i}{d\lambda} = 1$ . Продифференцировав уравнение (9) по параметру  $\lambda$ , получим уравнения

$$J_q \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = 0, \quad J_q = \frac{\partial F}{\partial \tilde{X}}.$$

Рассмотрим алгоритм метода продолжения по наилучшему параметру на основе явной схемы метода Эйлера [14].

Итак, для решения нелинейной системы (9) при  $F(X_0) = 0$  методом продолжения решения по наилучшему параметру  $\lambda$  необходимо решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} J \\ \frac{d\tilde{X}_*^T}{d\lambda} \end{bmatrix} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}(\lambda_0) = \tilde{X}_0, \quad \lambda_0 = 0. \quad (10)$$

На первом этапе  $q = 0$ ,  $U_{ij} = 0$ ,  $V_{ij} = 0$ ,  $W_{ij} = 0$ . Схема (8) принимает вид

$$\begin{bmatrix} J^{(k)} & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \frac{\Delta \tilde{X}}{\Delta \lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система

$$\begin{bmatrix} J^{(k)} \end{bmatrix} \frac{\Delta \tilde{X}}{\Delta \lambda} = [0]$$

имеет вид (8). Решив ее методом Гаусса, находим  $\Delta \tilde{X}_i$ . Из последней строки этой системы следует

$$\Delta \tilde{X}_{3N+1} = \Delta \lambda (\Delta \tilde{X}_{3N+1} = \Delta q).$$

На  $k$ -м этапе решается задача (10). Опять  $\Delta \tilde{X}_i$  находится как ранее. Условие

$$\frac{d\tilde{X}_*}{d\lambda} = \frac{\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}}{\left\| \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} \right\|}$$



можно записать в виде

$$\frac{d\tilde{X}_i^*}{d\lambda} = \frac{\Delta\tilde{X}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3N} \Delta\tilde{X}_i \Delta\tilde{X}_i}}.$$

Теперь можно найти  $\tilde{X}_i^{(k+1)}$  по формуле

$$\tilde{X}_i^{(k+1)} = \tilde{X}_i^{(k)} + \frac{d\tilde{X}_i^*}{d\lambda} \Delta\lambda_k$$

(на 1-м этапе  $\Delta\lambda_k = \Delta q_0$ ,  $\lambda_0 = 0$ ), далее  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k$ .

При использовании последней строки схемы (10) получим

$$\sum_{i=1}^{3N+1} \frac{d\tilde{X}_i^*}{d\lambda} \frac{d\tilde{X}_i}{d\lambda} = 1, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3N+1} \Delta\tilde{X}_i^* \Delta\tilde{X}_i = \Delta\lambda^2,$$

откуда можно выразить  $\Delta\lambda_k$  и т.д.

В методе продолжения решения по наилучшему параметру параметр  $\lambda$  определен как сумма квадратов дифференциалов неизвестных  $\tilde{X}_i$ , поэтому все они должны иметь одну и ту же размерность. Так как  $U$ ,  $V$ ,  $W$  измеряются в метрах, а  $q$  — в МПа, то необходимо перед применением этого метода перейти к безразмерным параметрам так, чтобы все  $\tilde{X}_i$  были безразмерными.

При решении динамических задач теории оболочек перемещения будут зависеть не только от  $x$  и  $y$ , но и от  $t$ , т.е.  $U(x, y, t)$ ,  $V(x, y, t)$ ,  $W(x, y, t)$ . Поэтому в разложении (2)  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$  будут неизвестными функциями переменной  $t$ . Применяя метод Власова – Канторовича к уравнениям движения, описанным в части I статьи, получим систему однородных дифференциальных уравнений, которая решается методом Рунге – Кутты. Такая методика описана в работах В. А. Крысько (см., например, [15]). Полученная система однородных дифференциальных уравнений относится к так называемым жестким системам уравнений, поэтому для решения таких систем используют специальные методы, в том числе неявные методы Рунге – Кутты.

*Примеры применения описанной методики для исследования устойчивости оболочек*

Теперь рассмотрим конкретные примеры применения различных алгоритмов для исследования устойчивости оболочек постоянной толщины. Везде нагрузка принималась равномерно распределенная и нормальная к срединной поверхности, и если это отдельно не оговаривается, то контур оболочки закреплен шарнирно неподвижно. Материал оболочки имеет характеристики:  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0.3$ . Везде, если это не оговорено специально, в разложении перемещений удерживалось девять членов:  $N = 9$ .

На рис. 3 представлены зависимости «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для пологой оболочки двоякой кривизны, шарнирно-подвижно закрепленной по контуру, с параметрами  $a = b = 200h$ ,  $R_1 = R_2 = 400h$ ,  $h = 0.01$  м. Для решения нелинейной системы (4) применяется метод итераций, поэтому найдена только верхняя критическая нагрузка.

На рис. 4 для пологой оболочки двоякой кривизны с параметрами  $a = b = 60h$ ,  $R_1 = R_2 = 225h$ ,  $h = 0.09$  м представлены зависимости «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » (сплошной график).

Для решения нелинейной системы (4) применялся метод продолжения решения по параметру нагрузки с обходом критических точек. Тот же результат был получен и при использовании метода продолжения по наилучшему параметру. На рис. 4 также представлена зависимость « $\det J$  — прогиб  $W$ » (штриховой график). Нулевые значения  $\det J$  соответствуют верхней и нижней критической нагрузке оболочки (выделено прямыми вертикальными линиями).

На рис. 5 представлена зависимость «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для пологой оболочки двоякой кривизны с параметрами  $a = b = 120h$ ,  $R_1 = R_2 = 450h$ ,  $h = 0.09$  м. Кривые 1

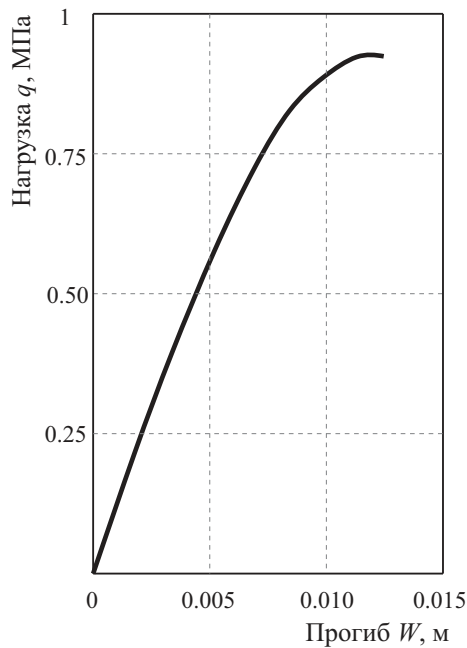


Рис. 3. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для пологой оболочки двоякой кривизны, шарнирно-подвижно закрепленной по контуру, с параметрами  $a = b = 200h$ ,  $R_1 = R_2 = 400h$ ,  $h = 0.01$  м

Fig. 3. “Load  $q$  — deflection  $W$ ” graph for a shallow shell of double curvature, pivotally fixed along the contour, with parameters  $a = b = 200h$ ,  $R_1 = R_2 = 400h$ ,  $h = 0.01$  m

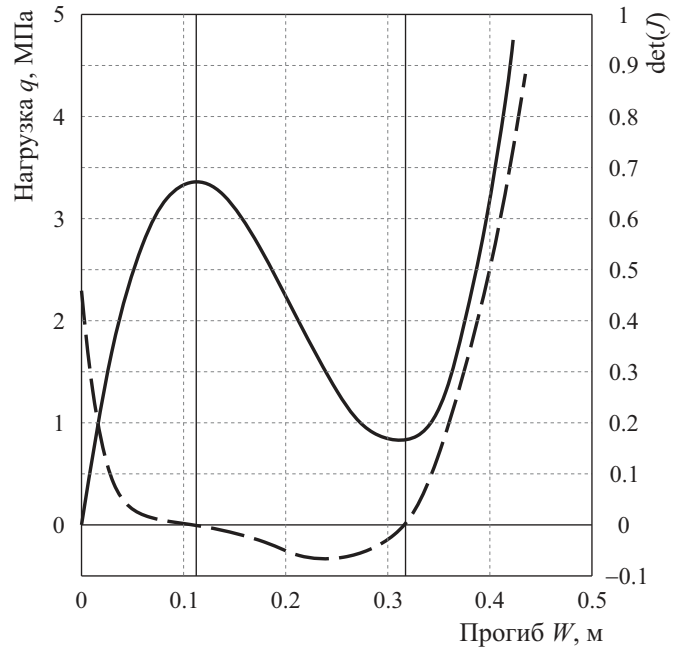


Рис. 4. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » (сплошной график) и «нагрузка  $q$  — определитель  $\det(J)$ » (штриховой график) для пологой оболочки двоякой кривизны с параметрами  $a = b = 60h$ ,  $R_1 = R_2 = 225h$ ,  $h = 0.09$  м

Fig. 4. “Load  $q$  — deflection  $W$ ” graph (continuous graph) and “Load  $q$  — determinant  $\det(J)$ ” graph (line graph) for a shallow shell of double curvature with parameters  $a = b = 60h$ ,  $R_1 = R_2 = 225h$ ,  $h = 0.09$  m

(прогиб в центре оболочки при  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ ) и 2 (прогиб в четверти оболочки при  $x = a/4$ ,  $y = b/4$ ) получены применением метода продолжения решения по наилучшему параметру, а кривая 3 — методом продолжения решения по параметру нагрузки с обходом критической точки. Как видно из рис. 5, метод продолжения по наилучшему параметру позволяет выявить местную потерю устойчивости до общей потери устойчивости.

На рис. 6 приведены графики «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для цилиндрической панели с параметрами  $a = 20$  м,  $R = 5.4$  м,  $h = 0.01$  м, угол разворота  $b = 1.57$  рад. Результаты получены применением для нахождения минимума функции (3) варианта метода покоординатного спус-

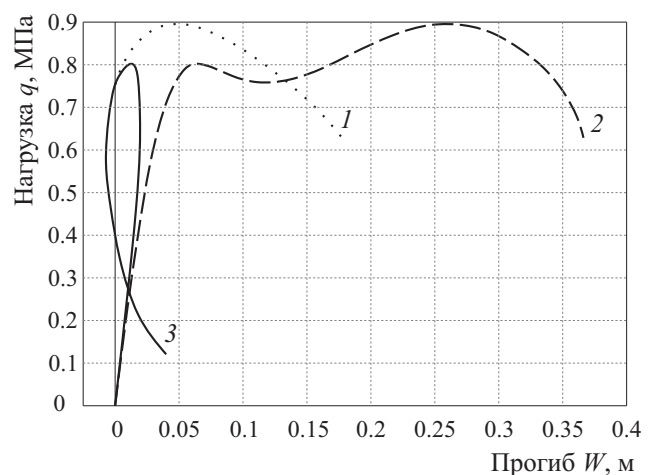


Рис. 5. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для пологой оболочки двоякой кривизны с параметрами  $a = b = 120h$ ,  $R_1 = R_2 = 450h$ ,  $h = 0.09$  м

Fig. 5. “Load  $q$  — deflection  $W$ ” graph for a shallow shell of double curvature with parameters  $a = b = 120h$ ,  $R_1 = R_2 = 450h$ ,  $h = 0.09$  m

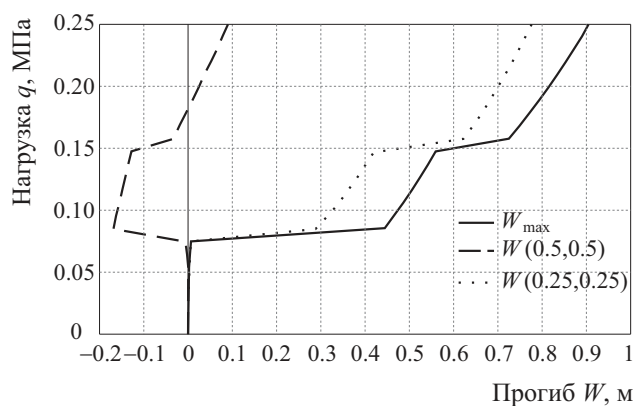


Рис. 6. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для цилиндрической панели с параметрами  $a = 20$  м,  $R = 5.4$  м,  $h = 0.01$  м, угол разворота  $b = 1.57$  рад  
Fig. 6. “Load  $q$ —deflection  $W$ ” graph for a cylindrical panel with parameters  $a = 20$  m,  $R = 5.4$  m,  $h = 0.01$  m, turning angle  $b = 1.57$  rad

ка L-BFGS. Для аппроксимации перемещений использовались NURBS-поверхности (неоднородный рациональный В-сплайн) при дискретном разбиении области. Для достижения достаточной точности число точек разбиения области составило 440.

Метод конечных элементов для расчета оболочек используется в тех случаях, когда оболочка имеет сложную форму, например, подкреплена ребрами разной жесткости. При этом рассматривается геометрически линейная задача.

Рассматривается квадратная в плане оболочка со стороной  $a = 6$  и толщиной  $h = 0.005$  м, состоящая из 36 ребристых плит размером  $0.5 \times 2$  м (рис. 7).

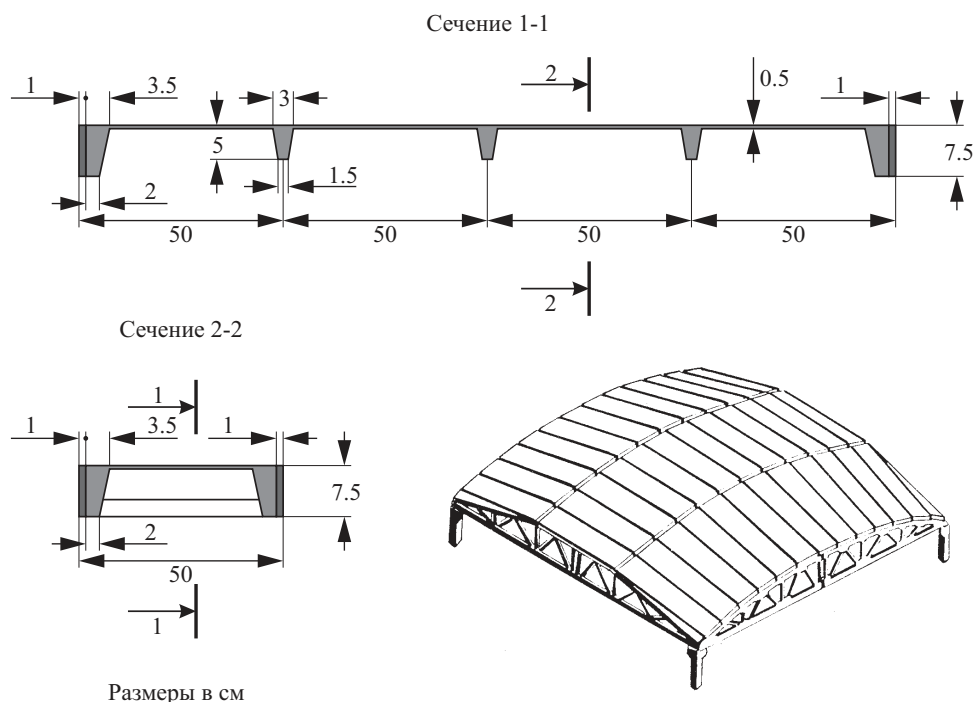


Рис. 7. Общий вид складчатой оболочки и сечения отдельных панелей, образующих оболочку

Fig. 7 General view of the folded shell and section of individual panels forming the shell

Вдоль оси  $y$  расположено три плиты длиной 2 м каждая, а вдоль оси  $x$  — 12 плит длиной 0.5 м каждая. Размеры всех элементов плиты и конструкции в целом показаны на рис. 7.

По контуру оболочка закреплена шарнирно-подвижно, поэтому для расчета ее напряженно-деформированного состояния используются уравнения в смешанной форме, так как в этом случае легко подобрать аппроксимирующие функции в методе Бубнова — Галеркина, удовлетворяющие заданным краевым условиям.

Укажем основные характеристики конструкции:

1) вдоль оси  $x$  находится 11 изломов срединной поверхности с одинаковым углом излома  $\theta_j = 0.06065$  рад, а вдоль оси  $y$  — 2 излома с углом  $\theta_i = 0.24391$  рад;





2) размеры ребер, приведенные к прямоугольному сечению, составляют: для окаймляющих плиту (больших) ребер высота равна 0.07 м, ширина — 0.045 м; для внутренних (малых) ребер высота равна 0.045 м, ширина — 0.0225 м;

3) характеристики материала конструкции: железобетон с  $E = 2.5 \cdot 10^4$  МПа и  $\mu = 0.167$ ;

4) нагрузка равномерно распределенная по площади оболочки, составляющая с собственным весом конструкции  $q = 4.3 \cdot 10^{-3}$  МПа.

Решение задачи методом конечных элементов, найденное А. М. Масленниковым и Р. А. Поповым [16], дает  $W(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = 0.00272$  м,  $\sigma = -3.22$  МПа. Эпюры полученных ими прогибов представлены на рис. 8. Здесь штрих-пунктиром показано решение, соответствующее жесткому контуру, когда на нем  $W = 0$ , пунктиром — решение, учитывающее податливость контура в направлении оси  $z$ , а сплошными линиями показано решение, полученное экспериментально.

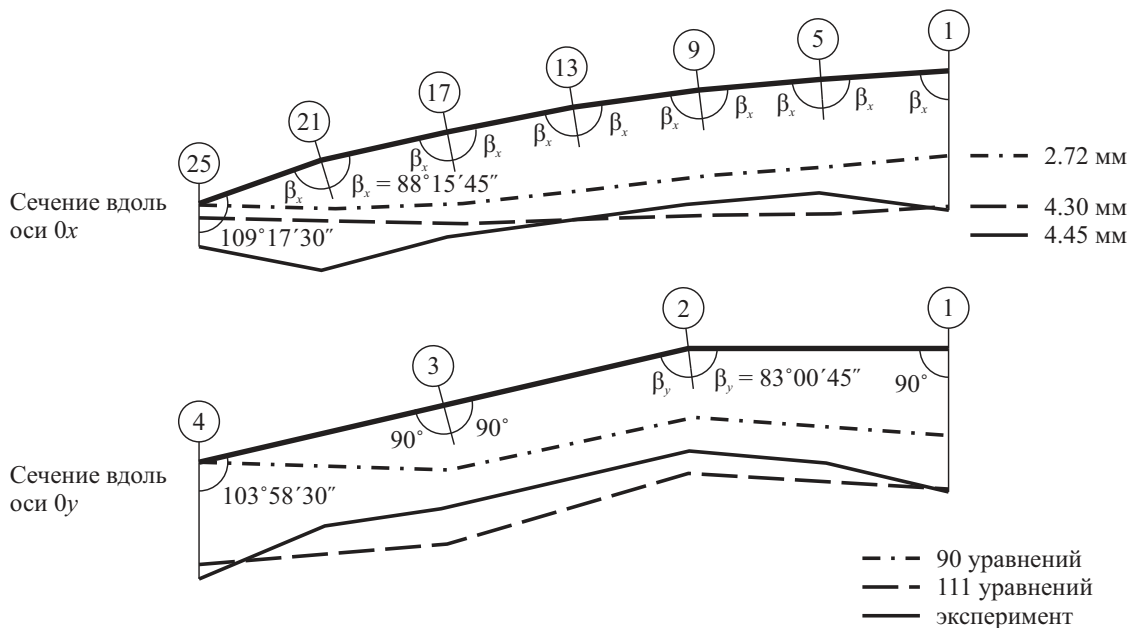


Рис. 8. Эпюры прогибов складчатой оболочки

Fig. 8. Diagrams of deflections of a folded shell

## 1.2. Решение дифференциальных уравнений равновесия оболочек, содержащих разрывные параметры

Если в соотношениях теории оболочек встречаются разрывные функции в виде единичных функций Хевисайда или дельта-функций Дирака, то для решения уравнений равновесия в этом случае разработан Г. Н. Белосточным [17, 18] специальный метод.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L^n[f(x)] = \sum_{i=1}^k b_i(x)H(x - x_i), \quad (11)$$

где  $L^n$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $n$  с постоянными коэффициентами  $L^n = \sum_{j=1}^n a_j d^j / dx^j$  ( $a_n = 1$ ),  $b_i(x)$  — известные функции;  $H(x - x_i)$  — обобщенные функции Хевисайда. Если ввести в рассмотрение вспомогательные уравнения

$$L^n[f_i(x)] = b_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$



частные интегралы которых известны, то функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) + \tilde{f}_i(x) \right) H(x - x_i)$$

является частным интегралом уравнения (11), где  $C_m^i$  — решения систем линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n C_m^i \frac{d^l \varphi_m}{dx^l} \Big|_{x_i} = - \frac{d^l \tilde{f}_i}{dx^l} \Big|_{x_i}, \quad (12)$$

а система функций  $\{\varphi_m(x)\}$  — фундаментальная система решений уравнения (11), т.е. такая система линейно независимых функций, линейная комбинация которых дает общее решение соответствующего однородного уравнения.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (11):

$$f(x) = \sum_{m=1}^n C_m \varphi_m(x) + \sum_{i=1}^k \left( \sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) + \tilde{f}_i(x) \right) H(x - x_i), \quad (13)$$

в чем нетрудно убедиться подстановкой (13) в (11). Здесь  $C_m$  — постоянные интегрирования.

Пусть дифференциальное уравнение содержит обобщенную дельта-функцию

$$L^n[f(x)] = b(x_i) \delta(x - x_i), \quad (14)$$

где  $b(x_i)$  — значение известной функции  $b(x)$  в точке  $x_i$ ;  $\delta(x - x_i)$  — дельта-функция.

Решением уравнения (14) является функция

$$f(x) = \sum_{m=1}^n C_m \varphi_m(x) + \sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) H(x - x_i), \quad (15)$$

где  $C_m^i$  — решения системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n C_m^i \frac{d^l \varphi_m}{dx^l} \Big|_{x_i} = \gamma_l, \quad \gamma_l = \begin{cases} 0, & \text{при } l = 0, 1, \dots, n-2, \\ b(x_i), & \text{при } l = n-1. \end{cases} \quad (16)$$

Если дифференциальное уравнение содержит производную от обобщенной дельта-функции

$$L^n[f(x)] = b(x) \frac{d\delta(x - x_i)}{dx},$$

правая его часть преобразуется к виду

$$b(x) \frac{d\delta}{dx} = b(x_i) \frac{d\delta}{dx} - \frac{db}{dx} \Big|_{x_i} \delta(x - x_i).$$

В этом случае интерес представляет решение, позволяющее определить частный интеграл уравнения

$$L^n[f(x)] = b(x_i) \frac{d\delta(x - x_i)}{dx}.$$

Общий интеграл этого уравнения также можно представить в виде (15), где  $C_m^i$  определяются как решения системы алгебраических уравнений (16), свободные члены которых

$$\gamma_l = \begin{cases} 0, & \text{при } l \leq n-3, \\ b(x_i), & \text{при } l = n-2, \\ -d_{n-1} b(x_i), & \text{при } l = n-1. \end{cases}$$



В том случае, когда правая часть дифференциального уравнения содержит вторую производную от обобщенной дельта-функции, структура решения (15) не изменится. Свободные члены соответствующей системы алгебраических уравнений в этом случае

$$\gamma_l = \begin{cases} 0, & \text{при } l \leq n-4, \\ b(x_i), & \text{при } l = n-3, \\ -d_{n-1}b(x_i), & \text{при } l = n-2, \\ (d_{n-1}^2 - d_{n-2})b(x_i), & \text{при } l = n-1. \end{cases}$$

Метод определения замкнутых решений частично вырожденных дифференциальных уравнений распространяется и на уравнения, содержащие производные от дельта-функций третьего и выше порядков.

*Пример использования описанной методики*

Данный пример предоставлен Г. Н. Белосточным. Найти решение задачи о пластинке, находящейся в состоянии стационарного теплообмена с окружающей средой при одинаковых коэффициентах теплоотдачи  $\aleph$  с обеих поверхностей  $z = \pm h/2$ , где  $h$  — толщина пластинки. На линиях  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), параллельных двум краям пластинки, допускается скачкообразное изменение температуры внешней среды  $T^+(x, y)$  со стороны  $z = h/2$ . Это возможно, например, при наличии термоизолирующих перегородок или фронтов ударных волн внешней среды у поверхности пластинки.

Пусть на краях  $y = 0$  и  $y = b$  поддерживается нулевая температура. Тогда решение уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} \lambda \nabla^2 \theta_m - 2 \frac{\aleph}{h} \theta_m &= - \frac{\aleph}{h} (T^+(x, y) + T^-(x, y)), \\ \lambda \nabla^2 (\Delta \theta) - \left( 6 \frac{\aleph}{h} + 12 \frac{\lambda}{h^2} \right) \Delta \theta &= -6 \frac{\aleph}{h} (T^+(x, y) - T^-(x, y)) \end{aligned}$$

для функций  $\theta_m(x, y)$  и  $\Delta \theta(x, y)$ , связанных с температурой  $\theta(x, y, z)$  равенством

$$\theta(x, y, z) = \theta_m(x, y) + \frac{z}{h} \Delta \theta(x, y),$$

сводится подстановкой

$$\theta_m(x, y) = \sum_k \varphi_k(x) \sin y_k, \quad \Delta \theta(x, y) = \sum_k \psi_k(x) \sin y_k$$

к интегрированию следующих дифференциальных уравнений относительно функций  $\varphi_k(x)$  и  $\psi_k(x)$ :

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} - \frac{a_{11}^k}{b^2} \varphi_k = \frac{\aleph}{\lambda h} (T_k^+(x) + T_k^-(x)), \quad \frac{d^2 \psi_k}{dx^2} - \frac{a_{21}^k}{b^2} \psi_k = -6 \frac{\aleph}{\lambda h} (T_k^+(x) + T_k^-(x)). \quad (17)$$

Здесь  $a_{11}^k, a_{21}^k$  — постоянные, зависящие от  $\aleph, \lambda, h, /b$ ; и  $b$  — размеры пластинки в плане;  $T_k^\pm(x) = (2/b) (T^\pm(x, y), \sin y_k)$ ;  $y_k = k\pi y/b$ .

В случае одного температурного скачка со стороны плоскости  $z = h/2$

$$\begin{aligned} T^+ &= T_0^+ H(x - x_i), \quad T^- = \text{const}, \\ T_k^+ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) T_0^+ H(x - x_i); \quad T_k^- = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) T^-. \end{aligned}$$

Общее решение уравнений (17) на основании (12) записываем в виде

$$\varphi_k(x) = C_k^1 e^{x_{11}} + C_k^2 e^{-x_{11}} + 2L_k^r T_0^+ \left( 1 - \text{ch} \frac{\sqrt{a_{11}^k} (x - x_i)}{b} \right) H(x - x_i) + 2L_k^r T^-,$$



$$\psi_k(x) = D_k^1 e^{x_{21}} + D_k^2 e^{-x_{21}} + 12L_k^s T_0^+ \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{a_{21}^k}(x - x_i)}{b} \right) H(x - x_i) - 12L_k^s T^-,$$

где  $C_k^j$ ,  $D_k^j$  ( $j = 1, 2$ ) — постоянные интегрирования;  $L_k^r = \aleph_k^*/(k\pi a_{11}^k)$ ;  $L_k^s = \aleph_k^*/(k\pi a_{21}^k)$ ,  $\aleph_k^* = (b/h)^2(\aleph b/\lambda)(1 - \cos k\pi)$ .

Если предположить, что края пластинки ( $x = 0$ ,  $x = a$ ) теплоизолированы, т.е.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta_m}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x} = 0,$$

то, например, функция  $\psi_k(x)$  примет вид

$$\begin{aligned} \psi_k(x) = & \frac{12L_k^s T_0^+ \operatorname{sh} \left( \sqrt{a_{21}^k}(a - x_i)/b \right)}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{a_{21}^k}a/b \right)} \operatorname{ch} x_{21} + \\ & + 12L_k^s T_0^+ \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{a_{21}^k}(x - x_i)}{b} \right) Y(x - x_i) - 12L_k^s T^-. \end{aligned}$$

### 1.3. Асимптотическое интегрирование уравнений теории оболочек

А. Л. Гольденвейзером разработан метод решения уравнений равновесия оболочек [19]. Рассмотрим суть этого метода.

Используются однородные уравнения равновесия в перемещениях и принимается, что срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональным криволинейным координатам.

Уравнения равновесия в перемещениях кратко запишем в виде

$$\begin{aligned} L^{11}(u) + L^{12}(v) + L^{13}(w) + \tilde{h}^2 [N^{11}(u) + N^{12}(v) + N^{13}(w)] &= 0, \\ L^{21}(u) + L^{22}(v) + L^{23}(w) + \tilde{h}^2 [N^{21}(u) + N^{22}(v) + N^{23}(w)] &= 0, \\ L^{31}(u) + L^{32}(v) + L^{33}(w) + \tilde{h}^2 [N^{31}(u) + N^{32}(v) + N^{33}(w)] &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\tilde{h} = \frac{h}{\eta}$ ;  $\eta$  — некоторый характерный линейный размер срединной поверхности;  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$  — дифференциальные операторы. На первых этапах рассуждений будут важны только порядок оператора  $L^{ij}$  и порядок оператора  $N^{ij}$  (эти операторы записываются в таблицы).

Решения уравнений (18) задаются в виде

$$\begin{aligned} u &= k^{\lambda_1} u(x, y, k) e^{kf(x, y)}, \\ v &= k^{\lambda_2} v(x, y, k) e^{kf(x, y)}, \\ w &= k^{\lambda_3} w(x, y, k) e^{kf(x, y)}, \end{aligned}$$

где  $k = \tilde{h}^{-t}$  ( $t > 0$ ), и будем считать, что величина  $\frac{2}{t}$  может принимать только целые значения.

Примем, что функция изменяемости  $f(x, y)$  не зависит от параметра  $k$ , а функции интенсивности  $u$ ,  $v$ ,  $w$  могут быть представлены в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{u_1(x, y)}{k} + \frac{u_2(x, y)}{k^2} + \dots, \\ v &= v_0 + \frac{v_1(x, y)}{k} + \frac{v_2(x, y)}{k^2} + \dots, \\ w &= w_0 + \frac{w_1(x, y)}{k} + \frac{w_2(x, y)}{k^2} + \dots, \end{aligned}$$

в которых  $u_0 \neq 0$ ,  $v_0 \neq 0$ ,  $w_0 \neq 0$ .



Дадим  $t$  некоторое положительное значение так, чтобы  $2/t$  было целым числом, представим левую часть каждого уравнения (18) в виде произведения экспоненциального множителя  $e^{kf}$  на ряд, расположенный по целым нисходящим степеням параметра  $k$ , и потребуем, чтобы в левых частях полученных соотношений исчезли коэффициенты при всех степенях  $k$ . Это приведет к бесконечной последовательности систем уравнений. Первая (головная) система из трех уравнений получается в результате приравнивания к нулю коэффициентов при степенях  $k$  — самых высоких степенях для каждого соотношения; вторая система из трех уравнений получится в результате приравнивания к нулю коэффициентов при степенях  $(k-1)$  и т.д.

Операторы  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$  по нисходящим степеням  $k$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} L^{i1}(u) &\sim k^{\lambda_1} (k^{ni1} L_0^{i1} u_0 + k^{ni1-1} [L_1^{i1}(u_0) + L_0^{i1}(u_1)] + \dots) e^{kf}, \\ L^{i2}(v) &\sim k^{\lambda_2} (k^{ni2} L_0^{i2} u_0 + k^{ni2-1} [L_1^{i2}(v_0) + L_0^{i2}(v_1)] + \dots) e^{kf}, \\ L^{i3}(w) &\sim k^{\lambda_3} (k^{ni3} L_0^{i3} u_0 + k^{ni3-1} [L_1^{i3}(w_0) + L_0^{i3}(w_1)] + \dots) e^{kf}, \\ N^{i1}(u) &\sim k^{\lambda_1} (k^{mi1} N_0^{i1} u_0 + k^{mi1-1} [N_1^{i1}(u_0) + N_0^{i1}(u_1)] + \dots) e^{kf}, \\ N^{i2}(v) &\sim k^{\lambda_2} (k^{mi2} N_0^{i2} v_0 + k^{mi2-1} [N_1^{i2}(v_0) + N_0^{i2}(v_1)] + \dots) e^{kf}, \\ N^{i3}(w) &\sim k^{\lambda_3} (k^{mi3} N_0^{i3} w_0 + k^{mi3-1} [N_1^{i3}(w_0) + N_0^{i3}(w_1)] + \dots) e^{kf}, \end{aligned} \quad (19)$$

где операторы  $L_p^{ij}$  и  $N_p^{ij}$  определенным образом связаны с  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$ .

Если ограничиться составлением системы уравнений для определения  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  (головной системы), то в этих соотношениях достаточно сохранить только члены, содержащие параметр  $k$  в наивысшей для данного выражения степени. Если после этого подставить (19) в (18), заменить  $\tilde{h}^2$  через  $k^{-2/t}$  и провести некоторые преобразования, то в зависимости от значений числа  $t$  могут иметь место пять различных случаев.

1. При  $t < 1/2$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$

2. При  $t = 1/2$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+1} (L_0^{33} + N_0^{33}) w_0 &= 0. \end{aligned}$$

3. При  $1/2 < t < 1$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+5-2/t} N_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$

4. При  $t = 1$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} (L_0^{13} + N_0^{13}) w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} (L_0^{23} + N_0^{23}) w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} (L_0^{31} + N_0^{31}) u_0 + k^{\lambda_2+2} (L_0^{32} + N_0^{32}) v_0 + k^{\lambda_3+3} N_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$





5. При  $1 < t < \infty$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+3-2/t} N_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+3-2/t} N_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+4-2/t} N_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+4-2/t} N_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+5-2/t} N_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$

Каждая из этих систем представляет собой систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ .

Входящие в эти уравнения символы  $L_0^{ij}$  и  $N_0^{ij}$  с помощью таблиц получаются через  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$ .

Решения этих систем должны быть нетривиальными, поэтому величины  $L_0^{ij}$  и  $N_0^{ij}$  обязаны удовлетворять дополнительным условиям, а так как эти величины зависят только от функции изменяемости  $f$ , то таким образом приходим к уравнениям для определения  $f(x, y)$ . Число таких уравнений существенно зависит от тех значений, которые даются показателям интенсивности  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Поэтому эти значения должны быть такими, которые приводят только к одному соотношению для определения функции изменяемости  $f(x, y)$ . Далее обсуждается, как могут быть найдены непротиворечивые значения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Показывается, каким образом можно построить функции изменяемости, и приводятся правила для определения коэффициентов асимптотического разложения функций интенсивности для основных интегралов.

Теперь пусть оболочка нагружена и поверхностными силами с компонентами  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , но свойства частного интеграла неоднородной системы (18) не рассматриваются, так что под полным напряженным состоянием подразумевается сумма напряженных состояний с интегралами однородных уравнений.

В качестве примеров применения описанного метода можно привести работы [20–22].

## Заключение

Практически все рассмотренные методы расчета оболочек в конечном виде приводят к системам алгебраических уравнений линейных или нелинейных. Число неизвестных в системе алгебраических уравнений может быть велико не только в МКЭ. Для достижения достаточной точности в методах наискорейшего спуска, Рунге и Бундмана – Галеркина неизвестных числовых параметров может быть несколько десятков (например, при нахождении критической нагрузки потери устойчивости оболочки). А если к тому же решается нелинейная задача, то системы линейных алгебраических уравнений решаются многократно. Поэтому рассмотренные методы решения задач определения напряженно-деформированного состояния, исследования прочности и устойчивости оболочек ориентированы на применение ЭВМ.

Следовательно, важным этапом в исследовании оболочек является разработка программных продуктов расчета оболочек. Существует ряд пакетов расчетных прикладных программ, таких как ЛИРА, ANSYS, SCAD и др. Однако они ориентированы на широкий круг задач строительной механики и поэтому используют упрощенные модели деформирования оболочек.

Приведенные в статье методы расчета оболочек позволяют достаточно полно провести исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости оболочек.

## Список литературы

1. Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410. DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410), EDN: [YSOXDU](https://www.edn.ru/YSOXDU)



2. Новожильов В. В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Оборонгиз, 1941. 344 с.
3. Лурье А. И. Исследования по теории упругих оболочек // Труды Ленинградского промышленного института. 1937. № 6, вып. 3. С. 37–52.
4. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории оболочек // Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4, вып. 2. С. 35–42.
5. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к решению задач устойчивости упругого равновесия // Прикладная математика и механика. 1939. Т. 2, вып. 4. С. 439–456. EDN: [SSSPJY](#)
6. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории оболочек // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, вып. 2. С. 109–140.
7. Баранова Д. А., Карпов В. В. Алгоритмы исследования устойчивости оболочек, основанные на методе наискорейшего спуска // Математическое моделирование и краевые задачи : тр. Седьмой Всерос. науч. конф. с междунар. участием (Самара, 3–6 июня 2010 г.) / отв. ред. В. П. Радченко. Самара : Самарский гос. техн. ун-т, 2010. Т. 1. С. 47–50. EDN: [UHDVLR](#)
8. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. Москва : Физматлит, 2011. 248 с. EDN: [UHSUFJ](#)
9. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. Москва : Наука, 1988. 232 с.
10. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1975. 119 с.
11. Карпов В. В., Петров В. В. Уточнение решений при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1975. № 5. С. 189–191. EDN: [UIEKJN](#)
12. Андреев Л. В., Ободан Н. И., Лебедев А. Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. Москва : Наука, 1988. 208 с.
13. Ильин В. П., Карпов В. В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Ленинград : Стройиздат, 1986. 168 с. EDN: [UGDTQF](#)
14. Шалашилин В. Н., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. Москва : Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
15. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1976. 216 с.
16. Масленников А. М., Попов Р. А. Расчет пологих складчатых оболочек из крупноразмерных плоских плит при помощи матрицы жесткости // Строительное проектирование промышленных предприятий. Информационный выпуск. 1968. № 3. С. 49–51.
17. Белосточный Г. Н. Аналитические методы интегрирования дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Доклады Академии военных наук. Поволжское региональное отделение. 1999. № 1. С. 14–26.
18. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной полой оболочки постоянного кручения в сверхзвуковом потоке газа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 397–408. DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408](#), EDN: [DDFZPB](#)
19. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Москва : ГИТТЛ, 1953. 544 с.
20. Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М. Асимптотическое интегрирование уравнений термоупругости цилиндрической оболочки переменной толщины // Прикладная механика. 1976. Т. 12, № 10. С. 113–117.
21. Коссович Л. Ю. Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений теории упругости для цилиндрической оболочки // Механика деформируемых сред. 1977. Вып. 3. С. 86–96. EDN: [UTEFDN](#)
22. Вильде М. В., Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 56–64. DOI: [10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64](#), EDN: [OYJJIZ](#)



## References

1. Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A. Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part I. Shell deformation models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 370–410 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410), EDN: [YSOXDU](#)
2. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of thin shells]. Leningrad, Oborongiz, 1941. 344 p. (in Russian).
3. Lurie A. I. Research on the theory of elastic shells. *Trudy Leningradskogo industrial'nogo instituta* [Proceedings of Leningrad Industrial Institute], 1937, vol. 6, iss. 3, pp. 37–52 (in Russian).
4. Goldenweiser A. L. Equations of shell theory. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1940, vol. 4, iss. 2, pp. 35–42 (in Russian).
5. Mushtari H. M. Some generalizations of the theory of thin shells with application to problems of stability of elastic equilibrium. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1939, vol. 2, iss. 4, pp. 439–456 (in Russian). EDN: [SSSPJY](#)
6. Vlasov V. Z. Basic differential equations of the general theory of shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1944, vol. 8, iss. 2, pp. 109–140. (in Russian).
7. Baranova D. A., Karpov V. V. Algorithms for studying shell stability based on the steepest descent method. *Matematicheskoe modelirovaniye i kraevye zadachi. Trudy Sed'moy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Radchenko V. P. (ed.) Mathematical Modeling and Boundary Value Problems. Proceedings of the Seventh All-Russian Scientific Conference with International Participation]. Samara, 2010, vol. 1, pp. 47–50 (in Russian). EDN: [UHDVLR](#)
8. Karpov V. V. *The strength and stability of reinforced shells of revolution. In two parts. Part 2. Computational experiment in static mechanical action*. Moscow, Fizmatlit, 2011. 248 p. (in Russian). EDN: [UHSUFJ](#)
9. Grigolyuk E. I., Shalashilin V. I. *Problemy nelineynogo deformirovaniya: Metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineynykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* [Problems of nonlinear deformation: Method of continuation of solution by parameter in nonlinear problems of mechanics of solid deformable body]. Moscow, Nauka, 1988. 232 p. (in Russian).
10. Petrov V. V. *Metod posledovatel'nykh nagruzheniy v nelineynoy teorii plastinok i obolochek* [Sequential loading method in the nonlinear theory of plates and shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1975. 119 p. (in Russian).
11. Karpov V. V., Petrov V. V. Solutions refinement in the theory of flexible plates and shells using step methods. *Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, 1975, iss. 5, pp. 189–191 (in Russian). EDN: [UIEKJN](#)
12. Andreev L. V., Obodan N. I., Lebedev A. G. *Ustoychivost' obolochek pri neosesimmetrichnoy deformatsii* [Shell stability under non-axisymmetric deformation]. Moscow, Nauka, 1988. 208 p. (in Russian).
13. Ilin V. P., Karpov V. V. *Stability of reinforced shells in the case of large displacements*. Leningrad, Stroyizdat, 1986. 168 p. (in Russian). EDN: [UGDTQF](#)
14. Shalashilin V. N., Kuznecov E. B. *Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya* [Methods for continuing the solution by parameter and the best parameterization]. Moscow, Editorial URSS, 1999. 224 p. (in Russian).
15. Krysko V. A. *Nelineynaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek* [Nonlinear statics and dynamics of inhomogeneous shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1976. 216 p. (in Russian).
16. Maslennikov A. M., Popov R. A. Calculation of shallow folded shells from large-sized flat plates using a stiffness matrix. *Construction Design of Industrial Enterprises. Informational issue*, 1968, iss. 3, pp. 49–51 (in Russian).
17. Belostochnyy G. N. Analytical methods for integrating differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells. *Doklady Akademii voennykh nauk. Povolzhskoe regional'noe otделение* [Doklady of the Academy of Military Sciences. Volga Region Regional Office], 1999, iss. 1, pp. 14–26 (in Russian).
18. Belostochny G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular shallow shell of constant torsion in supersonic gas flow. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 397–408 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408), EDN: [DDFZPB](#)
19. Goldenweiser A. L. *Teoriya tonkikh uprugikh obolochek* [Theory of thin elastic shells]. Moscow, GITTL, 1953. 544 p. (in Russian).
20. Burmistrov E. F., Kossovich L. Yu., Maslov N. M. Asymptotic integration of the equations of



- thermoelasticity of a cylindrical shell of variable thickness. *Soviet Applied Mechanics*, 1976, vol. 12, pp. 1072–1075. DOI: [10.1007/BF00885058](https://doi.org/10.1007/BF00885058)
21. Kossovich L. Yu. Asymptotic integration of nonlinear equations of elasticity theory for a cylindrical shell. *Mekhanika deformiruemyykh sred* [Mechanics of Deformable Media], 1977, iss. 3, pp. 86–96 (in Russian). EDN: [UTEFDN](#)
  22. Wilde M. V., Kossovich L. Yu., Shevtsova Yu. V. Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 56–64 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64), EDN: [OYJJIZ](#)

Поступила в редакцию / Received 16.01.2023

Принята к публикации / Accepted 16.04.2023

Опубликована / Published 29.08.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 366–379

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 366–379

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379>

EDN: <https://elibrary.ru/HSKMLC>

Научная статья

УДК 539.3

## Статика и динамика сетчатой нанопластины с электрическим приводом

Е. Ю. Крылова<sup>✉</sup>, Д. А. Барышев, И. А. Трибис,  
Д. К. Андрейченко, И. В. Папкина

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Крылова Екатерина Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, [kat.krylova@bk.ru](mailto:kat.krylova@bk.ru), ORCID: [0000-0002-7593-0320](https://orcid.org/0000-0002-7593-0320), SPIN: [8951-1463](https://spini.ru/8951-1463), AuthorID: [722982](https://authorid.ru/722982)

**Барышев Дмитрий Андреевич**, студент механико-математического факультета, [baryshevaa@gmail.com](mailto:baryshevaa@gmail.com), SPIN: [4533-7007](https://spini.ru/4533-7007), AuthorID: [1292074](https://authorid.ru/1292074)

**Трибис Инна Александровна**, студент механико-математического факультета, [innatribis8670@gmail.com](mailto:innatribis8670@gmail.com), SPIN: [9971-3314](https://spini.ru/9971-3314), AuthorID: [1177955](https://authorid.ru/1177955)

**Андрейченко Дмитрий Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, [andreichenkodk@gmail.com](mailto:andreichenkodk@gmail.com), ORCID: [0000-0003-0525-984X](https://orcid.org/0000-0003-0525-984X), SPIN: [7323-1488](https://spini.ru/7323-1488), AuthorID: [63805](https://authorid.ru/63805)

**Папкина Ирина Владиславовна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, [ikravzova@mail.ru](mailto:ikravzova@mail.ru), ORCID: [0000-0003-4062-1437](https://orcid.org/0000-0003-4062-1437), SPIN: [2999-6160](https://spini.ru/2999-6160), AuthorID: [404435](https://authorid.ru/404435)

**Аннотация.** Объектом исследования является жестко заземленная по торцам гибкая пластина сетчатой структуры с электрическим приводом. К затвору, расположенному на некотором расстоянии под пластиной, и пластине подключен источник электродвижущей силы. Объемные ponderomotive силы электрического поля, действующие на пластину, моделируются силой Кулона. Уравнения движения элемента геометрически нелинейной пластины, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона на основании гипотез Кирхгофа. Рассматривается изотропный, однородный материал. Масштабные эффекты учтены посредством модифицированной моментной теории упругости. При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. Геометрическая нелинейность учтена по теории Т. фон Кармана. Сетчатая структура пластины моделировалась посредством континуальной теории Г. И. Пшеничного, что позволило заменить регулярную систему ребер сплошным слоем. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая нелинейные колебания рассматриваемой сетчатой пластины, сводилась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей второго порядка точности. Задача Коши решалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Математическая модель, алгоритм решения и программный комплекс верифицированы путем сравнения результатов расчета с натурным экспериментом. Проведен анализ эффекта втягивания в зависимости от геометрии сетки, а также анализ появления зон неустойчивости в зависимости от амплитуды и частоты динамической части электрического напряжения.

