

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2025

Том 25

Выпуск 4



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS





Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Научный журнал  
2025 Том 25

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

Григорьев А. А. Предельное распределение ранга дружбы в сложных сетях 458

Dekhkonov F. N. On a time-optimal control problem for a heat conduction equation with involution [Дехконов Ф. Н. О задаче оптимального по времени управления для уравнения теплопроводности с инволюцией] 467

Краснощеких Г. В., Волчков Вит. В. Множества инъективности оператора сферического среднего относительно свертки Бесселя 479

#### Механика

Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю. Асимптотические уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругой оболочке вращения 490

Бурьян С. Н. Движение материальной точки вблизи двух касающихся параболоидов 498

Калоеров С. А., Ермаков О. Э. Решение задачи об изгибе многосвязной кусочно-однородной электромагнитоупругой тонкой плиты 513

Калуцкий Л. А., Крысько А. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Метод вариационных итераций исследования гибких пористых функционально-градиентных размерно зависимых косоугольных пластин 524

Лепетков Д. Р. Расчет рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким телом произвольной формы на основе граничного интегрального уравнения Бертона – Миллера 534

Марьянкин К. А., Халиулова А. Р., Бессонов Л. В., Киреев С. И., Островский Н. В., Иванов Д. В. Обзор результатов натурных испытаний по исследованию прочностных свойств остеотомий scarf и chevron первой плюсневой кости 546

Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Evsyukov A. P., Nizhnik D. A., Vasiliev A. S. Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 1. Mechanical properties [Садырин Е. В., Николаев А. Л., Евсюков А. П., Нижник Д. А., Васильев А. С. Характеризация свойств современных стоматологических материалов и тканей в их окрестности. Часть 1: Механические свойства] 555

#### Информатика

Петракова В. С. Алгоритм обнаружения выбросов в нестационарных временных рядах натурных измерений 566

Rezchikov A. F., Polyakov M. S., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S., Dranko O. I., Putilov D. I., Stepanovskaya I. A. Mathematical models for analyzing and predicting the dynamics of the main characteristics of the road transport system with the correction procedure [Резчиков А. Ф., Поляков М. С., Кушников В. А., Богомолов А. С., Дранко О. И., Путилов Д. И., Степановская И. А. Математические модели анализа и прогнозирования динамики основных характеристик дорожно-транспортной системы с процедурой коррекции] 578

Shnaider I. A., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S. Simulation modeling of atmospheric pollutant dispersion considering dry deposition and the influence of liquid atmospheric precipitation [Шнайдер И. А., Кушников В. А., Богомолов А. С. Имитационное моделирование распространения атмосферного загрязнителя с учетом сухого осаждения и влияния жидких осадков] 589

### Приложение

#### Юбилей

Дудов С. И., Корнев В. В., Рыхлов В. С., Сидоров С. П., Халова В. А. Хромов Август Петрович. Хромова Галина Владимировна. К 90-летию со дня рождения 600

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

#### Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

#### Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

#### Верстка

Халова Виктория Анатольевна

#### Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

#### Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 21.11.2025.

Подписано в свет 28.11.2025.

Выход в свет 28.11.2025.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 17,67 (19,0).

Тираж 100 экз. Заказ 109-Т

Отпечатано в типографии  
Саратовского университета.

#### Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2025

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редакцией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редакцией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

**Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

**Website:** <https://mmi.sgu.ru>

**Ответственный секретарь серии:**

Шевцова Юлия Владиславовна

**CONTENTS****Scientific Part****Mathematics**

**Grigoriev A. A.** Limiting distribution of friendship rank in complex networks 458

**Dekhkono F. N.** On a time-optimal control problem for a heat conduction equation with involution 467

**Krasnoschekikh G. V., Volchikov Vit. V.** Injectivity sets of the spherical mean operator with respect to the Bessel convolution 479

**Mechanics**

**Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu.** Asymptotic equations of the hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front in the viscoelastic shell of revolution 490

**Burian S. N.** Model of motion of a material point near two tangent paraboloids 498

**Kaloerov S. A., Ermakov O. E.** Solution of the problem on bending of a multiconnected piecewise homogeneous electromagnetoelastic thin plate 513

**Kalutsky L. A., Krysko A. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A.** Variational iteration method for investigating flexible porous functionally graded size-dependent oblique plates 524

**Lepetkov D. R.** Calculation of scattering of a plane sound wave by a hard body of arbitrary shape based on the Burton – Miller boundary integral equation 534

**Maryankin K. A., Khaliulova A. R., Bessonov L. V., Kireev S. I., Ostrovsky N. V., Ivanov D. V.** Review of the results of mechanical tests on the strength properties of the scarf and chevron osteotomies of the first metatarsal bone 546

**Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Evsyukov A. P., Nizhnik D. A., Vasiliev A. S.** Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 1. Mechanical properties 555

**Computer Sciences**

**Petrakova V. S.** Algorithm for searching for outliers in non-stationary time series of field measurements 566

**Rezchikov A. F., Polyakov M. S., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S., Dranko O. I., Putilov D. I., Stepanovskaya I. A.** Mathematical models for analyzing and predicting the dynamics of the main characteristics of the road transport system with the correction procedure 578

**Shnaider I. A., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S.** Simulation modeling of atmospheric pollutant dispersion considering dry deposition and the influence of liquid atmospheric precipitation 589

**Appendix****Anniversaries**

**Dudov S. I., Kornev V. V., Rykhlov V. S., Sidorov S. P., Khalova V. A.** Avgust P. Khromov. Galina V. Khromova. To the 90th birthday anniversary 600

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Пурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Лисовенко Дмитрий Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Dmitry S. Lisovenko (Moscow, Russia)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

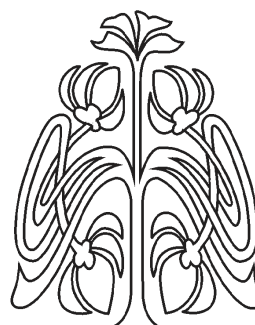
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

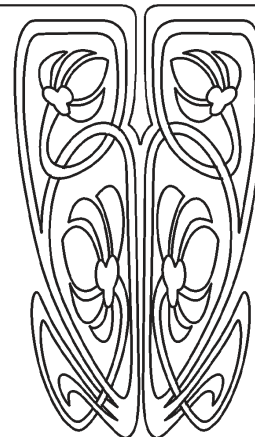
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**







## МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 458–466

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 458–466

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-458-466>

EDN: <https://elibrary.ru/FUGBYB>

Научная статья

УДК 519.17, 519.71

### Предельное распределение ранга дружбы в сложных сетях

А. А. Григорьев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

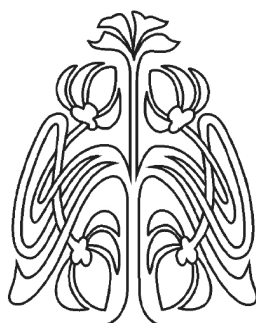
**Григорьев Алексей Александрович**, аспирант кафедры теории функций и стохастического анализа, alexprgrigoriev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3820-9523>, SPIN: 8732-2104, AuthorID: 1094743

**Аннотация.** В настоящей работе изучается парадокс дружбы в сложных сетях и вводится новая величина — ранг дружбы узла, для количественной оценки парадокса. В работе исследуется предельное распределение ранга дружбы в сетях, построенных с использованием конфигурационной модели, где последовательность степеней узлов генерируется независимыми реализациями случайной величины. Доказана теорема о сходимости ранга дружбы для сетей с конечным моментом распределения степеней. Эмпирические результаты подтверждают, что, в отличие от индекса дружбы, ранг дружбы является более стабильной характеристикой при сравнении сетей разного размера. Предложенный метод может быть полезен для сравнения сетей разного масштаба, например социальных сетей.

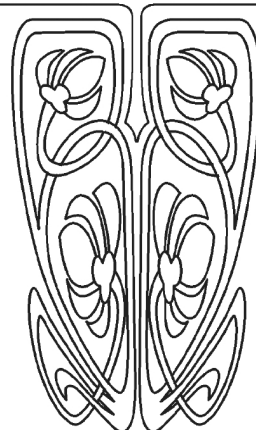
**Ключевые слова:** сложные сети, ранг дружбы, конфигурационная модель, парадокс дружбы, степенное распределение, предельные теоремы, корреляции степеней

**Для цитирования:** Григорьев А. А. Предельное распределение ранга дружбы в сложных сетях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 458–466. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-458-466>, EDN: FUGBYB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный  
отдел







Article

## Limiting distribution of friendship rank in complex networks

A. A. Grigoriev

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexey A. Grigoriev, alexprgrigoriev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3820-9523>, SPIN: 8732-2104, AuthorID: 1094743

**Abstract.** This work investigates the friendship paradox in complex networks and introduces a new metric — the friendship rank of a node, designed to quantify the paradox. The study examines the limiting distribution of friendship rank in networks generated via the configuration model, where node degrees are produced by independent realizations of a random variable. A convergence theorem for friendship rank is proven for networks with finite moments of degree distribution. Empirical results confirm that, unlike the friendship index, the friendship rank is a more stable characteristic when comparing networks of different sizes, especially for degree distributions with heavy tails. The proposed method can be useful for comparing networks of varying scales, such as social networks.

**Keywords:** complex networks, friendship rank, configuration model, friendship paradox, power-law distribution, limit theorems, degree correlations

**For citation:** Grigoriev A. A. Limiting distribution of friendship rank in complex networks. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 458–466 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-458-466>, EDN: FUGBYB

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Одно из свойств, наблюдаемых в реальных сетях, заключается в том, что среднее количество соседей узлов в сетях превышает степень самих узлов. Такое свойство называется парадоксом дружбы, и оно справедливо как для степеней узлов, так и других характеристик в сетях. Более того, парадокс дружбы наблюдается и на уровне сети в целом, и на уровне отдельных узлов [1]. Для измерения парадокса дружбы используется величина, называемая индексом дружбы, вычисляемая как отношение средней степени узла к степени самого узла [2, 3]. Обнаружение и измерение в сетях парадокса дружбы позволяет применять усовершенствованные способы работы со сложными сетями. Так, знание о парадоксе дружбы было использовано при проведении более эффективных опросов в социальных сетях [4] и при выявлении заразных заболеваний [5].

Ранее для анализа степенных корреляций использовали величины, основанные на коэффициенте корреляции Пирсона, или «коэффициент ассортативности». Однако позднее было доказано, что с увеличением сети значение коэффициента корреляции может быть случайным, а именно когда второй момент случайной величины стремится к бесконечности, значение коэффициента более не стремится к константе и зависит от размеров сети [6].

Конфигурационная модель (Configuration model, CM) [7] — это модель генерации графов, которая создаёт графы заданного размера  $n$  с заданной последовательностью степеней. Граф с  $n$  вершинами обозначается как  $G_n = (V_n, E_n)$ , где вершины помечены целыми числами:  $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Множество  $E_n$  представляет собой набор рёбер (неориентированных). Степень вершины  $i$  обозначается через  $d_i$ , а последовательность степеней графа  $G_n$  задаётся как  $D_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Если задана целочисленная положительная случайная величина  $\xi$  с функцией плотности вероятности  $f$ , то последовательность степеней  $D_n = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  может быть получена как  $n$  независимых и одинаково распределённых реализаций случайной величины  $\xi$ . Известно, что конфигурационная модель генерирует





случайные мультиграфы таким образом, что эмпирическое распределение степеней  $f_n$  сходится к  $f$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности.

Конфигурационная модель играет важную роль в анализе корреляций между степенями в сложных сетях и позволяет строить графы  $G_n$  с определённым распределением степеней  $D_n$  и без степенных корреляций (с нейтральным смешиванием). Сети с нейтральным смешиванием позволяют сравнивать реальные сети с «нейтральной» версией, где связи формируются случайным образом. Если реальная сеть демонстрирует отклонения от такой модели (например, наличие ассортативности или дисассортативности), это указывает на наличие специфических структурных свойств, которые могут быть важны для анализа. В ориентированных и неориентированных сетях с нейтральным смешиванием величины, основанные на рангах, обладают сходимостью [8].

Данная работа посвящена вопросу количественного измерения парадокса дружбы в контексте сравнения сетей различных размеров. Используя идеи работ [6, 9], вводится понятие ранга дружбы как характеристики узлов в сети и производится сравнение с индексом дружбы для измерения парадокса дружбы. Работа структурирована следующим образом: в разд. 1 вводятся понятия и обозначения, доказывается теорема о сходимости ранга дружбы; в разд. 2 приведены симуляции и эмпирические эксперименты, подкрепляющие результаты.

## 1. Предельное распределение ранга дружбы в сложных сетях

Пусть множество  $E_{ni}$  содержит узлы, инцидентные вершине  $i$ . В графе  $G_n$  индекс дружбы узла  $i$  может быть вычислен следующим образом:

$$\beta_i = \frac{\sum_{j \in E_{ni}} d_j}{d_i^2}.$$

Эмпирическое совместное распределение степеней имеет вид

$$h_n(k, l) = \frac{1}{2|E_n|} \sum_{i < j} \begin{cases} 1, & d_i = k \text{ и } d_j = l, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Распределение степеней узлов обозначается как  $f(k)$ , а распределение степеней, взвешенное по степеням узлов, как  $f^*(k) = \frac{kf(k)}{|E_n|}$ .

Подмножество  $V_n(k) \subseteq V_n$  содержит все узлы степени  $k$ . Средний индекс дружбы среди узлов со степенью  $k$  может быть записан как

$$\Psi_n(k) := \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{\sum_{j=1}^n h_n(k, l)}{f^*(k)}, & V_n \neq \emptyset, \\ 0, & V(k) = \emptyset. \end{cases} \quad (1)$$

Эмпирическая функция распределения среднего индекса дружбы определяется соотношением

$$\Psi_n(k) = \frac{1}{|V_n(k)|} \sum_{i \in V_n(k)} \beta_i.$$

Во многих реальных сетях распределение степеней является степенным с дисперсией, стремящейся к бесконечности. Как было продемонстрировано ранее на примере конфигурационной модели с  $D_n = IID$ , если показатель степенного закона распределения степеней  $1 < \gamma \leq 2$ , то индекс дружбы меняется с ростом сети [9]. Подобное поведение является критическим недостатком для сравнения сетей разных размеров, что сильно ограничивает применимость индекса дружбы в анализе сетей.

По этой причине для измерения парадокса дружбы предлагается использовать иную величину, лишенную описанного ранее недостатка индекса дружбы. Новая величина будет





вычисляться через ранг узла, а не его степень. Подход с использованием ранговых величин давно применяется в литературе [8, 10].

Ранг узла со степенью  $k$  в сети размера  $n$  обозначим  $F_n^*(k)$  и определим следующим образом:

$$F_n^*(k) = \frac{1}{|E_n|} \sum_{i=1}^n d_i \mathbb{1}\{d_i \leq k\}.$$

Отметим, что  $F_n^*(k)$  есть кумулятивная взвешенная по ребрам функция распределения степеней.

Ранг узла со степенью  $k$  определяется как доля рёбер в графе, которые соединяют узлы со степенью меньше или равной  $k$ . Таким образом, значение ранга узла зависит от его степени и будет всегда в диапазоне  $(0; 1]$ . Для демонстрации рассмотрим несколько примеров.

Обозначим  $d_{\min} = \min(d_1, \dots, d_n)$  минимальную степень узлов в сети и  $d_{\max} = \max(d_1, \dots, d_n)$  — максимальную степень узлов. В табл. 1 приведены примеры вычисления ранга узлов для вершин с несколькими значениями степеней.