**Ключевые слова:** НЭМС, сетчатая пластина, электрическое поле, потеря устойчивости, собственные колебания, углеродная нанопластина, математическое моделирование

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00331, <https://rscf.ru/project/22-21-00331/>).





**Для цитирования:** Крылова Е. Ю., Барышев Д. А., Трибис И. А., Андрейченко Д. К., Папкова И. В. Статика и динамика сетчатой нанопластины с электрическим приводом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 366–379. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379), EDN: [HSKMLC](https://www.edn.ru/skmlc)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Statics and dynamics of an electrically driven mesh nanoplate

Е. Ю. Krylova<sup>✉</sup>, D. A. Baryshev, I. A. Tribis, D. K. Andreichenko, I. V. Papkova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Ekaterina Yu. Krylova**, [kat.krylova@bk.ru](mailto:kat.krylova@bk.ru), ORCID: [0000-0002-7593-0320](https://orcid.org/0000-0002-7593-0320), SPIN: [8951-1463](https://www.spin.ru/8951-1463), AuthorID: [722982](https://www.authorid.ru/722982)

**Dmitriy A. Baryshev**, [baryshevaa@gmail.com](mailto:baryshevaa@gmail.com), SPIN: [4533-7007](https://www.spin.ru/4533-7007), AuthorID: [1292074](https://www.authorid.ru/1292074)

**Inna A. Tribis**, [innatribis8670@gmail.com](mailto:innatribis8670@gmail.com), SPIN: [9971-3314](https://www.spin.ru/9971-3314), AuthorID: [1177955](https://www.authorid.ru/1177955)

**Dmitry K. Andreichenko**, [andreichenkodk@gmail.com](mailto:andreichenkodk@gmail.com), ORCID: [0000-0003-0525-984X](https://orcid.org/0000-0003-0525-984X), SPIN: [7323-1488](https://www.spin.ru/7323-1488), AuthorID: [63805](https://www.authorid.ru/63805)

**Irina V. Papkova**, [ikravzova@mail.ru](mailto:ikravzova@mail.ru), ORCID: [0000-0003-4062-1437](https://orcid.org/0000-0003-4062-1437), SPIN: [2999-6160](https://www.spin.ru/2999-6160), AuthorID: [404435](https://www.authorid.ru/404435)

**Abstract.** The study object is a flexible plate of a mesh structure with an electrical drive with clamped edges. A source of electromotive force is connected to the gate and the plate. The gate is located at some distance below the plate. The volumetric ponderomotive forces of the electric field acting on the plate are modeled by the Coulomb force. The motion equations of a geometrically nonlinear plate, boundary, and initial conditions are obtained from the Ostrogradsky–Hamilton variational principle based on Kirchhoff’s hypotheses. An isotropic, homogeneous material is considered. Scale effects are taken into account using modified couple stress theory. It is assumed that the fields of displacement and rotation are not independent. Geometric nonlinearity is taken into account according to the theory of T. von Karman. The mesh structure of the plate was modeled using the continuum theory of G. I. Pshenichny, which made it possible to replace the regular system of ribs with a continuous layer. The system of partial differential equations describing the nonlinear vibrations of the mesh plate under consideration was reduced to a system of ordinary differential equations using the finite difference method of second-order accuracy. The Cauchy problem was solved by the Runge–Kutta method of fourth-order accuracy. The mathematical model, solution algorithm, and software package were verified by comparing the calculation results with a full-scale experiment. An analysis of the static instability depending on the mesh geometry was carried out, as well as an analysis of the appearance of instability zones depending on the amplitude and frequency of the electrical voltage dynamic part.

**Keywords:** NEMS, mesh plate, electric field, loss of stability, natural oscillations, carbon nanoplate, mathematical modeling

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00331, <https://rscf.ru/project/22-21-00331/>).

**For citation:** Krylova E. Yu., Baryshev D. A., Tribis I. A., Andreichenko D. K., Papkova I. V. Statics and dynamics of an electrically driven mesh nanoplate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 366–379 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379), EDN: [HSKMLC](https://www.edn.ru/skmlc)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

На сегодняшний момент круг применения наноразмерных электромеханических систем (НЭМС) очень широк. НЭМС становятся необходимы в оптике, радиоэлектронике, робототехнике, медицине и многих других областях. В частности, такие конструкционные

элементы, как углеродные нанопластины, ложатся в основу полевых транзисторов нового поколения [1–3], сверхчувствительных датчиков давления [4, 5] и масс [6, 7]. Наряду с требованием уменьшения размеров технический прогресс ставит перед наукой задачу разработки приборов высокой чувствительности, способных воспринимать объект на уровне аттоньютонов и методов исследования особенностей режимов их работы. НЭМС представляют собой чувствительный элемент — балку, пластину или оболочку размером несколько нанометров с электрическим приводом. Посредством электрического напряжения возбуждаются колебания чувствительного элемента на гигагерцовом уровне, что и обеспечивает высокую чувствительность прибора.

Широкое использование наноразмерных пластин как конструктивных элементов во многих стратегических областях приводит к необходимости глубокого понимания их поведения под действием различного рода факторов с позиции механики и нелинейной динамики. Основной особенностью НЭМС и микроэлектромеханических систем (МЭМС) является так называемый эффект втягивания, который для многих приложений рассматриваются как отказ и, следовательно, избегается. Поскольку в переключателях и различного рода датчиках электростатическая неустойчивость часто используется в качестве основного приводного механизма, ее намеренно запускают. Таким образом, для проектирования и использования высокопроизводительного НЭМС- или МЭМС-устройства необходимо серьезное изучение данного эффекта и влияние на него так называемых мультифизических факторов (электрического, магнитного, теплового воздействия).

Для моделирования статики и динамики элементов механических систем наноразмеров классических континуальных моделей не хватает из-за невозможности учета размернозависимого поведения подобных объектов. Одно из ведущих мест среди теорий, позволяющих учитывать масштабные эффекты, занимает микрополярная (моментная) теория упругости [8, 9]. Именно ее выбирают многие авторы для всесторонних исследований пластинчато-оболочечных элементов МЭМС и НЭМС [10–20].

Построению математических моделей и исследованию особенностей поведения сплошных микро- и нанопластин и оболочек с электрическим приводом посвящено много работ [21–28], в которых исследуется влияние эффекта масштаба, начальных неправильностей, внешнего давления, геометрической нелинейности на амплитудно-частотные характеристики и устойчивость чувствительных элементов под действием как статического, так и динамического электрического напряжения.

На сегодняшний момент работ, посвященных исследованию сетчатых пластин с учетом масштабных эффектов, немного [29–32]. В данной работе на основании модифицированной моментной теории упругости построена математическая модель колебаний геометрически нелинейной сетчатой пластины в поле действия одного неподвижного электрода.

## 1. Постановка задачи

Предметом исследования является сетчатая пластина прямоугольной формы, занимающая в пространстве  $\mathbf{R}^3$  область  $\Omega = \{0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq b, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$ , на расстоянии  $g_0$  находится электрод (рис. 1). К электроду и пластине подключен источник электродвижущей силы с разностью потенциалов  $V(t)$ . Пластина прогибается в нормальном к электроду

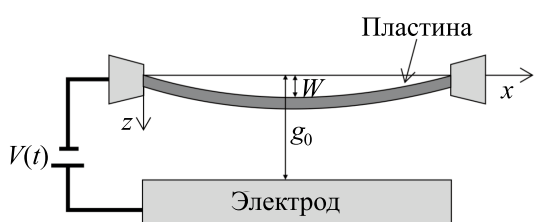


Рис. 1. Расчетная схема  
Fig. 1. Calculation scheme

направлении и при достижении баланса между электрическими силами и силами упругости приходит в равновесное состояние.

В основу математической модели положены следующие гипотезы и предположения:

- материал изотропный, однородный, подчиняющийся закону Гука;
- геометрическая нелинейность принята по теории Теодора фон Кармана [33];



- объемные пандеромоторные силы электрического происхождения моделируются силой Кулона;
- масштабные эффекты учитываются посредством модифицированной моментной теории упругости [34];
- пластина состоит из нескольких семейств густо расположенных ребер, имеющих разную ориентацию; толщина всех ребер одинаковая и соответствует толщине пластины; сетчатая структура пластины учтена по модели Г. И. Пшеничного [35];
- рассматриваются кинематические гипотезы Кирхгофа.

Отличные от нуля компоненты симметричного тензора полных деформаций с учетом принятых гипотез примут вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $w$  — прогиб,  $u, v$  — осевые смещения срединной поверхности пластины в направлениях  $x, y$  соответственно.

В работе построена неклассическая континуальная модель пластины. Материал пластины рассматривается как псевдоконтинуум Коссера со стесненным вращением частиц, в предположении, что поля перемещений и вращений не являются независимыми [34]. Таким образом, компоненты тензора градиента кривизны будут иметь вид

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \chi_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \chi_{yz} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), & \chi_{xz} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & \chi_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Определяющие соотношения для материала пластины с учетом модифицированной моментной теории упругости [34] примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy}], & x \leftrightarrow y, & & \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} e_{xy}, \\ m_{ij} &= \frac{El^2}{1+\nu} \chi_{ij}, & i, j &= x, y, z, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\sigma_{i,j}$  — компоненты тензора Коши,  $m_{i,j}$  — компоненты симметричного тензора момента высшего порядка,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластины,  $l$  — дополнительный независимый материальный параметр длины.

Уравнения движения сплошной микрополярной пластины с учетом электрических воздействий, граничные и начальные условия получим из энергетического принципа Остроградского–Гамильтона [36]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta W) dt = 0, \quad (4)$$

здесь  $K$  — кинетическая энергия,  $U$  — потенциальная энергия,  $W$  — работа внешних сил. С учетом микрополярной теории потенциальная энергия  $U$  в упругом теле записывается в виде

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} e_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) d\Omega, \\ K &= \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega, \\ \delta W &= \delta W_{\varepsilon} + \delta W_q + \delta W_{coul}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta W_\varepsilon = \int_\Omega \rho \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} \delta w d\Omega$ ,  $\delta W_q = \int_0^b \int_0^c q(x, y, t) \delta w dx dy$ ,  $\delta W_{coul} = \int_0^b \int_0^c F_{coul} \delta w dx dy$ ,  $\varepsilon$  — коэффициент диссипации среды, в которой работает пластина,  $\rho$  — плотность материала пластины,  $q(x, y, t)$  — внешняя нормальная распределенная нагрузка,  $F_{coul} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2(t)}{2(g_0 - w)^2}$  — сила Кулона, моделирующая воздействие электрического поля, возникшего вследствие подключения к электроду и пластине источника электродвижущей силы с разностью потенциалов  $V(t) = V_{st} + V_{din} \cos(\omega_p t)$ ,  $\omega_p$  — частота динамической части электрического напряжения,  $V_{st}$  и  $V_{din}$  — интенсивность соответственно статической и динамической частей электрического воздействия,  $\varepsilon_r$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная.

Исходная пластина имеет сетчатую структуру. Предположим, что она состоит из нескольких семейств густо расположенных ребер. Ребра жестко соединены между собой. Толщина всех ребер одинаковая. Согласно континуальной теории Г. И. Пшеничного [35] можно заменить регулярную систему ребер сплошным слоем, вследствие чего напряжения, моменты и моменты высших порядков, возникающие в эквивалентной гладкой пластине, будут связаны с напряжениями, моментами и моментами высших порядков в ребрах следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, & \sigma_{yy} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, & \sigma_{xy} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{xx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, & m_{yy} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{xx}^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, & m_{xz} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{yx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xy} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{xx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j \sin \phi_j}{a_j}, & m_{yz} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{yx}^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь  $n$  — количество семейств ребер в рассматриваемой сетчатой пластине,  $\delta_j$ ,  $a_j$ ,  $\varphi_j$ , — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью и осью ребра  $j$ -семейства соответственно (рис. 2).

Дополнительные условия статической эквивалентности исходной сетчатой пластины и эквивалентной ей сплошной получим с помощью метода множителей Лагранжа из условия достижения функционалом стационарных значений.

При построении функционала использовались выражения для потенциальной энергии деформации, выраженные через напряжения и моменты высших порядков.

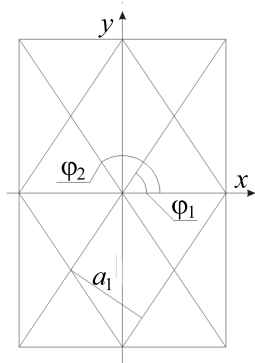


Рис. 2. Схема сетчатой структуры  
Fig. 2. Grid structure diagram

$$\begin{aligned} \{\sigma_x^j, m_{xx}^j\} &= \{\sigma_{xx}, m_{xx}\} \cos^2 \varphi_j + \{\sigma_{yy}, m_{yy}\} \sin^2 \varphi_j + \\ &+ \{\sigma_{xy}, m_{xy}\} \cos \varphi_j \sin \varphi_j, \\ m_{xy}^j &= m_{xz} \cos \varphi_j + m_{yz} \sin \varphi_j. \end{aligned} \quad (7)$$

Вводя обозначения

$$A_{sk} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j} \quad (8)$$

и учитывая (1)–(7), можно записать уравнения движения элемента пластины с учетом ее сетчатой структуры в перемещениях:

$$\begin{aligned} &\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ (A_{22}\nu + A_{04}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left( \frac{3A_{22}}{2} + \nu A_{04} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{31} + \nu A_{13}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ &\left. + \left( A_{31}\nu + \frac{3A_{13}}{2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - \frac{Ehl^2}{4(1+\nu)} \left[ \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + A_{11} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -A_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \Big] = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
 & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ (A_{40} + A_{22}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{40}\nu + A_{22}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{A_{31} + A_{22}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\
 & \quad \left. + (2A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{Ehl^2}{4(1+\nu)} \left[ A_{11} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - A_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
 & -\frac{Eh}{1+\nu} \left[ \frac{h^2(A_{40} + A_{22}\nu)}{12(1-\nu)} + \frac{A_{22}l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{Eh}{1+\nu} \left[ \frac{h^2(A_{04} + A_{22}\nu)}{12(1-\nu)} + \frac{A_{22}l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \\
 & \quad - \frac{Eh}{1+\nu} \left[ \frac{h^2(2A_{31} + A_{13}\nu)}{12(1-\nu)} - \frac{3(A_{31} - A_{13})l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - \\
 & \quad - \frac{Eh}{1+\nu} \left[ \frac{h^2(A_{40}\nu + 3A_{22} + A_{04}\nu)}{12(1-\nu)} - (3A_{22} - A_{40} - A_{04})l^2 \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
 & \quad - \frac{Eh}{1+\nu} \left[ \frac{h^2(2A_{13} + A_{31}\nu)}{12(1-\nu)} - \frac{3(A_{13} - A_{31})l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{A_{31}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\
 & \quad + (A_{40} + A_{22}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + (A_{40}\nu + A_{22}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{A_{31}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & \quad + (A_{22} + A_{04}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + (A_{22}\nu + A_{04}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 & \quad + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31} + A_{13}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & \quad + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & \quad + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (A_{31} + A_{13}\nu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
 & \quad \left. + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + q + F_{coul} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Обобщенные граничные условия, полученные из вариационного принципа, имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta w = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} \right\}_{\Gamma_x} = 0, \\
 & \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} \right\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad & \{M_{xx} - Y_{xy}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{2H - Y_{xx} + Y_{yy}\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta w}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad & \{2H - Y_{xx} + Y_{yy}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{M_{yy} - Y_{xy}\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \delta u = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ N_{xx} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zx}}{\partial y} \right\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \left\{ T - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zy}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zx}}{\partial x} \right\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad & \{Y_{xz}\}_{\Gamma_y} = 0; \quad \frac{\partial \delta u}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{zx}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{Y_{zy}\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \delta v = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ N_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zx}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zy}}{\partial y} \right\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \left\{ N_{yy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zy}}{\partial x} \right\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad & \{Y_{zx}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{Y_{zy}\}_{\Gamma_y} = 0; \quad \frac{\partial \delta v}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{zy}\}_{\Gamma_x} = 0. \tag{10}
 \end{aligned}$$



Здесь моменты и усилия обозначены следующим образом:

$$\begin{aligned} \{N_{xx}, M_{xx}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z^{\{0,1\}} dz, & Y_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xx} dz, & Y_{zx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{zx} dz, & x &\leftrightarrow y, \\ \{T, H\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z^{\{0,1\}} dz, & Y_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xy} dz. \end{aligned} \quad (11)$$

## 2. Методы решения

Рассматривалась пластина с граничными условиями жесткого закрепления:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= v(x, y, t) = w(x, y, t) = 0, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, c; \\ u(x, y, t) &= v(x, y, t) = w(x, y, t) = 0, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} &= \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b. \end{aligned} \quad (12)$$

Начальные условия брались нулевыми.

Система безразмеривалась посредством следующих параметров:  $x = c\bar{x}$ ,  $y = b\bar{y}$ ,  $z = g_0\bar{z}$ ,  $w = g_0\bar{w}$ ,  $u = \frac{g_0^2}{c\bar{u}}$ ,  $v = \frac{g_0^2}{b\bar{v}}$ ,  $h = g_0\bar{h}$ ,  $l = g_0\bar{l}$ ,  $t = \frac{cb}{g_0\sqrt{\frac{E}{\rho}}}\bar{t}$ ,  $\varepsilon = \frac{g_0}{cb\sqrt{\frac{E}{\rho}}}\bar{\varepsilon}$ , здесь черточкой обозначается безразмерная величина.

Система дифференциальных уравнений в частных производных сводилась по пространственным переменным к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей второго порядка точности. Задача Коши решалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

При решении задачи статики использовался метод установления [37]. Следуя процедуре данного метода, было выбрано значение коэффициента диссипации  $\varepsilon = 0,5$ . Далее для ряда значений постоянного электрического напряжения  $V_{st_i}$  была получена последовательность прогибов  $w_i$  для центральной точки пластины. На основе этих данных строились зависимости  $w(V_{st})$ .

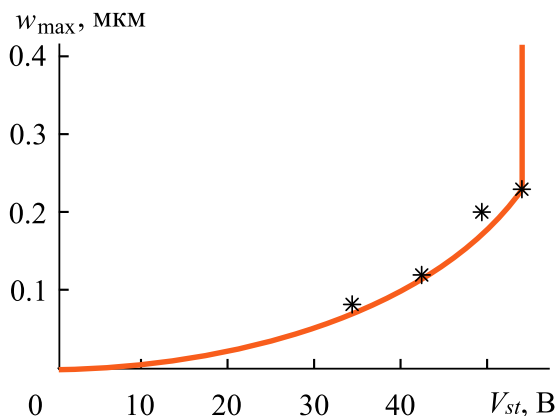


Рис. 3. Сравнение с натурным экспериментом  
Fig. 3. Comparison with a natural experiment

При решении задач численными методами возникает необходимость обоснования достоверности получаемых результатов. В работе [38] экспериментально измерено отклонение центра квадратной кремниевой жестко закрепленной по торцам пластины под действием электростатической силы разной интенсивности. На рис. 3 приведены экспериментальные данные (звездочки) и график зависимости  $w(V_{st})$  в центральной точке для кремниевой пластины с характеристиками:  $\nu = 0.06$ ,  $E = 169$  ГПа,  $g_0 = 3$  мкм,  $V_{st} = 60$  В,  $c = b = 250$  мкм. График  $w(V_{st})$  построен по результатам решения задачи (9), (12) в статической постановке без учета сетчатой структуры пластины методом конечных разностей с количеством точек разбиения  $n = m = 80$ . Результаты хорошо согласуются.

## 3. Численные результаты

Рассмотрим статическое поведение сетчатой линейной жестко закрепленной по торцам пластины в зависимости от интенсивности статического электрического напряжения в си-



ле Кулона. Все семейства ребер имеют одинаковую ширину, расстояние между ребрами всех семейств одинаковое, сетчатая структура имела вариации: 1)  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ; 2)  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ,  $\varphi_3 = 0^\circ$ ; 3)  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ,  $\varphi_3 = 0^\circ$ ,  $\varphi_4 = 90^\circ$ .

Параметры численного эксперимента:  $\bar{h} = 0.34$ ,  $\bar{\delta} = 0.154$ ,  $\bar{a} = 0.123$ ,  $\bar{c} = \bar{b}$ ,  $\bar{g}_0 = 1$ ,  $\bar{l} = \bar{h}$ ,  $E = 1$  ГПа,  $\varepsilon_r = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\varepsilon_0 = 1$ , таким образом  $F_{coul} = 0.708 \cdot V^2(t)$ .

Увеличение количества семейств ребер в геометрии сетки приводит к увеличению жесткости пластины. С увеличением семейств ребер значение электрического напряжения, при котором происходит эффект втягивания, увеличивается. Эффект втягивания для пластины (рис. 4), состоящей из трех семейств ребер (кривая 2) наступает при меньшем прогибе, чем для сетчатой пластины, состоящей из двух (кривая 1) и четырех (кривая 3) семейств ребер.

Рассмотрим изменение максимального прогиба под действием силы Кулона, при этом напряжение будет складываться из статической и динамической составляющих:  $V(t) = V_{st} + V_{din} \cos(\omega_p t)$ .

На рис. 5 представлены зависимости максимального прогиба от частоты  $\omega_p$  динамической части силы Кулона,  $V_{st} = 1.5$  В,  $V_{din} \in [0.0001; 0.7]$  В в случае сетки с четырьмя семействами ребер  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ,  $\varphi_3 = 0^\circ$ ,  $\varphi_4 = 90^\circ$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.154$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.123$ . При совпадении значений частоты собственных колебаний плас-

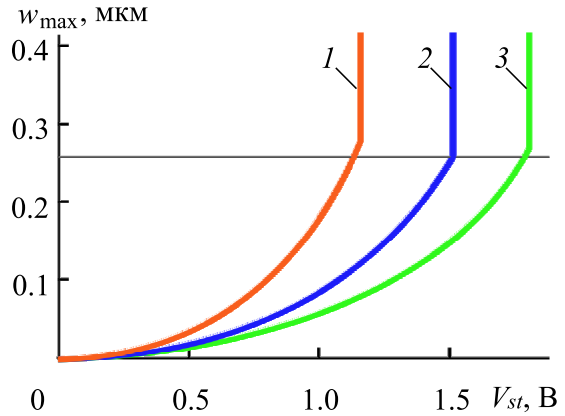


Рис. 4. Эффект втягивания пластины в зависимости от геометрии сетки: 1 —  $45^\circ \times 135^\circ$ ; 2 —  $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ$ ; 3 —  $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ \times 90^\circ$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Plate retraction effect depending on mesh geometry: 1 stands for  $45^\circ \times 135^\circ$ ; 2 stands for  $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ$ ; 3 stands for  $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ \times 90^\circ$  (color online)

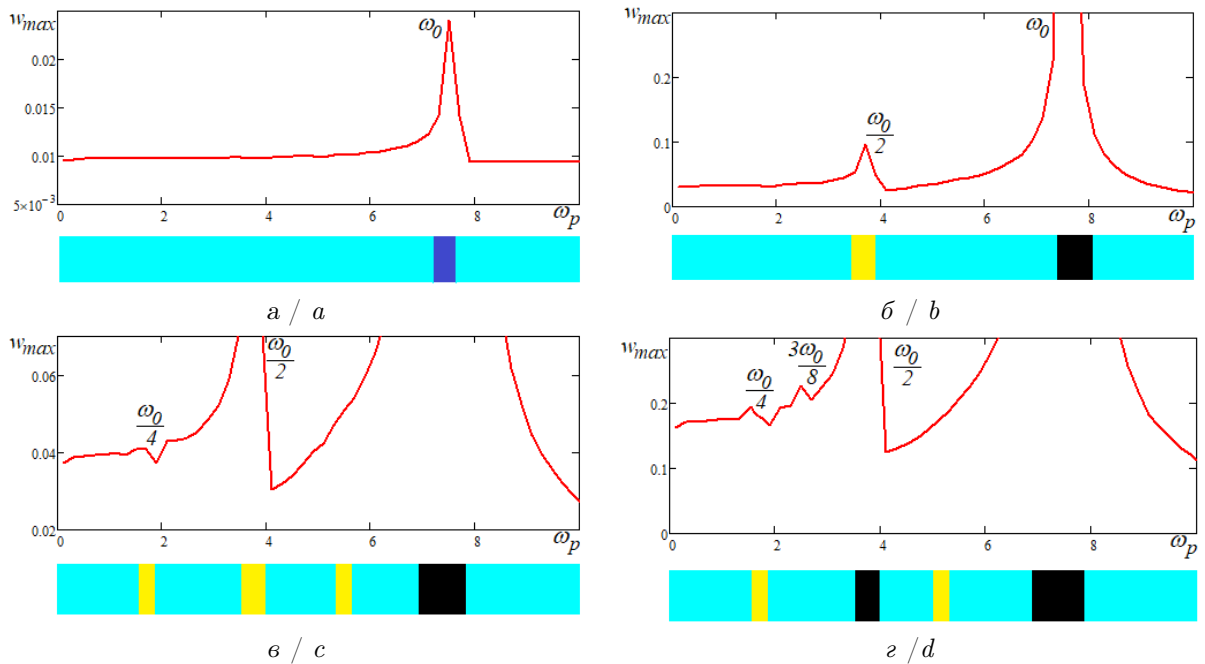


Рис. 5. Сценарий появления зон потери устойчивости  $V_{st} = 1.5$  В: а —  $V_{din} = 0.01$  В; б —  $V_{din} = 0.4$  В; в —  $V_{din} = 0.5$  В; г —  $V_{din} = 0.7$  В (цвет онлайн)

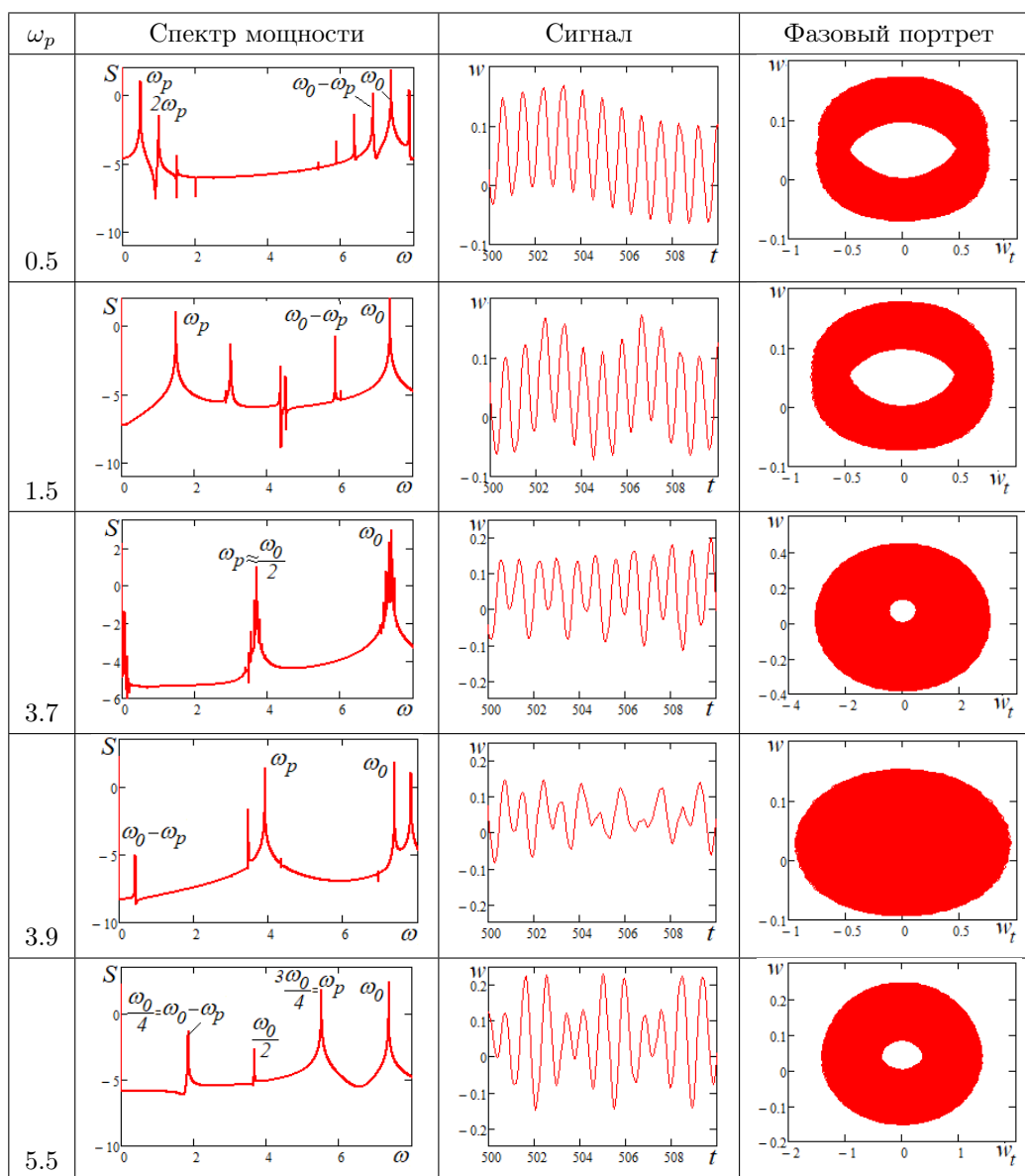
Fig. 5. Scenario of occurrence of zones of loss of stability  $V_{st} = 1.5$  В: а stands for  $V_{din} = 0.01$  В; б stands for  $V_{din} = 0.4$  В; в stands for  $V_{din} = 0.5$  В; г stands for  $V_{din} = 0.7$  В (color online)



тинки с частотой вынуждающей нагрузки максимальный прогиб резко увеличивается, что соответствует известному явлению резонанса. При увеличении значения напряжения динамической части нагрузки до  $V_{din} = 0.4$  В на графике  $w_{max}(V_{din})$  появляется еще одна зона, где происходит резкое увеличение прогиба. Данная зона соответствует частоте вынуждающих колебаний, равной половине частоты собственных колебаний ( $\omega_0/2$ ). При дальнейшем увеличении значения напряжения динамической части нагрузки до  $V_{din} = 0.7$  В на графике  $w_{max}(V_{din})$  при  $\omega_p = \omega_0/4$  и  $\omega_p = 3\omega_0/4$  появляются зоны, где происходит резкое изменение прогиба. Этот сценарий появления зон неустойчивости аналогичен сценарию Фейгенбаума. На рис. 5 под графиками приведены шкалы характера колебаний. Голубым цветом обозначены колебания, в которых присутствуют гармоники на частоте возбуждения, частоте собственных колебаний и их линейные комбинации. Желтым цветом обозначены колебания на частотах  $\omega_p/2^p$ , где  $p \in N$ . Черным цветом обозначены зоны, где максимальный прогиб больше  $0.25h$ .

В таблице приведены характеристики колебаний при различных значениях частоты динамической части силы Кулона  $\omega_p$ .

Характеристики колебаний  $V_{st} = 1.5$  В,  $V_{din} = 0.7$  В  
Table. Oscillation characteristics  $V_{st} = 1.5$  V,  $V_{din} = 0.7$  V





Анализ сигналов ( $V_{din} = 0.7B$ ) показывает, что при иррациональном отношении  $\omega_0/\omega_p$  или при отношении  $\omega_0/\omega_p = k$ , где  $k$  — нечетное число, спектр мощности демонстрирует две частоты,  $\omega_0$  и  $\omega_p$ , и их линейные комбинации. Например, при  $\omega_p = 0.5$  в спектре колебаний пластины присутствуют гармоники на частотах  $\omega_0$ ,  $\omega_p$ ,  $2\omega_p$ ,  $3\omega_p$ ,  $\omega_0 - \omega_p$ ,  $\omega_0 - 2\omega_p$ ,  $\omega_0 - 3\omega_p$  и т. д. Аналогичная картина наблюдается при других частотах  $\omega_p = 1.5$ ;  $\omega_p = 3.9$ , причем максимальный прогиб при любой частоте из перечисленных равен  $w = 0.173$ .

В случае, когда частота вынуждающей нагрузки  $\omega_p \approx \omega_0/2$ , максимальный прогиб значительно превышает значение прогиба, полученного при других частотах возбуждения (см. таблицу при  $\omega_p = 3.7$ ). Данный эффект хорошо виден на фазовом портрете. Аналогичный эффект получен при  $\omega_p \approx \omega_0/4$  и при  $\omega_p \approx 3\omega_0/4$  (см. таблицу при  $\omega_p = 5.5$ ).

При дальнейшем увеличении интенсивности динамической части электрического воздействия ( $V_{din} > 0.7B$ ) резкое увеличение прогиба можно наблюдать при частотах возбуждения, кратных частоте собственных колебаний ( $\omega_p \approx \omega_0/8$ ,  $\omega_p \approx \omega_0/16$  и т. д.).

Описанный сценарий появления зон динамической потери устойчивости качественно сохранялся для всех рассмотренных вариантов геометрий сеточной структуры пластины:

- 1)  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ;
- 2)  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\varphi_2 = 90^\circ$ ;
- 3)  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ,  $\varphi_3 = 0^\circ$ ;
- 4)  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ,  $\varphi_3 = 90^\circ$ ;
- 5)  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 135^\circ$ ,  $\varphi_3 = 0^\circ$ ,  $\varphi_4 = 90^\circ$ .

## Заключение

В работе построена математическая модель колебаний изотропной гибкой сетчатой нанопластины в поле действия одного неподвижного электрода. Модель дает возможность исследовать пластины с различной геометрией сетки, что может быть полезным при проектировании конструктивных элементов НЭМС и МЭМС. На основании полученной модели проведен анализ эффекта втягивания для пластин с различными вариантами геометрии сетки в условиях статического электрического поля. Полученные результаты хорошо согласуются с натурным экспериментом. Также показано, что в условиях воздействия нестационарного электрического поля зоны неустойчивости появляются по определенному сценарию: с увеличением значения амплитуды динамической части электрического напряжения потеря устойчивости наблюдается на частотах вынуждающей нагрузки, кратных частоте собственных колебаний пластины ( $\omega_p \approx \omega_0/2$ ,  $\omega_p \approx \omega_0/4$ ,  $\omega_p \approx \omega_0/8$  и т. д.).

## Список литературы

1. Nazaria A., Faezb R., Shamlooa H. Modeling comparison of graphene nanoribbon field effect transistors with single vacancy defect // Superlattices and Microstructures. 2016. Vol. 97. P. 28–45. DOI: [10.1016/j.spmi.2016.06.008](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2016.06.008)
2. Wong K. L., Chuan M. W., Hamzah A., Rusli S., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Performance metrics of current transport in pristine graphene nanoribbon field-effect transistors using recursive non-equilibrium Green's function approach // Superlattices and Microstructures. 2020. Vol. 145. Art. 106624. DOI: [10.1016/j.spmi.2020.106624](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2020.106624)
3. Chuan M. W., Riyadi M. A., Hamzah A., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Impact of phonon scattering mechanisms on the performance of silicene nanoribbon field-effect transistors // Results in Physics. 2021. Vol. 29. Art. 104714. DOI: [10.1016/j.rinp.2021.104714](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104714)
4. Liu Y., Li C., Shi X., Wu Z., Fan S., Wan Z., Han S. High-sensitivity graphene MOEMS resonant pressure sensor // ACS Applied Materials & Interfaces. 2023. Vol. 15, iss. 25. P. 30479–30485. DOI: [10.1021/acsami.3c04520](https://doi.org/10.1021/acsami.3c04520)
5. Chen Y., Liu S., Hong G., Zou M., Liu B., Luo J., Wang Y. Nano-optomechanical resonators for sensitive pressure sensing // ACS Applied Materials & Interfaces. 2022. Vol. 14, iss. 34. P. 39211–39219. DOI: [10.1021/acsami.2c09865](https://doi.org/10.1021/acsami.2c09865)
6. Shin D. H., Kim H., Kim S. H., Cheong H., Steeneken P. G., Joo C., Lee S. W. Graphene nano-



- electromechanical mass sensor with high resolution at room temperature // *iScience*. 2023. Vol. 26, iss. 2. Art. 105958. DOI: [10.1016/j.isci.2023.105958](https://doi.org/10.1016/j.isci.2023.105958)
7. Han G. R., Jiang J. W. Edge-mode-based graphene nanomechanical resonators for high-sensitivity mass sensor // *Europhysics Letters*. 2018. Vol. 123, iss. 3. Art. 36002. DOI: [10.1209/0295-5075/123/36002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/123/36002)
  8. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. Москва : Наука, 2008. 286 с.
  9. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. Vol. 89, iss. 4. P. 242–256. DOI: [10.1002/zamm.200800207](https://doi.org/10.1002/zamm.200800207)
  10. Norouzzadeh A., Ansari R., Darvizeh M. Isogeometric dynamic analysis of shells based on the nonlinear micropolar theory // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021. Vol. 135. Art. 103750. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750)
  11. Carrera E., Zozulya V. V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29, iss. 6. P. 773–795. DOI: [10.1080/15376494.2020.1793241](https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241)
  12. Sargsyan A., Sargsyan S. Geometrically nonlinear models of static deformation of micropolar elastic thin plates and shallow shells // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2021. Vol. 101, iss. 5. Art. e202000148. DOI: [10.1002/zamm.202000148](https://doi.org/10.1002/zamm.202000148)
  13. Zubov L. M., Kolesnikov A. M., Rudenko O. V. Exact solutions of nonlinear micropolar elastic theory for compressible solids // *Recent Developments in the Theory of Shells* / eds. H. Altenbach, J. Chróścielewski, V. Eremeyev, K. Wiśniewski. Cham : Springer, 2019. P. 771–798. (Advanced Structured Materials, vol. 110). DOI: [10.1007/978-3-030-17747-8\\_37](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_37)
  14. Varygina M. Numerical modeling of elastic waves in micropolar plates and shells taking into account inertial characteristics // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32, iss. 3. P. 761–774. DOI: [10.1007/s00161-018-0725-8](https://doi.org/10.1007/s00161-018-0725-8)
  15. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Крысько В. А. Математическое моделирование сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых цилиндрических панелей // *Известия вузов. Физика*. 2019. Т. 62, вып. 9 (741). С. 101–105. DOI: [10.17223/00213411/62/9/101](https://doi.org/10.17223/00213411/62/9/101)
  16. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Papkova I. V., Krysko V. A. Chaotic vibrations of size-dependent flexible rectangular plates // *Chaos*. 2021. Vol. 31, iss. 4. Art. 043119. DOI: [10.1063/5.0044630](https://doi.org/10.1063/5.0044630)
  17. Mazur O., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibrations and buckling of orthotropic small-scale plates with complex shape based on modified couple stress theory // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 100, iss. 11. Art. e202000009. DOI: [10.1002/zamm.202000009](https://doi.org/10.1002/zamm.202000009)
  18. Саркисян С. О. Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией «Сдвиг плюс поворот» // *Физическая мезомеханика*. 2020. Т. 23, вып. 4. С. 13–19. DOI: [10.24411/1683-805X-2020-14002](https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-14002), EDN: [USMFGI](https://www.edn.net/USMFGI)
  19. Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. Термоупругость микрополярных ортотропных тонких оболочек // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2013. № 3. С. 222–237. DOI: [10.15593/perm.mech/2013.3.222-237](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237), EDN: [RDKNJH](https://www.edn.net/RDKNJH)
  20. Partap G., Chugh N. Thermoelastic damping in microstretch thermoelastic rectangular plate // *Microsystem Technologies*. 2017. Vol. 23, iss. 12. P. 5875–5886. DOI: [10.1007/s00542-017-3350-8](https://doi.org/10.1007/s00542-017-3350-8)
  21. Ghayesh M. H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2018. Vol. 109. P. 220–234. DOI: [10.1016/j.ymssp.2017.11.043](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.043)
  22. Saghir S., Younis M. I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229, iss. 7. P. 2909–2922. DOI: [10.1007/s00707-018-2141-3](https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3)
  23. Лукин А. В., Попов И. А., Скубов Д. Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2017. Т. 17, вып. 6. С. 1107–1115. DOI: [10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115](https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115)
  24. Karami M., Kazemi A., Vatankhah R., Khosravifard A. Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate // *Journal of Vibration and Control*. 2020. Vol. 27, iss. 11–12. P. 1353–1369. DOI: [10.1177/1077546320940916](https://doi.org/10.1177/1077546320940916)
  25. Karimipour I., Beni Y. T., Akbarzadeh A. H. Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates // *Communications in Nonlinear Science*





- and Numerical Simulation. 2019. Vol. 78. Art. 104856. DOI: [10.1016/j.cnsns.2019.104856](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104856)
26. Karimipour I., Beni Y. T., Zeighampour H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2020. Vol. 42. Art. 407. DOI: [10.1007/s40430-020-02490-4](https://doi.org/10.1007/s40430-020-02490-4)
27. Sajadi B., Alijani F., Goosen H., van Keulen F. Effect of pressure on nonlinear dynamics and instability of electrically actuated circular micro-plates // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 91. P. 2157–2170. DOI: [10.1007/s11071-017-4007-y](https://doi.org/10.1007/s11071-017-4007-y)
28. Farokhi H., Ghayesh M. H. Nonlinear mechanics of electrically actuated microplates // International Journal of Engineering Science. 2018. Vol. 123. P. 197–213. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2017.08.017](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.08.017)
29. dell'Isola F., Steigman D. A two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics // Journal of Elasticity. 2015. Vol. 118, iss. 1. P. 113–125. DOI: [10.1007/s10659-014-9478-1](https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1)
30. Eremeyev V. A. A nonlinear model of a mesh shell // Mechanics of Solids. 2018. Vol. 53, iss. 4. P. 464–469. DOI: [10.3103/S002565441804012](https://doi.org/10.3103/S002565441804012)
31. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 48–59. DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59), EDN: MYYGLY
32. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 305–316. DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316), EDN: PFEDII
33. Kármán Th. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Mechanik / eds. F. Klein, C. Müller. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1907. P. 311–385. DOI: [10.1007/978-3-663-16028-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5)
34. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. DOI: [10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
35. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. Москва : Наука, 1982. 352 с.
36. Hamilton W. R. On conjugate functions, or algebraic couples // Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science; held at Edinburgh in 1834. London : J. Murray, 1835. Vol. 4. P. 519–523.
37. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005. Vol. 194, iss. 27–29. P. 3108–3126. DOI: [10.1016/j.cma.2004.08.005](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005)
38. Français O., Dufour I. Normalized abacus for the global behavior of diaphragm: Pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation // Journal of Modeling and Simulation of Microsystems. 1999. Vol. 1, iss. 2. P. 149–160.