Таблица 1 / Table 1

Пример вычисления ранга узла с минимальным значением степени, со значением степени на 1 больше минимума и с максимальной степенью в графе  
An example of calculating the rank of a node with a minimum degree value, a degree value that is 1 greater than the minimum, and a maximum degree in the graph

Степень узла	Ранг узла
$d_{\min}$	Доля рёбер, инцидентных узлам со степенью $d_{\min}$
$d_{\min} + 1$	Доля рёбер, инцидентных узлам со степенями $d_{\min}$ и $d_{\min} + 1$
...	...
$d_{\max}$	1

Для графа  $G_n$  с  $n$  вершинами определим *средний ранг* соседей узлов со степенью  $k$  следующим образом:

$$M_n(k) = \frac{\sum_{\ell > 0} F_n^*(\ell)}{f_n^*(k)} h_n(k, \ell).$$

Теоретический аналог  $M(k)$  задаётся выражением

$$M(k) = \frac{\sum_{\ell=1}^n F^*(\ell) h(k, \ell)}{f^*(k)}.$$

По аналогии ранг дружбы узла  $i$  со степенью  $d_i$  будет равен

$$\beta_i^{\text{rank}} = \frac{\sum_{j \in E_{ij}} F_n^*(d_j)}{d_i F_n^*(d_i)}.$$

*Средний ранг дружбы* соседей  $H_n(k)$  определим следующим образом:

$$H_n(k) := \begin{cases} \frac{1}{F_n^*(k)} \frac{\sum_{\ell=1}^n F_n^*(\ell) h_n(k, \ell)}{f_n^*(k)}, & V_n \neq \emptyset, \\ 0, & V(k) = \emptyset. \end{cases}$$

Как можно заметить, новая величина аналогична индексу дружбы (1) с той разницей, что вместо степени узла в выражении участвует ранг узла.





Пусть задана случайная величина  $\xi$ , по которой получена последовательность степеней  $D_n = IID(\xi)$ , а эмпирическое совместное распределение степеней  $h_n(k, l)$  сходится к предельному распределению  $h(k, l)$  со скоростью  $n^{-\kappa}$ , т. е.

$$\sum_{k, l=1}^{\infty} |h_n(k, l) - h(k, l)| \leq n^{-\kappa}, \quad \kappa > 0$$

с вероятностью, стремящейся к 1 при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1** (О сходимости ранга дружбы). Пусть последовательность графов  $\{G_n\}_{n \geq 1}$  получена по конфигурационной модели с последовательностью степеней  $D_n$ , каждая из которых является результатом  $n$  независимых и одинаково распределённых реализаций случайной величины  $\xi$ . Пусть предельное распределение степеней  $f(k)$  имеет конечный  $(1+\eta)$ -й момент ( $\mathbb{E}[D^{1+\eta}] < \infty$ ). Тогда для каждого фиксированного  $k$ , такого что  $f^*(k) > 0$ , и для любого

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\eta}{8 + 4\eta}, \kappa \right\}$$

выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|H_n(k) - H(k)| > n^{-\delta}) = 0.$$

**Доказательство.** Выразим разность  $H_n(k) - H(k)$  через  $M_n(k)$  и  $M(k)$ , приведём к общему знаменателю, добавим и вычтем  $M(k)F^*(k)$  в числителе:

$$\begin{aligned} H_n(k) - H(k) &= \frac{M_n(k)}{F_n^*(k)} - \frac{M(k)}{F^*(k)} = \frac{M_n(k)F^*(k) - M(k)F_n^*(k)}{F_n^*(k)F^*(k)} = \\ &= \frac{M_n(k)F^*(k) - M(k)F^*(k) + M(k)F^*(k) - M(k)F_n^*(k)}{F_n^*(k)F^*(k)} = \\ &= \frac{(M_n(k) - M(k))F^*(k) + M(k)(F^*(k) - F_n^*(k))}{F_n^*(k)F^*(k)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Разделив слагаемые в последнем равенстве (2), получим

$$H_n(k) - H(k) = \frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)} + M(k) \left( \frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right).$$

Применив неравенство треугольника, имеем

$$|H_n(k) - H(k)| \leq \left| \frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)} \right| + \left| M(k) \left( \frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right) \right|.$$

Оценим слагаемое  $\frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)}$ . Из [6, теорема 6.1] следует, что  $|M_n(k) - M(k)| = O_p(n^{-\delta})$ . В силу [6, предположение 5.1] имеем

$$F_n^*(k) \geq F^*(k) - n^{-\varepsilon} \quad \text{с вероятностью } 1 - O(n^{-\alpha}).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{M_n(k) - M(k)}{F_n^*(k)} \leq \frac{C_1 n^{-\delta}}{F^*(k) - n^{-\varepsilon}} = O_p(n^{-\delta}).$$

Для оценки слагаемого  $M(k) \left( \frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right)$  используем разложение

$$\frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} = \frac{F^*(k) - F_n^*(k)}{F_n^*(k)F^*(k)}.$$



Согласно [6, предположению 5.1] получаем

$$|F_n^*(k) - F^*(k)| \leq d_{tv}(f_n^*, f^*) \leq n^{-\varepsilon}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$M(k) \left( \frac{1}{F_n^*(k)} - \frac{1}{F^*(k)} \right) \leq \frac{|M(k)| \cdot n^{-\varepsilon}}{(F^*(k) - n^{-\varepsilon})F^*(k)} = O(n^{-\varepsilon}).$$

Выбирая  $\delta < \min \left\{ \frac{\eta}{8+4\eta}, \kappa, \varepsilon \right\}$  с учётом того, что  $\varepsilon = \frac{\eta}{4(\eta+2)}$ , окончательно получаем

$$|H_n(k) - H(k)| \leq O_p(n^{-\delta}) + O(n^{-\varepsilon}) \xrightarrow{p} 0.$$

□

**Замечание 1.** Выбор конфигурационной модели в формулировке теоремы обусловлен тем, что сети, создаваемые ею, удовлетворяют определённым условиям регулярности (см. [6, предположения 4.2 и 5.1]). А именно эмпирические распределения степеней и совместные распределения степеней соседей должны сходиться к своим предельным значениям. В общем случае теорема будет выполняться для любых сетей с распределением степеней, удовлетворяющих [6, предположения 4.2 и 5.1]. Поскольку в настоящей работе фокус исследования направлен на конфигурационную модель, то для упрощения восприятия материала данная теорема ограничивается рассмотрением именно этой модели.

## 2. Моделирование и эмпирические результаты

В данном разделе мы исследуем поведение среднего индекса дружбы в искусственных сетях, построенных по конфигурационной модели. На рис. 1 представлены графики, иллюстрирующие зависимость индекса дружбы от степени узла для различных значений параметра  $\gamma$  и размеров сети  $n$ .

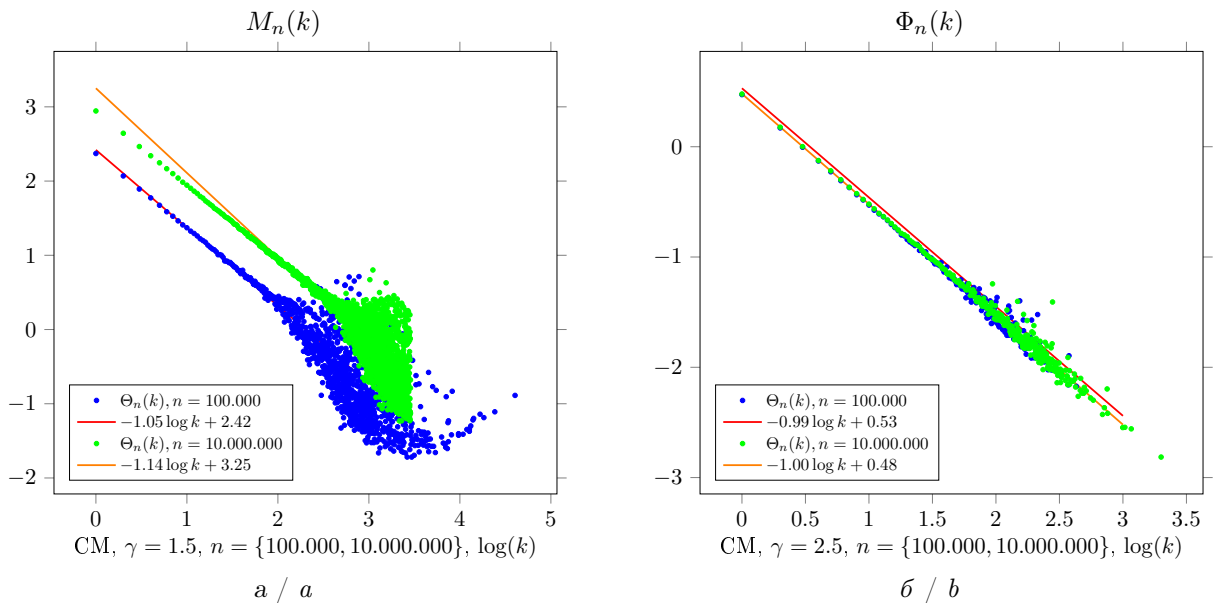


Рис. 1. Средний индекс дружбы, рассчитанный для каждой степени узла в искусственных сетях, построенных по конфигурационной модели: а — график  $M_n(k)$  при  $\gamma = 1.5$ ; б — график  $\Phi_n(k)$  при  $\gamma = 2.5$ . Значения представлены на логарифмической шкале (цвет онлайн)

Fig. 1. The average friendship index calculated for each node degree in artificial networks constructed using the configuration model: a is graph  $M_n(k)$  for  $\gamma = 1.5$ ; b is graph  $\Phi_n(k)$  for  $\gamma = 2.5$ . The values are presented on a logarithmic scale (color online)



Результаты представлены на логарифмической шкале с аппроксимирующими линиями, полученными с помощью линейной регрессии. Выбор логарифмической шкалы обоснован тем, что распределение среднего индекса дружбы следует степенному закону. На графиках представлены усредненные результаты, которые были получены после моделирования 200 сетей для каждого набора параметров.

На графике при  $\gamma = 1.5$  (рис. 1, а) видно, что средний индекс дружбы изменяется в зависимости от размера сети  $n$ . Для сетей с  $n = 100.000$  и  $n = 10.000.000$  наблюдаются различные наклоны линейных аппроксимаций, что указывает на влияние размера сети на структуру связей. Аппроксимирующие линии, заданные уравнениями  $-1.05 \log k + 2.42$  и  $-1.14 \log k + 3.25$ , демонстрируют, что с увеличением размера сети индекс дружбы для узлов с одинаковой степенью может снижаться.

На графике при  $\gamma = 2.5$  (рис. 1, б) подобного явления не наблюдается. Аппроксимирующие линии для сетей с  $n = 100.000$  и  $n = 10.000.000$  практически совпадают, что свидетельствует о независимости индекса дружбы от размера сети при данном значении  $\gamma$ . Полученные регрессионные зависимости  $-0.99 \log k + 0.53$  и  $-1.00 \log k + 0.48$  показывают, что наклон линии практически не изменяется с увеличением  $n$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что параметр  $\gamma$  играет ключевую роль в определении зависимости индекса дружбы от размера сети. При  $\gamma = 1.5$  наблюдается значительное влияние размера сети на структуру связей, в то время как при  $\gamma = 2.5$  этот эффект отсутствует.

Далее рассмотрим поведение среднего ранга дружбы  $H_n(k)$  в искусственных сетях, созданных с помощью конфигурационной модели. На рис. 2 представлены графики, иллюстрирующие зависимость усредненного среднего ранга соседей от степени узла для различных значений параметра  $\gamma$  и размеров сети  $n$ . В данном разделе мы анализируем поведение среднего ранга и сравниваем его с ранее рассмотренным средним индексом дружбы.

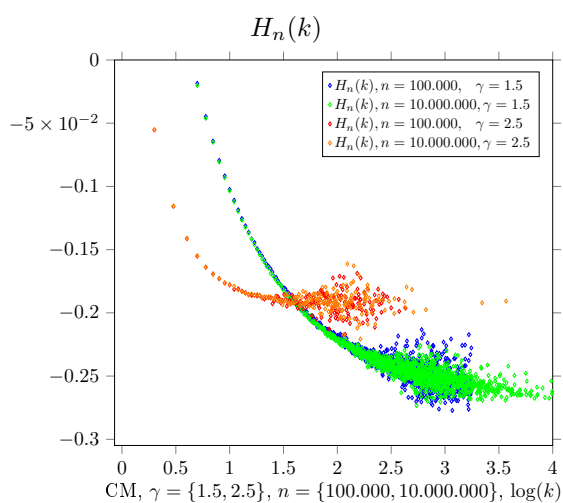


Рис. 2. Средний ранг дружбы  $H_n(k)$ , рассчитанный для каждой степени узла в искусственных сетях, построенных по конфигурационной модели. Значения представлены на логарифмической шкале

Fig. 2. Average friendship rank  $H_n(k)$  calculated for each node degree in artificial networks built using the configuration model. Values are presented on a logarithmic scale

ных значений параметра  $\gamma$  и размеров сети  $n$ . В данном разделе мы анализируем поведение среднего ранга и сравниваем его с ранее рассмотренным средним индексом дружбы.

Графики демонстрируют, что значение среднего ранга соседей изменяется в зависимости от параметра  $\gamma$ . Для  $\gamma = 1.5$  и  $\gamma = 2.5$  наблюдаются различные распределения рангов, что указывает на влияние параметра  $\gamma$  на структуру связей в сети. Однако, в отличие от среднего индекса дружбы, средний ранг соседей остаётся практически неизменным при изменении размера сети  $n$ . Это подтверждается тем, что кривые для  $n = 100.000$  и  $n = 10.000.000$  практически совпадают для каждого значения  $\gamma$ .

Сравнивая эти результаты с графиками среднего индекса дружбы (рис. 1), можно сделать вывод, что параметр  $\gamma$  оказывает различное влияние на эти две характеристики. В то же время средний индекс дружбы зависит как от  $\gamma$ , так и от размера сети  $n$ , средний ранг соседей зависит только от  $\gamma$  и не изменяется с увеличением  $n$ .

Таким образом, средний ранг соседей является более устойчивой характеристикой по отношению к изменению размера сети, что делает его полезным инструментом для анализа сетевых структур, особенно в случаях, когда размер сети может варьироваться. Устойчи-



вость является ценным свойством при сравнении реальных сетей, в которых размер сети в большинстве случаев будет различным.

Напомним, что индекс дружбы по определению сравнивает среднюю степень соседей и степень самого узла. Поэтому с помощью индекса можно убедиться, что формулировка «парадокс дружбы» верна для сетей. В различных сетях «парадокс» может иметь разную силу. Например, в социальных сетях доля узлов с индексом дружбы больше единицы приближается к 0.9 от всех узлов в сети.

Аналогичным образом будет вычислена сила «парадокса» с использованием новой величины ранга дружба. Для того чтобы сравнить, соблюдается ли парадокс дружбы в сетях с использованием величины ранга дружбы, будет вычислена доля узлов, у которых величина ранга дружбы больше единицы. Были проведены симуляции и эксперименты для нескольких реальных социальных сетей, для одной технологической сети, а также для синтетических сетей, полученных с помощью моделей Барабаши – Альберт и конфигурационной модели. Сравнительные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Доля узлов, подверженных парадоксу дружбы, с использованием величин индекса и ранга дружбы  
Share of nodes affected by the friendship paradox, calculated using friendship index and rank values

Network	Индекс дружбы, %	Ранг дружбы, %
Подписчики Twitter	99.4	99.4
Пользователи Flickr	95.7	92.7
Соавторы Github	98.9	93.7
Пользователи Youtube	96.1	92.3
Дорожная сеть США	55.7	57.3
CM, $\gamma = 1.5$ , $n = 100.000$	83.9	74.3
CM, $\gamma = 1.5$ , $n = 1.000.000$	83.4	74.0
BA, $m = 3$ , $n = 10.000$	90.2	74.9
BA, $m = 3$ , $n = 100.000$	90.5	74.9

Можно заметить, что значения, полученные по обоим величинам, близки. Следует также отметить, что значения, полученные с помощью ранга дружбы, меньше соответствующих значений индекса дружбы. Это объясняется тем, что при использовании индекса дружбы узлы с большими степенями имеют огромное влияние: при вычислении среднего их соседи гарантированно попадают под влияние парадокса. В то же время для ранга дружбы центральные узлы в сети будут иметь ранг, близкий к 1, и при подсчете среднего влияние отдельных слагаемых снижается.

## Заключение

В данной работе предложен новый подход к измерению парадокса дружбы в сложных сетях с использованием рангов узлов вместо их степеней. В исследовании было показано, что предложенная величина ранга дружбы демонстрирует сходимость при увеличении размера сети, в отличие от традиционного индекса дружбы, который может зависеть от размера сети. Это делает ранг дружбы более надежным инструментом для сравнения сетей разного масштаба. Была доказана теорема о сходимости ранга дружбы в конфигурационной модели при условии конечности  $(1 + \eta)$ -го момента распределения степеней.

Таким образом, предложенный метод позволяет устранить ключевой недостаток индекса дружбы — зависимость от размера сети — и предоставляет более надёжный инструмент для анализа корреляций степеней в сложных сетях. Дальнейшие исследования могут быть





направлены на изучение поведения ранга дружбы в ориентированных и взвешенных сетях, а также на разработку статистических критериев для его применения в сетях, построенных на реальных данных.

### Список литературы / References

1. Pal S., Yu F., Novick Y., Swami A., Bar-Noy A. A study on the friendship paradox — quantitative analysis and relationship with assortative mixing. *Applied Network Science*, 2019, vol. 4, art. 71. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0190-8>
2. Alipourfard N., Nettasinghe B., Abeliuk A., Krishnamurthy V., Lerman K. Friendship paradox biases perceptions in directed networks. *Nature Communications*, 2020, vol. 11, art. 707. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-14394-x>
3. Higham D. J. Centrality-friendship paradoxes: When our friends are more important than us. *Journal of Complex Networks*, 2019, vol. 7, iss. 4, pp. 515–528. DOI: <https://doi.org/10.1093/comnet/cny029>
4. Nettasinghe B., Krishnamurthy V. “What do your friends think”? Efficient Polling methods for networks using friendship paradox. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2019, vol. 33, iss. 3, pp. 1291–1305. DOI: <https://doi.org/10.1109/TKDE.2019.2940914>
5. Garcia-Herranz M., Moro E., Cebrian M., Christakis N. A., Fowler J. H. Using friends as sensors to detect global-scale contagious outbreaks. *PLoS ONE*, 2014, vol. 9, iss. 4. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0092413>
6. van der Hoorn P., Yao D., Litvak N. Average nearest neighbor degrees in scale-free networks. *Internet Mathematics*, 2018, vol. 1, iss. 1. DOI: <https://doi.org/10.24166/im.02.2018>
7. Chen N., Olvera-Cravioto M. Directed random graphs with given degree distributions. *Stochastic Systems*, 2013, vol. 3, iss. 1, pp. 147–186. DOI: <https://doi.org/10.1287/12-SSY076>
8. Litvak N., van der Hofstad R. Degree-degree dependencies in random graphs with heavy-tailed degrees. *Internet Mathematics*, 2014, vol. 10, iss. 3, pp. 287–334. DOI: <https://doi.org/10.1080/15427951.2013.850455>
9. Sidorov S., Mironov S., Grigoriev A. Limit distributions of friendship index in scale-free networks. *Analysis of Images, Social Networks and Texts. AIST 2023. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 14486. Cham, Springer, 2024, pp. 325–337. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-54534-4\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-031-54534-4_23)
10. van der Hoorn P., Litvak N. Convergence of rank based degree-degree correlations in random directed networks. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2014, vol. 4, iss. 4, pp. 45–83.

Поступила в редакцию / Received 13.05.2025

Принята к публикации / Accepted 25.06.2025

Опубликована / Published 28.11.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 467–478

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 467–478

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-467-478>

EDN: <https://elibrary.ru/GQNYBX>

Article

## On a time-optimal control problem for a heat conduction equation with involution

F. N. Dekhkonov

Namangan State University, 316 Uychi St., Namangan 160136, Uzbekistan

Farrukh N. Dekhkonov, [f.n.dehqonov@mail.ru](mailto:f.n.dehqonov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4747-8557>

**Abstract.** In this paper, we consider a boundary control problem for a heat conduction equation with involution in a bounded one-dimensional domain. The solution with the control function on the border of the rod is given. The constraints on the control are determined to ensure that the average value of the solution within the considered domain attains a given value. The considered control problem is reduced to the Volterra integral equation, which is the first type, using the Fourier method. The proof of the existence of admissible control is related to the existence of a solution of the integral equation. The existence of the control function was proved by the Laplace transform method, and the estimate of the minimum time to reach the given average temperature in the rod was found.

**Keywords:** initial-boundary problem, heat equation, minimal time, integral equation, admissible control, Laplace transform, involution

**Acknowledgements:** The author is grateful to Academician Sh. A. Alimov for his valuable comments.

**For citation:** Dekhkonov F. N. On a time-optimal control problem for a heat conduction equation with involution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 467–478. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-467-478>, EDN: GQNYBX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.977

## О задаче оптимального по времени управления для уравнения теплопроводности с инволюцией

Ф. Н. Дехконов

Наманганский государственный университет, Узбекистан, 160136, г. Наманган, ул. Уйчи, д. 316

Дехконов Фаррух Нуриддин угли, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математики, [f.n.dehqonov@mail.ru](mailto:f.n.dehqonov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4747-8557>

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача граничного управления для уравнения теплопроводности с инволюцией в ограниченной одномерной области. Приводится решение с функцией управления на границе стержня. Определены ограничения на управление, обеспечивающие достижение средним значением решения в рассматриваемой области заданного значения. Рассматриваемая задача управления сводится к интегральному уравнению Вольтерра, которое является первым типом, с помощью метода Фурье. Доказательство существования допустимого управления связано с существованием решения интегрального уравнения. Методом преобразования Лапласа доказано





существование функции управления и найдена оценка минимального времени достижения заданной средней температуры в стержне.

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, уравнение теплопроводности, минимальное время, интегральное уравнение, допустимое управление, преобразование Лапласа, инволюция

**Благодарности:** Автор благодарен академику Ш. А. Алимову за его ценные замечания.

**Для цитирования:** *Dekhkonov F. N.* On a time-optimal control problem for a heat conduction equation with involution [*Дехконов Ф. Н.* О задаче оптимального по времени управления для уравнения теплопроводности с инволюцией] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 467–478. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-467-478>, EDN: GQNYBX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

It is known that due to the widespread use of partial differential equations in physics and engineering, there is always a great interest in the study of boundary control problems. Therefore, in recent years, the control problems for heat conduction equations have been widely studied by many researchers.

The optimal control problem for the parabolic type equations was studied by Fattorini and Friedman [1, 2]. Control problems for the infinite-dimensional case were studied by Egorov [3], who generalized Pontryagin's maximum principle to a class of equations in Banach space, and the proof of a bang-bang principle was shown under the particular conditions. The time-varying bang-bang property of time optimal controls for the heat equation and its applications is studied in [4].

The boundary control problem for a heat equation with a piecewise smooth boundary in an  $n$ -dimensional domain was studied in [5], and an estimate for the minimum time required to reach a given average temperature was found. In [6], the control problem for the heat conduction equation with the Robin boundary condition is studied, and a mathematical model of the heating process of a cylindrical domain is developed. Control problems for the heat transfer equation in the three-dimensional domain are studied in [7].

The control problem related to the inhomogeneous heat transfer equation was studied in [8], and the existence of the admissible control with the additional condition of the weight function was proved by an integral constraint. Control problems for heat equations in bounded one and two-dimensional domains are studied in works [9–11]. In these articles, an estimated was found for the minimum time required to heat a bounded domain to an estimated average temperature. The existence of a control function is proved by the Laplace transform method.

Basic information on optimal control problems is given in detail in monographs by Lions and Fursikov [12, 13]. General numerical optimization and optimal control for second-order parabolic equations have been studied in many publications, such as [14]. In [15], some practical problems for control problems related to heat equations are studied.

It is known that in recent years, due to the increasing interest in physics and mathematics, the boundary problems related to heat diffusion equations involving involution have been widely studied. In [16], a boundary value problem for the heat equation associated with involution in a one-dimensional domain is studied. Many boundary value problems for parabolic-type equations with involution were studied in works [17, 18].

In [19], the control problem associated with a pseudo-parabolic type equation in a one-dimensional domain was studied, and the existence of an admissible control was proved using the Laplace transform method. The boundary control problem in a bounded two-dimensional domain for a pseudo-parabolic type equation was studied in [20].

In this work, the boundary control problem for the heat equation with involution is considered. The main control problem in this work is presented in Section 1. The boundary control problem



studied in this work is reduced to the Volterra integral equation of the first kind by the Fourier method (Section 2). In Section 3, the existence of a solution to the integral equation is proved using the Laplace transform method. Section 4 gives an estimate of the minimum time required to reach a given average temperature of the rod.

## 1. Statement of problem

In this paper, we consider the heat equation with involution in the domain  $\Omega_T := (0, \pi) \times (0, \infty)$

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + \alpha u_{xx}(\pi - x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

with Dirichlet boundary conditions

$$u(0, t) = \nu(t), \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

and initial condition

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3)$$

where  $\alpha$  is a nonzero real number such that  $|\alpha| < 1$  and  $\nu(t)$  is the control function, which gives the flow amplitude.

Let  $M > 0$  be some given constant. We say that the control function  $\nu(t)$  is admissible if it is continuously differentiable on the half-line  $t \geq 0$  and satisfies the conditions

$$\nu(0) = 0, \quad |\nu(t)| \leq M, \quad t \geq 0.$$

Differential equations with modified arguments are equations in which the unknown function and its derivatives are evaluated with modifications of time or space variables; such equations are called, in general, functional differential equations. Among such equations, one can single out equations with involutions [21]. It is known that a function  $g(x) \neq x$  maps bijectively a set of real numbers  $D$ , such that  $g(g(x)) = x$  or  $g^{-1}(x) = g(x)$  is called an involution on  $D$  (see [22, 23]).

Assume that the *weight function*  $\rho(x) \in W_2^1([0, \pi])$  satisfies the conditions

$$\rho(x) \geq 0, \quad \rho'(x) \leq 0, \quad \int_0^\pi \rho(x) dx = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (4)$$

**Time-optimal problem.** Let  $\theta > 0$  be a given constant. Problem consists looking for the minimal value of  $T > 0$  so that for  $t > 0$  the solution  $u(x, t)$  of the problem (1)–(3) with control function  $\nu(t)$  exists and for some  $T_1 > T$  satisfies the equation

$$\int_0^\pi \rho(x) u(x, t) dx = \theta, \quad T \leq t \leq T_1. \quad (5)$$

The physical meaning of equation (5) is the average temperature in the rod. Our main goal in this work is to find the minimum time estimate for the average temperature in the rod to be equal to  $\theta$ .

**Remark 1.** It is known that boundary control problems for the non-homogeneous heat equation in the case  $\alpha = 0$  are studied in detail in works [24].

We consider the spectral problem

$$\begin{aligned} X''(x) - \alpha X''(\pi - x) + \lambda X(x) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$





where  $|\alpha| < 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . It is proved in [17, 18] that expressing the solution of spectral problem in terms of the sum of even and odd functions, one finds the following eigenvalues:

$$\lambda_{2k} = 4(1 + \alpha)k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$\lambda_{2k+1} = (1 - \alpha)(2k + 1)^2, \quad k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (7)$$

and eigenfunctions

$$X_{2k} = \sin 2kx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad X_{2k+1} = \sin(2k + 1)x, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Let

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \sin kx, \quad x \in (0, \pi), \quad (8)$$

where

$$\rho_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \rho(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Denote

$$\beta_{2k+1} = (1 - \alpha)(2k + 1)\rho_{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \beta_{2k} = (1 + \alpha)2k\rho_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

**Theorem 1.** *Let*

$$0 < \theta < \frac{\beta_1 M}{\lambda_1}.$$

*Set*

$$T^* = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left( 1 - \frac{\theta \lambda_1}{\beta_1 M} \right).$$

*Then a solution  $T_{min}$  of the Time-Optimal Problem exists and the estimate  $T_{min} \leq T^*$  is valid.*

We will consider the proof of Theorem 1 step by step in the next sections.

## 2. Integral equation for control function

In this section, we consider how the given control problem can be reduced to a Volterra integral equation of the first kind.

By the solution of the problem (1)–(3) we mean function  $u(x, t)$ , expressed the form

$$u(x, t) = \nu(t) \frac{\pi - x}{\pi} - w(x, t), \quad (11)$$

where the function  $w(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$  is the solution to the problem

$$w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) + \alpha w_{xx}(\pi - x, t) = \frac{\pi - x}{\pi} \nu'(t),$$

with initial-boundary conditions

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad w(x, 0) = 0.$$

Thus, we have (see [25])

$$w(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k + 1} \left( \int_0^t e^{-\lambda_{2k+1}(t-s)} \nu'(s) \, ds \right) \sin(2k + 1)x +$$



$$+\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \int_0^t e^{-\lambda_{2k}(t-s)} \nu'(s) ds \right) \sin 2kx. \quad (12)$$

It follows from (11) and (12), we get the solution of the problem (1)–(3):

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\pi - x}{\pi} \nu(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( \int_0^t e^{-\lambda_{2k+1}(t-s)} \nu'(s) ds \right) \sin(2k+1)x - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \int_0^t e^{-\lambda_{2k}(t-s)} \nu'(s) ds \right) \sin 2kx. \end{aligned} \quad (13)$$

From (13) and the condition (5), we can write

$$\begin{aligned} f(t) = & \int_0^{\pi} \rho(x) u(x, t) dx = \nu(t) \int_0^{\pi} \rho(x) \frac{\pi - x}{\pi} dx - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^t e^{-\lambda_{2k+1}(t-s)} \nu'(s) ds \int_0^{\pi} \rho(x) \sin(2k+1)x dx - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^t e^{-\lambda_{2k}(t-s)} \nu'(s) ds \int_0^{\pi} \rho(x) \sin 2kx dx. \end{aligned}$$

where  $f(t) = \theta$  for  $T \leq t \leq T_1$ .

Then from (8), we have

$$\begin{aligned} f(t) = & \nu(t) \int_0^{\pi} \rho(x) \frac{\pi - x}{\pi} dx - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_{2k+1}}{2k+1} \int_0^t e^{-\lambda_{2k+1}(t-s)} \nu'(s) ds - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{2k}}{2k} \int_0^t e^{-\lambda_{2k}(t-s)} \nu'(s) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

By the condition  $\nu(0) = 0$  and (14) we may write

$$\begin{aligned} f(t) = & \nu(t) \int_0^l \rho(x) \frac{l - x}{l} dx - \nu(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{k} + (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \rho_{2k+1} \int_0^t e^{-\lambda_{2k+1}(t-s)} \nu(s) ds + \\ & + (1 + \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} 2k \rho_{2k} \int_0^t e^{-\lambda_{2k}(t-s)} \nu(s) ds. \end{aligned}$$

According to Parseval equality, we get

$$\int_0^{\pi} \rho(x) \frac{\pi - x}{\pi} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{k}.$$

As a result we can write

$$f(t) = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \rho_{2k+1} \int_0^t e^{-\lambda_{2k+1}(t-s)} \nu(s) ds +$$



$$+(1+\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}2k\rho_{2k}\int_0^te^{-\lambda_{2k}(t-s)}\nu(s)ds. \quad (15)$$

Let us introduce the function

$$K(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+1}e^{-\lambda_{2k+1}t}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{2k}e^{-\lambda_{2k}t}, \quad t>0, \quad (16)$$

where  $\beta_{2k+1}$  and  $\beta_{2k}$  are defined by (10).