## References

1. Nazaria A., Faezb R., Shamlooa H. Modeling comparison of graphene nanoribbon field effect transistors with single vacancy defect. *Superlattices and Microstructures*, 2016, vol. 97, pp. 28–45. DOI: [10.1016/j.spmi.2016.06.008](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2016.06.008)
2. Wong K. L., Chuan M. W., Hamzah A., Rusli S., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Performance metrics of current transport in pristine graphene nanoribbon field-effect transistors using recursive non-equilibrium Green's function approach. *Superlattices and Microstructures*, 2020, vol. 145, art. 106624. DOI: [10.1016/j.spmi.2020.106624](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2020.106624)
3. Chuan M. W., Riyadi M. A., Hamzah A., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Impact of phonon scattering mechanisms on the performance of silicene nanoribbon field-effect transistors. *Results in Physics*, 2021, vol. 29, art. 104714. DOI: [10.1016/j.rinp.2021.104714](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104714)
4. Liu Y., Li C., Shi X., Wu Z., Fan S., Wan Z., Han S. High-sensitivity graphene MOEMS resonant pressure sensor. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2023, vol. 15, iss. 25, pp. 30479–30485. DOI: [10.1021/acsami.3c04520](https://doi.org/10.1021/acsami.3c04520)
5. Chen Y., Liu S., Hong G., Zou M., Liu B., Luo J., Wang Y. Nano-optomechanical resonators for sensitive pressure sensing. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2022, vol. 14, iss. 34, pp. 39211–39219. DOI: [10.1021/acsami.2c09865](https://doi.org/10.1021/acsami.2c09865)



6. Shin D. H., Kim H., Kim S. H., Cheong H., Steeneken P. G., Joo C., Lee S. W. Graphene nano-electromechanical mass sensor with high resolution at room temperature. *iScience*, 2023, vol. 26, iss. 2, art. 105958. DOI: [10.1016/j.isci.2023.105958](https://doi.org/10.1016/j.isci.2023.105958)
7. Han G. R., Jiang J. W. Edge-mode-based graphene nanomechanical resonators for high-sensitivity mass sensor. *Europhysics Letters*, 2018, vol. 123, iss. 3, art. 36002. DOI: [10.1209/0295-5075/123/36002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/123/36002)
8. Eremeev V. A., Zubov L. M. *Mekhanika uprugikh obolochek* [Mechanics of elastic shells]. Moscow, Nauka, 2008. 286 p. (in Russian).
9. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 89, iss. 4, pp. 242–256. DOI: [10.1002/zamm.200800207](https://doi.org/10.1002/zamm.200800207)
10. Norouzzadeh A., Ansari R., Darvizeh M. Isogeometric dynamic analysis of shells based on the nonlinear micropolar theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2021, vol. 135, art. 103750. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750)
11. Carrera E., Zozulya V. V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2022, vol. 29, iss. 6, pp. 773–795. DOI: [10.1080/15376494.2020.1793241](https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241)
12. Sargsyan A., Sargsyan S. Geometrically nonlinear models of static deformation of micropolar elastic thin plates and shallow shells. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, vol. 101, iss. 5, art. e202000148. DOI: [10.1002/zamm.202000148](https://doi.org/10.1002/zamm.202000148)
13. Zubov L. M., Kolesnikov A. M., Rudenko O. V. Exact solutions of nonlinear micropolar elastic theory for compressible solids. In: Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V., Wiśniewski K. (eds.) *Recent Developments in the Theory of Shells*. Advanced Structured Materials, vol. 110. Springer, Cham, 2019, pp. 771–798. DOI: [10.1007/978-3-030-17747-8\\_37](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_37)
14. Varygina M. Numerical modeling of elastic waves in micropolar plates and shells taking into account inertial characteristics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2020, vol. 32, iss. 3, pp. 761–774. DOI: [10.1007/s00161-018-0725-8](https://doi.org/10.1007/s00161-018-0725-8)
15. Krylova E. Y., Papkova I. V., Krysko V. A. Mathematical modeling of complex oscillations of flexible micropolar mesh cylindrical panels. *Russian Physics Journal*, 2019, vol. 62, iss. 9, pp. 1649–1655. DOI: [10.1007/s11182-020-01887-x](https://doi.org/10.1007/s11182-020-01887-x), EDN: SSIMGX
16. Krysko V. A. Jr., Awrejcewicz J., Papkova I. V., Krysko V. A. Chaotic vibrations of size-dependent flexible rectangular plates. *Chaos*, 2021, vol. 31, iss. 4, art. 043119. DOI: [10.1063/5.0044630](https://doi.org/10.1063/5.0044630)
17. Mazur O., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibrations and buckling of orthotropic small-scale plates with complex shape based on modified couple stress theory. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, vol. 100, iss. 11, art. e202000009. DOI: [10.1002/zamm.202000009](https://doi.org/10.1002/zamm.202000009)
18. Sargsyan S. H. Discrete-continuous and continuous-moment models of graphene under in-plane deformation. *Physical Mesomechanics*, 2020, vol. 23, iss. 4, pp. 309–315. DOI: [10.1134/S1029959920040049](https://doi.org/10.1134/S1029959920040049), EDN: GTOCWT
19. Sargsyan S. H., Farmanyan A. J. Termouprugost' mikropolyarnykh ortotropnykh tonkikh obolochek. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, iss. 3, pp. 222–237 (in Russian). DOI: [10.15593/perm.mech/2013.3.222-237](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237), EDN: RDKNJH
20. Partap G., Chugh N. Thermoelastic damping in microstretch thermoelastic rectangular plate. *Microsystem Technologies*, 2017, vol. 23, iss. 12, pp. 5875–5886. DOI: [10.1007/s00542-017-3350-8](https://doi.org/10.1007/s00542-017-3350-8)
21. Ghayesh M. H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, vol. 109, pp. 220–234. DOI: [10.1016/j.ymssp.2017.11.043](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.043)
22. Saghir S., Younis M. I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 7, pp. 2909–2922. DOI: [10.1007/s00707-018-2141-3](https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3)
23. Lukin A. V., Popov I. A., Skubov D. Yu. Nonlinear dynamics and stability of microsystems engineering elements. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, iss. 6, pp. 1107–1115 (in Russian). DOI: [10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115](https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115)
24. Karami M., Kazemi A., Vatankeh R., Khosravifard A. Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate. *Journal of Vibration and Control*, 2020, vol. 27, iss. 11–12, pp. 1353–1369. DOI: [10.1177/1077546320940916](https://doi.org/10.1177/1077546320940916)



25. Karimipour I., Beni Y. T., Akbarzadeh A. H. Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 78, art. 104856. DOI: [10.1016/j.cnsns.2019.104856](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104856)
26. Karimipour I., Beni Y. T., Zeighampour H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, vol. 42, art. 407. DOI: [10.1007/s40430-020-02490-4](https://doi.org/10.1007/s40430-020-02490-4)
27. Sajadi B., Alijani F., Goosen H., van Keulen F. Effect of pressure on nonlinear dynamics and instability of electrically actuated circular micro-plates. *Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 91, pp. 2157–2170. DOI: [10.1007/s11071-017-4007-y](https://doi.org/10.1007/s11071-017-4007-y)
28. Farokhi H., Ghayesh M. H. Nonlinear mechanics of electrically actuated microplates. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 123, pp. 197–213. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2017.08.017](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.08.017)
29. dell’Isola F., Steigman D. A two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics. *Journal of Elasticity*, 2015, vol. 118, iss. 1, pp. 113–125. DOI: [10.1007/s10659-014-9478-1](https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1)
30. Eremeyev V. A. A nonlinear model of a mesh shell. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 4, pp. 464–469. DOI: [10.3103/S002565441804012](https://doi.org/10.3103/S002565441804012)
31. Krylova E. Y., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko V. A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 48–59 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59), EDN: [MYYGLY](https://www.edn.ru/1816-9791-2021-21-1-48-59)
32. Krylova E. Y., Papkova I. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Theory of vibrations of carbon nanotubes like flexible micropolar mesh cylindrical shells taking into account shift. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 305–316 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316), EDN: [PFEDII](https://www.edn.ru/1816-9791-2019-19-3-305-316)
33. Kármán Th. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: Klein F., Müller C. (eds.) *Mechanik*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1907, pp. 311–385. DOI: [10.1007/978-3-663-16028-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5)
34. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. DOI: [10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
35. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok* [Theory of thin elastic mesh shells and plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).
36. Hamilton W. R. On conjugate functions, or algebraic couples. *Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. London, J. Murray, 1835. Vol. 4, pp. 519–523.
37. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, iss. 27–29, pp. 3108–3126. DOI: [10.1016/j.cma.2004.08.005](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005)
38. Français O., Dufour I. Normalized abacus for the global behavior of diaphragm: Pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation. *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, 1999, vol. 1, iss. 2, pp. 149–160.

Поступила в редакцию / Received 13.11.2023

Принята к публикации / Accepted 11.12.2024

Опубликована / Published 29.08.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 380–390

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 380–390

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390>

EDN: <https://elibrary.ru/JCMIBQ>

Научная статья

УДК 517.98

## К вопросу о физическом смысле материальных констант гиперупругих моделей

С. А. Муслов<sup>1</sup>✉, П. Ю. Сухочев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Российский университет медицины, Россия, 127006, г. Москва, ул. Долгоруковская, д. 4

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

**Муслов Сергей Александрович**, кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики, [muslov@mail.ru](mailto:muslov@mail.ru), ORCID: [0000-0002-9752-6804](https://orcid.org/0000-0002-9752-6804), SPIN: [7213-2852](https://orcid.org/7213-2852), AuthorID: [185513](https://orcid.org/185513)

**Сухочев Павел Юрьевич**, научный сотрудник лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем, [P.Sukhochev@vrmsu.ru](mailto:P.Sukhochev@vrmsu.ru), ORCID: [0000-0002-8004-6011](https://orcid.org/0000-0002-8004-6011), SPIN: [7780-8694](https://orcid.org/7780-8694), AuthorID: [1004519](https://orcid.org/1004519)

**Аннотация.** Известна востребованность гиперупругих моделей деформирования при проектировании изделий технического назначения с использованием эластомерных материалов (резины и резиноподобных полиуретанов, силиконов и термоэластопластов ТЭП), реализующих высокие (до 500%) обратимые деформации и демпфирующую способность при циклической и ударной нагрузке. К таким изделиям относятся автомобильные шины, амортизаторы, передачи с гибкой связью, «compliance mechanisms» в робототехнике и т.п. Не менее актуальным и при этом социально значимым является применение теории гиперупругости с целью разработки имплантируемых материалов и устройств для общей, кардио- и пластической хирургии, включая замещение мягких биологических тканей (кожи, мышц, связок и т.д.) их функциональными аналогами в виде биосовместимых синтетических материалов. Но одной из нерешенных проблем механики гиперупругих моделей материалов остается физическая интерпретация их материальных констант. В данном сообщении материальные постоянные моделей сопоставлены с упругими модулями материалов ( $E_0$  и  $G_0$ ) в недеформированном состоянии. Верифицировано, что для неогуковской модели выполняется соотношение  $\mu = E_0/6$ , для двухпараметрической модели Муни–Ривлина —  $C_{01} + C_{10} = E_0/6$ . Установлено, что такая же формула справедлива и для 3-, 5- и 9-параметрических моделей Муни–Ривлина и полиномиальной модели второго порядка. Получено для модели Огдена  $3\mu\alpha = 2E_0$ , Йео  $C_1 = E_0/6$ , Веронда–Вестманн  $6(C_1C_2 + C_3) = E_0$ . Сделан вывод, что материальные постоянные являются показателями механической стабильности гиперупругих моделей вследствие условия Hill–Drucker. На примере биоматериала произведено сравнение результатов, полученных с помощью найденных формул, между собой и с показателями других моделей: линейной, билинейной и экспоненциальной. Установлено, что ряд моделей неудовлетворительно описывают поведение материала при малых деформациях.

**Ключевые слова:** гиперупругие модели, материальные постоянные, модули упругости

**Для цитирования:** Муслов С. А., Сухочев П. Ю. К вопросу о физическом смысле материальных констант гиперупругих моделей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 380–390. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390), EDN: [JCMIBQ](https://elibrary.ru/JCMIBQ)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## On the question of the physical interpretation of material constants of hyperelastic models

S. A. Muslov<sup>1✉</sup>, P. Yu. Sukhochev<sup>2</sup><sup>1</sup>Russian University of Medicine, 4 Dolgorukovskaya St., Moscow 127006, Russia<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, GSP-1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

Sergey A. Muslov, muslov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-9752-6804, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

Pavel Yu. Sukhochev, P.Sukhochev@vrmsu.ru, ORCID: 0000-0002-8004-6011, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

**Abstract.** There is a known demand for hyperelastic deformation models in the design of technical products using elastomeric materials (rubber and rubber-like polyurethanes, silicones, and TPE thermoplastic elastomers), which realize high (up to 500%) reversible deformations and damping capacity under cyclic and impact loading. Such products include car tires, shock absorbers, flexible gears, “compliance mechanisms” in robotics, etc. No less relevant and at the same time socially significant is the application of the theory of hyperelasticity for the purpose of developing implantable materials and devices for general, cardiac, and plastic surgery, including the replacement of soft biological tissues (skin, muscles, ligaments, etc.) with their functional analogues in the form of biocompatible synthetic materials. One of the unsolved problems in the mechanics of hyperelastic models remains the physical interpretation of their material constants. In this report, the material constants of the models are compared with the elastic moduli of the materials ( $E_0$  and  $G_0$ ) in the unstrained state. It is verified that for the neo-Hookean model, the relation  $\mu = E_0/6$  holds, for the 2-parameter Mooney–Rivlin model  $C_{01} + C_{10} = E_0/6$ . It has been established that the same formula is valid for the 3-, 5-, and 9-parameter Mooney–Rivlin models and the  $n$ th order polynomial model. For the Ogden model  $3\mu\alpha = 2E_0$ , Yeoh  $C_1 = E_0/6$ , Veronda–Westmann  $6(C_1C_2 + C_3) = E_0$ . Material constants are indicators of the mechanical stability of hyperelastic models due to the Hill–Drucker condition. Using the example of a biomaterial, the results obtained using the derived formulas are compared with each other and with the indicators of elastic models: linear, bilinear, and exponential. A number of models characterize cases of small deformations unsatisfactorily.

**Keywords:** hyperelastic models, material constants, elastic moduli

**For citation:** Muslov S. A., Sukhochev P. Yu. On the question of the physical interpretation of material constants of hyperelastic models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 380–390 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390), EDN: JCMIBQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

При малых изменениях аргумента изменения функции всегда линейны. В математической формулировке это следует из разложения функций в ряд Тейлора, где первый член разложения в бесконечной сумме степенных функций пропорционален приращению аргумента. Этому правилу удовлетворяет известный из механики закон Гука «*Ut tension sic vis*» («Какова сила, таково и растяжение»). Действительно, на начальном участке деформирования удлинение или сжатие пропорциональны величине вызвавшей их силы. Для большинства материалов при росте деформации пропорциональность деформации и силы с некоторого момента перестает выполняться. Упругая обратимая деформация сменяется неупругой с остаточной деформацией при разгрузке. Однако существуют материалы, которые способны испытывать гигантские (до 500%) деформации, а потом возвращаться к исходному состоянию или близкому к нему, аннигилируя при этом всю или почти всю приобретенную деформацию. Коэффициент Пуассона таких материалов близок к теоретическому пределу 0.5, а деформационное изменение объема ничтожно мало. Они называются



эластомерами, резиноподобными или гиперупругими, а деформации, которые они испытывают, — конечными, большими, нелинейно упругими. Строгое определение гиперупругой деформации весьма непростое и основано на тензорном анализе и параметрах специальных тензоров (Пиола – Кирхгоффа, Коши – Грина и др.) [1].

Большинство мягких тканей в организме человека (кожа, желчные протоки, кровеносные сосуды, ткани сердца, печени, желудка и других органов) также считаются гиперупругими. Изучение механических свойств биотканей сложнее, чем изучение традиционных конструкционных материалов. Основная проблема, возникающая при исследовании мягких биологических структур, — это выбор гиперупругой модели, которая бы наиболее точно предсказывала поведение биоматериала [2].

Каждой из семейства гиперупругих моделей (неогуковской, Муни – Ривлина, Арруда – Бойса, Огдена, Йео, Гента, полиномиальной и др.) посвящено достаточно большое число оригинальных работ и обзоров [3–8], и их число неуклонно растет (рис. 1).

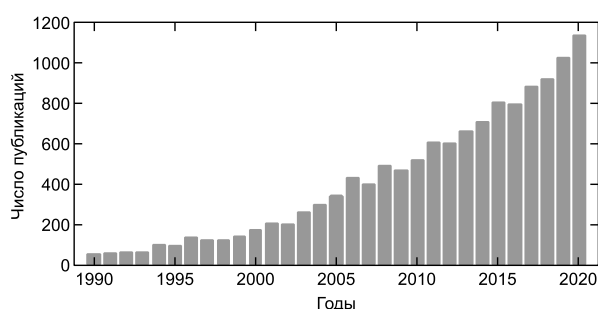


Рис. 1. Число публикаций по гиперупругим моделям, индексированным в БД SCOPUS по годам [6]  
Fig. 1. The number of publications on hyperelastic models indexed in the SCOPUS database by years [6]

Гиперупругие модели с полученными материальными константами, как правило, предназначаются для дальнейших исследований напряженно-деформированного состояния тел. Одной из нерешенных задач механики гиперупругих моделей остается физическая интерпретация их материальных констант. Известно, что они содержатся в разложении энергии деформации по степеням инвариантов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  тензора деформации — правого тензора деформации Коши – Грина — и измеряются в единицах плотности энергии ( $\text{Дж/м}^3 = \text{Па}$ ) или безразмерны.

По мнению авторов [9], для полимеров плотность сшивки определяется постоянной  $C_{10}$  2-параметрической модели Муни – Ривлина:

$$n = \frac{|C_{10}|}{RT},$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — абсолютная температура. Как известно, высокая степень сшивки улучшает механические свойства полимеров. Авторы также декларируют, что  $C_{10}$  отвечает за упругое поведение, а  $C_{01}$  — за отклонение от упругости, т. е. усиливает нелинейность. Дополнительные параметры 3-, 5- и 9-параметрических моделей инициируют появление на деформационных кривых точек перегиба.

Там же материальные постоянные рассмотрены авторами как индикаторы механической стабильности тел, что вытекает из неравенства

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} \geq 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно. В литературной форме критерий означает, что деформации должны расти при увеличении приложенного напряжения, а не наоборот. Критерий стабильности представляет собой также условие изменения внутренней энергии деформируемого тела, согласно которому приращение внутренней энергии при деформации не может быть отрицательным. В недеформированном состоянии и при малых деформациях ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 1$ ) оно равносильно неравенству

$$E_0 \geq 0,$$

где  $E_0$  — начальный модуль упругости материала.



Условие (1), разработанное R. Hill (1958 г.) [10] и D. C. Drucker (1959 г.) [11], предусматривает определенные ограничения на параметры моделей Муни–Ривлина при одноосной нагрузке, как указано в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Критерии стабильности моделей Муни–Ривлина  
Stability criteria of Mooney–Rivlin models

Модели Муни–Ривлина	Критерии
2-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{01} \geq 0$
3-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{11} \geq 0$
5-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{20} \geq 0, C_{20} + C_{02} + C_{11} \geq 0$
9-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{30} \geq 0, C_{02} \leq 0, C_{03} \leq 0,$ $C_{20} + C_{02} + C_{11} \geq 0, C_{30} + C_{03} + C_{12} + C_{21} \geq 0$

Действительно, для 2-параметрической модели при малых одноосных деформациях

$$\begin{aligned}\sigma &= 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) = 2C_{10} (1 + \varepsilon - (1 - 2\varepsilon)) + \\ &+ 2C_{01} (1 - (1 - 3\varepsilon)) = 2C_{10}(3\varepsilon) + 2C_{01}(3\varepsilon) = 6\varepsilon(C_{10} + C_{01}).\end{aligned}$$

Здесь учтено, что коэффициент деформации  $\lambda = \varepsilon + 1$  и  $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$  при  $\varepsilon \ll 1$ .

Отсюда получаем, что

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 6(C_{10} + C_{01}). \quad (2)$$

Вследствие несоблюдения постулата Hill–Drucker та или иная феноменологическая модель может не подходить для описания малых деформаций материала. Это нередко встречается в литературе при обработке результатов одноосного растяжения материалов, например, образцов биотканей позвоночной артерии [2] или надкостницы носа человека, как на рис. 2 (гиперупругие модели рассчитаны авторами статьи).

## Цель работы

Цель работы — определить физический смысл материальных постоянных гиперупругих моделей на основе расчетов начального модуля упругости  $E_0$ , сравнить численные результаты расчетов между собой и с соответствующими характеристиками упругих моделей на примере биоматериала.

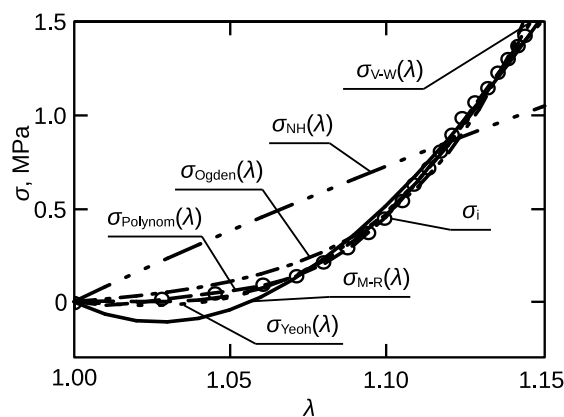


Рис. 2. Гиперупругие модели надкостницы носа человека:  $\sigma_{NH}$  — неогуксовская;  $\sigma_{M-R}$  — 2-параметрическая Муни–Ривлина при  $C_{10} + C_{01} = -1.35$  МПа;  $\sigma_{Ogden}$  — Огдена 1-го порядка;  $\sigma_{Yeoh}$  — Йео 3-го порядка;  $\sigma_{Polynom}$  — полиномиальной 2-го порядка;  $\sigma_{V-W}$  — Веронда–Вестманн. Здесь и на рис. 3 точками обозначены данные механических испытаний [12]

Fig. 2. Hyperelastic models of human nasal periosteum:  $\sigma_{NH}$  is neo-Hookean;  $\sigma_{M-R}$  is 2-parametric Mooney–Rivlin for  $C_{10} + C_{01} = -1.35$  MPa;  $\sigma_{Ogden}$  is Ogden of the 1st order;  $\sigma_{Yeoh}$  is Yeoh of the 3rd order;  $\sigma_{Polynom}$  is polynomial of the 2nd order;  $\sigma_{V-W}$  is Veronda–Westmann (V-W). The dots here and in Fig. 3 indicate the data of mechanical tests [12]



## Материалы и методы

Расчеты производились в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 (PTC Inc., США). В рамках интерпретации материальных постоянных гиперупругих моделей тел были исследованы пределы функций  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon) = \sigma'_\lambda(\lambda)$  при малых деформациях ( $\varepsilon \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 1$ ):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}.$$

Рассматривали одноосное растяжение несжимаемых гиперупругих тел. Численный расчет выполнен на примере надкостницы носа человека [12]. Как известно, надкостница состоит из соединительной ткани, образованной преимущественно коллагеновыми волокнами. Интерес к исследованию гиперупругих свойств данного биоматериала обусловлен популярностью сегодня эстетической пластической хирургии и имплантационной ринопластики, выполнение которой требует поиска и подбора механически совместимых с тканями носа замещающих материалов.

## Результаты и их обсуждение

### 1. Исследование пределов $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon) = \sigma'_\lambda(\lambda)$ гиперупругих моделей при малых деформациях (начального модуля упругости)

*Неогуковская модель материала* [13]. Самая простая, однопараметрическая модель, пролонгирует закон Гука в область больших деформаций. В отличие от линейно-упругих материалов, кривая напряжения-деформации неогуковского материала нелинейная. Неогуковская модель основана на статистической термодинамике сшитых полимерных цепей и может использоваться для пластмасс и резиноподобных материалов. Сшитые полимеры действуют неогуковским образом, потому что первоначально полимерные цепи могут перемещаться относительно друг друга при приложении напряжения. Однако в определенный момент полимерные цепи будут растянуты до максимальной величины, допускаемой ковалентными поперечными связями, и это вызовет резкое увеличение модуля упругости материала<sup>1</sup>. Напряжение в неогуковском несжимаемом ( $I_3 = 1$ ) материале определяется формулой

$$\sigma = 2\mu \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Вычисление предела обнаруживает, что (синтаксис Mathcad 15.0)

$$E(\mu) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, \mu) \rightarrow 6\mu,$$

откуда

$$\mu = \frac{E_0}{6}, \quad (3)$$

где  $E_0$  — начальный модуль упругости. Отметим, что для несжимаемых материалов, какими являются гиперупругие тела, модуль сдвига  $G = E/3$ , поэтому

$$2\mu = G.$$

*Модель Муни – Ривлина* [14, 15]. Модель Муни – Ривлина является дальнейшим развитием неогуковской модели и одним из наиболее распространенных видов потенциала энергии деформации [2]. При этом 2-параметрическая — наиболее удобная для анализа поскольку содержит наименьшее число параметров в семействе тел Муни – Ривлина.

<sup>1</sup>Неогуковское твердое тело – Neo-Hookean solid. URL: [https://ru.wikibrief.org/wiki/Neo-Hookean\\_solid](https://ru.wikibrief.org/wiki/Neo-Hookean_solid) (дата обращения: 12.08.2023).



Модель 2-параметрическая:

$$\sigma_{2p} = 2 \left( C_{10} - \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right).$$

В этом случае

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}, \quad (4)$$

т. е.

$$C_{01} + C_{10} = \frac{E_0}{6}, \quad (5)$$

что согласуется с формулой (2). Нетрудно видеть, что для модуля сдвига  $2(C_{01} + C_{10}) = G_0$ .

Модель 3-параметрическая:

$$\sigma_{3p} = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 6C_{11} \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right). \quad (6)$$

Аналогично 2-параметрической модели находим, что

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10},$$

т. е. для 3-параметрической модели снова имеем формулу (5).

Модель 5-параметрическая:

$$\begin{aligned} \sigma_{5p} = & 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 6C_{11} \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right) + \\ & + 4C_{20} \lambda \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 4C_{02} \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right). \end{aligned}$$

Точно такой же результат вычисления дают и для 5-параметрической модели:

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}.$$

Модель 9-параметрическая:

$$\begin{aligned} \sigma_{9p} = & 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 6C_{11} \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right) + \\ & + 4C_{20} \lambda \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 4C_{02} \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) + \\ & + 2C_{21} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 2\lambda^3 - 4\lambda + \frac{1}{\lambda^2} + 1 \right) + \\ & + 2C_{12} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 4\lambda^2 - \frac{5}{\lambda} - 3\lambda - 6 \right) + \\ & + 6C_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 6C_{03} \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right). \end{aligned}$$

Для самой многочисленной по числу параметров модели Муни – Ривлина также обнаруживается, что

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}, C_{21}, C_{12}, C_{30}, C_{03}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}.$$



Таким образом, для всех моделей Муни–Ривлина, независимо от числа параметров, справедливы формулы (5), (6), т. е. удвоенная сумма материальных постоянных  $C_{01}$  и  $C_{10}$  гиперупругих тел Муни–Ривлина представляет собой  $1/3$  модуля Юнга или модуль сдвига в недеформированном состоянии.

*Модель Огдена* [16]. Устанавливающим уравнением является

$$\sigma = \sum_{p=1}^n \mu_p \left( \lambda^{\alpha_p} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_p} \right).$$

Модель Огдена — феноменологическая модель, основывающаяся на главных относительных удлинениях в большей степени, чем на инвариантах деформаций. Для модели 1-го порядка устанавливающей функцией является

$$\sigma(\lambda, \mu, \alpha) := \mu \left( \lambda^\alpha - \lambda^{-\frac{\alpha}{2}} \right),$$

предел производной от которой при  $\lambda \rightarrow 1$  равен

$$E(\mu, \alpha) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, \mu, \alpha) \rightarrow \frac{3\mu\alpha}{2}.$$

Следовательно, для модели Огдена 1-го порядка

$$3\mu\alpha = 2E_0. \quad (7)$$

*Модель Йео* [17]. Модель  $n$ -порядка строится из соотношения

$$\sigma = 2\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n i C_i (I_1 - 3)^{i-1}.$$

В случае модели 3-го порядка

$$\sigma(\lambda, C_1, C_2, C_3) := 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( C_1 + 2C_2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 3C_3 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right)$$

и

$$E(C_1) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_1, C_2, C_3) \rightarrow 6C_1.$$

В итоге получаем

$$C_1 = \frac{E_0}{6}, \quad (8)$$

а модуль сдвига можно найти по формуле

$$G_0 = 2C_1.$$

*Полиномиальная модель 2-го порядка* [18]:

$$\begin{aligned} \sigma = & 2(\lambda - \lambda^{-2})(C_{10} + C_{01}\lambda^{-1} + 2C_{20}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + \\ & + 2\lambda^{-1}C_{02}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3) + 3C_{11}(\lambda - 1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-2})). \end{aligned}$$

Полиномиальная модель — это наиболее общий вариант записи потенциала энергии деформации. Она лежит в основе других известных моделей [2]. Например, модели Муни–Ривлина можно легко получить как частные случаи полиномиальной модели. Поэтому закономерно для полиномиальной модели

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}, \quad (9)$$





что соответствует формуле (4) для моделей Муни–Ривлина. Отметим, что полиномиальная модель — это феноменологическая модель, в основе которой используются 1-й и 2-й инварианты деформаций  $I_1$  и  $I_2$  [2].

Модель Веронда – Вестманн [19]:

$$\sigma = 2C_1C_2e^{C_2(\lambda^2+2\lambda^{-1}-3)}(\lambda - \lambda^{-2}) + 2C_3(1 - \lambda^{-3}).$$

Эта модель весьма часто применяется в исследованиях *in silico* биологических материалов [20, 21]. В иерархии гиперупругих моделей она обеспечила хорошее соответствие всем исследованным материалам в широком интервале деформаций. Предел производной функции  $\sigma(\varepsilon)$  для этой модели

$$E(C_1, C_2, C_3) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_1, C_2, C_3) \rightarrow 6C_3 + 6C_1C_2,$$

откуда следует

$$6(C_1C_2 + C_3) = E_0. \quad (10)$$

## 2. Сравнение результатов расчетов начального упругого модуля и прогностической способности гиперупругих моделей при малых деформациях

Представляет интерес сравнение численных результатов, полученных с помощью формул (3), (5), (7)–(10), между собой и с показателями упругих моделей (рис. 3): линейной (однофазной)  $\sigma = E\varepsilon$ , билинейной (двухфазной)  $\sigma = E_1\varepsilon + E_2(\varepsilon - \varepsilon_{cr})\Theta(\varepsilon_{cr})$  и экспоненциальной  $\sigma = a \cdot (\exp[b \cdot \varepsilon] - 1)$ , где  $E$  — модуль упругости в линейной модели,  $E_1, E_2$  — модули упругости в билинейной модели,  $\Theta$  — функция Хэвисайда,  $\varepsilon_{cr}$  — критическая деформация (для биологических тканей деформация, при которой эластиновый механизм сменяется коллагеновым),  $a$  и  $b$  — параметры экспоненциальной модели (представлена на рис. 3 сплошной линией). В качестве примера рассмотрены характеристики биоматериала — надкостницы носа (nasal periosteum) человека при малых деформациях, рассчитанные на основе опытных  $\sigma - \varepsilon$  данных [12].

Из результатов сравнения, приведенных в табл. 2, видно, что численные данные весьма сильно отличаются друг от друга. Наиболее близки между собой значения модулей упругости, рассчитанные в билинейной и экспоненциальной моделях, гиперупругих моделях Огдена и Веронда – Вестманн (в последних двух они одного порядка). По показателям к линейной модели наиболее близка гиперупругая неогуковская модель ( $E_0 = 6\mu = 7.948$  МПа), а к билинейной и экспоненциальной — модель Огдена ( $E_0 = 1.5\mu\alpha = 1.284$  МПа) и Веронда – Вестманн ( $E_0 = 6(C_1C_2 + C_3) = 0.621$  МПа).

Механическую нестабильность ( $E_0 < 0$ ) продемонстрировали модели 2-параметрическая Муни – Ривлина, Йео и полиномиальная, что подтверждают графики функций  $\sigma(\lambda)$  этих моделей при малых деформациях (см. рис. 2). Особенно явно наличие интервала нестабильности ( $\lambda = 1.00 \div 1.03$ ) выражено у модели Муни – Ривлина ( $6(C_{10} + C_{01}) = -8.094$  МПа), менее четко — у полиномиальной ( $6(C_{10} + C_{01}) = -5.074$  МПа) и модели Йео ( $C_1 = -1.311$  МПа).

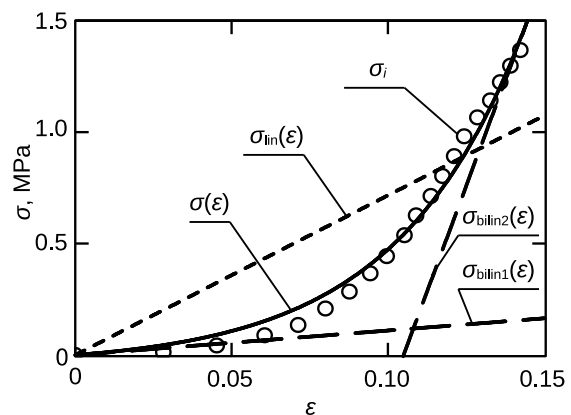


Рис. 3. Упругие модели надкостницы носа. Сплошной линией представлена экспоненциальная модель

Fig. 3. Elastic models of nasal periosteum. The solid line represents the exponential model



Таблица 2 / Table 2

Начальный модуль упругости различных моделей биоматериала  
Initial modulus of elasticity of different biomaterial models

Типы моделей		Модуль Юнга, МПа	
Упругие	Линейная	$E$	7.177
	Билинейная	$E_1$	1.10
	Экспоненциальная	$E_0$	1.10
Гиперупругие	Неогуковская	$E_0$	7.95
	Муни – Ривлина		–8.10
	Огдена		1.28
	Йео		–1.31
	Полиномиальная		–5.07
	Веронда – Вестманн		0.62

Таким образом, модели Муни – Ривлина, Йео и полиномиальная неточно описывают экспериментальную кривую тканей надкостницы носа на старте деформаций. Отметим, что во всем интервале деформаций полностью адекватно с точки зрения механической устойчивости проявили себя модели неогуксовская ( $\Delta = 0.276$ ,  $\delta = 27.81\%$ ,  $R = 0.898$ ), Огдена ( $\Delta = 0.053$ ,  $\delta = 6.35\%$ ,  $R = 0.995$ ) и Веронда – Вестманн ( $\Delta = 0.020$ ,  $\delta = 2.94\%$ ,  $R = 0.9992$ ), где параметры  $\Delta$  – стандартное отклонение,  $\delta$  – максимальная приведенная погрешность,  $R$  – коэффициент корреляции соответственно.

Комплекс этих результатов подтверждает тезис, согласно которому основная проблема, возникающая при исследовании гиперупругих тел, заключается в выборе модели, наиболее адекватно описывающей поведение материала.

## Выводы

1. Рассмотрена физическая интерпретация материальных постоянных наиболее распространенных гиперупругих моделей тел. Материальные постоянные моделей сопоставлены с упругими модулями материалов в недеформированном состоянии.

2. Верифицировано, что для неогуксовской модели  $\mu = E_0/6$ , для 2-параметрической модели Муни – Ривлина  $C_{01} + C_{10} = E_0/6$ . Установлено, что такая же формула справедлива, кроме того, для 3-, 5- и 9-параметрических моделей Муни – Ривлина и полиномиальной модели 2-го порядка. Для моделей Огдена  $3\mu\alpha = 2E_0$ , Йео  $C_1 = E_0/6$ , Веронда – Вестманн  $6(C_1C_2 + C_3) = E_0$ . Численные результаты расчетов  $E_0$  сопоставлены между собой и с показателями упругих моделей на примере биоматериала.

3. Материальные постоянные являются показателями механической стабильности гиперупругих моделей вследствие условия Hill – Drucker.

4. Отдельные гиперупругие модели неудовлетворительно характеризуют случаи малых деформаций. Адекватно прогнозируют механическое поведение исследованного биоматериала в широком интервале деформаций модели неогуксовская, Огдена и Веронда – Вестманн.

## Список литературы

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / пер. с англ. Ю. В. Немировского ; под ред. Ю. Н. Работнова. Москва : Мир, 1965. 455 с.
2. Шмурак М. И., Кучумов А. Г., Воронова Н. О. Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // Master's Journal. 2017. № 1. Р. 230–243. EDN: YUOPFB.
3. Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J. A review on material models for isotropic hyperelasticity // International Journal of Mechanical System Dynamics. 2021. Vol. 1, iss. 1. P. 71–88. DOI: [10.1002/msd2.12013](https://doi.org/10.1002/msd2.12013)



4. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data // Computational Mechanics. 2004. Vol. 34. P. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)
5. Zhao Z., Mu X., Du F. Modeling and verification of a new hyperelastic model for rubber-like materials // Mathematical Problems in Engineering. 2019. Vol. 2019. Art. 2832059. DOI: [10.1155/2019/2832059](https://doi.org/10.1155/2019/2832059)
6. Khaniki H. B., Ghayesh M. H., Chin R., Amabili M. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures // Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 110. P. 963–994. DOI: [10.1007/s11071-022-07700-3](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07700-3)
7. Payan Y., Ohayon J. Preface // Biomechanics of Living Organs: Hyperelastic Constitutive Laws for Finite Element Modeling. Elsevier, 2017. P. xxv–xxvi. DOI: [10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8](https://doi.org/10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8)
8. Hackett R. M. Hyperelasticity primer. Cham : Springer, 2018. 186 p. DOI: [10.1007/978-3-319-73201-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-73201-5)
9. Kumar N., Rao V. V. Hyperelastic Mooney – Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants // MIT International Journal of Mechanical Engineering. 2016. Vol. 6, iss. 1. P. 43–46.
10. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1958. Vol. 6, iss. 3. P. 236–249. DOI: [10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
11. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material // Journal of Applied Mechanics. 1959. Vol. 26, iss. 1. P. 101–106. DOI: [10.1115/1.4011929](https://doi.org/10.1115/1.4011929)
12. Zeng Y. J., Sun X. P., Yang J., Wu W., Xu X., Yan Y. P. Mechanical properties of nasal fascia and periosteum // Clinical Biomechanics. 2003. Vol. 18, iss. 8. P. 760–764. DOI: [10.1016/S0268-0033\(03\)00136-0](https://doi.org/10.1016/S0268-0033(03)00136-0)
13. Иванов Д. В., Фомкина О. А. Определение постоянных для моделей нео-Гука и Муни – Ривлина по результатам экспериментов на одноосное растяжение // Математика. Механика. 2008. Вып. 10. С. 114–117. EDN: [URIZIV](https://www.edn.ru/uriziv/)
14. Mooney M. A theory of large elastic deformations // Journal of Applied Physics. 1940. Vol. 11, iss. 9. P. 582–592. DOI: [10.1063/1.1712836](https://doi.org/10.1063/1.1712836)
15. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials // Collected Papers of R. S. Rivlin / eds. G. I. Barenblatt, D. D. Joseph. New York, NY, Springer, 1997. P. 120–142. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_10)
16. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data // Computational Mechanics. 2004. Vol. 34, iss. 6. P. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber // Rubber Chemistry and Technology. 1993. Vol. 66, iss. 5. P. 754–771. DOI: [10.5254/1.3538343](https://doi.org/10.5254/1.3538343)
18. Rivlin R. S. Some applications of elasticity theory to rubber engineering // Collected Papers of R. S. Rivlin / eds. G. I. Barenblatt, D. D. Joseph. New York, NY, Springer, 1997. P. 9–16. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_2)
19. Veronda D. R., Westmann R. A. Mechanical characterizations of skin-finite deformations // Journal of Biomechanics. 1970. Vol. 3, iss. 1. P. 111–124. DOI: [10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
20. Муслов С. А., Перцов С. С., Арутюнов С. Д. Физико-механические свойства биологических тканей / под ред. О. О. Янушевича. Москва : Практическая медицина, 2023. 456 с.
21. Муслов С. А., Перцов С. С., Чижмаков Е. А., Асташина Н. Б., Никитин В. Н., Арутюнов С. Д. Упругая линейная, билинейная, нелинейная экспоненциальная и гиперупругие модели кожи // Российский журнал биомеханики. 2023. Т. 27, № 3. С. 89–103. DOI: [10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07](https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07), EDN: [QKAJEL](https://www.edn.ru/qkajel/)

## References

1. Green A., Adkins J. *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Clarendon Press, 1960. 348 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1965. 455 p.).
2. Shmurak M. I., Kuchumov A. G., Voronova N. O. Hyperelastic models analysis for description of soft human tissues behavior. *Master's Journal*, 2017, iss. 1, pp. 230–243 (in Russian). EDN: [YUOPFB](https://www.edn.ru/yuopfb/)
3. Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J. A review on material models for isotropic hyperelasticity. *International Journal of Mechanical System Dynamics*, 2021, vol. 1, iss. 1, pp. 71–88. DOI: [10.1002/msd2.12013](https://doi.org/10.1002/msd2.12013)
4. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 2004, vol. 34, pp. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)



5. Zhao Z., Mu X., Du F. Modeling and verification of a new hyperelastic model for rubber-like materials. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, vol. 2019, art. 2832059. DOI: [10.1155/2019/2832059](https://doi.org/10.1155/2019/2832059)
6. Khaniki H. B., Ghayesh M. H., Chin R., Amabili M. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 110, pp. 963–994. DOI: [10.1007/s11071-022-07700-3](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07700-3)
7. Payan Y., Ohayon J. Preface. In: *Biomechanics of Living Organs: Hyperelastic Constitutive Laws for Finite Element Modeling*. Elsevier, 2017, pp. xxv–xxvi. DOI: [10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8](https://doi.org/10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8)
8. Hackett R. M. *Hyperelasticity primer*. Cham, Springer, 2018. 186 p. DOI: [10.1007/978-3-319-73201-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-73201-5)
9. Kumar N., Rao V. V. Hyperelastic Mooney–Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants. *MIT International Journal of Mechanical Engineering*, 2016, vol. 6, iss. 1, pp. 43–46.
10. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1958, vol. 6, iss. 3, pp. 236–249. DOI: [10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
11. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, vol. 26, iss. 1, pp. 101–106. DOI: [10.1115/1.4011929](https://doi.org/10.1115/1.4011929)
12. Zeng Y. J., Sun X. P., Yang J., Wu W., Xu X., Yan Y. P. Mechanical properties of nasal fascia and periosteum. *Clinical Biomechanics*, 2003, vol. 18, iss. 8, pp. 760–764. DOI: [10.1016/S0268-0033\(03\)00136-0](https://doi.org/10.1016/S0268-0033(03)00136-0)
13. Ivanov D. V., Fomkina O. A. Determination of constants for neo-Hooke and Mooney–Rivlin models based on uniaxial tension experiments. *Mathematics. Mechanics*, 2008, iss. 10, pp. 114–117 (in Russian). EDN: [UIRZIV](https://www.edn.ru/uirziv)
14. Mooney M. A theory of large elastic deformations. *Journal of Applied Physics*, 1940, vol. 11, iss. 9, pp. 582–592. DOI: [10.1063/1.1712836](https://doi.org/10.1063/1.1712836)
15. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. In: Barenblatt G. I., Joseph D. D. (eds.) *Collected Papers of R. S. Rivlin*. New York, NY, Springer, 1997, pp. 120–142. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_10)
16. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 2004, vol. 34, iss. 6, pp. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 1993, vol. 66, iss. 5, pp. 754–771. DOI: [10.5254/1.3538343](https://doi.org/10.5254/1.3538343)
18. Rivlin R. S. Some applications of elasticity theory to rubber engineering. In: Barenblatt G. I., Joseph D. D. (eds.) *Collected Papers of R. S. Rivlin*. New York, NY, Springer, 1997, pp. 9–16. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_2)
19. Veronda D. R., Westmann R. A. Mechanical characterizations of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 1970, vol. 3, iss. 1, pp. 111–124. DOI: [10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
20. Muslov S. A., Pertsov S. S., Arutyunov S. D. *Fiziko-mekhanicheskie svoystva biologicheskikh tkaney* [Physical and mechanical properties of biological tissues]. Ed. by O. O. Yanushevich. Moscow, Prakticheskaya meditsina, 2023. 456 p. (in Russian).
21. Muslov S. A., Pertsov S. S., Chijhnikov E. A., Astashina N. B., Nikitin V. N., Arutyunov S. D. Elastic linear, bilinear, nonlinear exponential and hyperelastic skin models. *Russian Journal of Biomechanics*, 2023, vol. 27, iss. 3, pp. 89–103 (in Russian). DOI: [10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07](https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07), EDN: [QKAJEL](https://www.edn.ru/qkajel)

Поступила в редакцию / Received 20.01.2024

Принята к публикации / Accepted 20.03.2024

Опубликована / Published 29.08.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 391–405

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 391–405

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-391-405>

EDN: <https://elibrary.ru/MQEXGM>

Научная статья

УДК 539.376:621.787

## Влияние геометрической формы надреза на релаксацию остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре при термоэкспозиции

В. П. Радченко, В. Е. Глебов<sup>✉</sup>

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

**Радченко Владимир Павлович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, [radchenko.vp@samgtu.ru](mailto:radchenko.vp@samgtu.ru), ORCID: [0000-0003-4168-9660](https://orcid.org/0000-0003-4168-9660), SPIN: [1823-0796](https://spin.id.au/1823-0796), AuthorID: [113673](https://authorid.ru/113673)

**Глебов Виктор Евгеньевич**, аспирант, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, [glebov.ve@samgtu.ru](mailto:glebov.ve@samgtu.ru), ORCID: [0000-0003-4841-9786](https://orcid.org/0000-0003-4841-9786), SPIN: [8660-9105](https://spin.id.au/8660-9105), AuthorID: [1142418](https://authorid.ru/1142418)

**Аннотация.** Предложен метод расчета релаксации остаточных напряжений при высокотемпературной ползучести после опережающего поверхностного пластического деформирования сплошного цилиндра с надрезами квадратного и V-образного профилей. Выполнена серия параметрических расчетов для цилиндрических образцов из сплава ЭИ698 длиной 20 мм и радиусом 3.76 мм при различных геометрических параметрах надрезов: глубине {0.1; 0.3} мм для квадратного надреза и глубине {0.1; 0.3} мм при углах раскрытия {1°, 5°, 15°} для V-образного надреза. Установлено, что расчет полей остаточных напряжений после нанесения надрезов на упрочненный цилиндрический образец требует применения упругопластической постановки задачи. При моделировании релаксации остаточных напряжений при температуре 700 °С в течение 100 ч. использовался закон установившейся ползучести. Проведен параметрический анализ влияния геометрических характеристик надрезов на процесс релаксации напряжений. Результаты показывают, что после полного цикла нагружения «упрочняющая обработка при 20 °С — температурная нагрузка (нагрев) до 700 °С — ползучесть в течение 100 ч. при 700 °С — температурная разгрузка (охлаждение) до 20 °С», несмотря на релаксацию, сохраняются значительные величины сжимающих остаточных напряжений, что подтверждает эффективность поверхностного пластического упрочнения для деталей с исследуемыми типами надрезов в условиях высокотемпературной ползучести.