Then equality (15) takes the form

$$\int_0^tK(t-s)\nu(s)ds=f(t), \quad t>0, \quad (17)$$

where  $f(t)=\theta=\text{const}>0$  for  $T\leq t\leq T_1$ .

The resulting Volterra integral equation (17) is the main equation for admissible control  $\nu(t)$ .

For any  $M_0>0$ , we denote  $W(M_0)$  the set of function  $f\in W_2^2(-\infty,+\infty)$ ,  $f(t)=0$  for  $t\leq 0$  which satisfying the condition

$$\|f\|_{W_2^2(R_+)}\leq M_0.$$

**Theorem 2.** *There exists  $M_0>0$  such that for any function  $f\in W(M_0)$  the solution  $\nu(t)$  of the equation (17) exists and satisfies the condition  $|\nu(t)|\leq M$ .*

**Lemma 1** ([26]). *Let  $\psi(x)\geq 0$  and  $\psi'(x)\leq 0$  on  $x\in[0,\infty)$ . Then the following inequality is valid:*

$$\int_0^{n\pi}\psi(x)\sin x\,dx\geq 0, \quad n=1,2,\dots$$

**Lemma 2.** *For the coefficients  $\{\rho_k\}_{k\in N}$  defined by (9), the following estimate is valid:*

$$0\leq\rho_k\leq\frac{C}{k}, \quad k=1,2,\dots,$$

where  $C=\text{const}>0$ .

**Proof.** According to Lemma 1, we have

$$\rho_k\geq 0, \quad k=1,2,\dots$$

From (9), we write

$$\begin{aligned}\rho_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\rho(x)\sin kx\,dx=-\frac{2}{\pi}\rho(x)\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi\rho'(x)\cos kx\,dx=\\&=\frac{2}{k\pi}\left(\rho(0)-(-1)^k\rho(\pi)\right)+\frac{o(1)}{k}.\end{aligned}$$

It is clear that

$$\rho(0)-(-1)^k\rho(\pi)\geq 0, \quad k=1,2,\dots,$$

where function  $\rho(x)$  is satisfying conditions (4).

Then we obtain  $0\leq\rho_k\leq\frac{C}{k}$ . □





**Lemma 3.** Let  $|\alpha| < 1$ . Then the following estimate is valid:

$$0 < K(t) \leq \frac{C_\alpha}{\sqrt{t}}, \quad 0 < t \leq 1,$$

where function  $K(t)$  is defined by (16) and  $C_\alpha$  is a constant only depending on  $\alpha$ .

**Proof.** For any  $p > 0$ , consider the following relations:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-p[s]^2} ds = \int_1^{\infty} e^{-p[s]^2} ds = \int_1^{\infty} e^{-ps^2} e^{p(s^2-[s]^2)} ds,$$

where  $[s]$  is the integer part of  $s$ .

Note that  $e^{p(s^2-[s]^2)} = e^{p(s-[s])(s+[s])} \leq e^{2ps}$ . Then we obtain

$$\int_1^{\infty} e^{-ps^2} e^{p(s^2-[s]^2)} ds \leq \int_1^{\infty} e^{-ps^2+2ps} ds = e^p \int_1^{\infty} e^{-p(s-1)^2} ds.$$

Hence, for  $0 < p \leq \text{const}$  we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn^2} \leq \int_1^{\infty} e^{-ps^2} e^{p(s^2-[s]^2)} ds \leq e^p \int_0^{\infty} e^{-ps^2} ds \leq \frac{C}{\sqrt{p}}. \quad (18)$$

From (6), (7) and (18), we have

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_{2k+1}^2 t} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{C}{\sqrt{t}},$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_{2k}^2 t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

From (10) and Lemma 2, we may write

$$0 \leq \beta_{2k} \leq C(1+\alpha), \quad k \in \mathbb{N},$$

and

$$0 \leq \beta_{2k+1} \leq C(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Consequently, we get the following estimate for the function  $K(t)$ :

$$0 < K(t) \leq C_1 \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{t}} + C_2 \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{t}} \leq \frac{C_\alpha}{\sqrt{t}},$$

where  $C_\alpha = \max\{C_1\sqrt{1-\alpha}, C_2\sqrt{1+\alpha}\}$ . □

### 3. Proof of Theorem 2

We use the Laplace transform method to solve equation (17). We introduce the notation

$$\tilde{\nu}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \nu(t) dt.$$



Then we use the Laplace transform to obtain the following equation

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t K(t-s)\nu(s) ds = \tilde{K}(p)\tilde{\nu}(p).$$

Consequently, we obtain

$$\tilde{\nu}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)}, \quad \text{where } p = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 0, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

and

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(\sigma+i\tau)}{\tilde{K}(\sigma+i\tau)} e^{(\sigma+i\tau)t} d\tau. \quad (19)$$

**Lemma 4.** *The following estimate*

$$|\tilde{K}(\sigma+i\tau)| \geq \frac{C_\sigma}{\sqrt{1+\tau^2}}, \quad \sigma > 0, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

is valid, where  $C_\sigma > 0$  is a constant only depending on  $\sigma$ .

**Proof.** Using the Laplace transform, we can write

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p) &= \int_0^{\infty} K(t)e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+1} \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda_{2k+1})t} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k} \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda_{2k})t} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{p+\lambda_{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}}{p+\lambda_{2k}}, \end{aligned}$$

where  $K(t)$  is defined by (16) and

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\sigma+i\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{\sigma+\lambda_{2k+1}+i\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}}{\sigma+\lambda_{2k}+i\tau} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}(\sigma+\lambda_{2k+1})}{(\sigma+\lambda_{2k+1})^2+\tau^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}(\sigma+\lambda_{2k})}{(\sigma+\lambda_{2k})^2+\tau^2} - i\tau \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{(\sigma+\lambda_{2k+1})^2+\tau^2} - \\ &\quad - i\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}}{(\sigma+\lambda_{2k})^2+\tau^2} = \operatorname{Re}\tilde{K}(\sigma+i\tau) + i\operatorname{Im}\tilde{K}(\sigma+i\tau), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\tilde{K}(\sigma+i\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}(\sigma+\lambda_{2k+1})}{(\sigma+\lambda_{2k+1})^2+\tau^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}(\sigma+\lambda_{2k})}{(\sigma+\lambda_{2k})^2+\tau^2}, \\ \operatorname{Im}\tilde{K}(\sigma+i\tau) &= -\tau \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{(\sigma+\lambda_{2k+1})^2+\tau^2} - \tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}}{(\sigma+\lambda_{2k})^2+\tau^2}. \end{aligned}$$

We know that

$$(\sigma+\lambda_k)^2+\tau^2 \leq [(\sigma+\lambda_k)^2+1](1+\tau^2),$$

and we get

$$\frac{1}{(\sigma+\lambda_k)^2+\tau^2} \geq \frac{1}{1+\tau^2} \frac{1}{(\sigma+\lambda_k)^2+1}. \quad (20)$$



Thus, according to (20) we can obtain the estimates

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \tilde{K}(\sigma + i\tau)| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}(\sigma + \lambda_{2k+1})}{(\sigma + \lambda_{2k+1})^2 + \tau^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}(\sigma + \lambda_{2k})}{(\sigma + \lambda_{2k})^2 + \tau^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{1 + \tau^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}(\sigma + \lambda_{2k+1})}{(\sigma + \lambda_{2k+1})^2 + 1} = \frac{C_{1,\sigma}}{1 + \tau^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

and

$$|\operatorname{Im} \tilde{K}(\sigma + i\tau)| \geq |\tau| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{(\sigma + \lambda_{2k+1})^2 + \tau^2} \geq \frac{|\tau|}{1 + \tau^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{(\sigma + \lambda_{2k+1})^2 + 1} = \frac{C_{2,\sigma}|\tau|}{1 + \tau^2}, \quad (22)$$

where  $C_{1,\sigma}$ ,  $C_{2,\sigma}$  as follows

$$C_{1,\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}(\sigma + \lambda_{2k+1})}{(\sigma + \lambda_{2k+1})^2 + 1}, \quad C_{2,\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{(\sigma + \lambda_{2k+1})^2 + 1}.$$

From (21) and (22), we have the estimate

$$|\tilde{K}(\sigma + i\tau)|^2 = |\operatorname{Re} \tilde{K}(\sigma + i\tau)|^2 + |\operatorname{Im} \tilde{K}(\sigma + i\tau)|^2 \geq \frac{\min(C_{1,\sigma}^2, C_{2,\sigma}^2)}{1 + \tau^2},$$

and

$$|\tilde{K}(\sigma + i\tau)| \geq \frac{C_\sigma}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad \text{where } C_\sigma = \min(C_{1,\sigma}, C_{2,\sigma}).$$

□

Then proceed to the limit as  $\sigma \rightarrow 0$  from (19), we obtain

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(i\tau)}{\tilde{K}(i\tau)} e^{i\tau t} d\tau. \quad (23)$$

**Lemma 5** ([24]). *Let  $f(t) \in W(M_0)$ . Then, for the imaginary part of the Laplace transform of function  $f(t)$ , the inequality*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(i\tau)| \sqrt{1 + \tau^2} d\tau \leq C_1 \|f\|_{W_2^2(R_+)},$$

is valid, where  $C_1 > 0$  is a constant.

**Proof of Theorem 2.** From (23) and Lemmas 4 and 5, we can write

$$|\nu(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}(i\tau)|}{|\tilde{K}(i\tau)|} d\tau \leq \frac{1}{2\pi C_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(i\tau)| \sqrt{1 + \tau^2} d\tau \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} \|f\|_{W_2^2(R_+)} \leq \frac{C_1 M_0}{2\pi C_0} = M,$$

where

$$M_0 = \frac{2\pi C_0}{C_1} M.$$





#### 4. Proof of Theorem 1

We consider the integral equation

$$\int_0^t K(t-s)\nu(s) ds = \theta, \quad T \leq t \leq T_1,$$

where  $K(t)$  is defined by (16).

**Lemma 6.** *The following estimate is valid:*

$$K(t) \geq \beta_1 e^{-\lambda_1 t},$$

where the function  $K(t)$  is defined by Eq. (16).

The proof of his proposition is based on the fact that the functional series defined by (16) is non-negative.

We introduce a specific heating as

$$H(t) = \int_0^t K(t-s) ds = \int_0^t K(s) ds.$$

The physical meaning of this function is the average temperature in the rod (see [5]). It is known  $H(0) = 0$  and  $H'(t) = K(t) > 0$ .

We set

$$H^* = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \int_0^{\infty} K(s) ds.$$

Certainly, the average temperature of the rod in the case where the heater is acting with unit load cannot exceed  $H^*$ .

It is clear that  $H^*$  is finite. Indeed, from (10) and (16) we have

$$H^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}}{\lambda_{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}}{\lambda_{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{2k}}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{k} < \infty.$$

**Lemma 7** ([24]). *Let  $0 < \theta < MH^*$ . Then there exist  $T > 0$  and a real-valued measurable function  $\nu(t)$ , and the following equality*

$$\int_0^T K(T-s)\nu(s) ds = \theta,$$

is valid.

It is clear that the value  $T$ , which was found in Proposition 6, gives a solution to the problem. Namely,  $T$  is the root of the equation

$$H(T) = \frac{\theta}{M}. \quad (24)$$

**Lemma 8.** *Let*

$$0 < \theta < \frac{\beta_1 M}{\lambda_1}.$$

Then there exists  $T > 0$  so that

$$T < -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left( 1 - \frac{\theta \lambda_1}{\beta_1 M} \right),$$

and Eq. (24) is fulfilled.



**Proof.** For obtaining the required estimate, we use Lemma 6. We may write

$$H(t) = \int_0^t K(s) ds \geq \beta_1 \int_0^t e^{-\lambda_1 s} ds = \frac{\beta_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}). \quad (25)$$

Consider the following equation for defining  $T^*$ :

$$\frac{\beta_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T^*}) = \frac{\theta}{M}. \quad (26)$$

Then

$$T^* = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left( 1 - \frac{\theta \lambda_1}{\beta_1 M} \right).$$

In accordance with (25) and (26), we have

$$0 < \frac{\theta}{M} \leq H(T^*).$$

Then obviously there exists  $T$  ( $0 < T < T^*$ ), which is a solution to the equation (24).  $\square$

The proof of Theorem 1 follows from Lemma 8.

## Conclusion

Note that in the case where the temperature  $\theta$  is small enough, the value of  $T^*$  can be replaced by the following one:

$$T^* \cong \frac{\theta}{\beta_1 M}.$$

Hence, in this case, the estimate of optimal time given by Theorem 1 is proportional to required temperature  $\theta$  and inversely proportional to the size of the rod  $l$  and to the maximum output of the heat source  $M$ .

## References

1. Fattorini H. O. Time-optimal control of solutions of operational differential equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 1964, vol. 2, iss.1, pp. 54–59. DOI: <https://doi.org/10.1137/0302005>
2. Friedman A. Optimal control for parabolic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1967, vol. 18, iss. 3, pp. 479–491. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(67\)90040-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90040-6)
3. Egorov Yu. V. Optimal control in a Banach space. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1963, vol. 150, iss. 2, pp. 241–244 (in Russian).
4. Chen N., Wang Y., Yang D.-H. Time-varying bang-bang property of time optimal controls for heat equation and its applications. *Systems & Control Letters*, 2018, vol. 112, pp. 18–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2017.12.008>
5. Albeverio S., Alimov Sh. A. On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process. *Applied Mathematics and Optimization*, 2008, vol. 57, pp. 58–68. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00245-007-9008-7>
6. Alimov Sh. A., Komilov N. M. Determining the thermal mode setting parameters based on output data. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, pp. 21–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266122010049>
7. Dekhkonov F. N. On the control problem associated with the heating process. *Mathematical Notes of NEFU*, 2022, vol. 29, iss. 4, pp. 62–71. DOI: <https://doi.org/10.25587/SVFU.2023.82.41.005>
8. Dekhkonov F. N. Boundary control associated with a parabolic equation. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 2024, vol. 33, iss. 2, pp. 146–154. DOI: <https://doi.org/10.22436/jmcs.033.02.03>
9. Fayazova Z. K. Boundary control of the heat transfer process in the space. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2019, vol. 63, iss. 12, pp. 71–79. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X19120089>