**Ключевые слова:** сплошной цилиндр, поверхностное пластическое упрочнение, надрезы квадратной и V-образной геометрической формы, остаточные напряжения, термоэкспозиция, высокотемпературная ползучесть, релаксация напряжений

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00434, <https://rscf.ru/project/23-29-00434/>).

**Для цитирования:** Радченко В. П., Глебов В. Е. Влияние геометрической формы надреза на релаксацию остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре при термоэкспозиции // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 391–405. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-391-405](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-391-405), EDN: [MQEXGM](https://elibrary.ru/MQEXGM)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)





Article

## The effect of the geometric shape of an incision on the relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder during thermal exposure

V. P. Radchenko, V. E. Glebov✉

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

Vladimir P. Radchenko, radchenko.vp@samgtu.ru, ORCID: 0000-0003-4168-9660, SPIN: 1823-0796, AuthorID: 113673

Victor E. Glebov, glebov.ve@samgtu.ru, ORCID: 000-0003-4841-9786, SPIN: 8660-9105, AuthorID: 1142418

**Abstract.** A computational method is proposed for predicting residual stress relaxation during high-temperature creep following prior surface plastic deformation of solid cylinders with square and V-shaped notches. A series of parametric simulations was performed for cylindrical specimens made of EI698 alloy (20 mm length, 3.76 mm radius) with various notch geometries: depths of {0.1;0.3} mm for square notches, and depths of {0.1;0.3} mm with opening angles of {1°, 5°, 15°} for V-notches. The study demonstrates that residual stress field calculations after notching a strengthened cylindrical specimen require an elastoplastic formulation. The steady-state creep law was employed to simulate residual stress relaxation at 700 °C over 100 hours. A parametric analysis of notch geometry effects on stress relaxation was conducted. Results indicate that after the complete loading cycle “hardening treatment at 20 °C — thermal loading (heating) to 700 °C — 100-hour creep at 700 °C — thermal unloading (cooling) to 20 °C”, despite relaxation, significant compressive residual stresses remain. This confirms the effectiveness of surface plastic strengthening for components with the investigated notch types under high-temperature creep conditions.

**Keywords:** solid cylinder, surface plastic deformation hardening, square and V-profile notches, residual stresses, thermal exposure, high-temperature creep, stress relaxation

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00434, <https://rscf.ru/project/23-29-00434/>).

**For citation:** Radchenko V. P., Glebov V. E. The effect of the geometric shape of an incision on the relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder during thermal exposure. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 391–405 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-3-391-405, EDN: MQEXGM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Актуальной проблемой современного машиностроения и аэрокосмической техники является повышение эксплуатационного ресурса и надежности конструктивных элементов. Одним из эффективных способов решения данной задачи в указанных отраслях промышленности выступает технология поверхностного пластического деформирования (ППД) [1–6]. Применение методов данного класса позволяет существенно улучшить прочностные характеристики, усталостную долговечность и трибологические свойства материалов, что в конечном итоге повышает надежность и срок службы конструкций [2, 3, 5, 7–20]. Наряду с традиционными методами ППД, в последние годы активно развиваются альтернативные технологии упрочнения, включая химико-термические методы [21, 22], кавитационную и лазерную обработку [14, 16], термопластическое упрочнение [23], а также комбинированные методики [16, 24, 25]. Физико-механическая сущность положительного эффекта ППД и родственных технологий заключается в формировании в поверхностном слое материала остаточных пластических деформаций, создающих поле сжимающих остаточных напряжений, которые препятствуют зарождению и развитию микроразрушений.



Многие конструкционные элементы, подвергнутые ППД, эксплуатируются в условиях повышенных температур, когда проявляются реологические свойства материала и развиваются процессы ползучести, приводящие к релаксации сжимающих остаточных напряжений. Данное явление подробно исследовано в работах [12, 20, 26–33], где решены задачи расчета релаксации напряжений для цилиндрических деталей при различных видах нагружения. Однако проблема релаксации напряжений в цилиндрических деталях с концентраторами напряжений (технологическими надрезами или эксплуатационными дефектами) остается недостаточно изученной, несмотря на ее существенное теоретическое и практическое значение. Исключение составляет исследование [34], в котором разработан метод расчета релаксации остаточных напряжений при ползучести для цилиндрической детали с надрезами полукруглого профиля после опережающего ППД, суть которого заключается в нанесении надрезов на уже упрочненный образец. Настоящая работа продолжает исследования в данном направлении и посвящена анализу релаксации остаточных напряжений при высокотемпературной экспозиции для цилиндров с надрезами квадратного и V-образного профиля.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрический образец, боковая поверхность которого подверглась процедуре опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД): сначала выполняется упрочняющая обработка, а затем на боковую поверхность цилиндра наносится круговой надрез (концентратор напряжений) квадратной или V-образной формы (рис. 1). Цель исследования — анализ релаксации полей остаточных напряжений при высокотемпературной ползучести в присутствии указанных концентраторов напряжений.

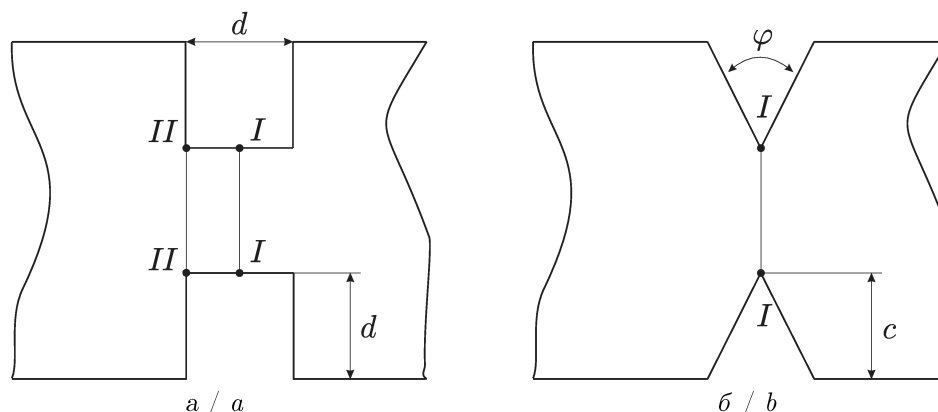


Рис. 1. Схематическое изображение профилей надрезов на поверхности цилиндра: а — квадратного; б — V-образного

Fig. 1. Schematic representation of the notch profiles on the cylinder surface: a is square; b is V-shaped

Вследствие физической нелинейности уравнений ползучести и геометрической нерегулярности задачи, обусловленной наличием концентраторов напряжений, решение осуществлялось численными методами. Исследование проводилось методом конечных элементов (МКЭ) для цилиндрического образца из сплава ЭИ698 со следующими параметрами.

Геометрические характеристики образца: длина  $L = 20$  мм, радиус  $a = 3.76$  мм.

Параметры надрезов квадратного профиля: глубина  $d = \{0.1; 0.3\}$  мм.

Параметры надрезов V-образного профиля: глубина  $c = \{0.1; 0.3\}$  мм, угол раскрытия  $\varphi = \{1^\circ, 5^\circ, 15^\circ\}$ , радиус скругления вершины 10 мкм.

Механические характеристики материала: модуль упругости  $E_0 = 203$  ГПа при температуре  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $E_1 = 152$  ГПа при  $T_1 = 700^\circ\text{C}$ ; коэффициент Пуассона  $\mu = 1/3$  (не зависит от температуры).

Условия нагружения: температура выдержки  $T_1 = 700^\circ\text{C}$ , длительность выдержки 100 ч.

## 2. Восстановление полей остаточного напряжения и пластических деформаций в цилиндрах с концентраторами напряжений после ОППД

Вначале рассмотрим метод реконструкции напряженно-деформированного состояния (НДС) после ППД в гладком цилиндре (без надрезов) при температуре  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Используется феноменологический подход, описанный в работе [28], основанный на следующих соотношениях:

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{b^2}\right), \quad (1)$$

$$\sigma_r(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \frac{b\sqrt{\pi}}{2r} \left[ \operatorname{erf}(a/b) - \operatorname{erf}\left(\frac{a-r}{b}\right) \right], \quad (2)$$

$$q_\theta(r) = \frac{1-2\mu}{E_0(1+\mu)r^{\frac{3}{1+\mu}}} \int_0^r z^{\frac{2-\mu}{1+\mu}} [\sigma_r(z) + 2\sigma_\theta(z)] dz - \frac{1}{E} [(1-\mu)\sigma_\theta(r) - \mu\sigma_r(r)], \quad (3)$$

$$q_z = q_\theta, \quad q_r = -2q_\theta, \quad (4)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a r \left\{ q_z(r) - \frac{\mu}{E_0} [\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)] \right\}, \quad (5)$$

$$\sigma_z(r) = E_0(\varepsilon_z^0 - q_z(r)) + \mu(\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)), \quad r \in [0, a]. \quad (6)$$

В уравнениях (1)–(6) приняты следующие обозначения:  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  — диагональные (нормальные) компоненты тензора остаточного напряжения (ОН);  $q_r, q_\theta, q_z$  — соответствующие им диагональные компоненты тензора пластических деформаций (ПД). Экспериментальные исследования [35] подтверждают, что недиагональные компоненты тензора ОН на порядок меньше нормальных компонент и их влиянием можно пренебречь.

Для цилиндрического образца из сплава ЭИ698 с заданными геометрическими параметрами экспериментальная зависимость  $\sigma_\theta(h) = \sigma_\theta(a-r)$  и ее аппроксимация по формуле (1) с параметрами  $\sigma_0 = 11.6$  МПа,  $\sigma_1 = 611.6$  МПа,  $b = 0.08$  мм представлены на рис. 2. Остальные компоненты тензоров ОН и ПД определяются по формулам (2)–(6).

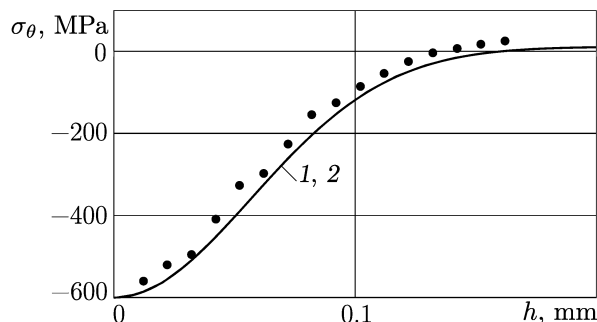


Рис. 2. Сравнение экспериментальных данных (точки-маркеры), аналитической аппроксимации по формуле (1) и результатов численного моделирования по МКЭ (сплошные линии 1, 2) для компоненты  $\sigma_\theta(h)$  после процедуры упрочнения

Fig. 2. Comparison of experimental data (marker points), analytical approximation using formula (1) and results of numerical simulation using FEM (solid lines 1, 2) for the component  $\sigma_\theta(h)$  after the hardening procedure

После реконструкции НДС по формулам (1)–(6) аналогичная задача решалась методом первоначальных деформаций, сводящим задачу реконструкции полей ОН и ПД к решению краевой задачи фиктивной термоупругости [36–38] или термоупругопластичности [39], численная реализация которых может быть выполнена методом конечных элементов в современных вычислительных пакетах (ANSYS, Abaqus, COMSOL и др.). Метод основан на аналогии между пластическими деформациями, определяемыми соотношениями (3) и (4), и температурными деформациями в заданном фиктивном температурном поле. Принимая равенство температурных и пластических деформаций, имеем

$$q_i(r) = \beta_i(T(r))(T(r) - T^*),$$

где  $\beta_i(r)$  ( $i = r, \theta, z$ ) — подлежащие определению коэффициенты температурного расширения,  $T^*$  — начальная температура,  $T(r)$  — произвольно заданное температурное поле.



Данный подход позволяет свести обратную краевую задачу восстановления НДС по частично известным экспериментальным данным к корректной прямой задаче фиктивной термоупругости.

С одной стороны, применение данного подхода для гладкого образца позволяет подтвердить, что аналитическое решение, получаемое по формулам (1)–(6), соответствует численному конечно-элементному решению. Так, на рис. 2 представлено сравнение экспериментальных данных (маркеры), аналитической аппроксимации по формуле (1) (кривая 1) и результатов численного моделирования методом конечных элементов (кривая 2) для компоненты  $\sigma_\theta(h)$  тензора ОН. Отметим, что получены практически неотличимые расчетные значения для всех компонент тензоров ОН и ПД, что подтверждает эквивалентность расчетных методик.

С другой стороны, применение метода первоначальных деформаций для гладкого образца служит необходимым этапом для решения задачи реконструкции НДС в образцах с концентраторами напряжений, сформированными в процессе ОППД. В данном контексте процедуру ОППД можно интерпретировать как удаление части материала в области надреза. При этом задача реконструкции НДС для образцов с надрезами сводится к решению аналогичной задачи (как для гладкого образца), но с модифицированной конечно-элементной сеткой, где исключена область надреза.

Численное решение задачи выполнялось с использованием осесимметричного элемента PLANE183 (пакет ANSYS), позволяющего учитывать термические, упругие и реологические свойства материала, включая пластичность и ползучесть. Граничные условия моделировали шарнирное закрепление торцов цилиндра, допускающее только радиальные перемещения.

Особое внимание при применении метода начальных деформаций уделялось построению расчетных сеток. Для гладких образцов в зоне сжатия (глубиной  $\sim 200$  мкм), где градиенты компонент тензора остаточных напряжений достигают трех порядков, использовались конечные элементы с линейным размером 5–7 мкм. Для образцов с надрезами дополнительные зоны высокой концентрации напряжений локализованы в областях, удаленных от границы надреза на характерное расстояние ( $d$  для квадратного и  $s$  для V-образного профиля, см. рис. 1). В этих областях размер конечных элементов составлял 1–5 мкм.

На рис. 3 представлены распределения компонент  $\sigma_r(h)$  и  $\sigma_\theta(h)$  тензора остаточных напряжений в сечении II–II цилиндра с квадратным надрезом глубиной  $d = \{0.1; 0.3\}$  мм, полученные в рамках термоупругой постановки задачи.

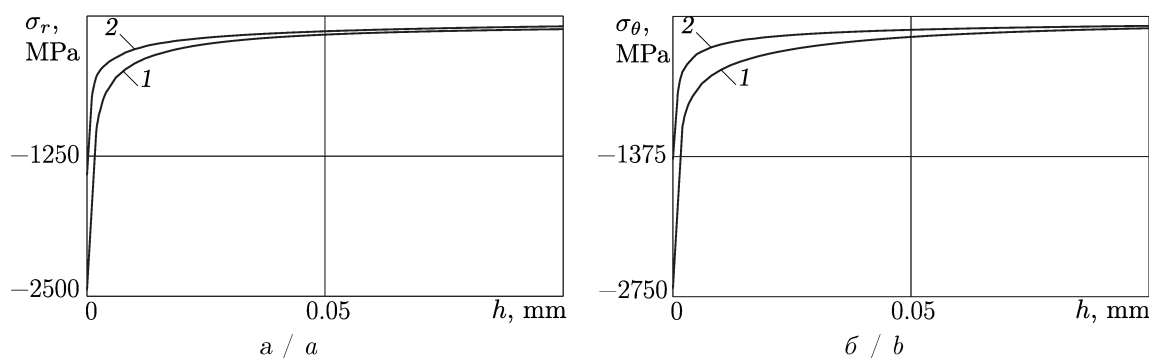


Рис. 3. Расчетные по МКЭ данные для компонент тензора ОН для цилиндра с квадратным надрезом в сечении II–II после упрочнения при  $T = 20^\circ\text{C}$  в упругой постановке:  $a$  — для компоненты  $\sigma_r(h)$ ;  $b$  — для компоненты  $\sigma_\theta(h)$  (1 —  $d = 0.1$  мм, 2 —  $d = 0.3$  мм)

Fig. 3. FEM-calculated data for the components of the residual stress tensor for a cylinder with a square notch in section II–II after hardening at  $T = 20^\circ\text{C}$  in the elastic formulation:  $a$  is for the component  $\sigma_r(h)$ ;  $b$  is for the component  $\sigma_\theta(h)$  (1 is for  $d = 0.1$  mm, 2 is for  $d = 0.3$  mm)

Аналогичные данные для компонент  $\sigma_\theta(h)$  и  $\sigma_z(h)$  в цилиндре с V-образным надрезом (глубина  $c = 0.1$  мм при  $\varphi = 1^\circ$  и  $c = 0.3$  мм при  $\varphi = 5^\circ$ ) приведены на рис. 4.

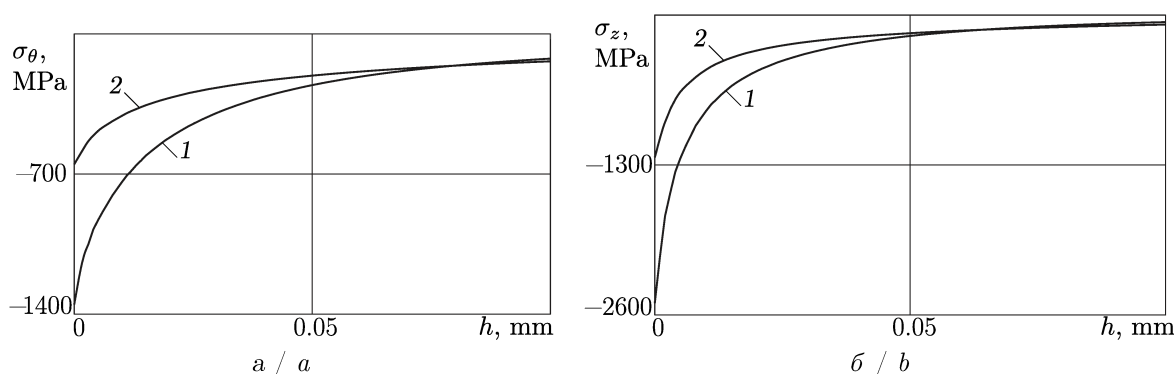


Рис. 4. Расчетные по МКЭ данные для компонент тензора ОН для цилиндра с V-образным надрезом в сечении  $I-I$  после упрочнения при  $T = 20^\circ\text{C}$  в упругой постановке:  $a$  — для компоненты  $\sigma_r(h)$ ;  $b$  — для компоненты  $\sigma_\theta(h)$  (1 —  $c = 0.1$  мм,  $\varphi = 1^\circ$ ; 2 —  $c = 0.3$  мм,  $\varphi = 5^\circ$ )

Fig. 4. FEM-calculated data for the components of the residual stress tensor for a cylinder with a V-shaped notch in section  $I-I$  after hardening at  $T = 20^\circ\text{C}$  in the elastic formulation:  $a$  is for the component  $\sigma_r(h)$ ;  $b$  is for the component  $\sigma_\theta(h)$  (1 is for  $c = 0.1$  mm,  $\varphi = 1^\circ$ ; 2 is for  $c = 0.3$  mm,  $\varphi = 5^\circ$ )

При этом для квадратного надреза принято  $h = a - d - r$ , а для V-образного —  $h = a - c - r$ . Анализ результатов показывает, что при значениях  $d$  и  $c$ , меньших толщины упрочненного слоя, в областях надрезов наблюдаются зоны аномально высокой концентрации напряжений (в углах для квадратного профиля и вершине для V-образного профиля).

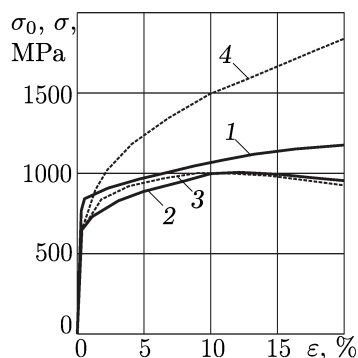


Рис. 5. Диаграммы упругопластического деформирования сплава ЭИ698: экспериментальные данные при  $T = 20^\circ\text{C}$  (кривая 1) и  $T = 700^\circ\text{C}$  (кривая 2); расчетные зависимости для номинального (кривая 3) и истинного (кривая 4) напряжений при  $T = 700^\circ\text{C}$  [28]

Fig. 5. Elastoplastic deformation diagrams of EI698 alloy: experimental data at  $T = 20^\circ\text{C}$  (curve 1) and  $T = 700^\circ\text{C}$  (curve 2); calculated dependences for nominal (curve 3) and true (curve 4) stresses at  $T = 700^\circ\text{C}$  [28]

Полученные значения напряжений (превышающие 1200 МПа — предел прочности сплава ЭИ698 при  $20^\circ\text{C}$ ) являются физически нереализуемыми, что указывает на необходимость учета дополнительных пластических деформаций в зонах концентрации напряжений, возникающих при перераспределении НДС.

Анализ результатов, представленных на рис. 3 и 4, демонстрирует необходимость применения термоупругопластической постановки задачи. Для корректного моделирования использована диаграмма упругопластического деформирования сплава ЭИ698 при температуре  $20^\circ\text{C}$  из Справочника инженера<sup>1</sup>, представленная на рис. 5.

На рис. 6 представлены распределения компонент  $\sigma_\theta(h)$  и  $\sigma_z(h)$  тензора ОН, полученные при реконструкции НДС после ОППД для цилиндра с квадратным надрезом ( $d = 0.3$  мм, сечение  $II-II$ ) и V-образным надрезом ( $c = 0.1$  мм,  $\varphi = 1^\circ$ , сечение  $I-I$ ) соответственно. Сравнение результатов упругой и упругопластической постановок задачи демонстрирует, что учет пластических деформаций приводит к физически обоснованным значениям остаточных напряжений.

Полученные данные использованы для сравнительного анализа эффективности поверхностного упрочнения в условиях температурной ползучести при следующем цикле термомеханического нагружения: «упрочняющая

<sup>1</sup>Жаропрочные стали и сплавы // Справочник инженера — Inzhener-Info. URL: <https://inzhener-info.ru/razdely/materialy/zharoprochnye-stali-i-splavy.html> (дата обращения: 10.10.2024).





обработка при 20 °С — нагрев до 700 °С — релаксация напряжений в условиях ползучести в течение 100 ч. при 700 °С — охлаждение до 20 °С».

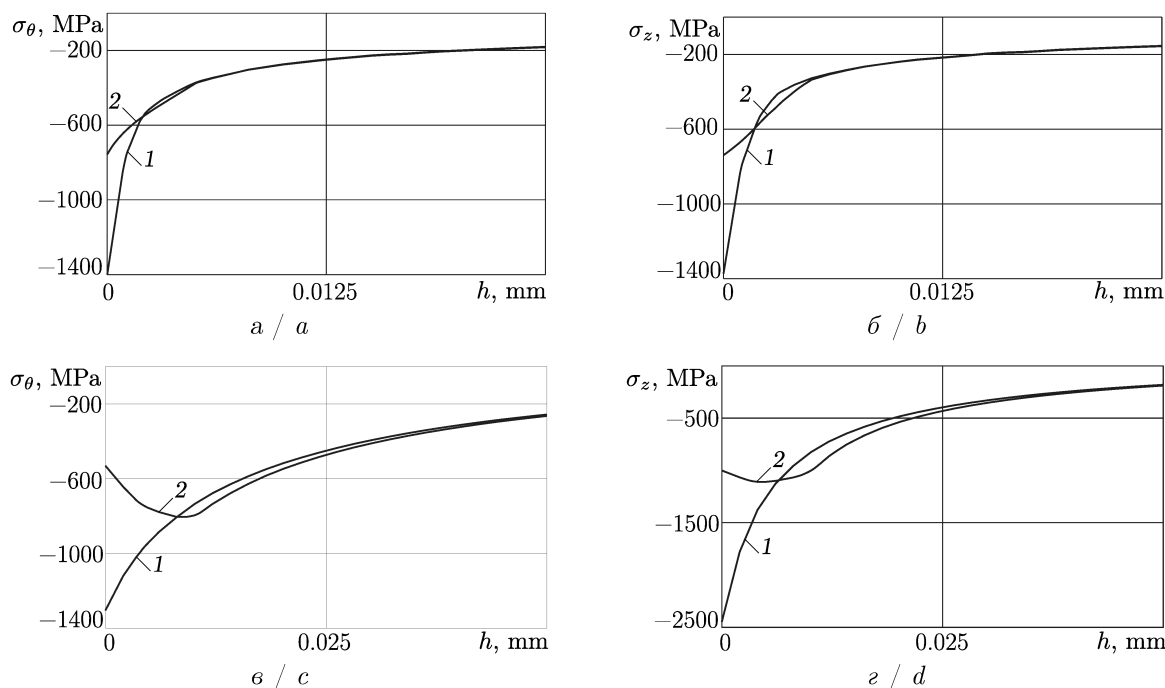


Рис. 6. Расчетные по МКЭ данные для компонент  $\sigma_r(h)$  и  $\sigma_\theta(h)$  тензора ОН: а, б — для цилиндра с квадратным надрезом при  $d = 0.3$  мм в сечении II–II после упрочнения при  $T = 20$  °С; в, г — для цилиндра с V-образным надрезом при  $c = 0.1$  мм,  $\varphi = 1^\circ$  в сечении I–I после упрочнения при  $T = 20$  °С (1 — упругое решение, 2 — упругопластическое решение)

Fig. 6. FEM-calculated data for components  $\sigma_r(h)$  and  $\sigma_\theta(h)$  of the residual stress tensor: а and б are for a cylinder with square notch ( $d = 0.3$  mm) at section II–II after hardening at  $T = 20$  °С; в and г are for a cylinder with V-notch ( $c = 0.1$  mm,  $\varphi = 1^\circ$ ) at section I–I after hardening at  $T = 20$  °С (1 represents the elastic solution, 2 represents the elastoplastic solution)

### 3. Метод решения задачи релаксации ОН в условиях ползучести при термоэкспозиции в цилиндрах с надрезами

При моделировании релаксации ОН в качестве начального НДС используются результаты решения задачи реконструкции полей ОН и ПД после упрочнения в упругопластической постановке при температуре 700 °С. Расчет выполняется в два этапа: сначала решается задача термоупругости для гладкого образца по формулам (1)–(6) с заменой модуля упругости  $E_0$  на  $E_1$ , соответствующий 700 °С, затем после нанесения надреза решается задача фиктивной термоупругопластичности для определения начального НДС в образце с концентратором напряжений.

Для корректного решения в ANSYS требуется использовать возрастающую диаграмму упругопластического деформирования при 700 °С. На рис. 5 представлены экспериментальная и расчетные диаграммы для сплава ЭИ698 [28, рис. 3.10] в координатах «номинальное напряжение  $\sigma_0$  – деформация  $\varepsilon$ » и «истинное напряжение  $\sigma$  – деформация  $\varepsilon$ », при этом  $\sigma = \sigma_0(1 + \omega)$ , где  $\omega$  — параметр поврежденности (работа истинного напряжения на пластической деформации). При решении задачи фиктивной термоупругопластичности применялась диаграмма для истинных напряжений (кривая 4 на рис. 5).

В качестве реологической модели используется теория установившейся ползучести (закон Нортон), что, исходя из анализа экспериментальных кривых ползучести при постоянных напряжениях для сплава ЭИ698 при 700 °С [28, рис. 3.11], для временного интервала до 100 часов вполне допустимо:

$$\dot{\rho} = \beta \sigma^n.$$

Эта форма записи соответствует реализации закона Нортона в пакете ANSYS для решения задач ползучести методом конечных элементов. Здесь  $p = p(t)$  — деформация ползучести,  $\beta = 8.13 \cdot 10^{-35}$  и  $n = 10.96$  — материальные константы ЭИ698. Указанные значения параметров для данного сплава при температуре  $700^\circ\text{C}$  приведены в [28].

Отметим некоторые неочевидные особенности при решении задачи релаксации ОН в условиях ползучести. Во-первых, заданное фиктивное температурное поле не оказывает влияния на процесс ползучести, поскольку параметры  $\beta$  и  $n$  не зависят от пространственных координат и температуры, а их значения соответствуют температуре  $700^\circ\text{C}$ . Во-вторых, задачи ползучести решены в предположении, что при изменении температуры наведенные после упрочнения пластические деформации не меняются, поскольку в процессе релаксации в упрочненном слое вследствие накопления деформации ползучести происходит упругая разгрузка, а в этом случае новых активных пластических деформаций не возникает. Следовательно, для определения конечного распределения компонент тензора остаточных напряжений при  $20^\circ\text{C}$  после температурно-временной выдержки необходимо масштабировать результаты, полученные для  $700^\circ\text{C}$  в момент времени 100 часов, на отношение модулей упругости  $E_0/E_1$ .

#### 4. Результаты решения краевых задач релаксации ОН

Моделирование охватывало 100-часовой интервал релаксации остаточных напряжений. Проведен детальный анализ эволюции НДС в процессе ползучести при  $700^\circ\text{C}$  для различных образцов геометрических конфигураций.

В качестве примера приведены типичные результаты расчета кинетики ОН для исследуемых образцов с надрезами. На рис. 7 для сечения II–II цилиндрического образца с надрезом квадратной формы приведены графики релаксации компонент  $\sigma_\theta$  (а) и  $\sigma_z$  (б) при  $d = 0.1$  мм и  $\sigma_r$  (в) и  $\tau_{rz}$  (г) при  $d = 0.3$  мм.

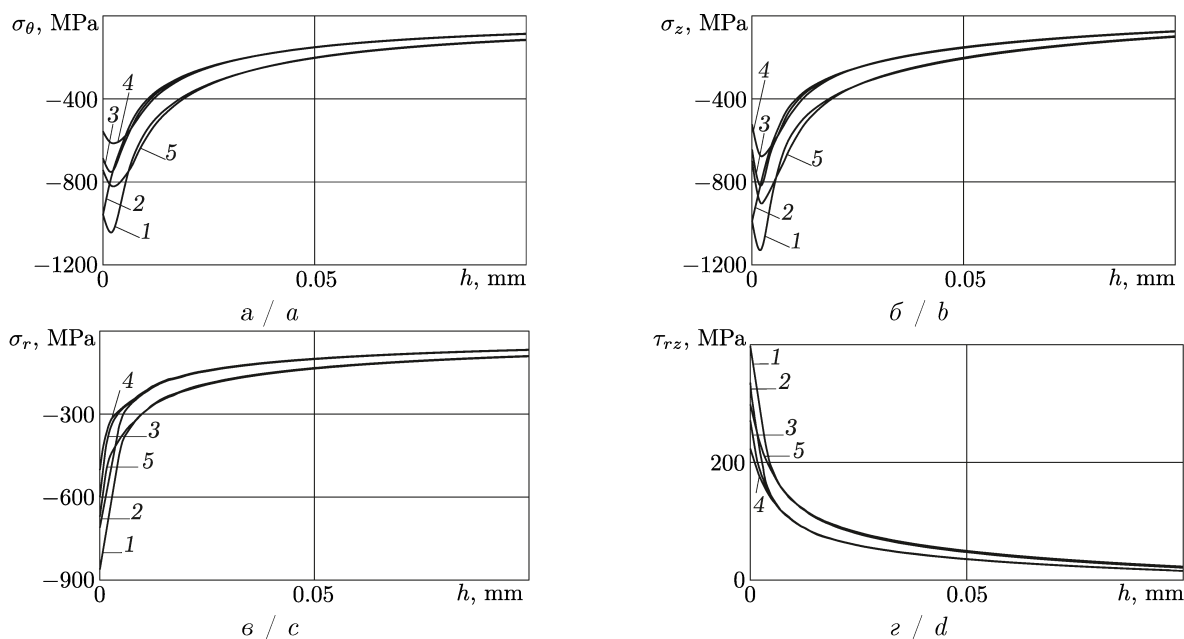


Рис. 7. Релаксация остаточных напряжений в сечении II–II цилиндрического образца с надрезом квадратной формы при  $d = 0.1$  мм (а, б) и  $d = 0.3$  мм (в, г): 1 — данные после упрочнения при  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 0 - 0$ ); 2 — температурная нагрузка до  $T = 700^\circ\text{C}$  ( $t = 0 + 0$ ); 3 — после ползучести при  $T = 700^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 10 - 0$  ч; 4 — после ползучести при  $T = 700^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 100 - 0$  ч; 5 — температурная разгрузка до  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 100 + 0$  ч)

Fig. 7. Relaxation of residual stresses in section II–II of cylindrical specimen with square-shaped notch at  $d = 0.1$  mm (a, b) and  $d = 0.3$  mm (c, d): curve 1 shows data after strengthening at  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 0 - 0$ ); curve 2 shows data for thermal loading up to  $T = 700^\circ\text{C}$  ( $t = 0 + 0$ ); curve 3 shows data after creep at  $T = 700^\circ\text{C}$  at time  $t = 10 - 0$  h; curve 4 shows data after creep at  $T = 700^\circ\text{C}$  at time  $t = 100 - 0$  h; curve 5 shows data for thermal unloading down to  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 100 + 0$  h)



Из анализа данных, представленных на рис. 7, следует, что если для гладкого образца недиагональные компоненты тензора ОН равны нулю, то для надреза квадратной формы в сечении  $II-II$  возникают касательные напряжения значительной величины, сопоставимой со значениями нормальных компонент. Существенной становится также компонента  $\sigma_r(h)$  в этом сечении, хотя для гладкого образца ее величина на два порядка (по модулю) меньше величины, приведенной на рис. 7, в. Аналогичная картина наблюдается и для надреза V-образной формы в сечениях, параллельных сечению  $I-I$ , не проходящих через вершину надреза.

На рис. 8 представлены данные по релаксации компонент  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  в цилиндрах с V-образным надрезом в сечении  $I-I$ : при  $c = 0.1$  мм и  $\varphi = 1^\circ$  (а, б); при  $c = 0.1$  мм и  $\varphi = 5^\circ$  (в, г); при  $c = 0.3$  мм и  $\varphi = 15^\circ$  (д, е).

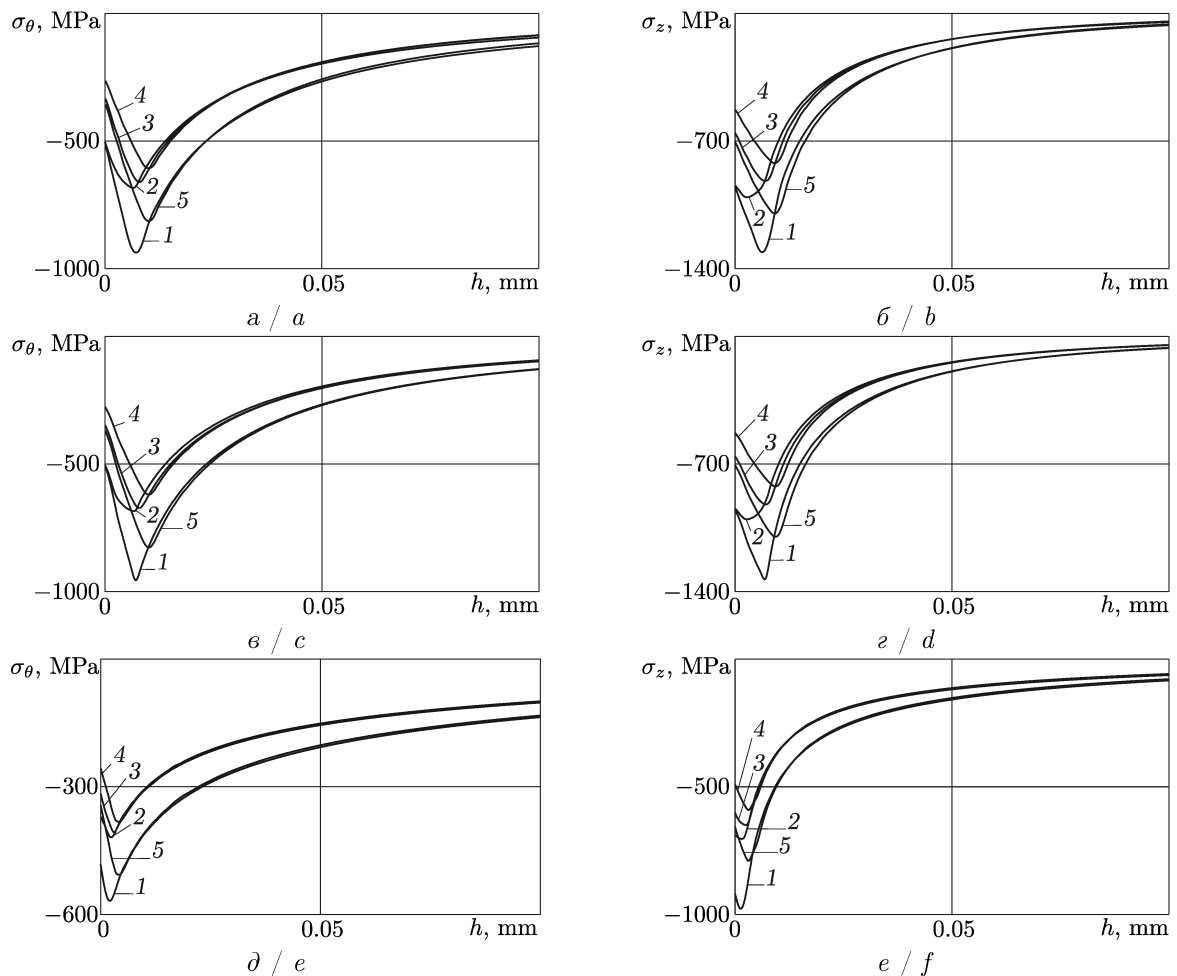


Рис. 8. Релаксация остаточных напряжений  $\sigma_\theta(h)$  (а, в, д) и  $\sigma_z(h)$  (б, г, е) в сечении  $I-I$  цилиндрического образца с надрезом V-образной формы при  $c = 0.1$  мм,  $\varphi = 1^\circ$  (а, б),  $\varphi = 5^\circ$  (в, г);  $c = 0.3$  мм,  $\varphi = 15^\circ$  (д, е): 1 — данные после упрочнения при  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 0 - 0$ ); 2 — температурная нагрузка до  $T = 700^\circ\text{C}$  ( $t = 0 + 0$ ); 3 — после ползучести при  $T = 700^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 10 - 0$  ч; 4 — после ползучести при  $T = 700^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 100 - 0$  ч; 5 — температурная разгрузка до  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 100 + 0$  ч)

Fig. 8. Relaxation of residual stresses  $\sigma_\theta(h)$  (a, c, e) and  $\sigma_z(h)$  (b, d, f) in section  $I-I$  of cylindrical specimen with V-notch at  $c = 0.1$  mm,  $\varphi = 1^\circ$  (a, b),  $\varphi = 5^\circ$  (c, d);  $c = 0.3$  mm,  $\varphi = 15^\circ$  (e, f): curve 1 shows data after strengthening at  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 0 - 0$ ); curve 2 shows data for thermal loading up to  $T = 700^\circ\text{C}$  ( $t = 0 + 0$ ); curve 3 shows data after creep at  $T = 700^\circ\text{C}$  at time  $t = 10 - 0$  h; curve 4 shows data after creep at  $T = 700^\circ\text{C}$  at time  $t = 100 - 0$  h; curve 5 shows data thermal unloading down to  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 100 + 0$  h)



Из данных, представленных на рис. 8, следует, что изменение угла раскрытия V-образного надреза при одной и той же глубине (например, при  $c = 0.1$  мм) не оказывает существенного влияния на уровень сжимающих остаточных напряжений. Последующие вариативные расчеты при значениях  $\varphi \in [15^\circ, 30^\circ]$  подтверждают этот факт. Глубина же надреза оказывает существенное влияние на уровень напряжений в надрезе — при увеличении  $c$  от 0.1 мм до 0.3 мм уровень напряжений падает на 30–40 %.

Экспериментальные данные свидетельствуют о значительной скорости релаксации остаточных напряжений при  $700^\circ\text{C}$  — за первые 10 ч. уровень сжимающих напряжений в образцах с обоими типами надрезов снижается в полтора-два раза.

Весьма интересным является вопрос эффективности поверхностного упрочнения деталей, связанный с процессами релаксации ОН за цикл полного нагружения: «процедура ОППД детали с надрезом при  $T = 20^\circ\text{C}$  — мгновенная температурная нагрузка до  $T = 700^\circ\text{C}$  — температурная выдержка в течение 100 часов при  $T = 700^\circ\text{C}$  — температурная разгрузка до  $T = 20^\circ\text{C}$ ». Здесь важную роль играют графики на рис. 7 и рис. 8 с маркерами 1 (распределение ОН после упрочнения) и 5 (финишное распределение ОН после всего цикла нагружения). Во-первых, отметим, что с увеличением времени выдержки скорость релаксации ОН очень быстро затухает, что связано с быстрым уменьшением скорости деформации ползучести. Так, выполненные расчеты для времени  $t > 100$  ч. свидетельствуют о незначительном отклонении распределений  $\sigma_\theta(t, h)$  и  $\sigma_z(t, h)$  от зависимости с маркером 4 ( $t = 100$  ч.). Во-вторых, сравнение распределений ОН с маркерами 1 и 5 позволяет сделать вывод о наличии существенных сжимающих напряжений в области надрезов и после полного цикла нагружения. Это в определенной мере демонстрирует эффективность поверхностного упрочнения деталей с надрезами и в условиях высокотемпературной ползучести.

## Заключение

В работе предложен метод расчета релаксации остаточных напряжений при высокотемпературной ползучести ( $700^\circ\text{C}$ ) для цилиндрических деталей с концентраторами напряжений квадратного и V-образного профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования. Установлено, что корректное определение начального НДС требует решения упругопластической задачи реконструкции полей напряжений и деформаций с последующим использованием полученных результатов в качестве начальных условий для анализа релаксации при длительной термоэкспозиции.

Проведенный параметрический анализ для различных геометрических конфигураций надрезов подтвердил эффективность поверхностного упрочнения рассматриваемых деталей в условиях высокотемпературной ползучести. В частности, несмотря на существенную релаксацию, в деталях сохраняются значительные уровни сжимающих остаточных напряжений после полного цикла термомеханического нагружения.

## Список литературы

1. Биргер И. А. Остаточные напряжения. Москва : Машгиз, 1963. 232 с.
2. Гринченко И. Г. Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов. Москва : Машиностроение, 1971. 120 с.
3. Кудрявцев И. В. Поверхностный наклеп для повышения прочности и долговечности деталей машин поверхностным пластическим деформированием. Москва : Машиностроение, 1969. 100 с.
4. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнения деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев. (Обзор) // Вестник двигателестроения. 2006. № 2. С. 8–16.
5. Сулима Г. Н., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д. Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин. Москва : Машиностроение, 1988. 240 с.
6. Одинцов Л. Г. Упрочнение и отделка деталей поверхностным пластическим деформированием. Москва : Машиностроение, 1987. 328 с.