10. Dekhkonov F. N. Boundary control problem for the heat transfer equation associated with heating process of a rod. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2023, vol. 110, iss. 2, pp. 63–71. DOI: <https://doi.org/10.31489/2023m2/63-71>
11. Dekhkonov F. N. On the time-optimal control problem for a heat equation. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2023, vol. 111, iss. 3, pp. 28–38. DOI: <https://doi.org/10.31489/2023m3/28-38>
12. Lions J. L. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1968. 426 p. (in French).
13. Fursikov A. V. *Optimal control of distributed systems, theory and applications*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 187. Providence, RI, AMS, 2000. 305 p. DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/187>
14. Altmüller A., Grüne L. Distributed and boundary model predictive control for the heat equation. *GAMM-Mitteilungen*, 2012, vol. 35, iss. 2, pp. 131–145. DOI: <https://doi.org/10.1002/gamm.201210010>
15. Laroche B., Martin P., Rouchon P. Motion planning for the heat equation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, vol. 10, iss. 8, pp. 629–643. DOI: [https://doi.org/10.1002/1099-1239\(20000715\)10:8<629::AID-RNC502>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/1099-1239(20000715)10:8<629::AID-RNC502>3.0.CO;2-N)
16. Mussirepova E., Sarsenbi A., Sarsenbi A. The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient. *Boundary Value Problems*, 2022, art. 99 (2022). DOI: <https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1>
17. Kopzhassarova A., Sarsenbi A. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, vol. 2012, iss. 1, art. 576843. DOI: <https://doi.org/10.1155/2012/576843>
18. Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. *Quaestiones Mathematicae*, 2017, vol. 40, iss. 2, pp. 151–160. DOI: <https://doi.org/10.2989/16073606.2017.1283370>
19. Dekhkonov F. N. On the control problem associated with a pseudo-parabolic type equation in an one-dimensional domain. *International Journal of Applied Mathematics*, 2024, vol. 37, iss. 1, pp. 109–118. DOI: <https://doi.org/10.12732/ijam.v37i1.9>
20. Dekhkonov F. N. Boundary control problem associated with a pseudo-parabolic equation. *Stochastic Modelling and Computational Sciences*, 2023, vol. 3, iss. 1, pp. 119–130. DOI: <https://doi.org/10.61485/SMCS.27523829/v3n1P9>
21. Cabada A., Tojo F. A. F. General results for differential equations with involutions. In: *Differential Equations with Involutions*. Paris, Atlantis Press, 2015, pp. 17–23. DOI: [https://doi.org/10.2991/978-94-6239-121-5\\_2](https://doi.org/10.2991/978-94-6239-121-5_2)
22. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses*. Zürich, 1932, vol. 1, pp. 138–151 (in French).
23. Wiener J. *Generalized solutions of functional-differential equations*. New Jersey, World Scientific Publ., 1993. 424 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/9789814343183>
24. Dekhkonov F. N., Kuchkorov E. I. On the time-optimal control problem associated with the heating process of a thin rod. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, iss. 3, pp. 1134–1144. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223030101>
25. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka, 1966. 724 p. (in Russian).
26. Alimov Sh. A., Dekhkonov F. N. On a control problem associated with fast heating of a thin rod. *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, 2019, vol. 2, iss. 1, pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.56017/2181-1318.1016>

Received / Поступила в редакцию 03.10.2024

Accepted / Принята к публикации 12.02.2025

Published / Опубликовано 28.11.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 479–489

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 479–489

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-479-489>

EDN: <https://elibrary.ru/HLNVFT>

Научная статья

УДК 517.444,517.58

## Множества инъективности оператора сферического среднего относительно свертки Бесселя

Г. В. Краснощёких, Вит. В. Волчков<sup>✉</sup>

Донецкий государственный университет, Россия, 283001, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24

**Краснощёких Глеб Витальевич**, аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, [wolverinred@mail.ru](mailto:wolverinred@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0005-2783-4333>

**Волчков Виталий Владимирович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, [volna936@gmail.com](mailto:volna936@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-4274-0034>, SPIN: 4478-1677, AuthorID: 505219

**Аннотация.** Пусть  $C_{\mathbb{R}}$  — множество всех чётных непрерывных функций на вещественной оси,  $E$  — непустое множество на  $(0, +\infty)$ ,  $\mathcal{R}f(x, t)$  — сферическое среднее функции  $f \in C_{\mathbb{R}}$  с центром в точке  $x \in E$  и радиусом  $t > 0$  относительно свертки Бесселя. Для оператора  $\mathcal{R}$  возникают следующие задачи: 1) выяснить, является ли заданное множество  $E$  множеством инъективности преобразования  $\mathcal{R}$ ; 2) если  $E$  не является множеством инъективности, то охарактеризовать все функции  $f \in C_{\mathbb{R}}$ , такие что  $\mathcal{R}f(x, t) = 0$  на  $E \times (0, +\infty)$ ; 3) если  $E$  является множеством инъективности, то восстановить  $f$  по значениям  $\mathcal{R}f(x, t)$  на  $E \times (0, +\infty)$ . В данной работе получено решение задач 1, 2 для произвольного множества  $E \subset (0, +\infty)$ , а также решение задачи 3 для случая, когда  $E$  — конечное множество инъективности. Показано, что функции из ядра преобразования  $\mathcal{R}$  можно описать в виде рядов по собственным функциям оператора Бесселя, сходящихся в пространстве распределений. Отсюда следует, в частности, что множество  $E$  не является множеством инъективности преобразования  $\mathcal{R}$  тогда и только тогда, когда оно содержится во множестве нулей некоторой собственной функции оператора Бесселя. Кроме того, если  $E = \{r_1, \dots, r_m\}$  — конечное множество инъективности, найден класс формул обращения преобразования  $\mathcal{R}$ , зависящих от набора полиномов  $p_1, \dots, p_m$ . При этом предполагается, что  $p_1, \dots, p_m$  имеют достаточно высокую степень и удовлетворяют некоторым условиям, связанным с нулями преобразований Фурье–Бесселя мер Дирака с носителями в точках  $r_1, \dots, r_m$ .

**Ключевые слова:** обобщенный сдвиг, свертка Бесселя, преобразование Фурье–Бесселя, сферические средние, множества инъективности, формулы обращения

**Благодарности:** Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124012400352-6).

**Для цитирования:** Краснощёких Г. В., Волчков Вит. В. Множества инъективности оператора сферического среднего относительно свертки Бесселя // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 479–489. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-479-489>, EDN: HLNVFT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)





## Injectivity sets of the spherical mean operator with respect to the Bessel convolution

G. V. Krasnoschekikh, Vit. V. Volchkov<sup>✉</sup>

Donetsk State University, 24 Universitetskaya St., 283001 Donetsk, Russia

Gleb V. Krasnoschekikh, wolverimred@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0005-2783-4333>

Vitaliy V. Volchkov, volna936@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4274-0034>, SPIN: 4478-1677, AuthorID: 505219

**Abstract.** Let  $C_{\natural}$  be the set of all even continuous functions on the real axis,  $E$  be a non-empty set on  $(0, +\infty)$ ,  $\mathcal{R}f(x, t)$  be the spherical mean of the function  $f \in C_{\natural}$  with center at the point  $x \in E$  and radius  $t > 0$  with respect to Bessel convolution. The following problems arise for the operator  $\mathcal{R}$ : 1) find out whether a given set  $E$  is an injectivity set of the transform  $\mathcal{R}$ ; 2) if  $E$  is not an injectivity set, then characterize all functions  $f \in C_{\natural}$  such that  $\mathcal{R}f(x, t) = 0$  on  $E \times (0, +\infty)$ ; 3) if  $E$  is an injectivity set, then restore  $f$  from the values of  $\mathcal{R}f(x, t)$  on  $E \times (0, +\infty)$ . In this paper we obtain a solution of problems 1 and 2 for an arbitrary set  $E \subset (0, +\infty)$ , as well as a solution of problem 3 for the case when  $E$  is a finite set of injectivity. It is shown that functions from the kernel of the transform  $\mathcal{R}$  can be described in terms of series of the eigenfunctions of the Bessel operator converging in the space of distributions. It follows, in particular, that the set  $E$  is not the injectivity set of the transform  $\mathcal{R}$  if and only if it is contained in the set of zeros of some eigenfunction of the Bessel operator. Moreover, if  $E = \{r_1, \dots, r_m\}$  is a finite injectivity set, we find a class of inversion formula for the transform  $\mathcal{R}$  that depend on a set of polynomials  $p_1, \dots, p_m$ . It is assumed that  $p_1, \dots, p_m$  have a sufficiently high degree and satisfy some conditions related to the zeroes of Fourier–Bessel transform of Dirac measures with supports at points  $r_1, \dots, r_m$ .

**Keywords:** generalised shift, Bessel convolution, Fourier–Bessel transform, spherical means, injectivity sets, inversion formulas

**Acknowledgements:** The research was carried out in the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 124012400352-6).

**For citation:** Krasnoschekikh G. V., Volchkov Vit. V. Injectivity sets of the spherical mean operator with respect to the Bessel convolution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 479–489 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-479-489>, EDN: HLNFT

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Пусть  $\alpha$  — фиксированное число из промежутка  $(-1/2, +\infty)$ ,  $C_{\natural}$  — пространство чётных непрерывных функций на  $\mathbb{R}$ ,  $\delta_t$  ( $t \geq 0$ ) — чётная мера, сопоставляющая функции  $\psi \in C_{\natural}$  число  $\psi(t)$ . Для  $f \in C_{\natural}$  положим

$$\mathcal{R}f(x, t) = (f \star \delta_t)(x), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

где символ  $\star$  означает свертку относительно обобщённого сдвига Бесселя  $T_x^{\alpha}$  (см. разд. 1). Оператор  $\mathcal{R}$  является аналогом хорошо известного евклидова преобразования Радона на сферах, называемого также оператором сферического среднего (см. [1, гл. 4; 2, гл. 1, § 2]). Изучение сферических средних разного типа представляет самостоятельный интерес, а также играет важную роль в связи с их применением в некоторых областях математики и прикладных задачах (см. [3, ч. 5, гл. 6; 4, гл. 4, § 4.9]).



Определим ядро преобразования  $\mathcal{R}$  относительно непустого множества  $E \subset (0, +\infty)$  равенством

$$\text{Ker}_E \mathcal{R} = \{f \in C_{\mathfrak{h}} : \mathcal{R}f(x, t) = 0 \text{ на } E \times (0, +\infty)\}.$$

Множество  $E \subset (0, +\infty)$  называется множеством инъективности преобразования  $\mathcal{R}$ , если  $\text{Ker}_E \mathcal{R} = \{0\}$ . Совокупность всех таких множеств  $E$  обозначим  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ .

По аналогии с евклидовым случаем (см., например, [5–7]) для заданного множества  $E \subset (0, +\infty)$  возникают следующие задачи:

- 1) выяснить, является ли  $E$  множеством инъективности преобразования  $\mathcal{R}$ ;
- 2) если  $E \notin \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ , то описать  $\text{Ker}_E \mathcal{R}$ ;
- 3) если  $E \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ , то восстановить  $f$  по значениям  $\mathcal{R}f(x, t)$  на  $E \times (0, +\infty)$ .

До настоящего времени основные известные результаты по задачам 1–3 неявно содержались в работе [8] и заключались в следующем:

1) одноэлементное множество  $E$  не является множеством инъективности для  $\mathcal{R}$ , причём  $\text{Ker}_E \mathcal{R}$  порождается собственными функциями оператора Бесселя, принадлежащими этому ядру (см. [8, теорема 3.2]);

2) множество  $E$ , состоящее из двух чисел  $r_1$  и  $r_2$ , принадлежит  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  тогда и только тогда, когда  $r_1/r_2$  не является отношением положительных нулей функции Бесселя  $J_\alpha$  (см. [8, теорема 4.6]).

Отметим, что первый из этих результатов является аппроксимационной теоремой типа Мальгранжа–Хермандера [9, гл. 16], а второй — аналогом теоремы Л. Зальцмана о двух радиусах [10].

В данной работе получено решение задач 1, 2 для произвольного множества  $E \subset (0, +\infty)$ , а также решение задачи 3 для случая, когда  $E$  — конечное множество инъективности преобразования  $\mathcal{R}$ . Показано, что функции из  $\text{Ker}_E \mathcal{R}$  можно описать в виде рядов по собственным функциям оператора Бесселя, сходящихся в пространстве распределений. Отсюда следует, в частности, что множество  $E \subset (0, +\infty)$  не принадлежит  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  тогда и только тогда, когда оно содержится во множестве нулей некоторой собственной функции оператора Бесселя. Кроме того, для конечного множества  $E = \{r_1, \dots, r_m\} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  найден класс формул обращения преобразования  $\mathcal{R}$ , которые зависят от набора полиномов  $p_1, \dots, p_m$ . При этом предполагается, что  $p_1, \dots, p_m$  имеют достаточно высокую степень и удовлетворяют некоторым условиям, связанным с нулями преобразований Фурье–Бесселя распределений  $\delta_{r_1}, \dots, \delta_{r_m}$ .

Точные формулировки и доказательства основных результатов приводятся в разд. 2, 4. В разд. 3 содержатся вспомогательные утверждения, необходимые для конструкции обращения преобразования  $\mathcal{R}$ . Краткие предварительные сведения, относящиеся к гармоническому анализу Бесселя, даны в разд. 1.

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$  — множество всех чётных бесконечно дифференцируемых финитных функций на  $\mathbb{R}$ . Множество  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$  является топологическим векторным пространством с обычной топологией. Обозначим через  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$  пространство всех чётных распределений на  $\mathbb{R}$ , т.е. линейных непрерывных функционалов на пространстве  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ . Значение функционала  $f \in \mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$  на функции  $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$  будем записывать как  $\langle f, \psi \rangle$ . Пространство  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$  содержит класс  $L^{\text{loc}}_{\mathfrak{h}, \alpha}$  всех чётных комплекснозначных функций на  $\mathbb{R}$ , локально суммируемых по мере

$$d\mu(x) = |x|^{2\alpha+1} dx.$$

Вложение  $L^{\text{loc}}_{\mathfrak{h}, \alpha}$  в  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$  осуществляется посредством соотношения

$$\langle f, \psi \rangle = \int_0^\infty f(x)\psi(x)d\mu(x), \quad f \in L^{\text{loc}}_{\mathfrak{h}, \alpha}, \quad \psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}. \quad (2)$$



Как обычно, для носителя распределения  $f \in \mathcal{D}'_{\mathfrak{H}}$  используется символ  $\text{supp } f$ , а множество всех распределений из  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{H}}$  с компактным носителем обозначается  $\mathcal{E}'_{\mathfrak{H}}$ .

Для  $f \in C_{\mathfrak{H}}$  обобщенный сдвиг Бесселя определяется равенством

$$T_x^\alpha f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha} d\theta, \quad (3)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Если  $f \in \mathcal{D}'_{\mathfrak{H}}$  и  $g \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{H}}$ , то свёртка Бесселя  $f \star g \in \mathcal{D}'_{\mathfrak{H}}$  действует по правилу

$$\langle f \star g, \psi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), T_x^\alpha \psi(y) \rangle \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{H}}.$$

Основные свойства операторов обобщённого сдвига и свёртки Бесселя содержатся в [4, гл. 2; 8, § 2, 3; 11, § 7; 12, гл. 1; 13, гл. 1].

Пусть  $\mathbf{I}_\alpha(z) = J_\alpha(z)z^{-\alpha}$ ,

$$\varphi_\lambda(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \mathbf{I}_\alpha(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Функция  $\varphi_\lambda$  является собственной функцией оператора (3) и дифференциального оператора Бесселя

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x} \frac{d}{dx} = \frac{1}{x^{2\alpha+1}} \frac{d}{dx} \left( x^{2\alpha+1} \frac{d}{dx} \right), \quad (5)$$

причём

$$T_x^\alpha \varphi_\lambda(y) = \varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda(y), \quad L\varphi_\lambda = -\lambda^2 \varphi_\lambda \quad (6)$$

(см. [8, § 2, 3]). Из интегрального представления Пуассона бesselевых функций следует оценка

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq e^{|x||\text{Im } \lambda|}. \quad (7)$$

Сферическим преобразованием (преобразованием Фурье – Бесселя) распределения  $f \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{H}}$  называется чётная целая функция

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f, \varphi_\lambda \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

При этом

$$\varphi_\lambda \star f = \tilde{f}(\lambda) \varphi_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (9)$$

(см. [14, лемма 12]).

Для распределений  $f, g \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{H}}$  и любого полинома  $p$  имеют место равенства

$$\widetilde{f \star g} = \tilde{f} \tilde{g}, \quad \widetilde{p(L)f}(\lambda) = p(-\lambda^2) \tilde{f}(\lambda) \quad (10)$$

(см. [8, § 2]). Если  $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{H}}$ , то для любого  $N > 0$  существует константа  $C_N > 0$ , такая что

$$|\tilde{\psi}(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Кроме того, справедлива формула обращения

$$\psi(y) = \kappa_\alpha \int_0^\infty \tilde{\psi}(x) \varphi_x(y) d\mu(x), \quad \text{где } \kappa_\alpha = (2^\alpha \Gamma(\alpha+1))^{-2} \quad (12)$$

(см. [8, § 2]).