7. Иванов С. И., Шатунов М. П., Павлов В. Ф. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций / отв. ред. Х. С. Хазанов. Куйбышев : КуАИ, 1974. Вып. 1. С. 88–95.
8. Митряев К. Ф., Егоров В. И., Мальков Г. Ф., Уланов Б. Н., Степанов В. В. Повышение усталостной прочности жаропрочных материалов алмазным выглаживанием поверхности деталей // Остаточные напряжения / отв. ред. С. И. Иванов. Куйбышев : КуАИ, 1971. Вып. 53. С. 151–159.
9. Павлов В. Ф., Букатый А. С., Семенова О. Ю. Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочненных деталей с концентраторами напряжений // Вестник машиностроения. 2019. № 1. С. 3–7. EDN: [VTAEPK](#)
10. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям. Самара : Изд-во СЦН РАН, 2012. 125 с. EDN: [TAFJVZ](#)
11. Сазанов В. П. Исследование закономерностей остановки усталостной трещины в цилиндрическом образце с надрезом // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 1. С. 160–169. DOI: [10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169](#), EDN: [UPOWMG](#)
12. Радченко В. П., Кирпичев В. А., Лукин В. В. Влияние пневмодробеструйной обработки и термоэкспозиции на остаточные напряжения и предел выносливости образцов с надрезами из сплавов В95 и Д16Т // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. № 3 (24). С. 181–184. EDN: [OZDDCH](#)
13. You C., Achintha M., He B. Y., Reed P. A. S. A numerical study of the effects of shot peening on the short crack growth behaviour in notched geometries under bending fatigue tests // International Journal of Fatigue. 2017. Vol. 103. P. 99–111. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2017.05.023](#)
14. Soyama H. Comparison between shot peening, cavitation peening and laser peening by observation of crack initiation and crack growth in stainless steel // Metals. 2019. Vol. 10, iss. 1. Art. 63. DOI: [10.3390/met10010063](#), EDN: [OLPPYZ](#)
15. Zhao X., Sun Z., Xu D., Liu Y. Local fatigue strength evaluation of shop peened 40Cr notched steel // Metals. 2018. Vol. 128, iss. 9. Art. 681. DOI: [10.3390/met8090681](#)
16. Takahashi K., Osedo H., Suzuki T., Fukuda S. Fatigue strength improvement of an aluminum alloy with a crack-like surface defect using shot peening and cavitation peening // Engineering Fracture Mechanics. 2018. Vol. 193. P. 151–161. DOI: [10.1016/j.engfracmech.2018.02.013](#)
17. Fleury R., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys // International Journal of Fatigue. 2017. Vol. 105. P. 27–33. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015](#)
18. Bag A., Levesque M., Brochu M. Effect of shot peening on short crack propagation in 300M steel // International Journal of Fatigue. 2020. Vol. 131. Art. 105346. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2019.105346](#), EDN: [TDCZZK](#)
19. Nag Chaundhury J. Effect of heat treatment, pre-stress and surface hardening on fracture toughness of micro-alloyed steel // Journal of Materials Engineering and Performance. 2014. Vol. 23, iss. 1. P. 152–168. DOI: [10.1007/s11665-013-0709-6](#)
20. Радченко В. П., Морозов А. П. Экспериментальное исследование влияния пневмодробеструйной обработки температурных выдержек и многоцикловых усталостных испытаний на физико-механическое состояние упрочненного слоя цилиндрических образцов из сплавов В95 и Д16Т // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. № 5 (21). С. 222–228. EDN: [NCTNON](#)
21. Lin D. J., Fuh L. J., Chen C. Y., Chen W. C., Lin J. H. C., Chen C. C. Rapid nano-scale surface modification on micro-arc oxidation coated titanium by microwave-assisted hydrothermal process // Materials Science and Engineering: C. 2019. Vol. 95. P. 236–247. DOI: [10.1016/j.msec.2018.10.085](#), EDN: [JOCCNC](#)
22. Maytorena-Sanchez A., Hernandez-Torres J., Lopez-Huerta F., Hernandez-Campos M. A., Zamora-Peredo L., Pacio-Castillo M., Serrano-De la Rosa L. E., Garcia-Gonzalez L. Analysis of the hardness and tribological properties of grade 2 titanium using the thermal oxidation process at different temperatures // Materials Letters. 2021. Vol. 282. Art. 128679. DOI: [10.1016/j.matlet.2020.128679](#), EDN: [CQVOPZ](#)
23. Кравченко Б. А., Круцило В. Г., Гутман Г. Н. Термопластическое упрочнение – резерв повышения прочности и надежности деталей машин. Самара : Изд-во СамГТУ, 2000. 216 с. EDN: [TTRVCB](#)





24. Chekalova E., Zhuravlev A. Improving the durability of titanium alloy products through a combined hardening technology // *Materials Today: Proceedings*. 2020. Vol. 38, pt. 4. P. 1804–1809. DOI: [10.1016/j.matpr.2020.08.413](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.08.413), EDN: [RDCCGQ](https://www.edn.ru/rdcccgq)
25. Guo W., Wang H., Peng P., Song B., Zhang H., Shao T., Huan H., Qiao H., Qu G., Zhu D., Yan J. Effect of laser shock processing on oxidation resistance of laser additive manufacture Ti6Al4V titanium alloy // *Corrosion Science*. 2020. Vol. 170. Art. 108655. DOI: [10.1016/j.corsci.2020.108655](https://doi.org/10.1016/j.corsci.2020.108655), EDN: [GDQQDH](https://www.edn.ru/gdqqdh)
26. Цейтлин В. И., Колотникова О. В. Релаксация остаточных напряжений в деталях турбин ГТД в процессе эксплуатации // *Проблемы прочности*. 1980. № 3. С. 6–11.
27. Колотникова О. В. Эффективность упрочнения методами поверхностного пластического деформирования деталей, работающих при повышенных температурах // *Проблемы прочности*. 1983. № 2. С. 112–114.
28. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. Москва : Машиностроение-1, 2005. 226 с.
29. Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177. DOI: [10.15372/PMTF20150217](https://doi.org/10.15372/PMTF20150217), EDN: [TWGXNN](https://www.edn.ru/twgxnn)
30. Радченко В. П., Цветков В. В., Саушкин М. Н. Релаксация остаточных напряжений в упрочненном цилиндре в условиях ползучести при нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением // *Прикладная механика и техническая физика*. 2020. Т. 61, № 4. С. 96–107. DOI: [10.15372/PMTF20200412](https://doi.org/10.15372/PMTF20200412), EDN: [DOAXGA](https://www.edn.ru/doaxga)
31. Радченко В. П., Деревянка Е. Е. Кинетика остаточных напряжений в тонкостенных цилиндрических образцах после двухстороннего поверхностного упрочнения в условиях ползучести при жестких ограничениях на угловые и осевые линейные перемещения // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 227–240. DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240), EDN: [VGQVUH](https://www.edn.ru/vgqvuh)
32. Деревянка Е. Е., Радченко В. П., Цветков В. В. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре в условиях ползучести при жестких ограничениях на линейные и угловые деформации // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2021. № 3. С. 118–127. DOI: [10.31857/S057232992103003X](https://doi.org/10.31857/S057232992103003X), EDN: [OVGDFP](https://www.edn.ru/ovgdfp)
33. Радченко В. П., Либерман А. Е., Блохин О. Л. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном вращающемся цилиндре в условиях ползучести // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2022. Т. 26, № 1. С. 119–139. DOI: [10.14498/vsgtu1884](https://doi.org/10.14498/vsgtu1884), EDN: [GFBZBC](https://www.edn.ru/gfbzbc)
34. Radchenko V., Glebov V. A method for calculating the relaxation of residual creep stresses in a surface-hardened cylinder with a series of periodically arranged semicircular incisions under thermal exposure conditions // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, iss. 7. P. 3735–3746. DOI: [10.1134/S0025654424606293](https://doi.org/10.1134/S0025654424606293), EDN: [UYGCLJ](https://www.edn.ru/uygclj)
35. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Павлов В. Ф. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненных втулках с учетом остаточных касательных напряжений // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2019. № 1. С. 138–150. DOI: [10.15593/perm.mech/2019.1.12](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.12), EDN: [XKSCQS](https://www.edn.ru/xkscqs)
36. Сазанов В. П., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С., Павлов В. Ф. Определение первоначальных деформаций в упрочненном слое цилиндрической детали методом конечно-элементного моделирования с использованием расчетного комплекса PATRAN/NASTRAN // *Вестник УГАТУ*. 2015. Т. 19, № 2 (68). С. 35–40. EDN: [VYWUPR](https://www.edn.ru/vywupr)
37. Сазанов В. П., Семенова О. Ю., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. Математическое моделирование первоначальных деформаций в поверхностно упрочненных деталях при выборе образцосвидетеля // *Вестник УГАТУ*. 2016. Т. 20, № 3 (73). С. 31–37. EDN: [XBGSHT](https://www.edn.ru/xbgsht)
38. Павлов В. Ф., Столяров А. К., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. Расчет остаточных напряжений в деталях с концентраторами напряжений по первоначальным деформациям. Самара : Изд-во СЦН РАН, 2008. 124 с.
39. Радченко В. П., Шишкин Д. М., Саушкин М. Н. Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии поверхностно упрочненного призматического образца с надрезом V-образного профиля в упругой и упругопластической постановках // *Вестник Самарского*



го государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 491–508. DOI: [10.14498/vsgtu2017](https://doi.org/10.14498/vsgtu2017), EDN: CDEJKC

## References

1. Birger I. A. *Ostatochnye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963. 232 p. (in Russian).
2. Grinchenko I. G. *Uprochnenie detaley iz zharoprochnnykh i titanovykh spлавov* [Hardening of parts made of heat-resistant and titanium alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1971. 120 p. (in Russian).
3. Kudryavtsev I. V. *Poverkhnostnyy naklep dlya povysheniya prochnosti i dolgovechnosti detaley mashin poverkhnostnym plasticheskim deformirovaniem* [Surface strain hardening to increase the strength and durability of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1969. 100 p. (in Russian).
4. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new GTE parts hardening methods based on plastic deformation of surface layers. *Vestnik dvigatelestroeniya* [Bulletin of Engine Building], 2006, iss. 2, pp. 8–16 (in Russian).
5. Sulima G. N., Shuvalov V. A., Yagodka Yu. D. *Poverkhnostnyy sloi i ekspluatatsionnye svoystva detaley mashin* [Surface layer and performance properties of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 240 p. (in Russian).
6. Odincov L. G. *Uprochnenie i otdelka detaley poverkhnostnym plasticheskim deformirovaniem* [Hardening and finishing of parts by surface plastic deformation]. Moscow, Mashinostroenie, 1987. 328 p. (in Russian).
7. Ivanov S. I., Shatunov M. P., Pavlov V. F. The effect of residual stresses on the endurance of incised samples. *Voprosy Prochnosti Elementov Aviatsionnykh Konstruktsiy* [Khazanov Kh. S. (ed.) Problems of Strength of Elements of Aircraft Structures]. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Institute Publ., 1974, iss. 1, pp. 88–95 (in Russian).
8. Mitryaev K. F., Egorov V. I., Malkov G. F., Ulanov B. N., Stepanov V. V. Increasing the fatigue strength of heat-resistant materials by diamond smoothing of the surface of the parts. *Ostatochnye napryazheniya* [Ivanov S. I. (ed.) Residual Stresses]. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Institute Publ., 1971, vol. 53, pp. 151–159 (in Russian).
9. Pavlov V. F., Bukaty A. S., Semenova O. Yu. Forecasting of the endurance limit of surface-hardened parts with stress concentrators. *Vestnik mashinostroeniya*, 2016, iss. 1, pp. 3–7 (in Russian). EDN: VTAEPK
10. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniya ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detaley po ostatochnym napryazheniyam* [Prediction of fatigue resistance of surface-hardened parts by residual stresses]. Samara, SCN RAN Publ., 2012. 125 p. (in Russian). EDN: TAFJVZ
11. Sazanov V. P. Analysis of the mechanism of fatigue crack arrest in a cylindrical notched specimen. *VESTNIK of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2018, vol. 17, iss. 1, pp. 160–169 (in Russian). DOI: [10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169](https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169), EDN: UPOWMG
12. Radchenko V. P., Kirpichyov V. A., Lunin V. V. Influence of air shot blasting and temperature exposure on residual stresses and fatigue strength of notched specimens from alloys V95 and D16T. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2011, iss. 3 (24), pp. 181–184 (in Russian). EDN: OZDDCH
13. You C., Achintha M., He B. Y., Reed P. A. S. A numerical study of the effects of shot peening on the short crack growth behaviour in notched geometries under bending fatigue tests. *International Journal of Fatigue*, 2017, vol. 103, pp. 99–111. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2017.05.023](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.05.023)
14. Soyama H. Comparison between shot peening, cavitation peening and laser peening by observation of crack initiation and crack growth in stainless steel. *Metals*, 2019, vol. 10, iss. 1, art. 63. DOI: [10.3390/met100110063](https://doi.org/10.3390/met100110063), EDN: OLPPYZ
15. Zhao X., Sun Z., Xu D., Liu Y. Local fatigue strength evaluation of shot peened 40Cr notched steel. *Metals*, 2018, vol. 128, iss. 9, art. 681. DOI: [10.3390/met8090681](https://doi.org/10.3390/met8090681)
16. Takahashi K., Osedo H., Suzuki T., Fukuda S. Fatigue strength improvement of an aluminum alloy with a crack-like surface defect using shot peening and cavitation peening. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 193, pp. 151–161. DOI: [10.1016/j.engfracmech.2018.02.013](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.02.013)
17. Fleury R., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys. *International Journal of Fatigue*, 2017, vol. 105, pp. 27–33. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015)
18. Bag A., Levesque M., Brochu M. Effect of shot peening on short crack propagation in 300M steel.



- International Journal of Fatigue*, 2020, vol. 131, art. 105346. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2019.105346](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.105346), EDN: [TDCZZK](#)
19. Nag Chaundhury J. Effect of heat treatment, pre-stress and surface hardening on fracture toughness of micro-alloyed steel. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2014, vol. 23, iss. 1, pp. 152–168. DOI: [10.1007/s11665-013-0709-6](https://doi.org/10.1007/s11665-013-0709-6)
  20. Radchenko V. P., Morozov A. P. Experimental study of the effect induced by air shot-blasting processing, thermal exposition and high cycle fatigue tests on physical and mechanical condition hardening layer of cylindrical samples of alloys V95 and D16T. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2010, iss. 5 (21), pp. 222–228 (in Russian). EDN: [NCTNON](#)
  21. Lin D. J., Fuh L. J., Chen C. Y., Chen W. C., Lin J. H. C., Chen C. C. Rapid nano-scale surface modification on micro-arc oxidation coated titanium by microwave-assisted hydrothermal process. *Materials Science and Engineering: C*, 2019, vol. 95, pp. 236–247. DOI: [10.1016/j.msec.2018.10.085](https://doi.org/10.1016/j.msec.2018.10.085), EDN: [JOCCNC](#)
  22. Maytorena-Sanchez A., Hernandez-Torres J., Lopez-Huerta F., Hernandez-Campos M. A., Zamora-Peredo L., Pacio-Castillo M., Serrano-De la Rosa L. E., Garcia-Gonzalez L. Analysis of the hardness and tribological properties of grade 2 titanium using the thermal oxidation process at different temperatures. *Materials Letters*, 2021, vol. 282, art. 128679. DOI: [10.1016/j.matlet.2020.128679](https://doi.org/10.1016/j.matlet.2020.128679), EDN: [CQVOPZ](#)
  23. Kravchenko B. A., Krutsilo V. G., Gutman G. N. *Termoplasticheskoe uprochnenie — rezerv povysheniya prochnosti i nadyozhnosti detaley mashin* [Thermoplastic hardening as a reserve for increasing the strength and reliability of machine parts]. Samara, SamSTU Publ., 2000. 216 p. (in Russian). EDN: [TTRVCB](#)
  24. Chekalova E., Zhuravlev A. Improving the durability of titanium alloy products through a combined hardening technology. *Materials Today: Proceedings*, 2020, vol. 38, pt. 4, pp. 1804–1809. DOI: [10.1016/j.matpr.2020.08.413](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.08.413), EDN: [RDCCGQ](#)
  25. Guo W., Wang H., Peng P., Song B., Zhang H., Shao T., Huan H., Qiao H., Qu G., Zhu D., Yan J. Effect of laser shock processing on oxidation resistance of laser additive manufacture Ti6Al4V titanium alloy. *Corrosion Science*, 2020, vol. 170, art. 108655. DOI: [10.1016/j.corsci.2020.108655](https://doi.org/10.1016/j.corsci.2020.108655), EDN: [GDQQDH](#)
  26. Tseytlin V. I., Kolotnikova O. V. Relaxation of residual stresses in turbine parts of GTE during operation. *Problemy prochnosti* [Durability Issues], 1980, iss. 3, pp. 6–11 (in Russian).
  27. Kolotnikova O. V. The effectiveness of hardening by methods of surface plastic deformation of parts operating at elevated temperatures. *Problemy prochnosti* [Durability Issues], 1983, iss. 2, pp. 112–114 (in Russian).
  28. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napryazheniy v uprochnyonnykh konstruksiyakh* [Creep and relaxation of residual stresses in strengthened structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005. 226 p. (in Russian).
  29. Radchenko V. P., Kocherov E. P., Saushkin M. N., Smyslov V. A. Experimental and theoretical studies of the influence of a tensile load on the relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, iss. 2, pp. 313–320. DOI: [10.1134/S0021894415020170](https://doi.org/10.1134/S0021894415020170), EDN: [UGHRIL](#)
  30. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V., Saushkin M. N. Residual stress relaxation in a hardened cylinder under creep, loaded by an axial force, torque, and internal pressure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 61, iss. 4, pp. 583–592. DOI: [10.1134/S0021894420040124](https://doi.org/10.1134/S0021894420040124), EDN: [REDSOB](#)
  31. Radchenko V. P., Derevyanka E. E. Kinetics of residual stresses in thin-walled cylindrical samples after bilateral surface hardening under creep conditions with strict restrictions on angular and axial linear displacements. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 227–240 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240), EDN: [VGQVUH](#)
  32. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V., Derevyanka E. E. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder under creep conditions and rigid restrictions on linear and angular deformations. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 6, pp. 898–906. DOI: [10.3103/S0025654420660024](https://doi.org/10.3103/S0025654420660024), EDN: [VVJDZI](#)
  33. Radchenko V. P., Liberman A. E., Blokhin O. L. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened rotating cylinder under creep conditions. *Journal of Samara State Technical University*,



- Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, iss. 1, pp. 119–139 (in Russian). DOI: [10.14498/vsgtu1884](https://doi.org/10.14498/vsgtu1884), EDN: [GFBZBC](https://www.edn.net/GFBZBC)
34. Radchenko V. P., Glebov V. E. A method for calculating the relaxation of residual creep stresses in a surface-hardened cylinder with a series of periodically arranged semicircular incisions under thermal exposure conditions. *Mechanics of Solids*, 2024, vol. 59, iss. 7, pp. 3735–3746. DOI: [10.1134/S0025654424606293](https://doi.org/10.1134/S0025654424606293), EDN: [UYGCLY](https://www.edn.net/UYGCLY)
35. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Pavlov V. F. Mathematical modeling of the stress-strain state in surface-hardened thin-walled tubes with regard to the residual shear stresses. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [Bulletin of PNIPU. Mechanics], 2019, iss. 1, pp. 138–150 (in Russian). DOI: [10.15593/perm.mech/2019.1.12](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.12), EDN: [XKSCQS](https://www.edn.net/XKSCQS)
36. Sazanov V. P., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S., Pavlov V. F. The definition of initial deformations in the cylindrical parts surface layer by Finite Elements Modeling method using PATRAN/NASTRAN program complex. *Vestnik UGATU*, 2015, vol. 19, iss. 2 (68), pp. 35–40 (in Russian). EDN: [VYWUPR](https://www.edn.net/VYWUPR)
37. Sazanov V. P., Semenova O. Yu., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. Mathematical modeling of initial deformations in surface hardened parts for the choice of a reference specimen. *Vestnik UGATU*, 2016, vol. 20, iss. 3 (73), pp. 31–37 (in Russian). EDN: [XBGSHT](https://www.edn.net/XBGSHT)
38. Pavlov V. F., Stoljarov A. K., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Raschet ostatochnykh napryazheniy v detalyakh s kontsentratorami napryazheniy po pervonachal'nyim deformatsiyam* [Calculation of residual stresses in parts with stress concentrators according to initial deformations]. Samara, SCN RAN Publ., 2008. 124 p. (in Russian).
39. Radchenko V. P., Shishkin D. M., Saushkin M. N. Numerical solution of the problem of stress-strain state of a surface-hardened prismatic V-notched specimen in elastic and elastoplastic formulations. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2023, vol. 27, iss. 3, pp. 491–508 (in Russian). DOI: [10.14498/vsgtu2017](https://doi.org/10.14498/vsgtu2017), EDN: [CDEJKC](https://www.edn.net/CDEJKC)

Поступила в редакцию / Received 15.10.2024

Принята к публикации / Accepted 20.11.2024

Опубликована / Published 29.08.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 406–418

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 406–418

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418>

EDN: <https://elibrary.ru/OFVTQE>

Научная статья

УДК 539.374

## Термосиловое резонансное нагружение трехслойной пластины

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко<sup>✉</sup>

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, д. 34

**Старовойтов Эдуард Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций, [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by), ORCID: [0000-0002-2550-5377](https://orcid.org/0000-0002-2550-5377), SPIN: [3890-2740](https://orcid.org/3890-2740), AuthorID: [152968](https://orcid.org/152968)

**Леоненко Денис Владимирович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики, геотехники и строительных конструкций, [leoden@list.ru](mailto:leoden@list.ru), ORCID: [0000-0001-8003-9279](https://orcid.org/0000-0001-8003-9279), SPIN: [6686-0799](https://orcid.org/6686-0799), AuthorID: [518257](https://orcid.org/518257)

**Аннотация.** Исследовано воздействие теплового удара на вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, возбужденные резонансной нагрузкой. Пластина несимметричная по толщине, теплоизолированная на нижней поверхности и контуре. Распределение нестационарной температуры по толщине пластины вычисляется по приближенной формуле, полученной в результате решения задачи теплопроводности при усреднении теплофизических свойств материалов трехслойного пакета. В соответствии с гипотезой Неймана на свободные колебания, вызванные тепловым ударом (мгновенным падением теплового потока), накладываются вынужденные колебания от резонансной нагрузки. Используются следующие кинематические гипотезы. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко, согласно которой нормаль к срединной поверхности в процессе деформации перестает быть нормалью, но остается прямолинейной и несжимаемой. В постановку начально-краевой задачи входят дифференциальные уравнения поперечных колебаний пластины в частных производных, полученные вариационным методом, однородные начальные условия и граничные условия шарнирного опирания контура. Искомые функции выступают прогиб пластины, угол поворота нормали в заполнителе (относительный сдвиг) и радиальное перемещение срединной поверхности заполнителя. Для их получения использована известная система собственных ортонормированных функций. Приведены соответствующие расчетные формулы и результаты численного параметрического анализа зависимости решения от интенсивности и времени воздействия теплового потока, величины силовой нагрузки.

**Ключевые слова:** круговая трехслойная пластина, тепловой удар, резонансная гармоническая нагрузка

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция-2025».

**Для цитирования:** Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Термосиловое резонансное нагружение трехслойной пластины // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 406–418. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418), EDN: [OFVTQE](https://elibrary.ru/OFVTQE)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)





Article

## Thermal force resonant loading of a three-layer plate

E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko✉

Belarusian State University of Transport, 34 Kirova St., Gomel 246653, Belarus

**Eduard I. Starovoitov**, edstar0@yandex.by, ORCID: 0000-0002-2550-5377, SPIN: 3890-2740, AuthorID: 152968**Denis V. Leonenko**, leoden@list.ru, ORCID: 0000-0001-8003-9279, SPIN: 6686-0799, AuthorID: 518257

**Abstract.** The effect of thermal shock on forced vibrations of a circular three-layer plate excited by a resonant load is investigated. The plate is asymmetrical in thickness, thermally insulated on the lower surface and contour. The distribution of the non-stationary temperature over the thickness of the plate is calculated using an approximate formula obtained as a result of solving the problem of thermal conductivity by averaging the thermophysical properties of materials of a three-layer package. In accordance with the Neumann hypothesis, forced oscillations from a resonant load are superimposed on free oscillations caused by heat stroke (instantaneous drop in heat flow). The hypothesis of a broken line is used as a kinematic one: for high-strength thin bearing layers, the Kirchhoff hypothesis; for an incompressible thicker filler, the Timoshenko hypothesis about the straightness and incompressibility of a deformed normal that rotates by some additional angle (relative shift). The formulation of the initial boundary value problem includes differential equations of transverse vibrations of the plate in partial derivatives obtained by the variational method, homogeneous initial conditions and boundary conditions of the spherical support of the contour. The desired functions are plate deflection, relative shear, and radial displacement of the median plane of the filler. The analytical solution of the initial boundary value problem is constructed by decomposing the desired displacements into a series according to a system of proper orthonormal functions. The corresponding calculation formulas and the results of numerical parametric analysis of the dependence of the solution on the intensity and time of exposure to the heat flux, the magnitude of the power load are presented.

**Keywords:** circular three-layer plate, heat stroke, resonant harmonic load

**Acknowledgements:** The work was supported by the State Scientific Research Program of the Republic of Belarus “Convergence-2025”.

**For citation:** Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Thermal force resonant loading of a three-layer plate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 406–418 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418), EDN: OFVTQE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Современные требования машиностроительного комплекса к прочности и надежности конструкций, работающих в условиях воздействия комплексных динамических и температурных нагрузок, обуславливают применение композитных материалов. Конструктивные слоистые элементы широко применяются с середины прошлого века в транспортном машиностроении, аэрокосмическом комплексе и строительстве. Исследование их поведения при динамическом нагружении в нестационарных температурных полях является одной из наиболее актуальных проблем в последнее время. Поэтому созданию необходимых математических моделей посвящен достаточно широкий ряд публикаций. Рассмотрим некоторые из них.

Монографии [1–3] посвящены разработке расчетных моделей статического и динамического деформирования слоистых конструкций при воздействии различных физико-механических полей. Предлагаются подходы к выбору кинематических гипотез, постановке и методике решения краевых и начально-краевых задач, отмечаются возникающие особенности при тепловых воздействиях. В обзорной работе [4] изложены суть асимптотического

метода решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и методика применения этого метода для решения статических и динамических краевых задач тонких тел (балки, пластины, оболочки). Рассмотрены как классические, так и неклассические краевые задачи, более общие результаты проиллюстрированы решениями конкретных задач.

В статье [5] рассмотрено деформирование трехслойного упругопластического стержня, связанного с упругим основанием Винклера. В работе [6] предложена конечно-элементная формулировка для геометрически точных многослойных балок. Межслойное скольжение и подъем не учитываются. Решение получено численно. Изгиб трехслойных пластин в нейтронном потоке и деформирование при квазистатических переменных нагружениях в стационарном температурном поле приводится в статьях [7–10]. Несущая способность круглой многослойной пластины при большом прогибе исследована в [11]. Численное моделирование деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением проведено в статьях [12, 13].

Свободные, вынужденные колебания и продольные волны в цилиндрических оболочках, включая вызванные резонансными нагрузками, рассмотрены в статьях [14–23]. Нестационарное динамическое воздействие на неоднородные балки изучалось в работах [24, 25]. Реакция слоистых пластин на ударное и импульсное воздействие исследована в публикациях [26–30]. Задачи об аэродинамических колебаниях и сверхзвуковом флаттере многослойных композитных пластин решались в [31, 32]. В статьях [33–37] анализируются характеристики динамических процессов в трехслойных пластинах и балках, взаимодействующих с упругим основанием или вязкой жидкостью. В статье [38] исследованы вынужденные колебания трехслойной круговой пластины, возбужденные мгновенно приложенной непрерывной нагрузкой и тепловым потоком.

Здесь рассмотрена постановка и предложено аналитическое решение задачи о резонансных колебаниях трехслойной упругой пластины круглой формы в нестационарном температурном поле.

## 1. Постановка задачи

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат. За координатную принимается плоскость, связанная со срединной поверхностью заполнителя (рис. 1).

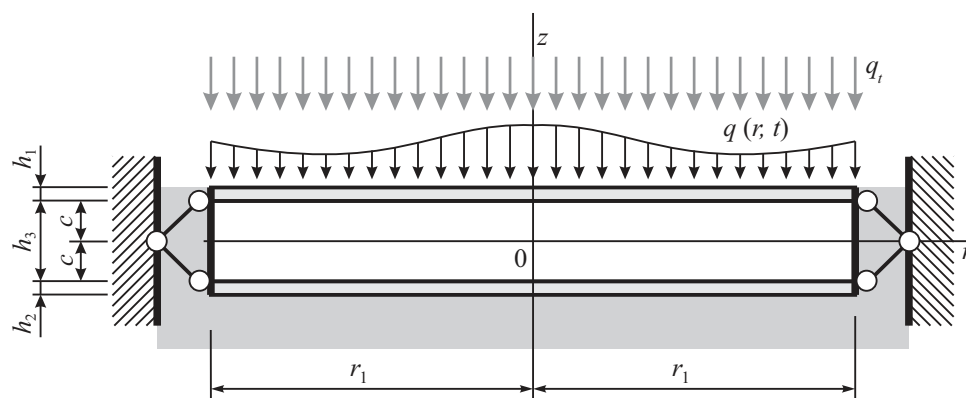


Рис. 1. Трехслойная круговая пластина под действием резонансной нагрузки и теплового потока

Fig. 1. A three-layer circular plate under resonant load and heat flow

Принимается, что к внешней плоскости  $z = c + h_1$  в начальный момент времени ( $t = 0$ ) подается тепловой поток постоянной интенсивности  $q_t$ . Пластина несимметричная по толщине. Для тонких несущих слоев с толщинами  $h_1, h_2$  справедливы гипотезы Кирхгофа, т.е. нормаль после приложения нагрузки остается прямолинейной, не изменяет своей длины и



перпендикулярности к деформированной срединной поверхности слоя. В легком достаточно толстом заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) деформирование подчиняется гипотезе Тимошенко. В этом случае нормаль к срединной поверхности заполнителя после приложения нагрузки также прямолинейна, несжимаема, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r, t)$ .

При решении задачи теплопроводности принималось, что контур пластины и ее нижняя поверхность ( $z = -c - h_2$ ) теплоизолированы. В этом случае приращение температуры  $T(z, t)$  во времени  $t$  и его изменение по толщине пластины будет определяться приближенной формулой, приведенной в [2]:

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где  $a = \lambda/C$ ,  $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$ ,  $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k / H$ ,  $H = \sum_{k=1}^3 h_k$ ,  $s = z/H$ ,  $\tau = ta/H^2$ ;  $a$  — усредненная температуропроводность;  $\lambda_k$  — коэффициент теплопроводности,  $C_k$  — коэффициент теплоемкости; здесь и далее  $k = 1, 2, 3$  — номер слоя.

В качестве физических уравнений состояния принимался закон Гука в девиаторно-сферовой форме с учетом температуры:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k e_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (\alpha = r, \varphi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k e_{rz}^{(3)} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $(e_{\alpha}^{(k)}, e_{rz}^{(3)})$  — девиаторы тензоров напряжений (деформаций),  $\sigma^{(k)}$ ,  $(\varepsilon^{(k)})$  — среднее напряжение (деформация);  $G_k$ ,  $K_k$  — модули сдвига и объемного деформирования;  $\alpha_{0k}$  — коэффициент линейного температурного расширения материалов слоев.

На пластину в начальный момент падают тепловой поток интенсивностью  $q_t$  и гармоническая силовая нагрузка, равномерно распределенная по внешней поверхности верхнего слоя:

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (3)$$

где  $q_0 = \text{const}$ ,  $\omega_k$  — интенсивность и частота внешней нагрузки, которая совпадает с одной из собственных частот  $\omega_n$  пластины  $\omega_k = \omega_n$ ;  $D$ ,  $E$  — параметры нагрузки.

Общие уравнения собственных колебаний рассматриваемой пластины в нестационарном температурном поле (1) приведены в [38]. В нашем случае в третьем уравнении появится резонансная нагрузка (3):

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $w(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $u(r, t)$  — искомые прогиб, относительный сдвиг и радиальное перемещение координатной поверхности;  $M_0 \ddot{w}$  — инерционные силы, причем

$$M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2,$$

$\rho_k$  — плотность материала, точка сверху обозначает однократную производную по времени; дифференцирование по координате обозначено запятой в нижнем индексе;  $a_i$  — коэффициенты, выраженные через механические и геометрические параметры слоев [38];  $L_2$ ,  $L_3$  — дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$



На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу между слоями  $\psi(r_1, t) = 0$ . Следовательно, на шарнирно опертом контуре  $r = r_1$  должны выполняться условия

$$u(r_1, t) = \psi(r_1, t) = w(r_1, t) = 0, \quad M_r(r_1, t) = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0, \quad (5)$$

где  $\sigma_r^{(k)}$  — радиальное напряжение в  $k$ -м слое,  $M_r$  — обобщенный изгибающий момент, учитывающий тепловое воздействие,

$$M_r = a_3 u_{,r} + a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1} - M_t, \quad M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_k K_k \int_{h_k} T z dz,$$

$$a_{60} = h_1 \left( K_1 - \frac{2}{3} G_1 \right) \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + h_2 \left( K_2 - \frac{2}{3} G_2 \right) \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) +$$

$$+ \frac{2}{3} c^3 \left( K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right),$$

$M_t$  — температурный момент, возникающий из-за объемной тепловой деформации (2), выражение для которого получено с использованием (1) и приведено в [38].

В начальный момент времени прогиб, скорость и приращение температуры предполагаются нулевыми

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0, \quad T(z, 0) = 0. \quad (6)$$

## 2. Решение начально-краевой задачи

Система (4) после элементарных преобразований приводится к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r},$$

$$L_3(w, r) + M^4 \ddot{w} = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (7)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2}.$$

Перемещения в центре пластины должны быть ограниченными, поэтому необходимо в (7) обнулить константы интегрирования  $C_2 = C_4 = 0$ . Из первых двух граничных условий (5) следуют константы интегрирования

$$C_1 = -\frac{b_1}{r_1} w_{,r}(r_1, t), \quad C_3 = -\frac{b_2}{r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

В результате для прогиба имеем два граничных условия при  $r = r_1$ :

$$w = 0, \quad a_7 w_{,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{,r} = -M_t, \quad (8)$$

где  $a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2$ ,  $a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2$ .

Согласно гипотезе Неймана решение рассматриваемой задачи получим, накладывая на свободные колебания, вызванные тепловым ударом, вынужденные колебания за счет резонансной нагрузки. Суммируя решения, получим искомые перемещения.



Собственные колебания, вызванные мгновенным падением теплового потока (тепловым ударом), исследованы в [38], поэтому остановимся на колебаниях от резонансной нагрузки (3). Искомые функции и нагрузку разложим в ряд по системе собственных функций  $v_n \equiv v_n(\beta_n r)$ :

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} v_{,r} T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} v_{,r} T_n(t),$$

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (9)$$

где  $T_n(t)$  — неизвестная функция времени;  $\beta_n$  — собственные числа оператора  $L_3$ ,  $d_n$  — нормировочный коэффициент;  $J_0(\beta_n r)$ ,  $I_0(\beta_n r)$  — функции Бесселя;  $q_n(t)$  —

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t),$$

$$D_n = \frac{D q_0 r_1}{M_0 d_n \beta_n} \left[ J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right],$$

$$E_n = \frac{E q_0 r_1}{M_0 d_n \beta_n r_1} \left[ J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right],$$

$\omega_n$  — частоты собственных колебаний, причем  $\omega_n^2 = \beta_n^4 / M^4$ .

Если в третье уравнение системы (4) подставить выражения (9) с учетом коэффициентов  $q_n(t)$ , то получим дифференциальное уравнение второго порядка для искомой функции  $T_n(t)$ . В результате, учитывая ортонормированность системы  $v_n$ , имеем

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \ddot{M}_t, \quad (10)$$

где

$$I(\beta_n) = \frac{2}{d_n \beta_n^2} \left( J_2(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_2(\beta_n r_1) \right), \quad \ddot{M}_t = \sum_{k=1}^3 \ddot{M}_{kt};$$

$$\ddot{M}_{1t} = - \frac{6 q_t \alpha_{01} a^2 \pi}{\lambda H^2} K_1 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \left( \frac{H}{\pi} \left( (-1)^n - \cos \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} \right) - n c \sin \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} \right);$$

$$\ddot{M}_{2t} = - \frac{6 q_t \alpha_{02} a^2 \pi}{\lambda H^2} K_2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \left( \frac{H}{\pi} \left( \cos \frac{\pi n h_2}{H} - 1 \right) - n c \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right);$$

$$\ddot{M}_{3t} = - \frac{6 q_t \alpha_{03} a^2 \pi}{\lambda H^2} K_3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \times$$

$$\times \left( \frac{H}{\pi} \left( \cos \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} - \cos \frac{\pi n h_2}{H} \right) + n c \left( \sin \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} + \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right).$$

Решение уравнения (10) можно представить в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \int_0^t \ddot{M}_t(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau + y_n(t), \quad (11)$$





где  $y_n(t)$  — частное решение, зависящее от частоты резонансной нагрузки  $\omega_k$ ,

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t), & n \neq k, \\ -\frac{E_k}{2\omega_k} t \cos(\omega_k t) + \frac{D_k}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t), & n = k. \end{cases}$$

Начальные прогиб, скорость движения пластины и температуру считаем нулевыми (6). Производная от температуры в начальный момент задана:

$$\dot{T}_n(0) = -\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \dot{M}_t(0),$$

где  $\dot{M}_t(0)$  — величина скорости температурного момента,

$$\begin{aligned} \dot{M}_t(0) &= \sum_{k=1}^3 \dot{M}_{kt}(0), \quad \dot{M}_{1t}(0) = \frac{3q_t \alpha_{01} a K_1}{\lambda H} \left[ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left( \frac{H}{\pi n} \left( (-1)^n - \cos \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) - c \sin \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) \right], \\ \dot{M}_{2t}(0) &= \frac{3q_t \alpha_{02} a K_2}{\lambda H} \left[ -h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left( \frac{H}{\pi n} \left( \cos \frac{\pi n h_2}{H} - 1 \right) - c \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right], \\ \dot{M}_{3t}(0) &= \frac{6q_t \alpha_{03} a K_3}{\lambda \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times \\ &\quad \times \left( \frac{H}{\pi n} \left( \cos \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} - \cos \frac{\pi n h_2}{H} \right) + c \left( \sin \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} + \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right). \end{aligned}$$

Подставив в начальные условия выражение для прогиба (9) и функцию (11), получим константы интегрирования

$$\begin{aligned} A_n &= - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k, \\ 0, & n = k, \end{cases} \\ B_n &= -\frac{1}{\omega_n} \left[ \begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k}, & n = k \end{cases} \right] - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \dot{M}_t(0). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, резонансные колебания рассматриваемой пластины, учитывающие тепловой удар, описываются выражениями (9) с функцией времени (11) и константами интегрирования (12).

### 3. Численная апробация решения

Численная апробация решения проведена для круговой шарнирно опертой трехслойной пластины радиуса  $r_1 = 1$  м, находящейся под совместным воздействием теплового потока и резонансной нагрузки с амплитудой  $q_0 = 100$  Па. Толщины слоев  $h_1 = h_2 = 0.02$  м,  $h_3 = 0.05$  м. Температура усреднялась по толщине пластины. Для вычисления частот собственных колебаний  $\omega_n$  использовались собственные числа  $\beta_n$ , приведенные в [38].

На рис. 2 показан рост амплитуды прогиба в центре пластины Д16-Т—фторопласт-4—Д16-Т при частоте нагрузки  $\omega_k$ , совпадающей с одной из частот основного тона:  $\omega_k = \omega_0$  (рис. 2, а) и  $\omega_k = \omega_1$  (рис. 2, б).

Нагревание пластины примерно на  $200^\circ\text{C}$  приводит к среднему росту амплитуды колебаний на 11% и отклонению оси колебаний навстречу тепловому потоку. Увеличение собственной частоты колебаний приводит к большему отклонению оси колебаний.

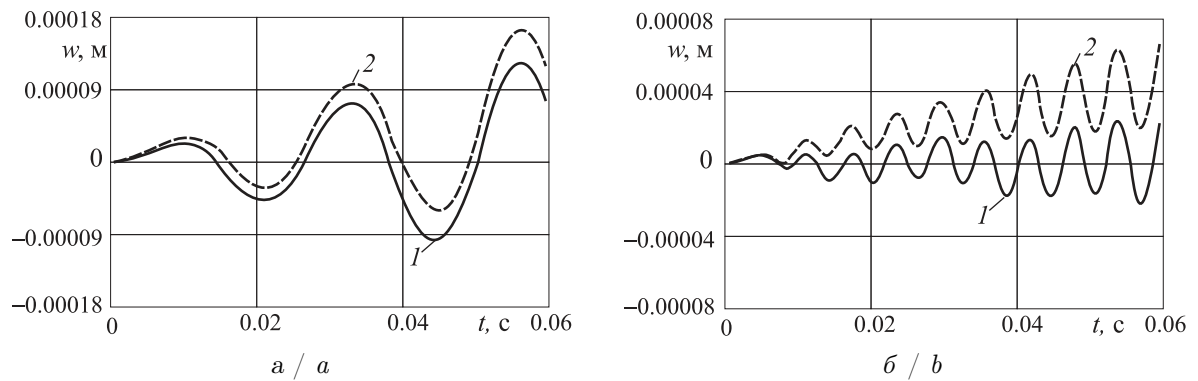


Рис. 2. Изменение прогиба пластины во времени при резонансных колебаниях в тепловом потоке (Д16-Т—фторопласт-4—Д16-Т) при  $\omega_k = \omega_0$  (а) и  $\omega_k = \omega_1$  (б). Кривая 1 соответствует величине теплового потока  $q_t = 0$  Дж/(м<sup>2</sup>с); кривая 2 —  $q_t = 2 \cdot 10^5$  Дж/(м<sup>2</sup>с)  
 Fig. 2. Change in plate deflection over time during resonant oscillations in the heat flow (D16-T—fluoroplastic-4—D16-T) at  $\omega_k = \omega_0$  (a) and  $\omega_k = \omega_1$  (b). Curve 1 corresponds to the heat flux value  $q_t = 0$  J/(m<sup>2</sup>s); curve 2 corresponds to  $q_t = 2 \cdot 10^5$  J/(m<sup>2</sup>s)

Аналогичные результаты для пластины, набранной из материалов ВТ-20—фторопласт-4—Д16-Т, приведены на рис. 3. Здесь, по сравнению с предыдущим случаем, отклонение оси колебаний наблюдается в большей степени в обоих случаях резонанса. Амплитуда колебаний уменьшается, что объясняется относительно большей жесткостью на изгиб титанового несущего слоя.

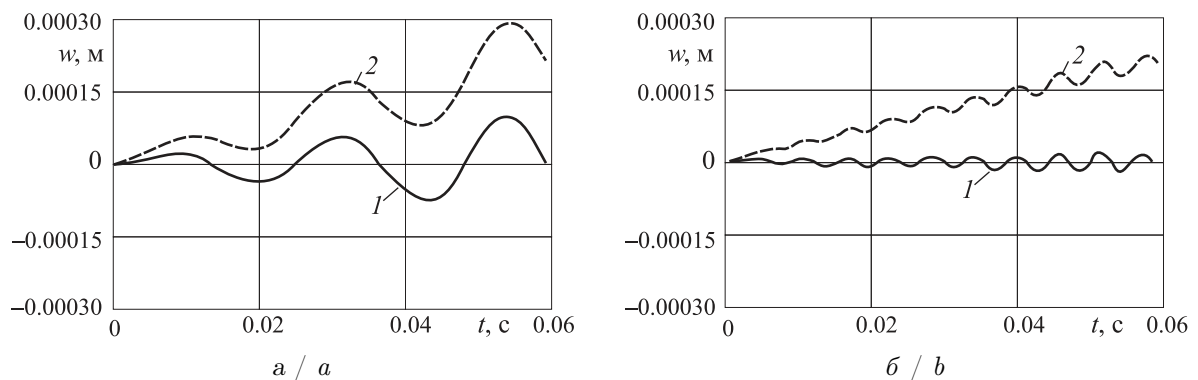


Рис. 3. Изменение прогиба пластины во времени при резонансных колебаниях в тепловом потоке (ВТ-20—фторопласт-4—Д16-Т) при  $\omega_k = \omega_0$  (а) и  $\omega_k = \omega_1$  (б). Кривая 1 соответствует величине теплового потока  $q_t = 0$  Дж/(м<sup>2</sup>с); кривая 2 —  $q_t = 2 \cdot 10^5$  Дж/(м<sup>2</sup>с)  
 Fig. 3. Change in plate deflection over time during resonant oscillations in a heat flow (VT-20—PTFE-4—D16-T) at  $\omega_k = \omega_0$  (a) and  $\omega_k = \omega_1$  (b). Curve 1 corresponds to the heat flux value  $q_t = 0$  J/(m<sup>2</sup>s); curve 2 corresponds to  $q_t = 2 \cdot 10^5$  J/(m<sup>2</sup>s)

## Заключение

Предложенная математическая модель термосилового резонансного воздействия на трехслойную упругую круговую пластину позволяет учитывать влияние теплового удара на параметры колебаний. При шарнирно опертом контуре пластины тепловой удар приводит к возникновению свободных колебаний, на которые накладываются вынужденные колебания от резонансной силовой нагрузки. Повышение жесткости верхнего несущего слоя приводит к уменьшению амплитуды прогиба и увеличению отклонения оси колебаний.