Нам потребуется также следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $w$  — чётная целая функция и  $w(\lambda) = 0$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$\left| \frac{\lambda w(z)}{z^2 - \lambda^2} \right| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |w(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

где при  $z = \pm\lambda$  левая часть в (13) доопределена по непрерывности.

Доказательство леммы 1 основано на принципе максимума модуля и содержится в [15].



## 2. Описание ядра

Всюду в дальнейшем считаем, что  $r$  — фиксированное положительное число. В силу (8) и (4) имеем

$$\tilde{\delta}_r(\lambda) = \varphi_\lambda(r), \quad \tilde{\delta}_r(0) = 1. \quad (14)$$

Обозначим через  $\mathcal{N}_r$  последовательность всех положительных нулей функции  $\tilde{\delta}_r$ , занумерованных в порядке возрастания. Из свойств бesselевых функций следует, что

$$\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r) \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{|\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)|} = O(\lambda^{\alpha+3/2}) \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathcal{N}_r \quad (15)$$

(см. [14, лемма 3; 16, гл. 7.9]).

Кроме того,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_r} \frac{1}{\lambda^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \quad (16)$$

Для  $f \in L^1([0, r]; d\mu)$  положим

$$d_\lambda(f, r) = \frac{2^{1-2\alpha} r^{-2\alpha-4}}{(\Gamma(\alpha+1)\lambda \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r))^2} \int_0^r f(x) \varphi_\lambda(x) d\mu(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_r.$$

**Лемма 2.** Пусть  $f \in L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}$ . Тогда для того, чтобы  $f \star \delta_r = 0$  на  $\mathbb{R}$ , необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_r} d_\lambda(f, r) \varphi_\lambda,$$

в котором ряд сходится в пространстве  $\mathcal{D}'_{\natural}$  и  $d_\lambda(f, r) = O(\lambda^{2\alpha+1})$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство.** Для решений уравнения  $f \star \chi_r = 0$ , где  $\chi_r$  — индикатор отрезка  $[-r, r]$ , подобное разложение установлено в работе [14]. Утверждение леммы 2 доказывается аналогично.  $\square$

Для непустого множества  $E \subset (0, +\infty)$  определим множество  $\Lambda(E)$  равенством

$$\Lambda(E) = \{\xi > 0 : \mathbf{I}_\alpha(\xi \eta) = 0 \text{ для всех } \eta \in E\}. \quad (17)$$

Отметим, что

$$\Lambda(E) = \bigcap_{\eta \in E} \mathcal{N}_\eta.$$

**Теорема 1.** 1. Для того, чтобы функция  $f \in C_{\natural}$  принадлежала  $\text{Ker}_E \mathcal{R}$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda(E)} a_\lambda \varphi_\lambda, \quad (18)$$

где  $a_\lambda \in \mathbb{C}$  и ряд сходится в  $\mathcal{D}'_{\natural}$ .

2. Множество  $E \subset (0, +\infty)$  принадлежит  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  тогда и только тогда, когда  $E$  не содержится в  $\mathcal{N}_\eta$  ни при каком  $\eta > 0$ .

**Доказательство.** 1. Предположим, что  $f \in \text{Ker}_E \mathcal{R}$ . Фиксируем  $r_1 \in E$ . Учитывая, что

$$\mathcal{R}f(x, t) = T_t^\alpha f(x) = T_x^\alpha f(t) = \mathcal{R}f(t, x), \quad (19)$$

и применяя лемму 2, получаем

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r_1}} a_\lambda \varphi_\lambda, \quad (20)$$





где  $a_\lambda = O(\lambda^{2\alpha+1})$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$  и ряд сходится в  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$ . Если  $E = \{r_1\}$ , то необходимость в теореме 1 установлена.

Пусть  $E \neq \{r_1\}$  и  $r_2 \in E$ ,  $r_2 \neq r_1$ . Поскольку  $f \star \delta_{r_2} = 0$ , из (20) и (6) имеем

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r_1}} a_\lambda \mathbf{I}_\alpha(\lambda r_2) \varphi_\lambda = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}. \quad (21)$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  возьмём функцию  $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ , такую что  $\text{supp } \omega_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $\omega_\varepsilon \geq 0$  и

$$\int_0^\varepsilon \omega_\varepsilon(x) d\mu(x) = 1.$$

Семейство  $\omega_\varepsilon$  сходится в  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$  к дельта-функции, сосредоточенной в нуле. Сворачивая обе части в (21) с  $\omega_\varepsilon$  и используя (9), приходим к равенству

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r_1}} a_\lambda \mathbf{I}_\alpha(\lambda r_2) \tilde{\omega}_\varepsilon(\lambda) \varphi_\lambda = 0. \quad (22)$$

В силу быстрого убывания  $\tilde{\omega}_\varepsilon(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$  и соотношений ортогональности для бесселевых функций (см. (11) и [16, гл. 7, § 7.10.4]) из (22) находим

$$a_\lambda \mathbf{I}_\alpha(\lambda r_2) \tilde{\omega}_\varepsilon(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r_1}.$$

Это соотношение и равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\omega}_\varepsilon(\lambda) = \tilde{\delta}_0(\lambda) = 1$$

показывают, что

$$a_\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r_1} \setminus \mathcal{N}_{r_2}.$$

Теперь произвольность  $r_2$  влечёт разложение (18). Достаточность в утверждении 1 следует из (9), (14) и (17).

2. Если  $E \subset \mathcal{N}_\eta$  при некотором  $\eta > 0$ , то  $\varphi_\eta \in \text{Ker}_E \mathcal{R}$  (см. (9), (14) и (1)). Поэтому  $E \notin \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ .

Пусть теперь  $E \notin \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  и  $f$  — ненулевая функция в  $\text{Ker}_E \mathcal{R}$ . Тогда по доказанному выше справедливо разложение (18). Если предположить, что  $E$  не содержится в  $\mathcal{N}_\eta$  ни при каком  $\eta > 0$ , то получим  $\Lambda(E) = \emptyset$ . Отсюда и из (18) следует, что  $f = 0$ . Противоречие.  $\square$

**Замечание 1.** Известно (см. [5]), что множество  $E \subset \mathbb{R}^2$  является множеством инъективности преобразования Радона на окружностях для класса финитных непрерывных функций в  $\mathbb{R}^2$  тогда и только тогда, когда  $E$  не содержится в объединении вида  $\omega(\Sigma_N) \cup F$ , где  $\Sigma_N = \bigcup_{l=0}^{N-1} \{te^{i\pi l/N} : t \in \mathbb{R}\}$  — система Коксетера из  $N$  прямых,  $F$  — конечное число точек в  $\mathbb{R}^2$  и  $\omega$  — евклидово движение плоскости  $\mathbb{R}^2$ . В связи с этим результатом Л. Зальцман [6] высказал следующую гипотезу: множество  $E$  является множеством неинъективности преобразования Радона на сферах для класса  $C(\mathbb{R}^n)$  лишь в том случае, когда оно содержится во множестве нулей некоторой собственной функции лапласиана. Из второго утверждения теоремы 1 следует справедливость аналога гипотезы Л. Зальцмана для преобразования  $\mathcal{R}$  (см. (6) и (9)).

### 3. Разложение дельта-функции

Введём следующие обозначения:

$$A_{r,\lambda} = \frac{2^{1-\alpha} r^{-2\alpha-4} \lambda^{-2}}{\Gamma(\alpha+1) \mathbf{I}_{\alpha+1}^2(\lambda r)}, \quad B_{r,\lambda} = \frac{2^{1-\alpha} r^{-2}}{\Gamma(\alpha+1) \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)}, \quad \lambda \in \mathcal{N}_r,$$

$$\mathcal{J}_{r,\lambda}(x) = A_{r,\lambda} \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) \chi_r(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_r,$$



где, как и выше,  $\chi_r$  — индикатор отрезка  $[-r, r]$ . Отметим, что определение  $A_{r,\lambda}$  и  $B_{r,\lambda}$  корректно ввиду первого соотношения в (15).

Пусть  $\mathcal{P}_r$  — множество полиномов  $p(z)$ , таких что  $\deg p > \alpha + 1$  и все нули функции  $p(-z^2)\varphi_z(r)$  являются простыми,  $\mathcal{N}_{r,p}$  — множество всех нулей функции  $p(-z^2)\varphi_z(r)$ , лежащих в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  или на луче  $\{it : t > 0\}$ .

Для  $p \in \mathcal{P}_r$ ,  $\lambda \in \mathcal{N}_{r,p}$  положим

$$\gamma_{r,p,\lambda} = \begin{cases} \frac{B_{r,\lambda}}{p(-\lambda^2)}, & \text{если } \lambda \in \mathcal{N}_r, \\ \frac{1}{p'(-\lambda^2)\varphi_\lambda(r)}, & \text{если } p(-\lambda^2) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\mathcal{J}_{r,p,\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{p(-\lambda^2)}p(L)\mathcal{J}_{r,\lambda}, & \text{если } \lambda \in \mathcal{N}_r, \\ \frac{1}{p'(-\lambda^2)\varphi_\lambda(r)}q_\lambda(L)\delta_r, & \text{если } p(-\lambda^2) = 0, \end{cases}$$

где  $q_\lambda(z) = \frac{p(z)}{z+\lambda^2}$ . Смысл распределений  $\mathcal{J}_{r,p,\lambda}$  виден из лемм 3 и 4, приводимых ниже.

**Лемма 3.** Пусть  $p \in \mathcal{P}_r$ ,  $\lambda \in \mathcal{N}_{r,p}$ . Тогда

$$(L + \lambda^2)\mathcal{J}_{r,p,\lambda} = \gamma_{r,p,\lambda}p(L)\delta_r. \quad (24)$$

**Доказательство.** Достаточно установить, что

$$(L + \lambda^2)\mathcal{J}_{r,\lambda} = B_{r,\lambda}\delta_r \quad \text{при } \lambda \in \mathcal{N}_r. \quad (25)$$

Для произвольной функции  $\psi \in \mathcal{D}_{\mathbb{H}}$  имеем

$$\begin{aligned} \langle (L + \lambda^2)\mathcal{J}_{r,\lambda}, \psi \rangle &= \langle \mathcal{J}_{r,\lambda}, (L + \lambda^2)\psi \rangle = \\ &= \frac{2^{1-\alpha}r^{-2\alpha-4}\lambda^{-2}}{\Gamma(\alpha+1)\mathbf{I}_{\alpha+1}^2(\lambda r)} \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x)(L + \lambda^2)\psi(x)d\mu(x). \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразуем этот интеграл с помощью повторного интегрирования по частям, равенств (5), (6) и соотношений

$$\mathbf{I}_\alpha(\lambda r) = 0, \quad (\mathbf{I}_\alpha(\lambda x))' = -\lambda^2 x \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda x) \quad (27)$$

(см. [16, гл. 7, п. 7.2.8, формула (51)]). Находим

$$\begin{aligned} \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x)L\psi(x)d\mu(x) &= \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x)d(x^{2\alpha+1}\psi'(x)) = - \int_0^r x^{2\alpha+1}(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x))'d\psi(x) = \\ &= \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) + \int_0^r \psi(x)(x^{2\alpha+1}(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x))')'dx = \\ &= \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) + \int_0^r \psi(x)L(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x))d\mu(x) = \\ &= \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) - \lambda^2 \int_0^r \psi(x)\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)d\mu(x). \end{aligned}$$

Отсюда и из (26) получаем  $\langle (L + \lambda^2)\mathcal{J}_{r,\lambda}, \psi \rangle = B_{r,\lambda}\langle \delta_r, \psi \rangle$ , что влечёт (25).  $\square$

**Следствие 1.** Имеет место равенство

$$(\lambda^2 - z^2)\tilde{\mathcal{J}}_{r,p,\lambda}(z) = \gamma_{r,p,\lambda}p(-z^2)\varphi_z(r), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (28)$$

В частности, если  $z \in \mathcal{N}_{r,p}$ , то

$$\tilde{\mathcal{J}}_{r,p,\lambda}(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \neq z, \\ 1, & \text{если } \lambda = z. \end{cases} \quad (29)$$



**Доказательство.** Используя (10) и (24), получаем (28). Теперь, учитывая (23) и (27), приходим к (29).  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $p \in \mathcal{P}_r$ . Тогда

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r,p}} \mathcal{J}_{r,p,\lambda} = \delta_0, \quad (30)$$

где ряд сходится безусловно в пространстве  $\mathcal{D}'_{\natural}$ .

**Доказательство.** В силу симметричности оператора  $L$  и соотношения (2) для любой функции  $\psi \in \mathcal{D}_{\natural}$  и  $\lambda \in \mathcal{N}_r$  имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}_{r,p,\lambda}, \psi \rangle &= \frac{1}{p(-\lambda^2)} \langle p(L) \mathcal{J}_{r,\lambda}, \psi \rangle = \frac{1}{p(-\lambda^2)} \langle \mathcal{J}_{r,\lambda}, p(L) \psi \rangle = \\ &= \frac{2^{-\alpha} A_{r,\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)p(-\lambda^2)} \int_0^r \varphi_{\lambda}(x) (p(L) \psi)(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Отсюда видно (см. (7), (15) и (16)), что ряд

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_r} |\langle \mathcal{J}_{r,p,\lambda}, \psi \rangle| \quad \text{сравним со сходящимся рядом} \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_r} \frac{1}{\lambda^{2 \deg p - 2\alpha - 1}}.$$

Поэтому ряд в левой части (30) сходится безусловно в пространстве  $\mathcal{D}'_{\natural}$  к некоторому распределению  $f \in \mathcal{D}'_{\natural}$  с носителем на  $[-r, r]$ . При этом (см. (28), (29))

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r,p}} \gamma_{r,p,\lambda} \frac{p(-z^2) \varphi_z(r)}{\lambda^2 - z^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

и  $\tilde{f}(z) = 1$ , если  $z \in \mathcal{N}_{r,p}$ . Покажем, что  $\tilde{f} = 1$  на  $\mathbb{C}$ . Функция

$$g(z) = \frac{\tilde{f}(z) - 1}{p(-z^2) \varphi_z(r)}$$

является целой функцией не выше первого порядка. При  $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Re} z$ ,  $z \rightarrow \infty$  она оценивается следующим образом (см. (15), (16)):

$$|g(z)| \leq \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r,p}} \frac{|\gamma_{r,p,\lambda}|}{2|\lambda|} \left( \frac{1}{|z - \lambda|} + \frac{1}{|z + \lambda|} \right) + \frac{1}{|p(-z^2)| |\varphi_z(r)|} \leq O\left(\frac{1}{|z|}\right) + \frac{1}{|p(-z^2)| |\varphi_z(r)|}.$$

Эта оценка и асимптотика бесселевой функции на бесконечности (см. [16, гл. 7, п. 7.13.1, формула (3)]) влечёт равенство

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Re} z}} g(z) = 0.$$

Тогда по принципу Фрагмена–Линделёфа функция  $g$  ограничена на  $\mathbb{C}$ . Теперь, используя теорему Лиувилля, заключаем, что  $g = 0$  на  $\mathbb{C}$ . Таким образом,  $\tilde{f} = 1$  на  $\mathbb{C}$ , т.е.  $f = \delta_0$ .  $\square$

#### 4. Формула обращения

Пусть  $m \geq 2$ ,  $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_m$ ,  $E = \{r_1, \dots, r_m\} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ . Поскольку  $\bigcap_{j=1}^m \mathcal{N}_{r_j} = \emptyset$ , то имеется достаточно большой произвол в выборе полиномов  $p_1, \dots, p_m$  со следующими свойствами:

- 1)  $\deg p_j > \alpha + 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;



- 2) нули всех функций  $p_j(-z^2)\varphi_z(r_j)$  являются простыми;  
 3)  $\bigcap_{j=1}^m \mathcal{N}_{r_j, p_j} = \emptyset$ .

Множество всех таких наборов  $(p_1, \dots, p_m)$  обозначим  $\mathcal{P}_E$ .

Возьмем  $P = (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{P}_E$  и определим  $\mathcal{N}_{E, P}$  как декартово произведение множеств  $\mathcal{N}_{r_j, p_j}$ :

$$\mathcal{N}_{E, P} = \mathcal{N}_{r_1, p_1} \times \dots \times \mathcal{N}_{r_m, p_m}.$$

Для  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathcal{N}_{E, P}$  положим

$$\mathfrak{J}_{E, P, \Lambda} = \mathcal{J}_{r_1, p_1, \lambda_1} \star \dots \star \mathcal{J}_{r_m, p_m, \lambda_m}. \quad (31)$$

Символ  $\mathfrak{J}_{E, P, \Lambda, j}$  будет обозначать свёрточное произведение  $\mathfrak{J}_{E, P, \Lambda}$  без множителя  $\mathcal{J}_{r_j, p_j, \lambda_j}$ .

**Лемма 5.** Пусть  $E = \{r_1, \dots, r_m\} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ ,  $P = (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{P}_E$ ,  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathcal{N}_{E, P}$ . Тогда для любого решения  $(c_1, \dots, c_m)$  системы

$$c_1 + \dots + c_m = 0, \quad c_1 \lambda_1^2 + \dots + c_m \lambda_m^2 = 1 \quad (32)$$

справедливо равенство

$$\mathfrak{J}_{E, P, \Lambda} = \sum_{j=1}^m c_j \gamma_{r_j, p_j, \lambda_j} p_j(L) \delta_{r_j} \star \mathfrak{J}_{E, P, \Lambda, j}. \quad (33)$$

**Доказательство.** Из определения  $\mathcal{P}_E$  и  $\mathcal{N}_{E, P}$  видно, что в наборе  $\Lambda$  найдутся по крайней мере два различных числа  $\lambda_k, \lambda_l$ . Полагая

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k^2 - \lambda_l^2}, \quad c_l = \frac{1}{\lambda_l^2 - \lambda_k^2}, \quad c_j = 0 \quad \text{при } j \notin \{k, l\},$$

получаем разрешимость системы (32). Далее, если  $c_1, \dots, c_m$  удовлетворяют (32), то в силу (24) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m c_j \gamma_{r_j, p_j, \lambda_j} p_j(L) \delta_{r_j} \star \mathfrak{J}_{E, P, \Lambda, j} &= \sum_{j=1}^m c_j (L + \lambda_j^2) \mathcal{J}_{r_j, p_j, \lambda_j} \star \mathfrak{J}_{E, P, \Lambda, j} = \\ &= \sum_{j=1}^m c_j (L + \lambda_j^2) \mathfrak{J}_{E, P, \Lambda} = \mathfrak{J}_{E, P, \Lambda}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $E = \{r_1, \dots, r_m\} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ ,  $P = (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{P}_E$ ,  $(c_1, \dots, c_m)$  — произвольное решение системы (32) при  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathcal{N}_{E, P}$ . Тогда, если  $f \in C_{\mathfrak{h}}$  и

$$f_{E, P, \Lambda} = \sum_{j=1}^m c_j \gamma_{r_j, p_j, \lambda_j} (\mathcal{R}f)(r_j, \cdot) \star p_j(L) \mathfrak{J}_{E, P, \Lambda, j},$$

то  $f_{E, P, \Lambda}$  не зависит от выбора решения  $(c_1, \dots, c_m)$  и

$$f = \sum_{\Lambda \in \mathcal{N}_{E, P}} f_{E, P, \Lambda},$$

где ряд сходится безусловно в пространстве  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$ .





**Доказательство.** Покажем, что

$$\sum_{\Lambda \in \mathcal{N}_{E,P}} \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda} = \delta_0, \quad (34)$$

где ряд сходится безусловно в пространстве  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$ . Пусть  $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ . Используя (12), (8), (31), (10) и (28), находим (см. [17, доказательство теоремы 8.23])

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda}, \psi \rangle &= \kappa_\alpha \int_0^\infty \tilde{\psi}(x) \langle \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda}, \varphi_x \rangle d\mu(x) = \kappa_\alpha \int_0^\infty \tilde{\psi}(x) \tilde{\mathfrak{J}}_{E,P,\Lambda}(x) d\mu(x) = \\ &= \kappa_\alpha \int_0^\infty \tilde{\psi}(x) \prod_{j=1}^m \tilde{\mathcal{J}}_{r_j, p_j, \lambda_j}(x) d\mu(x) = \kappa_\alpha \int_0^\infty \tilde{\psi}(x) \prod_{j=1}^m \gamma_{r_j, p_j, \lambda_j} \frac{p_j(-x^2) \varphi_x(r_j)}{\lambda_j^2 - x^2} d\mu(x). \end{aligned}$$

Оценивая модуль правой части этого равенства с помощью леммы 1 и неравенства (7), имеем

$$|\langle \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda}, \psi \rangle| \leq \kappa_\alpha \int_0^\infty |\tilde{\psi}(x)| \prod_{j=1}^m e^{2r_j} \max_{|\zeta-x| \leq r} |p_j(-\zeta^2)| d\mu(x) \prod_{j=1}^m \frac{|\gamma_{r_j, p_j, \lambda_j}|}{|\lambda_j|}.$$

Поэтому из (11), (23) и рассуждения в лемме 4 следует, что

$$\sum_{\Lambda \in \mathcal{N}_{E,P}} |\langle \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda}, \psi \rangle| < \infty$$

и справедливо разложение (34). Оно влечёт равенство

$$f = \sum_{\Lambda \in \mathcal{N}_{E,P}} f \star \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda},$$

где ряд сходится безусловно в пространстве  $\mathcal{D}'_{\mathfrak{h}}$ . Учитывая, что  $f \star \mathfrak{J}_{E,P,\Lambda} = f_{E,P,\Lambda}$  (см. (33), (1) и (19)), получаем утверждением теоремы.  $\square$

### Список литературы

1. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. Москва : Иностранная литература, 1958. 158 с.
2. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. Москва : Мир, 1987. 735 с.
3. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht : Kluwer, 2003. 454 p.
4. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Москва : Физматлит, 2019. 221 с.
5. Agranovsky M. L., Quinto E. T. Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions // Journal of Functional Analysis. 1996. Vol. 139, iss. 2. P. 383–414. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0090>
6. Agranovsky M. L., Volchkov V. V., Zalzman L. A. Conical injectivity sets for the spherical Radon transform // Bulletin of the London Mathematical Society. 1999. Vol. 31, iss. 2. P. 231–236. DOI: <https://doi.org/10.1112/S0024609398005396>
7. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Конические множества инъективности преобразования Радона на сферах // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, вып. 5. С. 1–31. EDN: [UXUOGL](https://arxiv.org/abs/1508.00001)
8. Selmi B., Nessibi M. M. A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 329, iss. 1. P. 163–190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.061>
9. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными : в 4 т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва : Мир, 1986. 456 с.
10. Zalzman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972. Vol. 47. P. 237–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00250628>
11. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи математических наук. 1951. Т. 6, вып. 2. С. 102–143.



12. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. Москва : Наука, Физматлит, 1997. 196 с.
13. Trimèche K. Generalized wavelets and hypergroups. New York : CRC Press, 1997. 364 p.
14. Волчков Вит. В., Краснощёких Г. В. Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя – Кингмана // Математические заметки. 2024. Т. 116, вып. 2. С. 212–228. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14184>
15. Volchkova N. P., Volchkov Vit. V. Recovering the Laplacian from centered means on balls and spheres of fixed radius // Проблемы анализа. 2023. Т. 12 (30), вып. 1. С. 96–117. DOI: <https://doi.org/10.15393/j3.art.2023.13290>
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Москва : Наука, 1974. 295 с.
17. Бреммерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. Москва : Мир, 1968. 276 с.

## References

1. John F. *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*. New York, London, Interscience Publ., 1955. 172 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1958. 158 p.).
2. Helgason S. *Groups and geometric analysis*. Orlando, Academic Press, 1984. 654 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 735 p.).
3. Volchkov V. V. *Integral geometry and convolution equations*. Dordrecht, Kluwer, 2003. 454 p.
4. Sitnik S. M., Shishkina E. L. *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsialnykh uravneniy s operatorami Besselya* [Method of transformation operators for differential equations with Bessel operators]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 221 p. (in Russian).
5. Agranovsky M. L., Quinto E. T. Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions. *Journal of Functional Analysis*, 1996, vol. 139, iss. 2, pp. 383–414. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0090>
6. Agranovsky M. L., Volchkov V. V., Zalzman L. A. Conical injectivity sets for the spherical Radon transform. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1999, vol. 31, iss. 2, pp. 231–236. DOI: <https://doi.org/10.1112/S0024609398005396>
7. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Conic injectivity sets for the radon transformation on spheres. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2016, vol. 27, iss. 5, pp. 709–730. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1413>
8. Selmi B., Nessibi M. M. A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, vol. 329, iss. 1, pp. 163–190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.061>
9. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators II: Differential operators with constant coefficients*. Berlin, Springer, 1983. 395 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 456 p.).
10. Zalzman L. Analyticity and the Pompeiu problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1972, vol. 47, pp. 237–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00250628>
11. Levitan B. M. Expansion by Bessel functions into Fourier series and integrals. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1951, vol. 6, iss. 2, pp. 102–143 (in Russian).
12. Kipriyanov I. A. *Singulyarnye ellipticheskie krayevye zadachi* [Singular elliptic boundary value problems]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1997. 196 p. (in Russian).
13. Trimèche K. *Generalized wavelets and hypergroups*. New York, CRC Press, 1997. 364 p.
14. Volchkov Vit. V., Krasnoschekikh G. V. A refinement of the two-radius theorem on the Bessel – Kingman hypergroup. *Mathematical Notes*, 2024, vol. 116, pp. 223–237. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434624070174>
15. Volchkova N. P., Volchkov Vit. V. Recovering the Laplacian from centered means on balls and spheres of fixed radius. *Issues of Analysis*, 2023, vol. 12 (30), iss. 1, pp. 96–117. DOI: <https://doi.org/10.15393/j3.art.2023.13290>
16. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions*. Vol. 2. New York, McGraw-Hill, 1953. 396 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 295 p.).
17. Bremermann H. *Distributions, complex variables and Fourier transforms*. Boston, Addison-Wesley, 1965. 186 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1968. 276 p.).

Поступила в редакцию / Received 19.01.2025

Принята к публикации / Accepted 17.03.2025

Опубликована / Published 28.11.2025



## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 490–497

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 490–497

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-490-497>

EDN: <https://elibrary.ru/XRDSFR>

Научная статья

УДК 539.3

### Асимптотические уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругой оболочке вращения

Н. С. Анофрикова<sup>✉</sup>, Л. Ю. Коссович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Анофрикова Наталия Сергеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, [anofrikovans@sgu.ru](mailto:anofrikovans@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7931-0663>, SPIN: 1524-0162, AuthorID: 182285

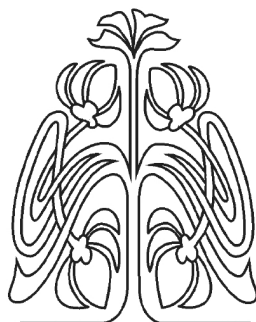
**Коссович Леонид Юрьевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, [leonid.kossovch@yandex.ru](mailto:leonid.kossovch@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, SPIN: 5861-3637, AuthorID: 2935

**Аннотация.** В статье приводится вывод асимптотических уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в тонкостенной вязкоупругой полубесконечной оболочке вращения при ударном воздействии тангенциального типа на торце. Материал оболочки представлен моделью Максвелла с условием упругого объемного расширения. Уравнения погранслоя выводятся из трехмерных уравнений теории вязкоупругости асимптотическим методом, основанным на переходе к специальной системе координат, учитывающей геометрию переднего фронта и размер прифронтной области.

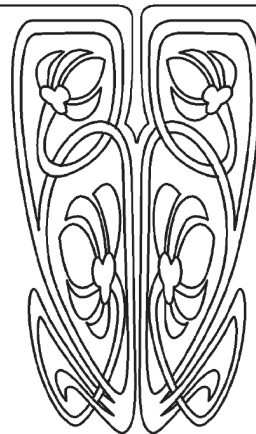
**Ключевые слова:** асимптотический метод, гиперболический погранслой, ударная нагрузка, вязкоупругая оболочка вращения

**Для цитирования:** Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю. Асимптотические уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругой оболочке вращения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 490–497. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-490-497>, EDN: XRDSFR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный  
отдел





Article

## Asymptotic equations of the hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front in the viscoelastic shell of revolution

N. S. Anofrikova<sup>✉</sup>, L. Yu. Kossovich

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Nataliia S. Anofrikova**, anofrikovans@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7931-0663>, SPIN: 1524-0162, AuthorID: 182285

**Leonid Yu. Kossovich**, leonid.kossovich@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, SPIN: 5861-3637, AuthorID: 2935

**Abstract.** In this article, the asymptotically approximate equations for the hyperbolic boundary layer in a thin semi—infinite viscoelastic shell of revolution in the vicinity of the dilatation wave front at shock edge loading of the tangential type are derived. The Maxwell model represents the material of the shell. The equations are derived asymptotically from the 3-D equations of viscoelasticity in the special coordinate system. This system takes into account the geometry and size of the boundary layer region.

**Keywords:** asymptotic method, hyperbolic boundary layer, shock loading, viscoelastic shell of revolution

**For citation:** Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu. Asymptotic equations of the hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front in the viscoelastic shell of revolution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 490–497 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-490-497>, EDN: XRDSFR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Асимптотические методы являются эффективным аппаратом, с помощью которого можно найти аналитические решения сложных задач теории тонкостенных конструкций. Они позволяют выявить особенности поведения решения трехмерной задачи в различных областях изменения независимых переменных и тем самым не только найти более простые (асимптотически оптимальные) уравнения, описывающие решения исходной задачи в каждой из выделенных областей, но и дать «подсказку» численным методам, например методу конечных элементов в необходимости использования той или иной сетки для построения решения в соответствующей области фазовой плоскости.

Основы асимптотической теории тонкостенных упругих конструкций заложены в работах А. Л. Гольденвейзера [1, 2] на примере задач статики и стационарной динамики. В работе [3] предложенная А. Л. Гольденвейзером асимптотическая теория расширена на случай нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) в тонких упругих оболочках. Рассмотрен класс задач о распространении нестационарных волн, возникающих при ударных воздействиях на торец тонкостенной упругой оболочки вращения, которые согласно классификации внешних воздействий, приведенной в [4], относятся к продольным ударным воздействиям тангенциального и изгибающего типов и вызывают принципиально разные типы НДС. Согласно методике, описанной в монографии [3], НДС, соответствующее каждому типу воздействия, может быть представлено в различных областях фазовой плоскости разными составляющими с определенными показателями изменемости и динамичности.

В настоящее время завершается формирование асимптотической теории, описывающей нестационарные волновые процессы в тонкостенных упругих оболочках при различных типах ударных воздействий на торце. В статьях [5–7] приведена систематизация этих методов, разработанных для ударных торцевых и поверхностных воздействий. Для каждого вида воздействия разработаны схемы расчленения нестационарного НДС на составляющие,

получены асимптотически оптимальные уравнения для каждой из этих составляющих, выделены области согласования для соседних составляющих (проведена оценка границ областей согласования, доказано совпадение асимптотик разрешающих уравнений в данных областях), разработаны асимптотические методы решения задач для всех составляющих, а также доказана полнота описания нестационарных волн с помощью указанных компонент.