## Список литературы

1. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Boca Raton : CRC Press, 2003. 858 p. DOI: [10.1201/b12409](https://doi.org/10.1201/b12409)



2. Zhuravkov M. A., Lyu Yongtao, Starovoitov E. I. Mechanics of solid deformable body. Singapore : Springer, 2023. 317 p. DOI: [10.1007/978-981-19-8410-5](https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5), EDN: YECKNS
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: Computational modelling and applications. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Aghalovyan L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore ; London : World Scientific Publishing Co., 2015. 376 p.
5. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Упругопластический изгиб трехслойного стержня на упругом основании // Прикладная механика. 2007. Т. 43, вып. 4. С. 110–120. EDN: ZISSEX
6. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // Acta Mechanica. 2014. Vol. 225, iss. 2. P. 523–541. DOI: [10.1007/s00707-013-0972-5](https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5)
7. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины в нейтронном потоке локальной нагрузкой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 360–375. DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375), EDN: DIDXGQ
8. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75. DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75), EDN: HAOYOL
9. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load // International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering. 2017. Vol. 6, iss. 1. DOI: [10.14810/ijmech.2017.6101](https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101)
10. Яровая А. В. Термоупругий изгиб трехслойной пластины на деформируемом основании // Прикладная механика. 2006. Т. 42, № 2. С. 96–103. EDN: HFGHJZ
11. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection // Journal of Engineering Mechanics. 2017. Vol. 143, iss. 9. DOI: [10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
12. Паймушин В. Н. Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 1. С. 3–26.
13. Баженов В. Г., Линник Е. Ю., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А. Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 14–27. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27), EDN: DFKLFV
14. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells // Mikhasev G. I., Altenbach H. Thin-walled laminated structures. Cham : Springer, 2019. P. 157–198. (Advanced Structured Materials, vol. 106). DOI: [10.1007/978-3-030-12761-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4)
15. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a three-layered cylindrical viscoelastoplastic shell // Прикладная механика. 2001. Т. 37, № 9. С. 100–107. EDN: MPVWIL
16. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 2. С. 69–76. EDN: SEJMAV
17. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 196–204. DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204), EDN: EAHYFO
18. Бакулин В. Н., Бойцова Д. А., Недбай А. Я. Параметрический резонанс подкрепленной шпангоутами трехслойной цилиндрической композитной оболочки // Механика композитных материалов. 2021. Т. 57, № 5. С. 887–900. DOI: [10.22364/mkm.57.5.06](https://doi.org/10.22364/mkm.57.5.06)
19. Блинков Ю. А., Месянжсин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. DOI: [10.18500/hm1816-9791-2016-16-2-184-197](https://doi.org/10.18500/hm1816-9791-2016-16-2-184-197), EDN: WCNQLF
20. Лекомцев С. В., Матвеев В. П. Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия.



- Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 71–85. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85), EDN: [QFMMAH](#)
21. Крылова Е. Ю. Математическая модель колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 231–244. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244), EDN: [VLEBOS](#)
  22. Суворов Е. М., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 850–859. EDN: [PGRKRJ](#)
  23. Дзедзисавили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 49–56. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56), EDN: [BFHZFQ](#)
  24. Кубенко В. Д., Плещачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании // Прикладная механика. 2006. Т. 42, № 5. С. 57–63. EDN: [VDICMO](#)
  25. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, iss. 4. P. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061), EDN: [UGSEFV](#)
  26. Смирнов А. Л., Васильев Г. П. Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 227–237. DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237), EDN: [TSGRWC](#)
  27. Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates // Composite Structures. 2015. Vol. 133. P. 1127–1136. DOI: [10.1016/j.compstruct.2015.08.035](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035)
  28. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material // International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. 2015. Vol. 3, iss. 08. P. 1487–1493. DOI: [10.18535/ijmeit/v2i8.02](https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02)
  29. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. DOI: [10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451), EDN: [KRM0VZ](#)
  30. Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К. Статическое и моногармоническое акустическое воздействия на многослойную пластину // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 3. С. 407–436.
  31. Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Шиликин В. М. Моделирование динамической реакции при резонансных колебаниях углепластиковой пластины с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 4. С. 609–630.
  32. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // Aerospace Science and Technology. 2016. Vol. 52. P. 41–51. DOI: [10.1016/j.ast.2016.02.017](https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017)
  33. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок // Механика композитных материалов. 2016. Т. 52, вып. 5. С. 943–954. EDN: [SBWKDH](#)
  34. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 944. Art. 012057. DOI: [10.1088/1742-6596/944/1/012057](https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057)
  35. Быкова Т. В., Грушенкова Е. Д., Попов В. С., Попова А. А. Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 351–366. DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366), EDN: [ECKRZN](#)
  36. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3–11. EDN: [RXRDZJ](#)



37. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient // *Meccanica*. 2016. Vol. 51, iss. 3. P. 725–739. DOI: [10.1007/s11012-015-0229-6](https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6)
38. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 123–137. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137), EDN: [TMUGDP](https://www.edn.ru/1816-9791-2024-24-1-123-137)

## References

1. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2003. 858 p. DOI: [10.1201/b12409](https://doi.org/10.1201/b12409)
2. Zhuravkov M. A., Lyu Yongtao, Starovoitov E. I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore, Springer, 2023. 317 p. DOI: [10.1007/978-981-19-8410-5](https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5), EDN: [YECKNS](https://www.edn.ru/978-981-19-8410-5)
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Aghalovyan L. *Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells*. Singapore, London, World Scientific Publishing, 2015. 376 p.
5. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, iss. 4, pp. 451–459. DOI: [10.1007/s10778-007-0042-6](https://doi.org/10.1007/s10778-007-0042-6), EDN: [MCMQPR](https://www.edn.ru/10778-007-0042-6)
6. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, iss. 2, pp. 523–541. DOI: [10.1007/s00707-013-0972-5](https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5)
7. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of an elastic circular three-layer plate in a neutron flux by a local load. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 360–375 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375), EDN: [DIDXGQ](https://www.edn.ru/1816-9791-2022-22-3-360-375)
8. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Repeated alternating loading of a elastoplastic three-layer plate in a temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75), EDN: [HAOYOL](https://www.edn.ru/1816-9791-2021-21-1-60-75)
9. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, 2017, vol. 6, iss. 1. DOI: [10.14810/ijmech.2017.6101](https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101)
10. Yarovaya A. V. Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation. *International Applied Mechanics*, 2006, vol. 42, iss. 2, pp. 206–213. DOI: [10.1007/s10778-006-0078-z](https://doi.org/10.1007/s10778-006-0078-z), EDN: [MCMQPR](https://www.edn.ru/10778-006-0078-z)
11. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017, vol. 143, iss. 9. DOI: [10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
12. Paimushin V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 1, pp. 1–16. DOI: [10.1007/s11029-017-9636-1](https://doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1)
13. Bazhenov V. G., Linnik E. Yu., Nagornyykh E. V., Samsonova D. A. Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 14–27 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27), EDN: [DFKLFV](https://www.edn.ru/1816-9791-2024-24-1-14-27)
14. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Advanced Structured Materials, vol. 106. Cham, Springer, 2019, pp. 157–198. DOI: [10.1007/978-3-030-12761-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4)
15. Gorshkov A. G., Starovoitov É. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a three-layered cylindrical viscoelastoplastic shell. *International Applied Mechanics*, 2001, vol. 37, iss. 9, pp. 1196–1203. DOI: [10.1023/A:1013290600951](https://doi.org/10.1023/A:1013290600951), EDN: [LGYIHX](https://www.edn.ru/1013290600951)
16. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178), EDN: [SKRUSB](https://www.edn.ru/1052618814010178)
17. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 196–204 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204), EDN: [EAHYFO](https://www.edn.ru/1816-9791-2022-22-2-196-204)





18. Bakulin V. N., Boitsova D. A., Nedbai A. Ya. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, vol. 57, iss. 5, pp. 623–634. DOI: [10.1007/s11029-021-09984-9](https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9), EDN: [OWFMTR](#)
19. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave occurrences mathematical modeling in two geometrically nonlinear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible liquid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197), EDN: [WCNQLF](#)
20. Lekontsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibration of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 71–85 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85), EDN: [QFMMAH](#)
21. Krylova E. Yu. Mathematical model of orthotropic meshed micropolar cylindrical shells oscillations under temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 231–244 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244), EDN: [VLEBOS](#)
22. Suvorov Y. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 511–518. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015), EDN: [WQYBID](#)
23. Dzebisashvili G. T., Smirnov A. L., Filippov S. B. Free vibration frequencies of prismatic thin shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 49–56 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56), EDN: [BFHZFQ](#)
24. Kubenko V. D., Pleskachevskii Yu. M., Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2006, vol. 42, iss. 5, pp. 541–547. DOI: [10.1007/s10778-006-0118-8](https://doi.org/10.1007/s10778-006-0118-8), EDN: [MKSHTX](#)
25. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 4, pp. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061), EDN: [UGSEFV](#)
26. Smirnov A. L., Vasiliev G. P. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237), EDN: [TSGRWC](#)
27. Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, vol. 133, pp. 1127–1136. DOI: [10.1016/j.compstruct.2015.08.035](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035)
28. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*, 2015, vol. 3, iss. 08, pp. 1487–1493. DOI: [10.18535/ijmeit/v2i8.02](https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02)
29. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The geometrical irregular plates under the influence of the quick changed on the time coordinate forces and temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 442–451 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451), EDN: [KRMOVZ](#)
30. Paimushin V. N., Gazizullin R. K. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 3, pp. 283–304. DOI: [10.1007/s11029-017-9662-z](https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z)
31. Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 4, pp. 425–440. DOI: [10.1007/s11029-017-9673-9](https://doi.org/10.1007/s11029-017-9673-9)
32. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, iss. 52, pp. 41–51. DOI: [10.1016/j.ast.2016.02.017](https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017)
33. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, iss. 5, pp. 665–672. DOI: [10.1007/s11029-016-9615-y](https://doi.org/10.1007/s11029-016-9615-y), EDN: [YXHNYN](#)
34. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 944, art. 012057. DOI: [10.1088/1742-6596/944/1/012057](https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057)



35. Bykova T. V., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic response of a sandwich plate possessing a compressible core and interacting with a rigid die via a viscous fluid layer. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 351–366 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366), EDN: [ECKRZN](#)
36. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S. Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 1, pp. 1–8. DOI: [10.3103/S1052618814010026](https://doi.org/10.3103/S1052618814010026), EDN: [WQYYKN](#)
37. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 725–739. DOI: [10.1007/s11012-015-0229-6](https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6)
38. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 123–137 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137), EDN: [TMUGDP](#)

Поступила в редакцию / Received 18.07.2024

Принята к публикации / Accepted 05.10.2024

Опубликована / Published 29.08.2025



Научная статья

УДК 532.533

## Численное исследование коагуляции дисперсных включений при вдуве капельных фракций в поток запыленной среды

Д. А. Тукмаков

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

**Тукмаков Дмитрий Алексеевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики сплошных сред, [tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru), ORCID: [0000-0002-0335-8548](https://orcid.org/0000-0002-0335-8548), SPIN: [3556-8576](https://elibrary.ru/3556-8576), AuthorID: [739648](https://elibrary.ru/739648)

**Аннотация.** В работе численно решается задача о коагуляции твердых частиц и капель при вдуве газокapельного потока в поток газозвеси. Предполагалось, что в плоском канале движется запыленная среда, а через боковую поверхность канала происходит вдув газокapельной смеси. В результате коагуляции твердых частиц и капель происходит уменьшение средней плотности фракции твердых частиц и изменение фракционного состава капельной смеси. Расчеты выполнены на основе математической модели динамики полидисперсной многоскоростной и многотемпературной газозвеси с лагранжевой моделью коагуляции частиц с относительным скоростным скольжением. Математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования динамики многофазных сред, позволяющую учесть межфазное взаимодействие. Динамика несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с межфазным теплообменом и обменом импульсом. Учитывались сила аэродинамического сопротивления, сила присоединенных масс и динамическая сила Архимеда. Дисперсная фаза состояла из ряда фракций, различающихся размером дисперсных включений и плотностью материала частиц. Гидро- и термодинамика каждой дисперсной фракции описывалась системой уравнений гидродинамического типа, включающей в себя уравнение неразрывности, уравнения сохранения составляющих импульса и уравнение сохранения тепловой энергии, записанные с учетом межфазного теплового и силового взаимодействия. Система уравнений динамики многоскоростной многотемпературной полидисперсной системы интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака. Монотонность решения обеспечивалась схемой нелинейной коррекции. В результате проведения расчетов получены временные и пространственные зависимости, характеризующие эволюцию состава многофракционной системы при смешении потоков различной дисперсности.

**Ключевые слова:** коагуляция, многофазная среда, полидисперсная газозвесь, вязкий сжимаемый теплопроводный газ, численное моделирование

**Благодарности:** Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук».

**Для цитирования:** Тукмаков Д. А. Численное исследование коагуляции дисперсных включений при вдуве капельных фракций в поток запыленной среды // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 419–433. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433), EDN: [OVRYHI](https://elibrary.ru/OVRYHI)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Numerical study of coagulation of dispersed inclusions during injection of droplet fractions into a flow of dusty medium

D. A. Tukmakov

Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevskogo St., Kazan 420111, Russia

**Dmitry A. Tukmakov**, tukmakovda@imm.knc.ru, ORCID: [0000-0002-0335-8548](https://orcid.org/0000-0002-0335-8548), SPIN: [3556-8576](https://www.spin.ru/3556-8576), AuthorID: [739648](https://www.authorid.ru/739648)

**Abstract.** The paper presents a numerical solution to the problem of coagulation of solid particles and droplets during the injection of a gas-droplet flow into a gas suspension flow. It was assumed that a dusty medium moves in a flat channel, and a gas-droplet mixture is blown through the side surface of the channel. As a result of the coagulation of solid particles and droplets, the average density of the solid particle fraction decreases and the fractional composition of the droplet mixture changes. The calculations are based on a mathematical model of the dynamics of a polydisperse multi-velocity and multi-temperature gas suspension with a Lagrangian model of particle coagulation with relative velocity sliding. The mathematical model implemented a continuum technique for modeling the dynamics of multiphase media, which makes it possible to take into account the interphase interaction. The dynamics of the carrier medium is described by the Navier–Stokes equations for a compressible heat-conducting gas with interphase heat and momentum exchange. The aerodynamic drag force, the added mass force, and the dynamic Archimedes force were taken into account. The dispersed phase consisted of a number of fractions differing in the size of dispersed inclusions and the density of the particle material. The hydro- and thermodynamics of each dispersed fraction were described by a system of hydrodynamic equations, including the continuity equation, the equations for the conservation of momentum components, and the equation for the conservation of thermal energy, written taking into account the interphase thermal and force interaction. The system of equations for the dynamics of a multi-velocity multi-temperature polydisperse system was integrated by the explicit finite-difference McCormack method. The monotonicity of the solution was ensured by a nonlinear correction scheme. As a result of the calculations, time and space dependencies were obtained that characterize the evolution of the composition of a multi-fraction system when mixing flows of different dispersion.

**Keywords:** coagulation, multiphase medium, polydisperse gas suspension, viscous compressible heat-conducting gas, numerical modeling

**Acknowledgements:** This work was supported by the framework of the state assignment of the Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”.

**For citation:** Tukmakov D. A. Numerical study of coagulation of dispersed inclusions during injection of droplet fractions into a flow of dusty medium. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 419–433 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433), EDN: [OVRYHI](https://www.edn.ru/OVRYHI)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Методы моделирования динамики неоднородных сред позволяют описать многие природные и технологические процессы [1–31]. Общая теория динамики многофазных и неоднородных сред представлена в монографии [1].

Проблемы высокоскоростного движения газожидкостных сред исследованы в [2]: изложены теоретические основы, расчетные методы и примеры решения прикладных задач.

В [3] представлены результаты исследований по кинетической теории коагуляции, разработаны аналитические методы решения уравнений коагуляции.



Теоретические и экспериментальные результаты, связанные с описанием течений газодисперсных сред в соплах с учетом взаимодействия частиц с газовым потоком, приведены в [4].

В [5] рассматриваются вопросы математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах, получены уравнения и определена структура ударной волны в газовых смесях и двухфазных средах.

Методология математического моделирования течений двух- и трехфазных неоднородных сред, состоящих из газа с твердыми и жидкими частицами при наличии их взаимодействия между собой, разрабатывалась в [6].

В [7] представлены математические модели и проведены численные расчеты без учета вязкости среды динамики запыленных, газок капельных и порошковых сред в одномерном приближении.

Математические модели, численные алгоритмы решения и результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесьях с металлическими частицами приведены в [8].

На данный момент актуальными являются также исследования динамики многофазных сред без учета механических превращений дисперсных включений [9, 10]. Так, в [9] получено аналитическое решение уравнений одномерной стационарной модели уединенной волны в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов, рассмотрено течение жидкости с газовыми пузырьками. В [10] изучаются особенности эволюции волн в жидкости, содержащей область с пузырьками газа. Задача рассматривается в двухмерной постановке, уравнения математической модели интегрируются численно. Представлены результаты исследований воздействия волнового импульса на твердую стенку, частично покрытую пузырьковой завесой.

Методика математического моделирования процесса коагуляции взвешенных частиц, основанная на статистическом методе Монте-Карло, представлена и апробирована в [11].

В работе [12] приведены результаты исследования влияния гидродинамического взаимодействия частиц сферической формы на скорость их коагуляции.

На основе модели несжимаемой жидкости в [13] проведено численное моделирование динамики столкновения двух капель азота в низкотемпературной среде при различных числах Вебера, Рейнольдса и параметрах удара. Для сопоставления приводится описание столкновения двух водяных капель.

В статье [14] построена модель движения газодисперсной среды, сопровождающаяся процессами гомогенной нуклеации, коагуляции и фазовыми переходами. Считается, что процесс коагуляции кластеров происходит за счет их броуновского движения.

В [15] математически моделируется процесс коагуляции твердых дисперсных частиц с каплями орошаемой жидкости в аппаратах мокрого типа на основе труб Вентури под действием ультразвуковых колебаний высокой интенсивности. Показана возможность повышения эффективности улавливания высокодисперсных частиц в скруббере Вентури за счет введения ультразвуковых колебаний и определены оптимальные режимы (частота, уровень звукового давления), включая направление и зону воздействия.

Математическое моделирование коагуляции капель конечного числа фракций полидисперсной смеси, впрыскиваемых форсункой в область аэрохолодильной установки вдоль направления движения потока воздуха, выполнено в [16]. Доказывается незначительность влияния тепломассобмена между веществом капель и окружающим воздухом на изменение их размеров за время движения от форсунки до рабочей части установки.

Работа [17] посвящена исследованию процессов столкновения и коагуляции дисперсных частиц. Разработана математическая модель ядер столкновения и коагуляции частиц сферической формы в турбулентном потоке. Моделируется коагуляция капель, взвешенных в атмосфере.

В статье [18] разработана математическая модель ядра коагуляции при наличии турбу-





лентного, броуновского, градиентного и гравитационного механизмов столкновений, также учитывался эффект кластеризации частиц под действием турбулентности.

В исследовании [19] оценивается относительная погрешность экспериментов по субмикронной аэрозольной коагуляции и гравитационному осаждению, а также результаты прогнозирования модели применительно к водяному пару. На основе экспериментальных данных в этой статье к исходной модели добавлены поправочные коэффициенты для интенсивности процессов коалесценции и седиментации.

Изучению скорости коагуляции сферических частиц, взвешенных в газовой среде, посвящена работа [20]. Исследовано влияние электростатических сил на скорость коагуляции проводящих сфер, взаимодействующих друг с другом. При очистке запыленных сред от твердых дисперсных включений применяются технологии, основанные на поглощении твердых частиц жидкими каплями с последующим разделением фаз.

Для описания физических процессов в такого рода технологиях, для конструирования «мокрых» скрубберов — устройств, их реализующих, а также для выбора рабочих режимов разрабатываются численные модели течения газодисперсных сред [21–23]. В работе [21] рассмотрены задачи математического моделирования и расчета тепловой эффективности таких устройств, описаны конструктивные характеристики насадочных скрубберов конденсационного охлаждения газа водой в пленочном противоточном режиме. В [22] приведены результаты исследования движения вращающихся капель жидкости и предложена технология гидровихревого пылеулавливания. В [23] разработана общая математическая модель эволюции состояния трехфазной полидисперсной среды применительно к процессу очистки газов от твердых частиц в скруббере на основе сопла Вентури.

В устройствах жидкостного пылеулавливания, происходящего при температурах, меньших температуры фазового равновесия рабочей жидкости, основным физическим процессом является процесс коагуляции твердой частицы с каплей и капель различного размера. Технология очистки газа от твердых частиц с использованием «мокрых» скрубберов включает в себя процесс коагуляции водяных капель и твердых частиц с последующим разделением газовой и дисперсной фазы, состоящей из капель с твердыми частицами. Разделение фаз происходит в центробежных сепараторах или в инерционных классификаторах, эффективность работы которых зависит от массы частиц, образующихся в процессе коагуляции. Поскольку при распылении жидкости образуется полидисперсная система капель, то требуется оценка дисперсности системы с учетом коагуляции капель и твердых частиц, а также коагуляции капель различных размеров, движущихся в потоке с разным скоростным скольжением.

В данной работе представлена математическая модель и приведены результаты расчетов динамики и дисперсности смеси при взаимодействии полидисперсного газожидкостного потока и потока газозвеси, содержащей твердые частицы. Целью работы было исследование процесса коагуляции пылевой фракции и капельных фракций при несоосном начальном направлении потоков. Рассмотрена пространственная и временная эволюция распределения средних плотностей фракций на основе численного решения системы уравнений динамики полидисперсной газозвеси [7], дополненной моделью столкновительной коагуляции дисперсных включений [24].

## Математическая модель

Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [7, 25–31]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = - \sum_{i=1}^n F_{xi} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$



$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = - \sum_{i=1}^n F_{yi} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{yx}u - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \\ = - \sum_{i=1}^n Q_i - \sum_{i=1}^n (|F_{xi}|u_i + |F_{yi}|v_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Замыкают уравнения (1)–(4) следующие соотношения:

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho(u^2 + v^2)/2), \quad e = \rho(I + (u^2 + v^2)/2), \quad (5)$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7)$$

В уравнениях применяются следующие обозначения:  $\rho$  — плотность газа;  $u, v$  — составляющие вектора скорости газа  $V = (u, v)$ ;  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  — составляющие тензора вязких напряжений несущей среды;  $p$  — давление газа;  $e$  — полная энергия несущей среды;  $\lambda, \gamma, \mu$  — коэффициенты теплопроводности, динамической вязкости и постоянная адиабаты для несущей среды;  $I = RT/(\gamma - 1)$  — тепловая энергия несущей среды, где  $R$  — газовая постоянная,  $T$  — температура несущей среды [7, 32].

Динамика каждой фракции дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности фракции, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения тепловой энергии [26]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) = F_{xi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) = F_{yi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i) = Q_i. \quad (11)$$

Индекс  $i$  относится к физическим величинам  $i$ -й фракции дисперсной фазы. Переменные без индекса описывают изменение физических параметров несущей среды.

Для дисперсной фазы используются обозначения:  $\alpha_i$  — объемное содержание  $i$ -й фракции дисперсной фазы;  $\rho_i = \alpha_i \rho_{i0}$  — средняя плотность  $i$ -й фракции дисперсной фазы;  $\rho_{i0}$  — физическая плотность материала  $i$ -й фракции;  $u_i, v_i$  — составляющие вектора скорости  $i$ -й фракции дисперсной фазы  $V_i = (u_i, v_i)$ ;  $e_i$  и  $T_i$  — тепловая энергия и температура  $i$ -й фракции дисперсной фазы;  $e_i = \rho_i C_{pi} T_i$ , где  $C_{pi}$  — удельная теплоемкость вещества  $i$ -й фракции дисперсной фазы.

Сила межфазного взаимодействия включает в себя [1] силу аэродинамического сопротивления  $F_{xid}, F_{yid}$ :

$$F_{xid} = \frac{3\alpha_i}{4d_i} C_{di} \rho \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2} (u - u_i),$$

$$F_{yid} = \frac{3\alpha_i}{4d_i} C_{di} \rho \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2} (v - v_i),$$

динамическую силу Архимеда  $F_{xiA}, F_{yiA}$ :

$$F_{xiA} = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad F_{yiA} = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$



и силу присоединенных масс  $F_{xim}$ ,  $F_{yim}$ :

$$F_{xim} = 0.5\alpha_i\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i\frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right),$$

$$F_{yim} = 0.5\alpha_i\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i\frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right).$$

Тепловой поток между несущей средой и  $i$ -й фракцией описывается следующим образом [7]:

$$Q_i = 6\alpha_i\lambda Nu_i(T - T_i)/d_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $d_i$  — диаметр частицы  $i$ -й фракции,  $Nu_i$  — относительное число Нуссельта:

$$Nu_i = 2 \exp(-M_i) + 0.459 Re_i^{0.55} Pr^{0.33},$$

где  $M_i$  — относительное число Маха:

$$M_i = |\mathbf{V} - \mathbf{V}_i|,$$

$Pr$  — число Прандтля:

$$Pr = c_p\mu(\lambda)^{-1}.$$

Здесь  $c_p$  — теплоемкость газа.

Все частицы предполагаются сферической формы. Коэффициент сопротивления частицы  $i$ -й фракции  $C_{di}$  определяется формулой [7]

$$C_{di} = C_{di}^0\phi(M_i)\varphi(\alpha_i),$$

где  $C_{di}^0 = \frac{24}{Re_i} + \frac{4}{Re_i^{0.5}} + 0.4$ ,  $\phi(M_i) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_i^{0.63}}\right)$ ,  $\varphi(\alpha_i) = (1 - \alpha_i)^{-2.5}$ ,  $Re_i$  — относительное число Рейнольдса:

$$Re_i = d_i\rho|\mathbf{V} - \mathbf{V}_i|/\mu.$$

При определении коэффициента сопротивления  $C_{di}$  функция  $\varphi(\alpha_i)$  учитывает множественность частиц [4]. Аппроксимации для коэффициента сопротивления и числа Нуссельта справедливы для относительных чисел Маха и Рейнольдса [7]:

$$0 < M_i \leq 2, \quad 0 < Re_i \leq 2 \cdot 10^5.$$

Для описания процесса коагуляции частиц использовалась лагранжева модель коагуляции частиц с относительным скоростным скольжением [24, 25]. Масса  $m_i$  частицы  $i$ -й фракции ( $i = 1, \dots, n$ ) возрастает за счет поглощения менее крупных частиц  $j$ -х фракций с массой  $m_j$  [24] ( $j = 1, \dots, i - 1$ ):

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}n_jm_j.$$

Здесь  $k_{ij}$  — константа коагуляции:

$$k_{ij} = 0.25\pi(d_i + d_j)^2 \left[ u_i \cos(\theta_j) + v_i \sin(\theta_j) - \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \right],$$

где  $\theta_j = \arctg(u_j/v_j)$ .

Полученное значение массы частиц  $i$ -й фракции в данном узле конечно-разностной сетки определяет новое значение диаметра частицы  $i$ -й фракции —  $d_i$ .



Уменьшение концентрации мелких частиц  $i$ -х фракций вследствие поглощения их частицами  $j$ -х ( $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ ) фракций, чьи дисперсные включения имеют больший размер, описывается уравнениями

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j m_j, \quad \alpha_i = \frac{\pi d_i^3 n_i}{6}.$$

Новое значение объемного содержания  $i$ -й фракции, изменившееся вследствие коагуляции, есть  $\alpha_i$ . Объемное содержание и физическая плотность вещества фракции определяют среднюю плотность фракции, изменившуюся вследствие коагуляции  $\rho_i = \alpha_i \rho_{i0}$ . В начале каждого временного цикла вычислений определялась концентрация частиц  $i$ -й фракции через ее среднюю плотность и диаметр частиц. Слияние мелких капель с более крупными приводит к изменению скорости капель укрупнившейся фракции [24, 25]:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{i-1} (u_j - u_i) k_{ij} n_j m_j, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{i-1} (v_j - v_i) k_{ij} n_j m_j.$$

Температура частицы  $i$ -й фракции после коагуляции с частицами фракций, чьи частицы имеют меньший размер, находилась из соотношения

$$T_{i*} = \frac{1}{C_{i*} m_{i*}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j m_j C_j T_j + C_i m_i T_i \right),$$

где  $T_{i*}$ ,  $C_{i*}$ ,  $m_{i*}$  — температура, удельная массовая теплоемкость и масса частицы  $i$ -й фракции после коагуляции;  $T_i$ ,  $C_i$ ,  $m_i$  — те же параметры до коагуляции. Зная новую температуру и среднюю плотность, находим тепловую энергию фракции, измененную при коагуляции. Связанные с коагуляцией изменения средней плотности, скорости и температуры фракций дисперсной фазы учитывались на каждом временном шаге основного алгоритма.

Система уравнений (1)–(8) интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака второго порядка точности [32]. Для обеспечения монотонности решения применялась схема нелинейной коррекции (10), (11) [26, 33]. С целью увеличения устойчивости численного решения применялась схема фильтрации конечно-разностного решения [34].

На твердых поверхностях для составляющих скорости задавались однородные граничные условия Дирихле, для остальных динамических функций задавались однородные граничные условия Неймана. На входе в канал задавалась продольная скорость пылевой фракции и газа, концентрация пылевой фракции. На выходе из канала задавались однородные условия Неймана для всех функций. В области впрыска капельных фракций задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad x \leq L_1, \quad \rho_k(t, i, 1) &= \alpha_{k0} \rho_{k0}, \\ u(t, i, 1) &= u(t, i, 2), \quad u_1(t, i, 1) = u_1(t, i, 2), \quad u_k(t, i, 1) = u_k(t, i, 2), \\ v(t, i, 1) &= v_0, \quad v_1(t, i, 1) = v_1(t, i, 2), \quad v_k(t, i, 1) = v_0, \quad k = 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

Здесь  $i, j$  — нумерация узлов в  $x$  и  $y$  направлениях соответственно. Расчеты проводились на равномерной сетке  $\Delta x_i = i \cdot L / (N_x - 1)$ ,  $\Delta y_j = j \cdot h / (N_y - 1)$ , где  $N_x, N_y$  — количество узлов.

## Результаты расчетов

На рис. 1 представлена схема моделируемого неоднородного потока в плоском канале. Предполагается, что в начальный момент времени во всей расчетной области газозвесь, состоящая из пылевой фракции и газа, движется в продольном направлении со скоростью  $u_0$ ,

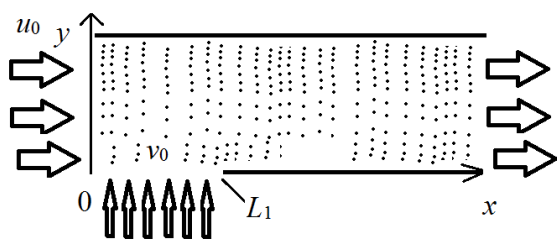


Рис. 1. Общая схема моделируемого процесса  
Fig. 1. General diagram of the simulated process

Приведенные ниже результаты расчетов получены при следующих геометрических параметрах канала и физических характеристиках неоднородных потоков: длина канала составляла  $L = 0.4$  м, высота канала  $h = 0.1$  м, ширина области бокового вдува капельных фракций  $L_1 = 0.1$  м.

Начальная температура газа и фракций дисперсной фазы:  $T_0 = T_{i0} = 293$  К,  $i = 1, \dots, 5$ . Начальная плотность несущей среды —  $\rho_0 = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>. В расчетах задавались следующие параметры несущей фазы газозвеси:  $M = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса воздуха, теплопроводность несущей среды предполагалась равной  $\lambda = 0.02553$  Вт/(м·К), динамическая вязкость несущей среды —  $\mu = 1.72 \cdot 10^{-5}$  Па·с.,  $\gamma = 1.4$ ,  $R = 8.31$  Дж/(моль·К).

Физические плотности вещества пылевой и капельных фракций —  $\rho_{10} = 2500$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_{i0} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, \dots, 5$  соответственно. Газозвесь твердых частиц монодисперсна и состоит из сферических частиц диаметром  $d_1 = 2$  мкм. Диаметры капель жидких фракций  $d_2 = 4$  мкм,  $d_3 = 8$  мкм,  $d_4 = 20$  мкм,  $d_5 = 40$  мкм. Скорости потоков на входе в канал составляют  $u_0 = 20$  м/с,  $v_0 = 4$  м/с.

На твердых поверхностях для всех составляющих скоростей газовой фазы задавались однородные граничные условия Дирихле. Начальное объемное содержание и объемное содержание на входе в канал пылевой фракции  $\alpha_{10} = 4 \cdot 10^{-5}$ , ее начальная средняя плотность и средняя плотность на входе в канал составляет  $\rho_1 = 0.1$  кг/м<sup>3</sup>. У всех четырех капельных фракций на границе бокового вдува задавалось постоянное объемное содержание, составлявшее  $\alpha_{i0} = \alpha_{10} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ . При этом средняя плотность капель составляла  $\rho_i = 0.025$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, \dots, 5$ .

Приведенные ниже результаты расчетов получены на равномерной конечно-разностной сетке, включающей в себя  $N_x = 200$  узлов в продольном и  $N_y = 100$  узлов в поперечном направлении.

На рис. 2 приведено начальное пространственное распределение средней плотности капельных фракций: пренебрежимо малое фоновое значение в расчетной области и заданное значение на боковой границе канала.

Пространственное распределение величины скорости газа в момент времени  $t = 0.03$  с показано на рис. 3. Наибольшая величина скорости достигается после слияния потока газозвеси, имеющего продольное

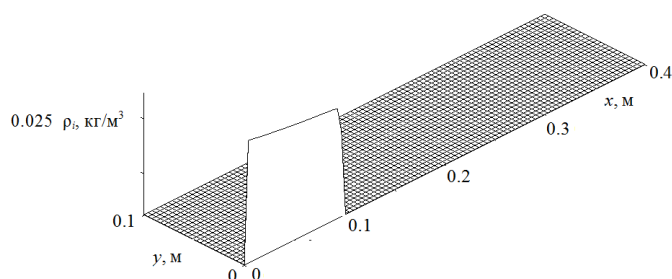


Рис. 2. Пространственное распределение средней плотности капельных фракций  $\rho_i$  ( $i = 2, \dots, 5$ ) в начальный момент времени  $t$

Fig. 2. Spatial distribution of the average density of droplet fractions  $\rho_i$  ( $i = 2, \dots, 5$ ) at the initial time  $t$

направление, и газокapельного потока, направленного поперечно оси. На выходе канала формируется параболическое распределение скорости, характерное для ламинарного режима течения.





На рис. 4 представлены линии тока фаз газозвеси: несущей среды (рис. 4, а), пылевой фракции (рис. 4, б) и фракции наиболее крупных капель с начальным диаметром  $d_5 = 40$  мкм (рис. 4, в). Сопоставление конфигурации потока газозвеси, состоящей из твердых частиц (см. рис. 4, б), и области течения капельной фракции позволяет определить расположение области перемешивания, где происходит интенсивная коагуляция этих фракций.

С течением времени в потоке вследствие коагуляции с капельными фракциями уменьшается средняя плотность мелкодисперсной газозвеси.

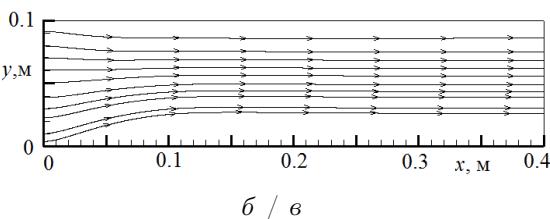
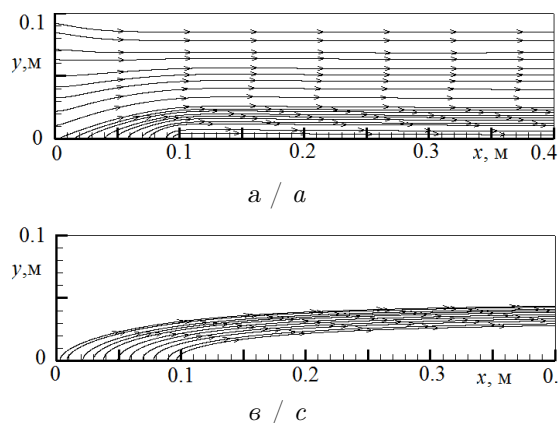


Рис. 4. Линии тока: а — несущая среда; б — пылевая фракция  $d_1 = 2$  мкм; в — капельная фракция  $d_5 = 40$  мкм

Fig. 4. Streamlines:  $a$  is the carrier medium;  $b$  is the dust fraction  $d_1 = 2 \mu\text{m}$ ;  $c$  is the droplet fraction  $d_5 = 40 \mu\text{m}$

На рис. 5 приведены распределения средней плотности газозвеси вдоль оси и в поперечном сечении канала в различные моменты времени.

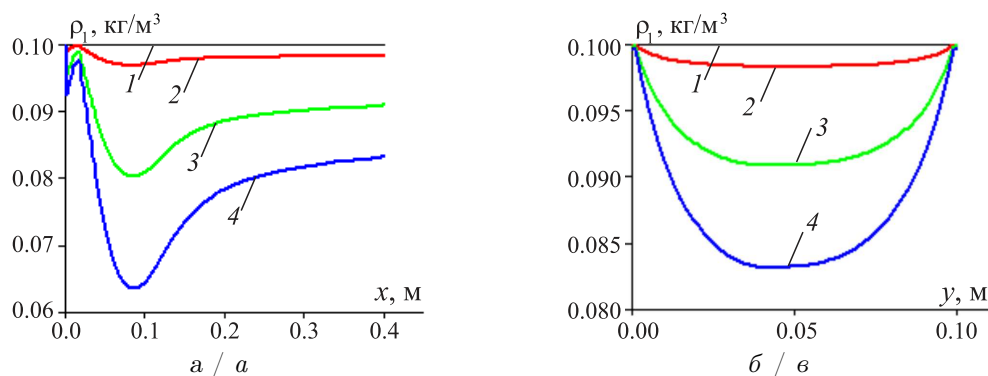


Рис. 5. Пространственное распределение в различные моменты времени  $t$  средней плотности пылевой фракции: а — вдоль продольной оси  $x$ ,  $y = h/2$ ; б — вдоль поперечной оси  $y$ ,  $x = L$ ; 1 —  $t = 0$  мс; 2 —  $t = 30$  мс; 3 —  $t = 60$  мс; 4 —  $t = 90$  мс (цвет онлайн)

Fig. 5. Spatial distribution at different moments of time  $t$  of the average density of the dust fraction:  $a$  — along the longitudinal axis  $x$ ,  $y = h/2$ ;  $b$  is along the transverse axis  $y$ ,  $x = L$ ; 1 is for  $t = 0$  ms; 2 is for  $t = 30$  ms; 3 is for  $t = 60$  ms; 4 is for  $t = 90$  ms (color online)

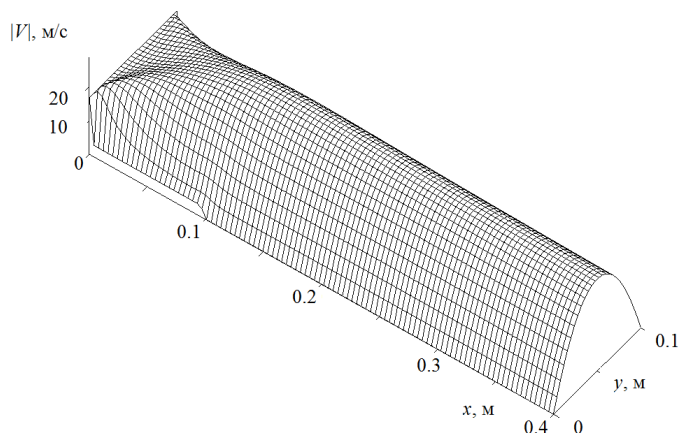


Рис. 3. Пространственное распределение модуля скорости несущей среды, момент времени  $t = 0.03$  с

Fig. 3. Spatial distribution of the velocity modulus of the carrier medium, time point  $t = 0.03$  sec

Область, в которой этот процесс протекает наиболее быстро, лежит вблизи правой границы зоны бокового вдува (рис. 5, а). Можно отметить, что скорость уменьшения средней плотности газозвеси вблизи оси канала при  $0.03 < t < 0.09$  с составляет  $0.26 \text{ кг/м}^3\text{с}$  вблизи выходного сечения и  $0.56 \text{ кг/м}^3\text{с}$  вблизи правой границы зоны бокового вдува.

На рис. 5, б представлено пространственное распределение средней плотности пылевой фракции в поперечном сечении канала при  $x = L$  в различные моменты времени. На рассматриваемом временном интервале скорость уменьшения средней плотности газозвеси вследствие коагуляции постоянна, достигается в приосевой области и составляет  $0.26 \text{ кг/м}^3\text{с}$ . В выходном сечении канала сохраняется асимметрия поперечного распределения средней плотности, связанная с несимметрией условия вдува капельных фракций.

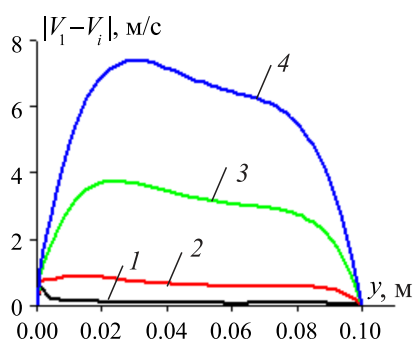


Рис. 6. Поперечное распределение модуля разности скоростей пылевой и капельных фракций  $x = L/4$ : 1 —  $d_2 = 4 \text{ мкм}$ ; 2 —  $d_3 = 8 \text{ мкм}$ ; 3 —  $d_4 = 20 \text{ мкм}$ ; 4 —  $d_5 = 40 \text{ мкм}$  (цвет онлайн)  
Fig. 6. Transverse distribution of the modulus of the difference in velocities of dust and droplet fractions  $x = L/4$ : 1 is for  $d_2 = 4 \text{ }\mu\text{m}$ ; 2 is for  $d_3 = 8 \text{ }\mu\text{m}$ ; 3 is for  $d_4 = 20 \text{ }\mu\text{m}$ ; 4 is for  $d_5 = 40 \text{ }\mu\text{m}$  (color online)

На рис. 6 представлено распределение величины скоростного скольжения мелкодисперсной фракции частиц относительно капельных фракций. Величина разности скоростей коагулирующих фракций оказывает влияние на интенсивность процесса коагуляции [24, 25] и зависит от размера капель (рис. 6). Наибольшее скоростное скольжение относительно газозвеси — у самой крупной фракции. Характер асимметрии скольжения соответствует характеру распределения средней плотности пылевой фракции в поперечном к оси канала направлении: в области с большей величиной скольжения (рис. 6) быстрее снижается средняя плотность пылевой фракции (рис. 5, б).

На рис. 7, а–в приведены продольные распределения средних плотностей капельных фракций на оси канала в различные моменты времени. В области бокового вдува относительное скоростное скольжение капельных фракций достигает наибольших значений, что приводит к наибольшей скорости коагуляции и изменению средней плотности фракций. К моменту времени  $t = 0.03$  с (рис. 7, а) наибольшая средняя плотность — у фракции  $d_4$ . Она достигается за счет поглощения этой фракцией газозвеси и меньших капельных фракций,

которые являются для нее донорами. К моменту времени  $t = 0.06$  с становится существенной роль фракции  $d_4$  как донорской фракции для  $d_5$  — на рис. 7, б наибольшие средние плотности фракций  $d_4$  и  $d_5$  становятся близки. К моменту времени  $t = 0.09$  с вблизи области вдува  $\rho_5 > \rho_4$ .

На рис. 8 показано изменение средних плотностей фракций в точке  $x = L/4$ ,  $y = h/2$  во времени. Средняя плотность газозвеси с течением времени снижается за счет поглощения ее капельными фракциями. При одинаковом начальном объемном содержании количество частиц определяется их размером. Так как дисперсных включений 4-й фракции больше, чем дисперсных включений 5-й фракции, то частицы 4-й фракции чаще сталкиваются с более мелкими частицами и, соответственно, поглощают большее количество материала фракций с меньшим размером частиц. Но так как частицы 5-й фракции поглощают все частицы, включая частицы 4-й фракции, после того как исчерпываются донорские частицы менее крупных фракций, то в последующие моменты времени объемное содержание самой крупной фракции дисперсной фазы становится наибольшим.

При этом на временном интервале  $0.02 < t < 0.14$  с уменьшению средней плотности газозвеси на  $0.06 \text{ кг/м}^3$  соответствует суммарное увеличение средней плотности капельных фракций также на  $0.06 \text{ кг/м}^3$ , что говорит о сохранении баланса массы мелкодисперсной фракции, переходящей от газозвеси к капельным фракциям, поглощающим твердые частицы газозвеси в процессе коагуляции.

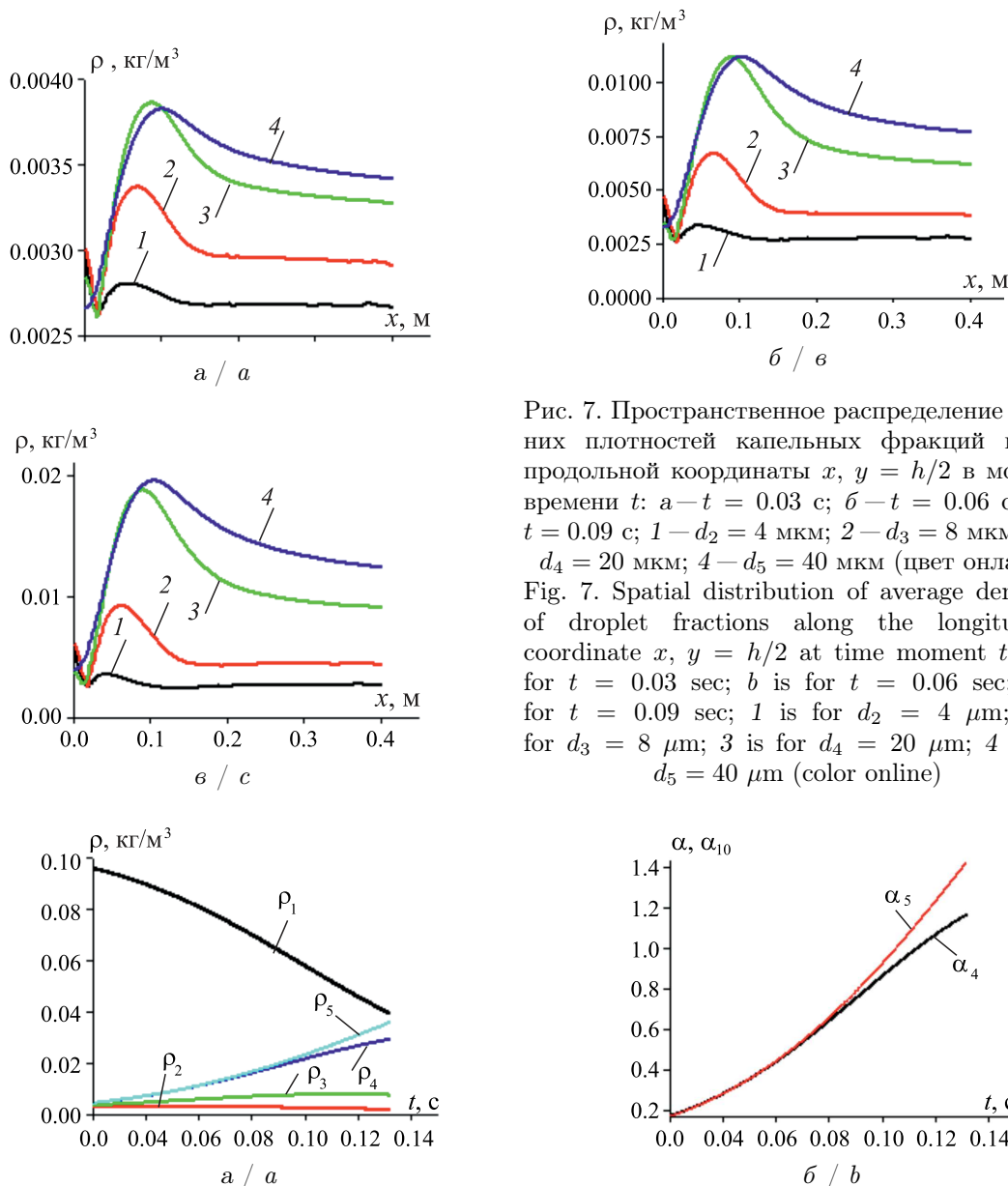


Рис. 8. Временная зависимость в точке  $x = L/4$ ,  $y = h/2$ : а — средних плотностей фракций дисперсной фазы; б — объемных содержаний каплевых фракций  $d_4 = 20$  мкм,  $d_5 = 40$  мкм (цвет онлайн)

Fig. 8. Time dependence at point  $x = L/4$ ,  $y = h/2$ : а is for the time dependence of the average densities of dispersed phase fractions; б is for the time dependence of the volumetric contents of droplet fractions  $d_4 = 20$   $\mu\text{m}$ ,  $d_5 = 40$   $\mu\text{m}$  (color online)

На рис. 8, б показана эволюция объемных содержаний фракций  $d_4$  и  $d_5$ . К моменту времени  $t \approx 0.08$  с средняя плотность фракции каплей  $d_5$  начинает расти быстрее, чем средняя плотность фракции  $d_4$ , что говорит о возрастании роли фракции  $d_4$  как донора для  $d_5$ .

Рассмотренный режим течения можно охарактеризовать рядом критериев. Оценка наибольшего относительного числа Рейнольдса для самой крупной фракции в близком к стационарному режиме течения вблизи оси канала  $Re_5 = d_5 \rho |V - V_5| / \mu \approx 0.55$ , что говорит о малом относительном скольжении фаз; число Стокса  $Stk_5 = \rho |V| d_5 / \mu L \approx 0.025$  для фракции самых крупных частиц свидетельствует о преобладающем влиянии сил вязкости по сравнению с инерционной силой, а число Кнудсена характерно для континуального режима течения  $Kn = M \sqrt{0.5 \cdot \gamma \pi} / Re \approx 0.00002$ . Максимальное значение числа Вебера наибо-



лее крупной каплевой фракции составляет  $We_5 \approx 26$ , что больше критического значения числа Вебера  $We_{cr} \approx 10$ , при этом для каплевой фракции с диаметром дисперсных включений  $d_4 = 20$  мкм число Вебера составляет  $We_4 \approx 3.25$ ; таким образом, для практического применения целесообразно ограничиваться каплевыми фракциями с диаметром капель до  $d = 20$  мкм.

## Заключение

В работе численно моделировалось течение монодисперсной газовзвеси, в которую осуществлялся вдув полидисперсной газокapлевой смеси с учетом коагуляции фракций с относительным скоростным скольжением. Исследован процесс поглощения мелкодисперсной фракции твердых частиц каплевыми фракциями. Полученные результаты позволяют оценить скорость поглощения пылевой фракции в канале при заданных расходах газовзвеси и газокapлевой смеси.

Расчеты показывают, что средняя плотность каплевых фракций дисперсной фазы более интенсивно увеличивается у фракций с большим размером дисперсных включений, так как частицы этих фракций поглощают, помимо пылевых частиц, еще и частицы менее крупных каплевых фракций.

Для выбранной дисперсности каплевых фракций максимальное значение числа Вебера достигается для наиболее крупной каплевой фракции и составляет  $We_5 \approx 26$ , что больше критического значения числа Вебера  $We_{cr} \approx 10$ . Это означает, что наиболее крупная фракция в ансамбле в процессе движения будет дробиться на меньшие фрагменты. При этом для следующей меньшей по размеру каплевой фракции с диаметром дисперсных включений  $d_4 = 20$  мкм число Вебера составляет  $We_4 \approx 3.25$ , что говорит о ее устойчивости в потоке.

Таким образом, для практического применения механизма коагуляции в рассмотренном режиме течения целесообразно ограничить распределение частиц по размерам диаметром капель  $d_4 = 20$  мкм. В этом случае механизм коагуляции преобладает над механизмом дробления и в потоке не образуются трудноотделимые от несущей среды мелкие фракции капель.

## Список литературы

1. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. Москва : Наука, 1978. 336 с.
2. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред. Москва : Энергоиздат, 1981. 472 с.
3. Волощук В. М. Кинетическая теория коагуляции. Ленинград : Гидрометеиздат, 1984. 283 с.
4. Васенин И. М., Архипов В. А., Бутов В. Г., Глузунов А. А., Трофимов В. Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск : Изд-во Томского ун-та, 1986. 261 с.
5. Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П., Фомин В. М., Шавалеев М. Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск : Наука, 1992. 257 с.
6. Стернин Л. Е., Шрайбер А. А. Многофазные течения газа с частицами. Москва : Машиностроение, 1994. 318 с.
7. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург : Недра, 2003. 283 с.
8. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Волновые процессы в газовзвесах частиц металлов. Новосибирск : Параллель, 2015. 305 с.
9. Шагапов В. Ш., Галлимзянов М. Н., Агишева У. О. Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 232–240. DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240), EDN: [NKIQNH](https://www.edn.ru/1816-9791-2020-20-2-232-240)
10. Галлимзянов М. Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 27–35. DOI: [10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35), EDN: [NBNMEB](https://www.edn.ru/1816-9791-2010-10-4-27-35)
11. Kotalczyk G., Kruijs F. A Monte Carlo method for the simulation of coagulation and nucleation based on weighted particles and the concepts of stochastic resolution and merging // Journal of Computational Physics. 2017. Vol. 340. P. 276–296. DOI: [10.1016/j.jcp.2017.03.041](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.03.041)



12. Suresh V., Liu Z., Perr Z., Gopalakrishnan R. Modeling particle-particle binary coagulation rate constants for spherical aerosol particles at high volume fractions using langevin dynamics simulations // Journal of Aerosol Science. 2022. Vol. 164. Art. 106001. DOI: [10.2139/ssrn.4058874](https://doi.org/10.2139/ssrn.4058874), EDN: [IORMBV](#)
13. Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision dynamics of two liquid nitrogen droplets under a low-temperature condition // Cryogenics. 2022. Vol. 124. Art. 103478. DOI: [10.1016/j.cryogenics.2022.103478](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2022.103478), EDN: [MVZCPH](#)
14. Amanbaev T. R., Tilleuov G. E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions // Bulletin of the Karaganda University. Physics Series. 2021. Vol. 102, iss. 2. P. 14–24. DOI: [10.31489/2021Ph2/14-24](https://doi.org/10.31489/2021Ph2/14-24), EDN: [JAJQRV](#)
15. Хмелев В. Н., Шалунов А. В., Доровских Р. С., Нестеров В. А., Голых Р. Н. Моделирование процесса мокрой очистки газов с наложением ультразвуковых полей // Южно-Сибирский научный вестник. 2017. № 4 (20). С. 57–63. EDN: [YLBKTW](#)
16. Тимофеева М. В. Влияние коагуляции капель воды на их распределение по размерам в рабочей части аэроохлаждающей установки // Журнал технической физики. 2019. Т. 89, вып. 4. С. 491–496. DOI: [10.21883/JTF.2019.04.47301.11-18](https://doi.org/10.21883/JTF.2019.04.47301.11-18), EDN: [NQCXOP](#)
17. Wang L.-P. Coagulation in turbulent particle-laden flows // Modeling Approaches and Computational Methods for Particle-Laden Turbulent Flows / eds. S. Subramaniam, S. Balachanda. Academic Press, 2023. P. 111–145. DOI: [10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8](https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8)
18. Зайчик Л. И., Алипченков В. М. Коагуляция аэрозольных частиц в турбулентном потоке // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, вып. 5. С. 730–739. EDN: [JRFRDX](#)
19. Chen J., Gao P., Gu H., Yu H. Evaluation of the relative deviation for coagulation and gravitational sedimentation model from experimental results of submicron aerosol in water vapor environments // Progress in Nuclear Energy. 2023. Vol. 163. Art. 104824. DOI: [10.1016/j.pnucene.2023.104824](https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2023.104824)
20. Patra P., Roy A. Brownian coagulation of like-charged aerosol particles // Physical Review Fluids. 2022. Vol. 7, iss. 6. Art. 064308. DOI: [10.1103/PhysRevFluids.7.064308](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.7.064308), EDN: [WXALQG](#)
21. Лантев А. Г., Лантева Е. А. Математическая модель и теплогидравлические характеристики насадочных скрубберов конденсационного охлаждения газа // Инженерно-физический журнал. 2022. Т. 95, вып. 1. С. 259–266. EDN: [KQOYLR](#)
22. Макаров В. Н., Угольников А. В., Макаров Н. В., Боярских Г. А. Повышение эффективности пылеулавливания // Горный журнал. 2022. № 8. С. 62–70. DOI: [10.17580/gzh.2022.08.09](https://doi.org/10.17580/gzh.2022.08.09), EDN: [NUAJMF](#)
23. Шрайбер А. А., Фединчик И. В., Протасов М. В. О влиянии турбулентности газового потока на эффективность улавливания частиц в скруббере Вентури // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, № 1. С. 85–90. DOI: [10.7868/S0040364414060143](https://doi.org/10.7868/S0040364414060143), EDN: [TFVORN](#)
24. Алемасов В. Е., Дрегаллин А. Ф., Тишин А. П., Худяков В. А. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания : справочник : в 5 т. Т. 1. Методы расчета. Москва : Изд-во ВИНТИ, 1971. 267 с.
25. Тукмаков А. Л. Динамика коагулирующей полидисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле акустического резонатора // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, вып. 1. С. 11–19. EDN: [THIVIL](#)
26. Тукмаков А. Л. Программный код для моделирования динамики однородных и дисперсных сред явным методом Мак-Кормака в обобщенных криволинейных координатах (2D). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. RU 2018619242, 02.08.2018. Заявка № 2018616542 от 19.06.2018.
27. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Динамика заряженной газовзвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, вып. 4. С. 509–512. DOI: [10.7868/S004036441703022X](https://doi.org/10.7868/S004036441703022X), EDN: [ZCNKVX](#)
28. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовзвеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 90–102. DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102), EDN: [DJLRDK](#)
29. Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газовзвеси в двухкомпонентной среде // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93, вып. 2. С. 304–310.
30. Tuktakov D. A. One-dimensional unsteady numerical model of gas suspension flow caused by gravitational sedimentation of particles with a constant velocity // Journal of Applied Mechanics





and Technical Physics. 2022. Vol. 63, iss. 7. P. 1218–1226. DOI: [10.1134/S0021894422070148](https://doi.org/10.1134/S0021894422070148), EDN: [KUF PAP](#)

31. *Tukmakov D. A.* Numerical simulation of oscillations of aerosol with a low dispersed phase concentration in a closed tube by the continuum mathematical model // Technical Physics. 2022. Vol. 67. P. 764–770. DOI: [10.1134/S1063784222110032](https://doi.org/10.1134/S1063784222110032), EDN: [ZCTMNH](#)
32. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей : в 2 т. Т. 2. Москва : Мир, 1991. 551 с.
33. *Музафаров И. Ф., Утюжников С. В.* Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 3. С. 74–83.
34. *Пирумов У. Г., Росляков Г. С.* Газовая динамика сопел. Москва : Наука, 1990. 364 с.

## References

1. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of the mechanics of heterogeneous media]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p. (in Russian).
2. Deich M. E., Filippov G. A. *Gazodinamika dvukhfaznykh sred* [The gas dynamics of two-phase media]. Moscow, Energoizdat, 1981. 472 p. (in Russian).
3. Voloshchuk V. M. *Kineticheskaya teoriya koagulyatsii* [Kinetic theory of coagulation]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1984. 283 p. (in Russian).
4. Vasenin I. M., Arkhipov V. A., Butov V. G., Gluzunov A. A., Trofimov V. F. *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1986. 261 p. (in Russian).
5. Kiselev S. P., Ruev G. A., Trunev A. P., Fomin V. M., Shavaleev M. Sh. *Udarno-volnovye protsessy v dvukhkompONENTnykh i dvukhfaznykh sredakh* [Shock wave processes in two-component and two-phase media]. Novosibirsk, Nauka, 1992. 257 p. (in Russian).
6. Sternin L. E., Shraiber A. A. *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase gas flows with particles]. Moscow, Mashinostroenie, 1994. 318 p. (in Russian).
7. Kutushev A. G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkooBraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media]. St. Petersburg, Nedra, 2003. 283 p. (in Russian).
8. Fedorov A. V., Fomin V. M., Khmel T. A. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov* [Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk, Parallel, 2015. 305 p. (in Russian).
9. Shagapov V. S., Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Single waves in a gas-liquid bubble mixture. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 232–240 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240), EDN: [NKIQHH](#)
10. Galimzyanov M. N. Propagation of pressure waves in finite-size bubbles zones. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 27–35 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35), EDN: [NBNMEB](#)
11. Kotalczyk G., Kruis F. E. A Monte Carlo method for the simulation of coagulation and nucleation based on weighted particles and the concepts of stochastic resolution and merging. *Journal of Computational Physics*, 2017, vol. 340, pp. 276–296. DOI: [10.1016/j.jcp.2017.03.041](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.03.041)
12. Suresh V., Liu Z., Perry Z., Gopalakrishnan R. Modeling particle-particle binary coagulation rate constants for spherical aerosol particles at high volume fractions using Langevin dynamics simulations. *Journal of Aerosol Science*, 2022, vol. 164, art. 106001. DOI: [10.2139/ssrn.4058874](https://doi.org/10.2139/ssrn.4058874), EDN: [IORMBV](#)
13. Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision dynamics of two liquid nitrogen droplets under a low-temperature condition. *Cryogenics*, 2022, vol. 124, art. 103478. DOI: [10.1016/j.cryogenics.2022.103478](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2022.103478), EDN: [MVZCPH](#)
14. Amanbaev T. R., Tilleuov G. E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions. *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*, 2021, vol. 102, iss. 2, pp. 14–24. DOI: [10.31489/2021Ph2/14-24](https://doi.org/10.31489/2021Ph2/14-24), EDN: [JAJQRV](#)
15. Khmelev V. N., Shalunov A. V., Dorovskikh R. S., Nesterov V. A., Golykh R. N. Modeling the process of wet gas purification with the imposition of ultrasonic fields. *South Siberian Scientific Bulletin*, 2017, iss. 4 (20), pp. 57–63 (in Russian). EDN: [YLBKTV](#)
16. Timofeeva M. V. The effect of coagulation of water droplets on their size distribution in the operating part of an air-cooler device. *Technical Physics*, 2019, vol. 64, iss. 4, pp. 449–454. DOI: [10.1134/S1063784219040248](https://doi.org/10.1134/S1063784219040248), EDN: [LEFGAT](#)





17. Wang L. P. Coagulation in turbulent particle-laden flows. In: Subramaniam S., SBalachanda S. (eds.) *Modeling Approaches and Computational Methods for Particle-Laden Turbulent Flows*. Academic Press, 2023, pp. 111–145. DOI: [10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8](https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8)
18. Zaichik L. I., Alipchenkov V. M. The coagulation of aerosol particles in turbulent flow. *High Temperature*, 2008, vol. 46, iss. 5, pp. 666–674.
19. Chen J., Gao P., Gu H., Yu H. Evaluation of the relative deviation for coagulation and gravitational sedimentation model from experimental results of submicron aerosol in water vapor environments. *Progress in Nuclear Energy*, 2023, vol. 163, art. 104824. DOI: [10.1016/j.pnucene.2023.104824](https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2023.104824)
20. Patra P., Roy A. Brownian coagulation of like-charged aerosol particles. *Physical Review Fluids*, 2022, vol. 7, iss. 6, art. 064308. DOI: [10.1103/PhysRevFluids.7.064308](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.7.064308), EDN: [WXALQG](#)
21. Laptev A. G., Lapteva E. A. Mathematical model and thermohydraulic characteristics of packed scrubbers of condensation cooling of a gas. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2022, vol. 95, iss. 1, pp. 257–265. DOI: [10.1007/s10891-022-02473-3](https://doi.org/10.1007/s10891-022-02473-3), EDN: [MJPBOU](#)
22. Makarov V. N., Ugolnikov A. V., Makarov N. V., Boyarskikh G. A. Dust control efficiency improvement. *Gornyi Zhurnal* [Mining Journal], 2022, iss. 8, pp. 62–70 (in Russian). DOI: [10.17580/gzh.2022.08.09](https://doi.org/10.17580/gzh.2022.08.09), EDN: [NUAJMF](#)
23. Shraiber A. A., Fedinchik I. V., Protasov M. V. On effect of gas flow turbulence on the efficiency of particle collection in a Venturi scrubber. *High Temperature*, 2015, vol. 53, iss. 1, pp. 80–85. DOI: [10.1134/S0018151X14060145](https://doi.org/10.1134/S0018151X14060145)
24. Alemasov V. E., Dregalin A. F., Tishin A. P., Khudyakov V. A. *Termodinamicheskie i teplofizicheskie svoystva produktov sgoraniya. T. 1. Metody rascheta* [Thermodynamic and thermophysical properties of combustion products. Vol. 1. Calculation methods]. Moscow, VINITI, 1971. 267 p. (in Russian).
25. Tukumakov A. L. Dynamics of a coagulating polydisperse gas suspension in the nonlinear wave field of an acoustic resonator. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, iss. 1, pp. 9–17. DOI: [10.1007/s10891-015-1162-1](https://doi.org/10.1007/s10891-015-1162-1), EDN: [NOGEWV](#)
26. Tukumakov A. L. Program code for modeling the dynamics of homogeneous and dispersed media using the explicit McCormack method in generalized curvilinear coordinates (2D). *Certificate of registration of the computer program RU* 2018619242, 08/02/2018. Application no. 2018616542 dated 06/19/2018.
27. Tukumakov A. L., Tukumakov D. A. Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially nonuniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state. *High Temperature*, 2017, vol. 55, iss. 4, pp. 491–495. DOI: [10.1134/S0018151X17030221](https://doi.org/10.1134/S0018151X17030221), EDN: [XNVGSP](#)
28. Tukumakov A. L., Tukumakov D. A. Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 90–102 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102), EDN: [DJLRDK](#)
29. Tukumakov D. A. Numerical investigation of the influence of properties of the gas component of a suspension of solid particles on the spreading of a compressed gas-suspension volume in a binary medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2020, vol. 93, iss. 2, pp. 291–297. DOI: [10.1007/s10891-020-02120-9](https://doi.org/10.1007/s10891-020-02120-9)
30. Tukumakov D. A. One-dimensional unsteady numerical model of gas suspension flow caused by gravitational sedimentation of particles with a constant velocity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022, vol. 63, iss. 7, pp. 1218–1226. DOI: [10.1134/S0021894422070148](https://doi.org/10.1134/S0021894422070148), EDN: [KUFPAF](#)
31. Tukumakov D. A. Numerical simulation of oscillations of aerosol with a low dispersed phase concentration in a closed tube by the continuum mathematical model. *Technical Physics*, 2022, vol. 67, pp. 764–770. DOI: [10.1134/S1063784222110032](https://doi.org/10.1134/S1063784222110032), EDN: [ZCTMNH](#)
32. Fletcher C. *Computation techniques for fluid dynamics*. Berlin, Springer-Verlag, 1988. 898 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1991. Vol. 2. 551 p.).
33. Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V. Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1993, vol. 5, iss. 3, pp. 74–83 (in Russian).
34. Pirumov U. G., Roslyakov G. S. *Gazovaya dinamika sopel* [Gas dynamics of nozzles]. Moscow, Nauka, 1990. 364 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.07.2024

Принята к публикации / Accepted 15.11.2025

Опубликована / Published 29.08.2025



## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 434–441

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 434–441

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441>

EDN: <https://elibrary.ru/PBFZMW>

Научная статья

УДК 519.237.8

### Дендрограммы электроэнцефалограмм и их характеристика на основе метрик

Л. Б. Тяпаев<sup>1</sup>✉, В. С. Анашин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, ул. Ленинские горы, д. 1

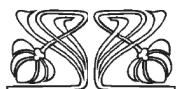
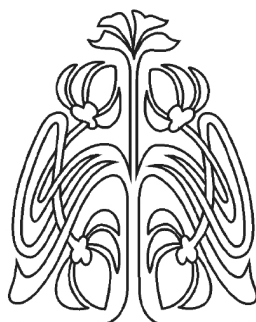
<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

**Тяпаев Ливат Борисович**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой дискретной математики и информационных технологий, [tiapaevlb@info.sgu.ru](mailto:tiapaevlb@info.sgu.ru), ORCID: [0000-0002-3573-6937](https://orcid.org/0000-0002-3573-6937), SPIN: [8417-3339](https://elibrary.ru/8417-3339), AuthorID: [147693](https://elibrary.ru/147693)

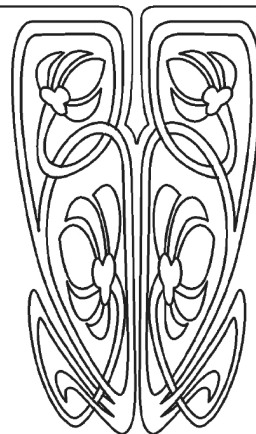
**Анашин Владимир Сергеевич**, доктор физико-математических наук, <sup>2</sup>профессор кафедры информационной безопасности; <sup>3</sup>ведущий научный сотрудник, [vladimir.anashin@cs.msu.ru](mailto:vladimir.anashin@cs.msu.ru), ORCID: [0000-0001-5319-7159](https://orcid.org/0000-0001-5319-7159), AuthorID: [156116](https://elibrary.ru/156116)

**Аннотация.** Дендрограммы, полученные из электроэнцефалограмм, изучаются как максимальные префиксные коды. Дендрограмма задает распределение на пространстве целых 2-адических чисел и представляет разбиение с точностью до множества нулевой меры Хаара на шары ненулевых радиусов. Предложены неархимедова и архимедова метрики для характеристики дендрограмм, ассоциированных с ЭЭГ заданных ментальных классов. Для более надежного отличия одного ментального класса от другого предлагается использовать расстояние Громова – Хаусдорфа между несвязными компактными пространствами: неархимедовым в виде объединения 2-адических шаров, представленных ветвями дендрограммы, с одной стороны, и архимедовым в виде (толстого) канторова множества — с другой.

**Ключевые слова:** дендрограмма ЭЭГ, максимальный префиксный код, целые 2-адические числа, ультраметрика, метрическое пространство дендрограмм, характеристическая функция распределения, 2-адический шар, метрика Громова – Хаусдорфа



Научный  
отдел





**Для цитирования:** Тяпаев Л. Б., Анашин В. С. Дендрограммы электроэнцефалограмм и их характеристика на основе метрик // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 434–441. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441), EDN: PBFZMW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Dendrograms of electroencephalograms and their characterization based on metrics

L. B. Tyapaev<sup>1✉</sup>, V. S. Anashin<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, GSP-1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

<sup>3</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44, bldg. 2 Vavilova St., Moscow 119333, Russia

**Livat B. Tyapaev**, [tiapaevlb@info.sgu.ru](mailto:tiapaevlb@info.sgu.ru), ORCID: [0000-0002-3573-6937](https://orcid.org/0000-0002-3573-6937), SPIN: [8417-3339](https://sp.institute.ru/8417-3339), AuthorID: [147693](https://authorid.ru/147693)

**Vladimir S. Anashin**, [vladimir.anashin@cs.msu.ru](mailto:vladimir.anashin@cs.msu.ru), ORCID: [0000-0001-5319-7159](https://orcid.org/0000-0001-5319-7159), AuthorID: [156116](https://authorid.ru/156116)

**Abstract.** Dendrograms obtained from electroencephalograms are studied as maximal prefix codes. A dendrogram defines a distribution on the space of 2-adic integers and represents a partition, up to the set of zero Haar measure, into balls of nonzero radii. Non-Archimedean and Archimedean metrics are proposed for the characterization of dendrograms associated with the electroencephalograms of given mental classes. To more reliably distinguish one mental class from another, it is proposed to use the Gromov–Hausdorff distance between disconnected compact spaces: non-Archimedean in the form of a union of 2-adic balls represented by branches of a dendrogram, on the one hand, and Archimedean in the form of a (fat) Cantor set, on the other hand.

**Keywords:** EEG dendrogram, maximal prefix code, 2-adic integers, ultrametric, metric space of dendrograms, characteristic distribution function, 2-adic ball, Gromov–Hausdorff distance

**For citation:** Tyapaev L. B., Anashin V. S. Dendrograms of electroencephalograms and their characterization based on metrics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 434–441 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441), EDN: PBFZMW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Мотивацией для данного исследования послужил метод анализа электроэнцефалограмм (ЭЭГ), предварительно разделенных на классы по вынесенному врачебному вердикту, на основе величины  $p$ -адического квантового потенциала [1, 2]. Медицинское исследование соответствовало правилам и положениям Хельсинкской декларации и было одобрено Институциональным наблюдательным советом (IRB) Медицинского центра Рабина (Rabin Medical Center, Petach Tikva, Israel (0275-20-RMC)). Все данные пациентов были полностью анонимизированы перед рассмотрением. Данные ЭЭГ были предоставлены О. Шором с согласия Медицинского центра Рабина.

В исследовании используются записи ЭЭГ и частота их дискретизации в виде двумерного массива, в котором представлены единичные считывания сигнала и 19 значений электрических потенциалов электродов в мВ. Всего записей ЭЭГ 235: alz (43 пациента; болезнь Альцгеймера), dep (28 пациентов; депрессия), mci (27 пациентов; умеренное когнитивное расстройство), schiz (41 пациент; шизофрения), controls (96 пациентов; контрольная группа).



Данное исследование — это продолжение работ [3, 4] по классификации ментальных классов на основе анализа дендрограмм, построенных по набору временных рядов ЭЭГ головного мозга. Напомним, что дендрограммы суть плоские двоичные деревья с  $2s + 1$  вершинами (или с  $s + 1$  концевыми вершинами). Поскольку любая дендрограмма является максимальным префиксным кодом, то для каждой ветви любой дендрограммы можно оценить математическое ожидание длины кодовой последовательности, дисперсию и энтропию. В [3] была выявлена следующая особенность: средние значения математического ожидания, энтропии и дисперсии для группы дендрограмм пациентов одного ментального класса являются уникальными. В [4] было обнаружено следующее свойство: при сопоставлении пациенту точки на плоскости, где точка соответствует длинам двух выбранных ветвей его дендрограммы, для некоторых классов было обнаружено выстраивание точек в параллельные линейные структуры, называемые эпсилон-цилиндрами. На основании найденного свойства был разработан алгоритм для их выявления и классификации по углам поворота относительно осей координат и линии сравнения. В данной работе рассматривается задача распределения пациентов по различным классам на основе анализа префиксных кодов, полученных посредством обработки ЭЭГ через их преобразования к виду дендрограмм с использованием различных метрик.

## 1. Построение дендрограмм

В данном исследовании извлечение данных ЭЭГ производится непосредственно из анализируемых файлов с данными формата HDF5. К записи ЭЭГ применяются два фильтра. Первый — режекторный фильтр с бесконечной импульсной характеристикой, используемый для исключения помех частотой 50 Гц, вызванных колебаниями в электрической сети. Второй — фильтр высоких частот Баттерворта для исключения частот ниже 1 Гц. Устанавливается временное окно в 1 с. Переменная времени  $t \in [1, n/W]$ , где  $n = \lfloor \frac{\text{число единичных считываний сигнала}}{\text{частота дискретизации}} \rfloor$ , а  $W$  — размер временного окна. Единичное считывание — это вектор из 19 значений, по одному на электрод. Производится нормализация значений электрических потенциалов внутри каждого окна. Для расчета применяется следующая формула:  $\hat{e}p_{elec,t} = \frac{|ep_{elec,t}|}{\max |ep_{elec,t}|}$ , где  $\hat{e}p_{elec,t} \in [0, 1]$  — нормализованная во временном окне запись ЭЭГ для соответствующего электрода,  $|ep_{elec,t}|$  — абсолютные значения записи ЭЭГ во временном окне. Производится свёртка ЭЭГ данных во временном окне. Каждую секунду записи сворачиваем с шагом в 5 единичных считываний сигнала, получаем новый набор данных  $h_{elec,t}$ . В данном исследовании свёртка производится независимо от частоты дискретизации, а в качестве операции свёртки используется вычисление среднего значения. Затем вычисляем расстояние Хеллингера попарно для векторов электродов по формуле  $H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\sum_{i=1}^k (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2} \right)$ , где  $k$  — число единичных считываний записи ЭЭГ,  $x = h_{elec,t}$  — временной ряд электрода  $elec$ ,  $t$  — время в секундах,  $y = h'_{elec,t}$  — временной ряд для иного электрода. Дендрограмма строится посредством алгоритма «ближайшая соседняя цепь». Для вычисления расстояний между кластерами используется формула полной связи —  $\max\{d(I, K), d(J, K)\}$ , где  $I$  и  $J$  — объединяемые кластеры,  $K$  — любой другой, а  $d$  — рефлексивное и симметричное отношение (расстояние между кластерами). Каждому электроду сопоставляется бесконечная последовательность из нулей и единиц — целое 2-адическое число, на основании бинарного кодирования ветвей дендрограммы, причем префикс такой последовательности ассоциирован с конечной ветвью дендрограммы. Двоичные коды ветвей дендрограммы образуют максимальный префиксный код.

## 2. Метрические пространства дендрограмм

### 2.1. Ультраметрика

В силу того, что дендрограммы являются максимальными префиксными кодами, они могут быть рассмотрены как функции на обратном спектре колец вычетов по модулю  $2^k$ ,



т.е. на множестве всех дендрограмм можно задать неархимедову метрику (ультраметрику)  $\rho$ , которая индуцирована 2-адической  $\sup$ -нормой. Иными словами, расстояние  $\rho$  между двумя дендрограммами  $a$  и  $b$  равно  $2^{-k}$ , где  $k$  — максимальное натуральное такое, что дендрограммы  $a$  и  $b$  по модулю  $2^k$  совпадают. Более того, любая дендрограмма задает упорядоченное разбиение пространства  $\mathbb{Z}_2$  целых 2-адических чисел на непересекающиеся шары, объединение которых и образуют дендрограмму. Шар есть смежный класс по идеалу, порожденному степенью двойки, в кольце вычетов по модулю  $2^k$ . Каждый шар радиуса  $2^{-\ell}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  однозначно определяется словом длины  $\ell$ , следовательно, ветвью длины  $\ell$ , исходящей из корня дендрограммы. Средние значения ультраметрики для исследуемых классов дендрограмм представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Средние значения  $\rho$  / Average values of  $\rho$ 

$\rho$	alz	controls	dep	mci	schiz
alz	0.23438	0.19375	0.19375	0.23438	0.23438
controls	—	0.16406	0.19375	0.19375	0.19375
dep	—	—	0.23438	0.23438	0.23438
mci	—	—	—	0.23438	0.23438
schiz	—	—	—	—	0.23438

С помощью ультраметрики  $\rho$  мы сравниваем дендрограммы топологически. Как видно из данных, приведенных в таблице, для  $\rho$ , число возможных различных значений невелико, поэтому структура исследуемых классов дендрограмм слабо различима: трудно сказать что-либо о принадлежности ЭЭГ конкретному классу ввиду большого числа совпадений, но различия встречаются, значит, можно предположить, что при изменении параметров предобработки исходных данных ЭЭГ ультраметрика может стать выразительнее.

## 2.2. Метрика

Дендрограмма есть распределение на пространстве  $\mathbb{Z}_2$  целых 2-адических чисел, следовательно, дендрограмма представляет разбиение с точностью до множества нулевой меры Хаара на шары ненулевых радиусов. Распределение это дискретно, характеристическая функция которого имеет вид

$$\chi(C) = \sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} e^{iN(w)}, \quad (1)$$

где  $C$  — префиксный код,  $\Lambda(w)$  — длина слов  $w$ ,  $N(w)$  — номер шара, который задается словом  $w$ .

Отметим, что  $\sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} = 1$ , поскольку дендрограмма — максимальный префиксный код. Все характеристические функции распределений (1) есть элементы гильбертова пространства  $\ell^2$  последовательностей  $x$  над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, суммируемых вместе со своими квадратами. На пространстве  $\ell^2$  норма  $\|x\|$  задается так:  $\|x\| = \sqrt{x\bar{x}}$ , где  $x = \sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} e^{iN(w)}$ ,  $\bar{x} = \sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} e^{-iN(w)}$ . В случае максимальных префиксных кодов

$$x\bar{x} = \sum_{w \in C} 2^{-2\Lambda(w)}, \quad (2)$$

и ряд (2) сходится, поскольку величины  $2^{-\Lambda(w)}$  — вероятности, их сумма равна единице. Таким образом, норма задана корректно, все характеристические функции распределения (1) имеют норму не больше 1, расстояние между ними есть норма разности. Более того, характеристическая функция (1) есть волновая функция квантовой системы с дискретным





спектром (см. [5]). Далее, при фиксированной нумерации ветвей дендрограмм  $1, 2, \dots, m$  (в исследуемых дендрограммах ЭЭГ  $m = 19$ ) расстояние  $\delta$  между дендрограммами  $a, b$  определим следующим образом:

$$\delta(a, b) = \sqrt{\sum_{n=1}^m (2^{-\Lambda(w_a(n))} - 2^{-\Lambda(w_b(n))})^2},$$

где  $\Lambda(w_a(n))$ ,  $\Lambda(w_b(n))$  — длины ветвей  $w_a(n)$ ,  $w_b(n)$ , идущих к концевой вершине с номером  $n$  в дендрограммах  $a, b$  соответственно. Средние значения метрик  $\delta$  для исследуемых классов дендрограмм представлены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Средние значения  $\delta$  / Average values of  $\delta$

$\delta$	alz	controls	dep	mci	schiz
alz	0.36956	0.39052	0.35165	0.35553	0.35904
controls	—	0.38591	0.35566	0.36843	0.36143
dep	—	—	0.31622	0.33241	0.33108
mci	—	—	—	0.33832	0.33514
schiz	—	—	—	—	0.32982

Для метрики  $\delta$  чем больше значение, тем больше различие в длинах кодовых последовательностей. Для ультраметрики  $\rho$  чем меньше значение, тем больше совпадение префиксных кодов.

### 2.3. Метрика Громова – Хаусдорфа

Для метрического пространства  $X$  обозначим через  $\mathcal{H}(X)$  семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства  $X$ . На  $\mathcal{H}(X)$  можно задать метрику Хаусдорфа  $d_H$ . Известно, что  $\mathcal{H}(X)$  компактно тогда и только тогда, когда  $X$  компактно (см. [6]). Пусть  $X$  и  $Y$  — метрические пространства. Тройка  $(X', Y', Z)$ , состоящая из метрического пространства  $Z$  и двух его подпространств  $X'$  и  $Y'$ , изометричных соответственно  $X$  и  $Y$ , называется реализацией пары  $(X, Y)$ . Метрика Громова – Хаусдорфа  $d_{GH}(X, Y)$  есть точная нижняя грань чисел  $r$ , для которых существует такая реализация  $(X', Y', Z)$  пары  $(X, Y)$ , что  $d_H(X', Y') \leq r$ . Множество  $\mathcal{M}$  классов изометрии всех метрических компактов, наделенное метрикой Громова – Хаусдорфа, образует пространство Громова – Хаусдорфа.

Множество всех непустых бинарных отношений между  $X$  и  $Y$  обозначим через  $\mathcal{P}(X, Y)$ . Для отношения  $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$  искажением называется число

$$\text{dis}\sigma = \sup\{|x - x'| - |y - y'|\| : (x, y), (x', y') \in \sigma\}.$$

Отношение  $R \subset X \times Y$  называется соответствием (см. [6]), если ограничения на  $R$  канонических проекций  $\pi_X : (x, y) \mapsto x$  и  $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$  сюръективны. Множество всех соответствий обозначим  $\mathcal{R}(X, Y)$ . Для любых метрических пространств  $X$  и  $Y$

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\{\text{dis}R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\}.$$

Соответствие  $R$  называется оптимальным, если  $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis}R$ .

Рассмотрим оптимальное соответствие между пространством  $X = \mathbb{Z}_2$  целых 2-адических чисел с неархимедовой метрикой  $d_2(x, y) = |x - y|_2$  и канторовым множеством  $Y = \mathcal{C}$  с



евклидовой метрикой  $d(a, b) = |a - b|$  в виде гомеоморфизма  $\psi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{C}$  вида

$$\psi : \sum_{i=0}^{\infty} x_i 2^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^{i+1}}.$$

Отметим, что и  $\mathbb{Z}_2$ , и  $\mathcal{C}$  являются несвязными компактными пространствами. Точка  $x = x_0 + x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 2^3 + \dots$  из  $\mathbb{Z}_2$  гомеоморфизмом  $\psi$  отображается в точку единичного отрезка  $\psi(x) = \frac{2}{3}x_0 + \frac{2}{3^2}x_1 + \frac{2}{3^3}x_2 + \dots$ , где  $x_0, x_1, x_2, \dots \in \{0, 1\}$ . Например, образом шара  $B_{1/4}(0) \subset \mathbb{Z}_2$  (представленного соответствующей ветвью дендрограммы, ассоциированной с конкретным электродом) в  $\mathcal{C}$  будет множество точек единичного отрезка вида  $\frac{2}{3^3}x_2 + \frac{2}{3^4}x_3 + \dots$ .

Пространства  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathcal{C}$  являются элементами пространства Громова – Хаусдорфа. Тогда, например, расстояние между шаром  $B_{1/4}(0) \subset \mathbb{Z}_2$  с центром в точке  $x = 0$  радиуса  $1/4$  и множеством  $\psi(B_{1/4}(0)) \subset \mathcal{C}$  будет удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{5}{72} \leq d_{GH}(B_{1/4}(0), \psi(B_{1/4}(0))) \leq \frac{1}{8}$$

в силу того (см. [6]), что

$$\frac{1}{2} |\text{diam} X - \text{diam} Y| \leq d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \max\{\text{diam} X \text{diam} Y\} \quad (3)$$

для любых  $X, Y \in \mathcal{M}$ . В формуле (3)  $\text{diam} X$  и  $\text{diam} Y$  — диаметры  $X$  и  $Y$  соответственно.

Известно, что пространство  $\mathcal{M}$  геодезическое (см. [6]). Это значит, что любые точки  $X, Y \in \mathcal{M}$  можно соединить геодезической кривой  $\gamma$ , длина которой  $L(\gamma)$  равна расстоянию Громова – Хаусдорфа  $d_{GH}(X, Y)$  между  $X$  и  $Y$ . Вычисление  $d_{GH}(X, Y)$  для  $X = \cup_{k_j} B_{1/2^{k_j}}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и  $Y = \psi(X)$  является нетривиальной и трудоемкой задачей. Тем не менее, можно рассматривать различные классы дендрограмм (классы разбиений  $\mathbb{Z}_2$  на шары) и их  $\psi$ -образы в канторовом множестве  $\mathcal{C}$  и усреднять расстояния (длины геодезических) для каждого класса дендрограмм до их образов в канторовом множестве с целью характеристики исследуемых ментальных классов. Канторово множество  $\mathcal{C}$  можно заменить на толстое канторово множество  $\mathcal{FC}$ , мера которого, в отличие от меры  $\mathcal{C}$ , будет положительной.  $\mathcal{FC}$  можно построить (см. [7]) с помощью функции  $c_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :  $c_t(x) = (1 - t) \cdot x + t \cdot c(x)$ , где  $t \in (0, 1)$  и  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  есть функция Кантора

$$c(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, & \text{если } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} \in \mathcal{C}, \quad x_i \in \{0, 1\}; \\ \sup_{x \leq y, y \in \mathcal{C}} c(y), & \text{если } x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4)$$

Например, при  $t = 1/3$  расстояние Громова – Хаусдорфа между 2-адическим шаром  $B_{1/4}(0)$  и его образом в  $\mathcal{FC}$  удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{5}{108} \leq d_{GH}(B_{1/4}(0), c_{1/3}(\psi(B_{1/4}(0)))) \leq \frac{1}{8}.$$

Здесь предварительно мы строим  $\psi$ -образ в  $\mathcal{C}$ , затем с помощью (4) вычисляем образ отображения  $c_t$ . Отметим, что величина  $t \in (0, 1)$  будет определять меру толстого канторова множества  $\mathcal{FC}$ . Для «тонкой» характеристики ветви дендрограммы (в дополнении к «грубой» характеристике дендрограммы с помощью метрик  $\rho$  и  $\delta$ ) важна нижняя оценка в неравенстве для расстояния  $d_{GH}$  между 2-адическим шаром и его образом в  $\mathcal{C}$  (либо в  $\mathcal{FC}$ ). Для 2-адического шара  $B_{1/4}(0)$  нижняя оценка равна  $5/72 \approx 0.0694$  (случай  $\mathcal{C}$ ) и  $5/108 \approx 0.0463$  (случай  $\mathcal{FC}$ ,  $t = 1/3$ ).



## Заключение

Таким образом, в данном исследовании предложены неархимедова и архимедова метрики дендрограмм ЭЭГ для нахождения отличий между ментальными классами. Цель исследования — надежно различать классы пациентов по ЭЭГ, и в этом смысле, в дополнении к метрикам дендрограмм ЭЭГ, метрика Громова–Хаусдорфа представляется более релевантной, так как она позволяет выявлять связь между неархимедовыми и архимедовыми характеристиками данных.

## Список литературы

1. Shor O., Glik A., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG  $p$ -adic quantum potential accurately identifies depression, schizophrenia and cognitive decline // *PLoS ONE*. 2021. Vol. 16, iss. 8. P. e0255529. DOI: [10.1371/journal.pone.0255529](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0255529)
2. Shor O., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG-based spatio-temporal relation signatures for the diagnosis of depression and schizophrenia // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13. Art. 776. DOI: [10.1038/s41598-023-28009-0](https://doi.org/10.1038/s41598-023-28009-0)
3. Анашин В. С., Тяпаев Л. Б., Давыдов В. В. Классификация психических заболеваний на основе дендрограмм ЭЭГ головного мозга и их характеристик // *Дискретная математика и её приложения : труды XIV междунар. науч. семинара им. академика О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2022 г.)*. Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2022. С. 207–210. DOI: [10.20948/dms-2022-64](https://doi.org/10.20948/dms-2022-64)
4. Тяпаев Л. Б., Анашин В. С., Давыдов В. В. О методе обработки большой совокупности аналоговых сигналов с целью выделения характеристических признаков источников сигналов // *Дискретные модели в теории управляющих систем : труды XI междунар. конф. (Москва, 26–29 мая 2023 г.)*. Москва : МАКС Пресс, 2023. С. 110–113. EDN: [XTMWWX](https://www.edn.ru/XTMWWX)
5. Anashin V. Free choice in quantum theory: A  $p$ -adic view // *Entropy*. 2023. Vol. 25, iss. 5. Art. 830. DOI: [10.3390/e25050830](https://doi.org/10.3390/e25050830)
6. Борзов С. И., Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояния Громова–Хаусдорфа на классе всех метрических пространств // *Математический сборник*. 2022. Т. 213, № 5. С. 68–87. DOI: [10.4213/sm9651](https://doi.org/10.4213/sm9651), EDN: [YZVCVW](https://www.edn.ru/YZVCVW)
7. Liu J. G., Pego R. L. A simple construction of fat Cantor sets // *The American Mathematical Monthly*. 2024. Vol. 131, iss. 6. Art. 525. DOI: [10.1080/00029890.2024.2322909](https://doi.org/10.1080/00029890.2024.2322909)

## References

1. Shor O., Glik A., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG  $p$ -adic quantum potential accurately identifies depression, schizophrenia and cognitive decline. *PLoS ONE*, 2021, vol. 16, iss. 8, pp. e0255529. DOI: [10.1371/journal.pone.0255529](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0255529)
2. Shor O., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG-based spatio-temporal relation signatures for the diagnosis of depression and schizophrenia. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13, art. 776. DOI: [10.1038/s41598-023-28009-0](https://doi.org/10.1038/s41598-023-28009-0)
3. Anashin V. S., Tyapaev L. B., Davydov V. V. Classification of mental illnesses based on EEG dendrograms and their characteristics. *Diskretnaya matematika i eyo prilozheniya* [Discrete Mathematics and its Applications. Proceedings of the XIV International Scientific Seminar named after Academician O. B. Lupanov (Moscow, June 20–25, 2022)]. Moscow, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS Publ., 2022, pp. 207–210 (in Russian). DOI: [10.20948/dms-2022-64](https://doi.org/10.20948/dms-2022-64)
4. Tyapaev L. B., Anashin V. S., Davydov V. V. On the method of processing a large set of analog signals in order to isolate the characteristic features of signal sources. *Diskretnye modeli v teorii upravlyayuschih sistem* [Discrete Models in Control Systems Theory. Proceedings of the XI International Conference (Moscow, May 26–29, 2023)]. Moscow, MAKS Press, 2023, pp. 110–113 (in Russian). EDN: [XTMWWX](https://www.edn.ru/XTMWWX)



5. Anashin V. Free choice in quantum theory: A  $p$ -adic view. *Entropy*, 2023, vol. 25, iss. 5, art. 830. DOI: [10.3390/e25050830](https://doi.org/10.3390/e25050830)
6. Borzov S. I., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Geometry of the Gromov – Hausdorff distance on the class of all metric spaces. *Sbornik: Mathematics*, 2022, vol. 213, iss. 5, pp. 641–658. DOI: [10.1070/SM9651](https://doi.org/10.1070/SM9651)
7. Liu J. G., Pego R. L. A simple construction of fat Cantor sets. *The American Mathematical Monthly*, 2024, vol. 131, iss. 6, art. 525. DOI: [10.1080/00029890.2024.2322909](https://doi.org/10.1080/00029890.2024.2322909)

Поступила в редакцию / Received 12.02.2025

Принята к публикации / Accepted 19.03.2025

Опубликована / Published 29.08.2025



## Юбилей

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 442–453

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 442–453

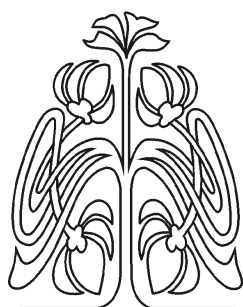
<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453>

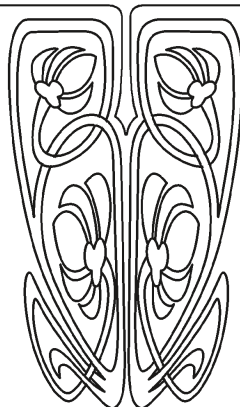
EDN: <https://elibrary.ru/EVXYVR>

Персоналия

УДК 51(092)



## Приложение



### Наследие Вагнера. К 90-летию кафедры геометрии Саратовского государственного университета

Д. А. Бредихин<sup>1</sup>, Н. Н. Макеев<sup>2</sup>, В. Б. Поплавский<sup>1✉</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Независимый исследователь, Россия, г. Саратов

**Бредихин Дмитрий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, [Bredikhin@mail.ru](mailto:Bredikhin@mail.ru), ORCID: [0000-0003-3600-1294](https://orcid.org/0000-0003-3600-1294), SPIN: [2239-2268](https://orcid.org/2239-2268), AuthorID: [2925](https://orcid.org/2925)

**Макеев Николай Николаевич**, доктор физико-математических наук, [nmakeyev@mail.ru](mailto:nmakeyev@mail.ru), ORCID: [0000-0003-2807-977X](https://orcid.org/0000-0003-2807-977X), SPIN: [7373-7840](https://orcid.org/7373-7840), AuthorID: [374535](https://orcid.org/374535)

**Поплавский Владислав Брониславович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой геометрии, [poplavskivb@mail.ru](mailto:poplavskivb@mail.ru), SPIN: [7571-1651](https://orcid.org/7571-1651), AuthorID: [628968](https://orcid.org/628968)

**Аннотация.** Статья посвящена 90-летию кафедры геометрии Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, основанной выдающимся математиком, заслуженным деятелем науки Виктором Владимировичем Вагнером. Приводится краткое описание научного творчества В. В. Вагнера и основных достижений в области геометрии, алгебры и их применений. Отмечаются перспективы дальнейшего развития основанных им научных направлений исследования.

**Ключевые слова:** дифференциальная геометрия, история геометрии, Виктор Владимирович Вагнер, история математики в Саратовском государственном университете

**Для цитирования:** Бредихин Д. А., Макеев Н. Н., Поплавский В. Б. Наследие Вагнера. К 90-летию кафедры геометрии Саратовского государственного университета // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 442–453. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453), EDN: [EVXYVR](https://orcid.org/EVXYVR)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)





## Legacy of Viktor Wagner. On the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University

D. A. Bredikhin<sup>1</sup>, N. N. Makeev<sup>2</sup>, V. B. Poplavski<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>2</sup>Independent researcher, Saratov, Russia

**Dmitry A. Bredikhin**, Bredikhin@mail.ru, ORCID: [0000-0003-3600-1294](https://orcid.org/0000-0003-3600-1294), SPIN: 2239-2268, AuthorID: 2925

**Nikolay N. Makeev**, nmakeyev@mail.ru, ORCID: [0000-0003-2807-977X](https://orcid.org/0000-0003-2807-977X), SPIN: 7373-7840, AuthorID: 374535

**Vladislav B. Poplavski**, poplavskivb@mail.ru, SPIN: [7571-1651](https://orcid.org/7571-1651), AuthorID: 628968

**Abstract.** The article is dedicated to the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University, which was founded by the outstanding mathematician, honored scientist Viktor Vladimirovich Wagner. A brief description of the scientific work of V. V. Wagner and the main achievements in the field of geometry, algebra, and their applications is given. Prospects for further development of the scientific research areas founded by him are noted.

**Keywords:** differential geometry, history of geometry, Viktor Vladimirovich Wagner, history of mathematics at Saratov State University

**For citation:** Bredikhin D. A., Makeev N. N., Poplavski V. B. Legacy of Viktor Wagner On the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 442–453 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453), EDN: EVXYVR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

В далеком 1935 г. на базе кафедры высшей математики, входившей в состав физико-математического факультета Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (далее — Саратовский университет), невероятными усилиями ректора-реформатора Гавриила Кирилловича Хворостина было организовано пять новых математических кафедр, в том числе кафедра геометрии. Руководить кафедрой геометрии пригласили Виктора Владимировича Вагнера.

Название кафедры было выбрано кратким, но очень ёмким. Измерить Землю! Тем самым изначально закладывалось разнообразие научных направлений и методов исследования кафедры, что стало ее традицией.

Выдающуюся роль сыграл Виктор Владимирович Вагнер своими достижениями в науке, создав различные направления в дифференциальной геометрии, приложениях в механике, вариационном исчислении, общей и универсальной алгебре и логике. Огромна его роль и в подготовке квалифицированных кадров — студентов, кандидатов и докторов наук.

Целая плеяда выдающихся учеников Вагнера трудилась и трудится на поприще науки и преподавания, продолжая преемственность поколений. Как и прежде, научная и учебная деятельность сотрудников кафедры геометрии связана с разнообразными направлениями геометрии, топологии, алгебры и логики. Созданная в трудное для страны время усилиями выдающихся ученых и педагогов кафедра и сегодня выполняет свои задачи.

Юбилею кафедры и её создателю посвящается эта статья.

### Виктор Владимирович Вагнер

Выдающийся деятель науки, основатель научной геометрической и алгебраической школ в Саратовском университете, лауреат Международной математической премии имени



Н. И. Лобачевского, автор ряда фундаментальных математических трудов, профессор Виктор Владимирович Вагнер (4.11.1908–15.08.1981) является основателем кафедры геометрии Саратовского университета, которой в 2025 г. исполняется 90 лет.

В. В. Вагнер относится к тем неординарным личностям, деятелям науки, чей талант, высокие нравственные качества и профессионализм формируют творческую личность, своим трудом вносящую весомый вклад в избранную им науку. Научные направления, творческие идеи, заложенные В. В. Вагнером, живут и успешно развиваются и в наши дни.

Творческая научно-педагогическая деятельность В. В. Вагнера в Саратовском университете началась осенью 1935 г., когда он в 27-летнем возрасте, завершив обучение в Институте математики МГУ имени М. В. Ломоносова, под руководством профессора В. Ф. Кагана защитил диссертацию на тему «*Sur la geometrie differentielle des multiplicities anholonomes*» («Дифференциальная геометрия неголономных многообразий») [1], представленную к защите как кандидатскую и в итоге на этом же заседании учёного совета успешно защищённую им (при единогласном голосовании) как докторскую диссертацию [2]. Это был первый случай подобного рода в стране; такое решение было принято ввиду исключительной важности, значимости и глубины научных результатов, полученных им в представленной работе [3]. В том же году ему было предложено возглавить вновь образованную кафедру геометрии на физико-математическом (впоследствии механико-математическом) факультете Саратовского университета. С тех пор вся трудовая деятельность В. В. Вагнера была связана с этой кафедрой, существующей и до настоящего времени. Более сорока лет (до 1978 г.) он являлся её бессменным руководителем, организатором научной и педагогической деятельности, внёс неоценимый вклад в обеспечение высокого научного уровня преподавания математических дисциплин в университете.

Научная деятельность В. В. Вагнера в Саратовском университете привела к созданию геометрической и алгебраической научных школ, получивших всеобщее мировое признание. На протяжении многих лет он вёл активную и разностороннюю творческую деятельность, выступал с научными докладами на международных математических конгрессах: в Эдинбурге (1958 г., Шотландия), в Стокгольме (1962 г., Швеция), в Варне (Болгарский математический конгресс, 1967 г., Болгария). При этом каждое своё выступление он проводил на языке той страны, в которой проходил конгресс [4].

В нашей стране В. В. Вагнер выступал на 15-м Международном математическом конгрессе (Москва, 1966 г.), а также на конференциях в Казани (юбилейные конференции: 1955 г.; 150 лет геометрии Лобачевского, 1976 г.), Москве (16-я Всесоюзная алгебраическая конференция, 1981 г.) и на Третьем Всесоюзном математическом съезде (Москва, 1962 г.). В течение ряда лет он читал лекции по приглашению университетов Франции, Австрии, Италии, Швеции, ГДР, Чехословакии [4].

Научные интересы В. В. Вагнера отличались разносторонностью, многообразием направлений и глубиной исследований. Это отражено в статьях, опубликованных в журнале «Успехи математических наук» в связи с его 50-летием [2] и 70-летием [3], а также в Большой советской энциклопедии, в «Биографическом словаре деятелей в области математики» (А. И. Бородин, А. С. Бугай, Киев, 1979 г.), а также в отечественных биографических литературных источниках (Бородин А. И. Советские математики. Донецк, 1978; Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики. Киев, 1987; Математика в СССР за сорок лет (1917–1957) : в 2 т. Москва, 1959. Т. 2; Математика в СССР, 1958–1967 : в 2 т. Москва, 1969–1970. Т. 2), в ряде отечественных и зарубежных книжных изданий [2, 3].

## Дифференциальная геометрия

Теория неголономных многообразий — раздел геометрии, который избрал В. В. Вагнер для своей первой научной работы. Примечательно, что наглядным прообразом его исследования явился конкретный модельный объект теоретической механики — механическая си-



стема с неголономной стационарной двусторонней удерживающей связью. И в этом проявилась концептуальная логическая связь геометрии с рациональной механикой.

Завершив создание теории кривизны неголономных многообразий, построенной в период обучения в аспирантуре, В. В. Вагнер подробно исследует некоторые наиболее перспективные специальные неголономные многообразия. Методы неголономной геометрии он применяет к конкретной задаче динамики механических систем и находит её решение в компактной изящной форме. Рассмотренный им пример движения для механической модели специальной конструкции с неголономной связью описан в книге [5].

Первые научные работы В. В. Вагнера относятся к общей теории неголономных многообразий; в этих работах построена теория кривизны римановых неголономных многообразий и неголономных многообразий с аффинной связностью. Эта теория является математическим фундаментом решения многих принципиально важных задач классической рациональной механики, относящихся к системам с неголономными связями. В данной теории определяющее значение имеет построение адекватной теории кривизны такого рода пространств. В. В. Вагнер не только применил новый подход к построению теории кривизны неголономных многообразий, существенно усовершенствовав результаты выдающегося нидерландского геометра Я. А. Схоутена (1883–1981 гг.), но и рассмотрел некоторые интересные для приложений виды неголономных многообразий, а также применил развитые им методы для решения конкретных задач механики. Именно из этого цикла работ В. В. Вагнером были представлены две работы на VIII Международный конкурс, объявленный Казанским университетом в 1937 г., и обе работы были удостоены премии имени Н. И. Лобачевского [6]. Он — единственный из советских математиков, ставший лауреатом этой престижной премии.

Говоря об отражении идей В. В. Вагнера в работах современных геометров, мы имеем в виду три категории исследований. К первой категории относятся исследования, в которых делается попытка изложения полученных Вагнером результатов в инвариантной форме (без систематического использования координатного метода). Сюда же следует отнести работы, в которых полученная Вагнером конструкция построения тензора кривизны используется для исследования геометрии расслоенных пространств. Используя построения В. В. Вагнера, на тотальном пространстве такого расслоения определяется и изучается метрика, названная лифтом Вагнера римановой метрики.

В работах, относящихся ко второй категории, излагаются альтернативные теории кривизны неголономного многообразия. Дается общее определение неголономных аналогов тензора Римана и его конформно инвариантного аналога — тензора Вейля — в терминах когомологий алгебр Ли. В основе подходов Вагнера к определению инвариантов неголономной геометрии лежат не только разные инструменты математического исследования, но и разные постановки исследовательских задач. Для В. В. Вагнера основной интерес составлял поиск геометрических инвариантов, обращение в нуль которых позволяло осуществлять параллельный перенос допустимых векторов в малой окрестности точки неголономного многообразия независимо от выбора допустимой кривой перенесения. Вагнер решил задачу нахождения необходимых инвариантов построением тензора кривизны, названного позже тензором кривизны неголономного многообразия Вагнера.

Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было определено Схоутеном как совокупность тех свойств, которые зависят только от параллельного перенесения внутри самого неголономного многообразия и от его оснащения в объемлющем пространстве. Развивая внутреннюю геометрию неголономного многообразия, Вагнер определяет и исследует свойства тензора кривизны неголономного многообразия, обобщающего тензор кривизны Схоутена. Новый подход позволяет Вагнеру выделить новые типы пространств. Так, например, появляется определение эрмитова почти контактного метрического пространства. Известные уже результаты получают новое описание на языке внутренней геометрии.



Говоря об исследованиях третьей категории, мы имеем в виду работы по геометрии почти контактных метрических пространств и их приложениям, в которых результаты Вагнера используются неявно или «открываются заново». Важную роль в развиваемой Вагнером неголономной геометрии играют системы координат, названные им градиентными или полуголономными координатами. Уточняя понятие «градиентные координаты» для случая почти контактного метрического многообразия, вводится понятие «адаптированная система координат». Адаптированные координаты играют в геометрии неголономных многообразий ту же роль, что и голономные координаты на голономном многообразии. Там же введено понятие «допустимая тензорная структура». Допустимая тензорная структура является объектом внутренней геометрии неголономного многообразия. В работах по геометрии расщепленных пространств допустимые тензорные структуры называются полубазисными.

Важное место в исследованиях почти контактных метрических многообразий занимает изучение линейных связностей. Наиболее естественным представляется рассмотрение внутренних связностей, совместимых с допустимыми тензорными структурами. Исследованная Вагнером внутренняя связность оказывается наиболее естественной для описания характеристик и других изучаемых сегодня структур. Анализ геометрических работ, появившихся в последние десятилетия, свидетельствует о непреходящей ценности полученных В. В. Вагнером результатов. Более того, многие из идей выдающегося ученого только в наше время находят понимание в среде представителей мирового математического сообщества.

## Аналитическая механика

Задачи динамики механических систем с неголономными связями рассматривались ещё с конца XIX в. Этими задачами занимались С. А. Чаплыгин, К. Нейман, Д. Кортевег, П. Аппель, П. В. Воронеж. Исследования по данному направлению были продолжены; в научной литературе появились примеры механических устройств (моделей), авторами которых были Л. Больцман (1902 г.), Г. К. Суслов и П. В. Воронеж, К. Каратеодори (1933 г.) («сани» Каратеодори). В примере К. Каратеодори имеется линейная неголономная связь первого порядка [7]. В. В. Вагнер применил построенную им теорию к решению задачи К. Каратеодори, чем и подтвердил его оригинальные результаты.

Упомянутые примеры неголономных механических систем описывают движения при наличии трения. Однако существует ряд примеров систем с нелинейными неголономными связями первого порядка без трения. Имеют место механизмы, реализующие нелинейные неголономные связи более высокого порядка [5].

В. В. Вагнеру принадлежит пример неголономной связи, основанный на построенной им модели, подробно описанной и проиллюстрированной в упомянутой книге В. В. Доброврова. Описание этой модели сводится к следующему.

Твёрдое тело находится внутри абсолютно твёрдой сферы. С телом жёстко скреплён твёрдый прямолинейный стержень, проходящий при движении тела через центр сферы. На концах стержня закреплены небольшие колёса (диски) с острыми краями, плоскости которых совпадают. Расстояние между двумя наиболее удалёнными точками колёс равно внутреннему диаметру твёрдой сферической оболочки. Колёса могут катиться и вертеться без скольжения по внутренней поверхности оболочки. Предполагается, что масса каждого колеса пренебрежимо мала по сравнению с массой присоединённого к сфере твёрдого тела.

Введём плоскость, проходящую через ось стержня и оси колёс. Поскольку заострённые края колёс препятствуют их боковому скольжению, то мгновенная ось вращения твёрдого тела расположена в данной плоскости. Это условие порождает неголономную связь, согласно которой проекция мгновенной угловой скорости тела на ось, расположенную в плоскости колёс и ортогональную стержню, в любой момент времени равна нулю. При специальном выборе системы осей координат, неизменно связанной с телом, уравнение неголономной связи, реализующейся в примере В. В. Вагнера, совпадает по форме с аналогичными уравнениями связей, имеющихся в примерах Г. К. Суслова и П. В. Воронца [7]. Построив специ-



альную систему локальных координат, В. В. Вагнер получил уравнения движения твёрдого тела с неголономной связью. Решая вопрос о допустимых траекториях данной динамической системы, он установил, что на заданном неголономном многообразии всегда существует траектория, соединяющая две любые его точки. При выборе метода интегрирования системы уравнений движения тела он показал, что всегда существует такая локальная система координат, при которой интегрирование данной системы уравнений существенно упрощается. В частности, при движении данного тела по инерции специальный выбор системы координат позволяет получить все первые алгебраические интегралы этой задачи из условия постоянности компонент вектора скорости, отнесённых к данной системе координат.

На основе созданной им конструктивной теории В. В. Вагнер исследовал свойства фазового пространства в эйлеровом случае движения твёрдого тела вокруг неподвижного полюса, а также рассмотрел новые задачи динамики твёрдого тела с неголономными связями [7].

Для механического устройства, описанного в примере В. В. Вагнера, в научной литературе употребляется термин «гироскоп Вагнера» [5, с. 266]. Это устройство является моделью более сложных по конструкции механизмов, реализующих программы движения, заданные неголономными связями. Задача, поставленная и успешно решённая В. В. Вагнером на основе предложенного им примера, является одной из немногих задач динамики механических систем с неголономными связями, которая полностью решена путём интегрирования системы уравнений движения в конечной форме [8]. Она является наглядным примером применения абстрактной геометрической теории к решению конкретной задачи классической механики, имеющей практическое значение. Это подтверждает слова выдающегося физика Л. Больцмана: «Нет ничего практичнее хорошей теории». В дальнейшем эта задача В. В. Вагнера была обобщена на случай гиростата; её точное аналитическое решение получено для некоторых важных (в прикладном смысле) частных случаев движения.

Следует подчеркнуть принципиальную важность модельной задачи В. В. Вагнера о движении твёрдого тела с неголономной связью. Она указывает на возможности применения геометрической теории неголономных многообразий к решению актуальных задач механики неголономных систем, важных с точки зрения их технического применения как моделей различного рода реальных машин, аппаратов и управляющих устройств. Действительно, в теории управляемых систем, в механике управляемого движения подвижных объектов законы управления могут выражаться в виде неинтегрируемых соотношений между компонентами скорости и координатами объекта. С аналитической точки зрения это равносильно наложению на подвижный объект стационарных неголономных связей. Примерами такого рода систем являются гироскопические системы и устройства, установленные на подвижном основании, управляемые летательные аппараты, программные управляемые системы и комплексы [5].

Как известно, большинство типов реальных технических устройств моделируется неголономными механическими системами. Помимо упомянутых выше гироскопических и управляющих устройств к ним относятся транспортные колёсные машины, моделируемые бициклом, трициклом и квадроциклом. Реальными прообразами бицикла являются двухколёсники — мотоциклы и велосипеды; трицикла — самолёт, трёхколесный автомобиль, грузовые колёсные тележки. Прообразом современного квадроцикла является четырёхколёсный автомобиль.

В дальнейшем В. В. Вагнер создал в теории неголономных многообразий значительные обобщения, позволяющие применять методы дифференциальной геометрии в задачах динамики механических систем с нелинейными связями [9].

Характерно, что все научные исследования В. В. Вагнера в геометрии отличаются стремлением создавать и разрабатывать те её разделы, которые связаны с применениями в других областях математики и механики, решая задачи в максимальной общности и с наиболее общих позиций.

Как известно, наиболее сложными в классическом вариационном исчислении являются





задачи Лагранжа. В. В. Вагнер в своих работах, основанных на построенной им теории гиперполос в центрально-аффинном пространстве, получил геометрическую интерпретацию общего уравнения Эйлера для вариационных задач Лагранжа [3]. Эти задачи широко применяются в динамике механических систем, в частности, при выделении из всего множества динамически возможных движений системы многообразия её стационарных состояний, а также при решении задач оптимального управления.

Основополагающие работы В. В. Вагнера по геометрии неголономных многообразий заложили плодотворную основу для дальнейшего развития актуального научного направления — динамики механических систем с неголономными связями. В результате в научной литературе в этой области появилось огромное количество публикаций, непрерывно возрастающее до настоящего времени. Это связано, прежде всего, с бурно развивающимся научным направлением — теорией управляемого движения различного рода механических объектов. Такие движения возникают «при наложении ... [заданных программных управляющих] связей, причём [управляющими] программами могут являться аналитические выражения условий, налагаемых на обобщённые координаты тела или на ... скорости. ... Эти связи могут быть неголономными ... Для реализации заданного движения в общем случае надо использовать сервосвязи». Кроме того, «аналитические выражения [управляющей] программы представляют собой уравнения неголономных связей. Для исследования такого движения необходимо применить методы неголономной механики» [5, с. 126].

При исследовании свойств управляемого движения механических объектов эти объекты рассматриваются как системы с неголономными связями [10], что позволяет применять в данных исследованиях методы и приёмы для неголономных систем.

Отметим следующий важный момент: в задачах динамики твёрдого тела первые алгебраические интегралы динамических уравнений представляются в виде квадратичных и линейных форм от компонент вектора угловой скорости тела. Это приводит к идее о представлении этих соотношений как условий наложенных неголономных связей. Такой подход открывает новые возможности применения аппарата неголономной механики для исследования динамических свойств неголономных многообразий.

Представляет интерес вопрос о построении моделей неголономных связей не только для механических систем абсолютно твёрдых тел, но и для некоторых отдельных видов сплошных сред [11].

Все приведённые здесь соображения подтверждают проявляющиеся в настоящее время тенденции к расширению и обобщению областей исследования и результатов, содержащихся в трудах В. В. Вагнера по неголономным многообразиям.

## Алгебра

В начале 50-х гг. прошлого столетия исследования Виктора Владимировича в области дифференциальной геометрии привели к необходимости изучения частичных взаимно однозначных преобразований множеств. Аппарат теории групп, блестяще зарекомендовавший себя при исследовании полных взаимно однозначных преобразований, не был приспособлен для этих целей. Вагнером была предложена концепция обобщенной группы (в другой терминологии — инверсной полугруппы), представляющей собой полугруппу, удовлетворяющую некоторым дополнительным условиям. Им была доказана ставшая классической теорема, в дальнейшем определившая одно из центральных направлений общей теории полугрупп, о возможности изоморфного представления всякой обобщенной полугруппы полугруппой частичных взаимно однозначных преобразований некоторого множества с операцией умножения преобразований. Несколько позже этот результат был независимо получен австралийским математиком Г. Престоном.

Частичный порядок на полугруппе называется стабильным (или согласованным с умножением), если из неравенства  $a \leq b$  для любой пары элементов  $a, b$  и любого элемента  $c$  полугруппы следует  $ac \leq bc$  и  $ca \leq cb$ . Порой идемпотенты и полугрупповая операция по-



рождают частичные порядки на полугруппе. Такие порядки, если они стабильны, принято называть естественными. Первый такой естественный порядок был найден Вагнером [12] для инверсных полугрупп, перенося его с полугруппы взаимно однозначных частичных преобразований множества, играющих, как уже отмечалось, важную роль в теории гладких многообразий. С этой же позиции он рассмотрел задачу нахождения представлений упорядоченной полугруппы частичными преобразованиями [13], для которых заданному в полугруппе отношению порядка соответствует отношение включения частичных преобразований.

В контексте естественных порядков и идемпотентов последовал целый ряд работ первого аспиранта Вагнера, впоследствии профессора кафедры геометрии Александра Евгеньевича Либера. Ему принадлежит известный критерий инверсности полугруппы в форме коммутативности любой пары её идемпотентов, а также известные сегодня результаты, касающиеся представления полугрупп объединением групп [14; 15, гл. 7.1].

Идея Вагнера естественным образом упорядочить полугруппу вновь была поднята позже целой плеядой алгебраистов. Обсуждая частичные порядки, порождённые полугрупповой операцией, Митч писал [16], что только спустя 30 лет естественный порядок Вагнера был распространён Хартвигом [17] и Намбурипадом [18] на класс регулярных полугрупп. Однако даже для регулярных полугрупп такие порядки не всегда являются стабильными. Последовала серия работ, посвященных различным способам задания таких частичных порядков, эквивалентность которых была показана Митчем [16]. Это привело к появлению более универсального способа задания частичного порядка на полугруппе, вошедшего в литературу как «порядок Митча» [19]. Так, открытый Вагнером естественный порядок на инверсных полугруппах дал импульс исследованиям в направлении частично упорядоченных полугрупп.

Продолжают эти идеи Вагнера работы профессора кафедры геометрии В. Б. Поплавского, которому посчастливилось быть аспирантом В. В. Вагнера, к сожалению, последним. Идемпотентам и естественным порядкам полугрупп с единицей посвящена серия работ В. Б. Поплавского, в которых строится теория полугрупповых идемпотентов и естественных порядков [20].

В. В. Вагнером было замечено, что теорию частичных взаимно однозначных преобразований естественно рассматривать в рамках общей теории алгебр отношений, в развитие которой созданная им алгебраическая школа внесла немалый вклад. В настоящее время теория алгебр отношений представляет собой существенную составную часть алгебраической логики и современной общей алгебры и имеет многочисленные приложения в различных разделах математики.

Исследование операций над отношениями, начатое во второй половине девятнадцатого столетия в работах Ч. Пирса и Г. Фреге, было систематизировано Э. Шредером в третьем томе своей «Алгебры логики». Тесную взаимосвязь этих исследований с логикой иллюстрирует тот факт, что именно рассмотрение операции умножения отношений побудило Ч. Пирса ввести в логику понятие квантора. Дальнейшее развитие теория алгебр отношений получила в трудах А. Уайтхеда и Б. Рассела.

Новый этап в развитии теории связан с работами А. Тарского 40–50-х гг. XX в., в которых был предложен аксиоматический подход к изучению алгебр отношений. Этому способствовало активное развитие в это время теории моделей и алгебраических систем, в частности теории многообразий и квазимногообразий.

А. Тарским был рассмотрен класс алгебр отношений, в число операций которых наряду с булевыми входили операции умножения и обращения отношений (указанный класс является частным случаем класса булевых алгебр с дополнительными операциями). Он показал, что этот класс образует многообразие. Бесконечный базис тождеств этого многообразия был найден Р. Линдоном, а И. Манк установил, что оно не может быть охарактеризовано никакой конечной системой тождеств.



Эти исследования во многом определили основную проблематику дальнейшего развития теории алгебр отношений, сводящуюся к исследованиям аксиоматизируемости различных классов алгебр отношений, а также нахождению базисов тождеств и квазитожеств, порожденных этими классами многообразий и квазимногообразий.

Среди рассматриваемых классов особое место занимали классы так называемых подредуктов алгебр отношений А. Тарского, т.е. алгебр, операции которых входят в число операций алгебр отношений Тарского или выразимы через них, а также алгебр отношений специального вида.

Так, Б. Йонссон в 1959 г. рассмотрел класс алгебр отношений с операциями умножения, обращения и пересечения отношений; нашел бесконечную систему квазитожеств, характеризующих этот класс, и сформулировал проблему, является ли этот класс многообразием [21]. В том случае, если ограничиться лишь операциями умножения и обращения отношений, то мы приходим к классу инволютированных полугрупп отношений, который является естественным обобщением введенного В. В. Вагнером класса обобщенных групп частичных взаимно однозначных преобразований.

Задача нахождения аксиоматики класса инволютированных полугрупп отношений была поставлена Вагнером на одном из семинаров в 1953 г. и была решена в работах его учеников Б. М. Шайна и Д. А. Бредихина в 70-х гг. прошлого столетия. В 1994 г. Д. А. Бредихиным была решена упомянутая выше проблема Б. Йонссона [22].

Весьма плодотворной, в частности, в теории полугрупп, оказалась общая концепция алгебры отношений, введенная Б. М. Шайном. Им была доказана универсальная аксиоматизируемость классов алгебр отношений при условии, что все свойства рассматриваемых отношений и все операции над ними заданы с помощью формул логики предикатов первого порядка. Соответствующие результаты и их приложения в теории полугрупп были представлены в большой обзорной статье, опубликованной в первом номере международного журнала «Semigroup Forum» в 1970 г. [23].

К тематике алгебр отношений относится также весьма известная проблема о вложимости полугрупп в группы, решение которой содержится в работах А. И. Мальцева и И. Ламбека. Вагнером была сформулирована аналогичная проблема о вложимости полугрупп в обобщенные группы, решение которой было получено Б. М. Шайном с использованием разработанного им метода определяющих пар для представления полугрупп преобразованиями [24].

В. В. Вагнера также можно назвать родоначальником изучения так называемых релятивизированных полугрупп отношений, т.е. полугруппами, сигнатура которых обогащена отношениями включения, проекционного включения и рядом других отношений, несущих дополнительную информацию об исходных полугруппах. Основополагающими здесь являются работы Вагнера «Представление упорядоченных полугрупп» и «Трансформативные полугруппы», определившие исследования целого ряда авторов. В частности, В. Н. Салием была найдена аксиоматическая характеристика проекционных и трансформативных полугрупп частичных преобразований.

Отличительной особенностью стилистики всех работ В. В. Вагнера является широкое использование в них символики математической логики и теории отношений, популяризации которых он уделял особое внимание. Этому, в частности, посвящена его фундаментальная работа [25], где приводится современное подробное изложение общей теории отношений и операций над ними, а также строение и свойства отношений специального вида.

## Научная школа В. В. Вагнера

Основатель кафедры геометрии Саратовского университета, учитель нескольких поколений геометров и алгебраистов В. В. Вагнер создал научную школу, которая внесла весомый вклад в отечественную и мировую науку, в развитие геометрического и алгебраического научных направлений [26]. Представители этой научной школы явились носителями



передовых научных идей и традиций, заложенных её основателем и руководителем прочно и на долгие годы. Всё это — результат выдающихся и плодотворных трудов Виктора Владимировича Вагнера.

Один из студентов В. В. Вагнера, вспоминая о нём, говорит о времени общения со своим учителем как о прекрасных и незабываемых моментах своей жизни, в которые он познавал для себя что-то новое, интересное, значительное, то, что невозможно узнать ни из каких учебников. И каждый раз после очередной встречи с ним он чувствовал необыкновенно высокий душевный подъём, прилив творческого вдохновения; получал ощущение, казалось бы, неограниченных возможностей в предстоящем познании науки. Это стимулировало активность научного творчества, обостряло интерес к новым, неизведанным научным проблемам. Такое яркое и незабываемое впечатление осталось у него на всю жизнь как счастливое время учёбы и свободного научного творчества.

Для нас, его студентов, он был по своим творческим и нравственным качествам живым образцом, с которого мы во всём старались брать пример. «Учитель прикасается к вечности: никто не может сказать, где оканчивается его влияние», — утверждал Г. Адамс, лауреат Пулитцеровской премии по литературе. Как правдиво и точно сказано!

Таков был наш учитель — Виктор Владимирович Вагнер. Такие учителя не забываются, о них помнят всю жизнь. Они живут в своих учениках, в учениках своих учеников и потому они бессмертны. То лучшее, что передано нам Учителем, — это не только знания и творческие навыки, но и воспитывающее нравственное начало, та внутренняя одухотворённость, тот идейный стержень, та прочная основа личности, которая помогает преодолевать творческие и жизненные трудности, успешно достигая поставленных благородных целей. Это то, что помогает ученикам быть достойными памяти своего Учителя.

### Список литературы

1. Вагнер В. В. Sur la geometrie differentielle des multiplicities anholonomes // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1935. Вып. 2–3. С. 269–318.
2. Либер А. Е., Пензов Ю. Е., Рашевский П. К. Виктор Владимирович Вагнер (к 50-летию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1958. Т. 13, № 6 (84). С. 221–227.
3. Ефимов Н. В., Либер А. Е., Ляпин Е. С., Рашевский П. К. Виктор Владимирович Вагнер (к 70-летию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1979. Т. 34, № 4 (208). С. 227–229.
4. Виктор Владимирович Вагнер / под ред. В. В. Розена // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Отдельный оттиск. 41 с. (Профессора Саратовского университета).
5. Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. Москва : Высшая школа, 1970. 272 с.
6. Либер А. Е., Лосик М. В., Пензов Ю. Е. Виктор Владимирович Вагнер (к 70-летию со дня рождения) // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. 1979. Вып. 4. С. 3–14.
7. Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н. История механики твердого тела. Москва : Наука, 1982. 294 с.
8. Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 173–225.
9. Вагнер В. В. Теория поля локальных гиперполос в  $X_n$  и её приложения к механике системы с неголономными связями // Доклады Академии наук СССР. 1949. Т. 66, № 6. С. 1033–1036.
10. Добронравов В. В. Управляемые системы с неголономными связями // Механика : сб. науч. тр. Москва : Оборонгиз, 1961. № 104. С. 27–32.
11. Седов Л. И., Эглит М. Э. Построение неголономных моделей сплошных сред // Доклады Академии наук СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 54–57.
12. Вагнер В. В. Обобщенные группы // Доклады Академии наук СССР. 1952. Т. 84, № 6. С. 1119–1122.
13. Вагнер В. В. Представление упорядоченных полугрупп // Математический сборник. 1956. Т. 38, № 2. С. 203–240.
14. Либер А. Е. К теории обобщенных групп // Доклады Академии наук СССР. 1954. Т. 97, № 1. С. 25–28.



15. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 2. Москва : Мир, 1972. 422 с.
16. Mitsch H. A natural partial order for semigroups // Proceedings of the American Mathematical Society. 1986. Vol. 97, iss. 3. P. 384–388. DOI: [10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0)
17. Hartwig R. How to partially order regular elements // Mathematica Japonica. 1980. Vol. 25, iss. 1. P. 1–13.
18. Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1980. Vol. 23, iss. 3. P. 249–260. DOI: [10.1017/S0013091500003801](https://doi.org/10.1017/S0013091500003801)
19. Mitsch H. Semigroups and their natural order // Mathematica Slovaca. 1986. Vol. 44, iss. 4. P. 445–462.
20. Поплавский В. Б. Частичные порядки и идемпотенты моноидов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4. С. 182–198. DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198), EDN: [UZQNNWZ](https://www.edn.ru/uzqnnwz/)
21. Jonsson B. Representation of modular lattices and of relation algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 1959. Vol. 92. P. 449–464. DOI: [10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5)
22. Andréka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations // Algebra Universalis. 1994. Vol. 33. P. 516–532. DOI: [10.1007/BF01225472](https://doi.org/10.1007/BF01225472)
23. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1–62. DOI: [10.1007/BF02573019](https://doi.org/10.1007/BF02573019), EDN: [XLNTYL](https://www.edn.ru/xlntyyl/)
24. Шайн Б. М. Вмещение полугрупп в обобщенные группы // Математический сборник. 1961. Т. 55, № 4. С. 379–400.
25. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения : сб. ст. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
26. Школа профессора Вагнера. Кафедра геометрии Саратовского университета / под ред. В. В. Розена. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2020. 328 с.

### References

1. Wagner V. V. Sur la géométrie différentielle des multiplicities anholonomes. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the Seminar on Vector and Tensor Analysis], 1935, iss. 2–3, pp. 269–318 (in French).
2. Liber A. E., Penzov Yu. E., Rashevsky P. K. Viktor Vladimirovich Wagner (on the 50th anniversary of his birth). *Russian Mathematical Surveys*, 1958, vol. 13, iss. 6 (84), pp. 221–227 (in Russian).
3. Efimov N. V., Liber A. E., Lyapin E. S., Rashevskii P. K. Viktor Vladimirovich Wagner (on his seventieth birthday). *Russian Mathematical Surveys*, 1979, vol. 34, iss. 4, pp. 209–212. DOI: [10.1070/RM1979v034n04ABEH003268](https://doi.org/10.1070/RM1979v034n04ABEH003268)
4. Rozen V. V. (ed.) Viktor Vladimirovich Wagner. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8 (separate print). 41 p. (in Russian).
5. Dobronravov V. V. *Osnovy mekhaniki negolonomnykh sistem* [Fundamentals of mechanics of non-holonomic systems]. Moscow, Vysshaya shkola, 1970. 272 p. (in Russian).
6. Liber A. E., Losik M. V., Penzov Yu. E. Viktor Vladimirovich Wagner (on the 70th anniversary of his birth). *Differential Geometry*, 1979, iss. 4, pp. 3–14 (in Russian).
7. Grigoryan A. T., Fradlin B. N. *Istoriya mekhaniki tvyordogo tela* [History of Solid Mechanics]. Moscow, Nauka, 1982. 294 p. (in Russian).
8. Wagner V. V. Geometrical interpretation of motion of nonholonomic dynamic systems. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the Seminar on Vector and Tensor Analysis], 1941, iss. 5, pp. 173–225 (in Russian).
9. Wagner V. V. The theory of a field of local hyperbands in  $X_n$  and its applications to the mechanics of a system with nonholonomic constraints. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1949, vol. 66, iss. 6, pp. 1033–1036. (in Russian).
10. Dobronravov V. V. Control systems with nonholonomic constraints. *Mekhanika* [Mechanics]. Collected papers. Moscow, Oborongiz, 1961, iss. 104, pp. 27–32 (in Russian).
11. Sedov L. I., Èglit M. È. Construction of nonholonomic models of continuous media with allowance for the finite nature of deformations and certain physico-chemical effects. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1962, vol. 142, iss. 1, pp. 54–57 (in Russian).
12. Wagner V. V. Generalized groups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1952, vol. 84, iss. 6, pp. 1119–1122 (in Russian).
13. Wagner V. V. Representation of ordered semigroups. *Sbornik: Mathematics*, 1956, vol. 38, iss. 2, pp. 203–240 (in Russian).



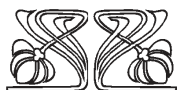
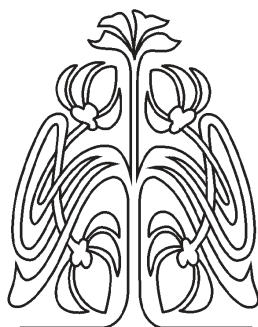


14. Liber A. E. On the theory of generalized groups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1954, vol. 97, iss. 1, pp. 25–28 (in Russian).
15. Clifford A., Preston G. *Algebraicheskaya teoriya polugrupp* [The algebraic theory of semigroups]. Vol. 2. Moscow, Mir, 1972. 422 p. (in Russian).
16. Mitsch H. A natural partial order for semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1986, vol. 97, iss. 3, pp. 384–388. DOI: [10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0)
17. Hartwig R. How to partially order regular elements. *Mathematica Japonica*, 1980, vol. 25, iss. 1, pp. 1–13.
18. Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1980, vol. 23, iss. 3, pp. 249–260. DOI: [10.1017/S0013091500003801](https://doi.org/10.1017/S0013091500003801)
19. Mitsch H. Semigroups and their natural order. *Mathematica Slovaca*, 1986, vol. 44, iss. 4, pp. 445–462.
20. Poplavski V. B. Partial orders and idempotents of monoids. *Chebyshevskii Sbornik*, 2021, vol. 22, iss. 4, pp. 182–198 (in Russian). DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198), EDN: [UZQNWZ](https://www.edn.ru/uzqnwz/)
21. Jonsson B. Representation of modular lattices and of relation algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1959, vol. 92, pp. 449–464. DOI: [10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5)
22. Andréka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations. *Algebra Universalis*, 1994, vol. 33, pp. 516–532. DOI: [10.1007/BF01225472](https://doi.org/10.1007/BF01225472)
23. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, pp. 1–62. DOI: [10.1007/BF02573019](https://doi.org/10.1007/BF02573019), EDN: [XLNTYL](https://www.edn.ru/xlnty/)
24. Shain B. M. Imbedding of semigroups in generalized groups. *Sbornik: Mathematics*, 1961, vol. 55, iss. 4, pp. 379–400 (in Russian).
25. Wagner V. V. Theory of relations and algebra of partial maps. In: *Teoriya polugrupp i ee prilozheniya* [Theory of Semigroups and Its Applications]. Saratov, Saratov State University Publ., 1965, iss. 1, pp. 3–178 (in Russian).
26. Rozen V. V. (ed.) Professor Wagner's School. Department of Geometry of Saratov University. Saratov, Saratov State University Publ., 2020. 328 p. (in Russian).

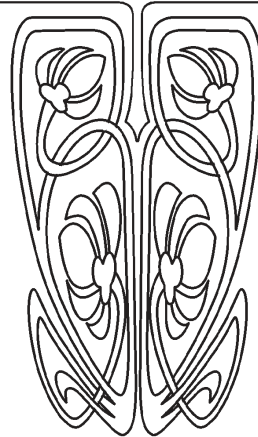
Поступила в редакцию / Received 28.05.2025

Принята к публикации / Accepted 05.06.2025

Опубликована / Published 29.08.2025



**ПОДПИСКА**



### **Подписка на печатную версию**

Подписной индекс издания 36017.  
Оформить подписку на печатную версию  
можно в интернет-каталоге  
ГК «Урал-Пресс» ([ural-press.ru](http://ural-press.ru)).  
Журнал выходит 4 раза в год.  
Цена свободная

Электронная версия журнала находится  
в открытом доступе ([mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru))

### **Адрес издательства (редакции):**

410012, Саратов, Астраханская, 83

**Тел.:** +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89

**Факс:** +7(845-2) 27-85-29

**E-mail:** [publ@sgu.ru](mailto:publ@sgu.ru), [izdat@sgu.ru](mailto:izdat@sgu.ru)

### **Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

**Website:** <https://mmi.sgu.ru>





ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)  
Известия Саратовского университета. Новая серия.  
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025.  
Том 25, выпуск 3

## ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития  
Серия: История. Международные отношения  
**Серия: Математика. Механика. Информатика**  
Серия: Науки о Земле  
Серия: Социология. Политология  
Серия: Физика  
Серия: Филология. Журналистика  
Серия: Философия. Психология. Педагогика  
Серия: Химия. Биология. Экология  
Серия: Экономика. Управление. Право