Статья [8] посвящена модификации методов, разработанных в [3], на случай тонкостенной вязкоупругой оболочки вращения.

В то же время асимптотическая теория для вязкоупругих оболочек не до конца сформирована. На настоящий момент еще не все методики, разработанные для упругих оболочек, получилось модифицировать на случай оболочек вязкоупругих.

В настоящей работе предложен асимптотический метод построения уравнений пограничного слоя в окрестности фронта волны расширения в случае ударного продольного воздействия тангенциального типа на торце из трехмерных уравнений вязкоупругости с помощью методики, описанной в [9] и модифицированной на случай вязкоупругой оболочки вращения. Предполагается, что оболочка выполнена из вязкоупругого материала, представленного моделью Максвелла и удовлетворяющего условию упругого объемного расширения. Ранее уравнения данного пограничного слоя для вязкоупругой оболочки были выведены только для случая оболочки нулевой гауссовой кривизны [8, 10].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкостенную полубесконечную оболочку вращения, выполненную из вязкоупругого материала, свойства которого описываются моделью Максвелла.

Введем триортогональную систему координат  $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ , представленную на рис. 1, связанную со срединной поверхностью оболочки, где  $\alpha_1$  — координата, отсчитываемая вдоль образующей срединной поверхности,  $\alpha_2$  — координата, отсчитываемая вдоль направляющей срединной поверхности,  $\alpha_3$  — координата, отсчитываемая в направлении внешней нормали к срединной поверхности оболочки.

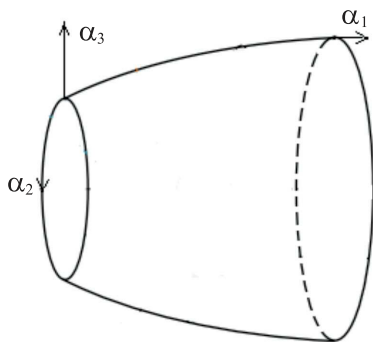


Рис. 1. Оболочка вращения с триортогональной системой координат

Fig. 1. Shell of revolution with triorthogonal coordinate system

Предположим, что до момента приложения нагрузки оболочка находилась в состоянии покоя. Пусть в начальный момент времени к торцу, заданному уравнением  $\alpha_1 = 0$ , было приложено ударное продольное осесимметричное воздействие тангенциального типа, тогда граничное условие на данном торце можно записать в виде

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad v_1 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0, \quad (1)$$

где  $H(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $I$  — амплитуда нагрузки,  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$ ) — компоненты тензора напряжений,  $v_i$  ( $i = 1, 3$ ) — компоненты вектора перемещений,  $t$  — время.

Лицевые поверхности оболочки считаем свободными от напряжений, тогда граничные условия на них запишутся в следующей форме:

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h, \quad (2)$$

где  $h$  — полутолщина оболочки.

Начальные условия покоя имеют вид

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$





Выпишем разрешающие уравнения, описывающие распространение нестационарных волн в тонкостенной вязкоупругой оболочке в случае осесимметричного НДС [8].

Трехмерные уравнения движения оболочки в напряжениях не зависят от ее материала и совпадают с аналогичными уравнениями в упругом случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + H_1 \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1 H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{31} + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{13} - \rho H_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + H_1 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{11} - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{22} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1 H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{33} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{13} - \rho H_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала,  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) — параметры Ламе, которые в случае оболочки вращения задаются выражениями

$$H_1 = 1 + \frac{\alpha_3}{R_1}, \quad H_2 = A(\alpha_1) \left( 1 + \frac{\alpha_3}{R_2} \right), \quad (5)$$

где  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) — главные радиусы кривизны срединной поверхности,  $A(\alpha_1)$  — расстояние от точки на срединной поверхности до оси вращения.

Трехмерные уравнения состояния взяты в дифференциальной форме и имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} v_3 \right) &= \left( \frac{2(1+\nu)}{3t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{11} - \left( \frac{1+\nu}{3t_r} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ E \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} v_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} v_3 \right) &= \left( \frac{2(1+\nu)}{3t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{22} - \left( \frac{1+\nu}{3t_r} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ E \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right) &= \left( \frac{2(1+\nu)}{3t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{33} - \left( \frac{1+\nu}{3t_r} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} v_1 \right) &= \left( \frac{1}{t_r} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{13}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E$  — мгновенное значение модуля Юнга,  $\nu$  — мгновенное значение коэффициента Пуассона,  $t_r$  — параметр, имеющий размерность времени, характеризующий вязкоупругие свойства материала и называемый временем релаксации.

Трехмерная задача (1)–(6) не имеет точного аналитического решения. Но согласно исследованиям, описанным в работах [3, 8], нестационарное НДС в упругих и вязкоупругих тонкостенных оболочках при ударном торцевом воздействии указанного типа может быть представлено несколькими составляющими с различными показателями изменчивости и динамичности в различных областях фазовой плоскости.

Схема применимости различных составляющих при продольном воздействии тангенциального типа в вязкоупругой оболочке вращения на примере нормального продольного усилия приведена на рис. 2.

Построение приближенных уравнений теории вязкоупругости для каждой области основано на малости геометрического параметра  $\eta = \frac{h}{R} \ll 1$  — относительной полутолщины оболочки, где  $R$  — характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности.

Настоящая работа посвящена выводу асимптотически оптимальных уравнений, описывающих решение исходной задачи в области 1 для случая произвольной оболочки вращения.

## 2. Асимптотический метод построения уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения

В отличие от оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны, где передний фронт волны расширения представляет собой плоскую поверхность, образованную нормальными к ее срединной поверхности, в произвольной оболочке вращения поверхность переднего фронта уже не будет образована нормальными к срединной поверхности.

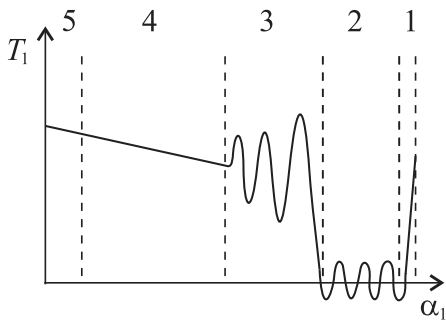


Рис. 2. Схема расчленения нестационарного НДС на составляющие в случае ударного продольного воздействия тангенциального типа: 1 — область гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения; 2 — квазистатическая квазисимметричная задача; 3 — параболический погранслой в окрестности квазифронта; 4 — тангенциальное длинноволновое приближение; 5 — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя

Fig. 2. Scheme of dissection of non-stationary SSS into components in the case of shock edge loading of the tangential type: 1 shows the region of the hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front; 2 shows the quasi-static quasi-symmetric problem; 3 shows the parabolic boundary layer in the vicinity of the quasi-front; 4 shows the tangential long-wave approximation; 5 shows the superposition of the two-dimensional component and the quasi-static boundary layer

в специальной системе координат (7). Это позволит построить асимптотически оптимальные уравнения погранслоя в малой окрестности фронта волны расширения.

Перейдем в разрешающих уравнениях, записанных в новых координатах, к безразмерным прифронтным координатам

$$x = \frac{1}{\eta^2}(\tau - \xi), \quad \tau = \frac{c_1}{R}t, \quad \xi = \frac{1}{R}\alpha, \quad \zeta_F = \frac{1}{h}z_F. \quad (8)$$

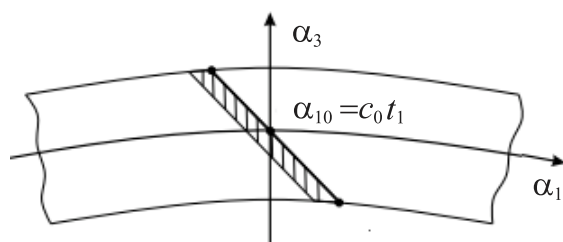


Рис. 3. Геометрическая модель фронта волны в произвольной оболочке вращения

Fig. 3. Geometric model of a wave front in an arbitrary shell of revolution

В работе [9] предложена асимптотическая геометрическая модель фронта волны расширения для случая произвольной упругой оболочки вращения. Доказано, что фронт волны можно считать поверхностью, образованной нормальными к срединной поверхности, повернутыми в точках  $\alpha_{10} = c_1 t_0$ , где  $c_1$  — скорость продольной волны в упругом материале,  $t_0$  — фиксированный момент времени (рис. 3).

Уравнение данной поверхности задается формулами

$$\alpha_1 = \alpha_{10} - \alpha_3 F(\alpha_{10}), \quad F(\alpha_{10}) = \int_1^{\alpha_{10}} \frac{d\alpha_1}{R_1(\alpha_1)}.$$

При этом длина повернутой нормали задается выражением

$$z_0^F = \alpha_3 \sqrt{1 + F^2(\alpha_{10})}.$$

В соответствии с длиной повернутой нормали можно ввести новые координаты  $(\alpha; z_F)$ , определяемые выражениями

$$\alpha = \alpha_1, \quad z_F = \alpha_3 \sqrt{1 + F^2(\alpha_1)}. \quad (7)$$

Причем координатная линия  $z_F$  при  $\alpha = \alpha_{10} = c_1 t_0$  совпадает с асимптотическим представлением переднего фронта волны.

В случае вязкоупругой оболочки вращения геометрия переднего фронта волны расширения будет аналогична случаю упругой задачи. Но в этом случае под  $c_1$  понимается мгновенная скорость продольной волны в вязкоупругом материале [8].

Следуя описанной в [9] методике, запишем разрешающие уравнения для вязкоупругой оболочки в

Данные координаты характеризуют НДС в окрестности фронта волны расширения порядка  $O(\eta^2)$ . Считается, что дифференцирование по координатам (8) не меняет асимптотического порядка искомых функций.

Кроме того, введем безразмерное время релаксации по формуле

$$\tau_r = \frac{c_1}{R}t_r.$$



Асимптотики для компонент НДС возьмем аналогично работе [10] в форме

$$v_1 = R\eta v_1^*, \quad v_3 = R\eta^2 v_3^*, \\ \sigma_{11} = E\eta^{-1}\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{22} = E\eta^{-1}\sigma_{22}^*, \quad \sigma_{33} = E\eta^{-1}\sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\sigma_{13}^*.$$

Считается, что величины со звездочкой имеют одинаковый асимптотический порядок по  $\eta$ .

В результате разрешающая система уравнений (4), (6) примет вид

$$\begin{aligned} & \eta^2 \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial x} + \eta^2 \frac{\zeta_F F}{1+F^2} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \zeta_F} + \sqrt{1+F^2} \eta^2 \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial \zeta_F} + \\ & + \eta^2 k^* (\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*) - \left(1 + \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x^2} = 0, \\ & - \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial x} + \left(1 + \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \sqrt{1+F^2} \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial \zeta_F} - \eta \frac{1}{R_1^*} \sigma_{11}^* - \eta \frac{1}{R_2^*} \sigma_{22}^* + \eta \left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*}\right) \sigma_{33}^* - \\ & - \left(1 + \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x^2} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \eta^2 \frac{\partial v_1^*}{\partial \xi} - \left(1 - \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \frac{\partial v_1^*}{\partial x} + \eta^2 \frac{\zeta_F F}{1+F^2} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta_F} \right) \right) = \\ & = \left( \eta^2 \frac{2(1+\nu)}{3\tau_r} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma_{11}^* - \left( \eta^2 \frac{1+\nu}{3\tau_r} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) (\sigma_{22}^* + \sigma_{33}^*), \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta^2 k^* \left(1 - \eta \frac{\zeta_F}{R_2^* \sqrt{1+F^2}}\right) v_1^* \right) = \left( \eta^2 \frac{2(1+\nu)}{3\tau_r} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma_{22}^* - \left( \eta^2 \frac{c_1}{R} \frac{1+\nu}{3\tau_r} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) (\sigma_{11}^* + \sigma_{33}^*), \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{1+F^2} \eta^2 \frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta_F} \right) = \left( \eta^2 \frac{2(1+\nu)}{3\tau_r} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma_{33}^* - \left( \eta^2 \frac{1+\nu}{3\tau_r} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) (\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*), \\ & \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left(1 - \eta \frac{\zeta_F}{R_1^* \sqrt{1+F^2}}\right) \left( - \frac{\partial v_3^*}{\partial x} \right) + \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta_F} - \eta \frac{1}{R_1^*} v_1^* \right) = \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9)$$

В данном случае асимптотически главной компонентой вектора перемещений является касательное перемещение  $v_1$ . Поэтому будем выводить основное уравнение асимптотически оптимальной системы относительно этой компоненты из первого уравнения движения, а также получим выражения для остальных компонент через  $v_1$ .

В отличие от упругого случая [9], трехмерные уравнения движения в случае вязкоупругой оболочки не могут быть записаны в перемещениях из-за формы записи уравнений состояния, которые нельзя разрешить в общем виде относительно напряжений. Поэтому для получения требуемых асимптотически оптимальных уравнений необходимо дополнительно разложить величины со звездочкой в (9) в ряды по малому параметру по формулам

$$f^* = f_{,0}^* + \eta f_{,1}^* + \eta^2 f_{,2}^*.$$

Данное разложение позволяет найти явные зависимости для напряжений и нормального перемещения через перемещение  $v_{1,0}^*$  с асимптотической погрешностью  $O(\eta)$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11,0}^* &= -\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial x}, \quad \sigma_{22,0}^* = \sigma_{33,0}^* = -\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial x}, \\ \sigma_{13,0}^* &= \frac{1}{1+\nu} \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial \zeta_F}, \quad \frac{\partial v_{3,0}^*}{\partial x} = -\sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial \zeta_F}, \end{aligned}$$



а также получить одно разрешающее уравнение для асимптотически главной компоненты вектора перемещений  $v_1$  в виде

$$(1 + F^2) \frac{\partial^2 v_{1,0}^*}{\partial \zeta_F^2} - \frac{2\zeta_F F}{1 + F^2} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial^2 v_{1,0}^*}{\partial x \partial \zeta_F} - 2 \frac{\partial^2 v_{1,0}^*}{\partial x \partial \xi} - k^* \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial x} - \frac{2(1 - 2\nu)}{3\tau_r(1 - \nu)} \frac{\partial v_{1,0}^*}{\partial x} = 0,$$

где  $k^* = \frac{R}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}$ ,  $R_1^* = \frac{R_1}{R}$ .

Возвращаясь в полученных уравнениях к размерным переменным (7) и искомым размерным функциям, получаем следующую систему асимптотически оптимальных разрешающих уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения для асимптотически главных компонент НДС:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{1 + F^2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \left( k + \frac{2(1 - 2\nu)}{3c_1 t_r(1 - \nu)} \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) описывают решение исходной задачи в окрестности погранслоя порядка  $O(\eta)$ , внутри которой он содержится с толщиной порядка  $O(\eta^2)$ .

Таким образом, задача определения решения в малой окрестности фронта волны расширения сводится к решению уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами — первого уравнения системы (10). Полученное решение должно удовлетворять следующим граничным условиям, соответствующим рассматриваемому типу торцевой нагрузки:

$$\sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z_F = \pm h\sqrt{1 + F^2}, \quad (11)$$

$$\sigma_{11} = IH(t) \quad \text{при} \quad \alpha = 0. \quad (12)$$

Здесь (11) — граничное условие на лицевых поверхностях, (12) — граничное условие на торце.

## Заключение

Следует заметить, что при  $F(\alpha_1) = 0$  (случай оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны) уравнения (10) совпадают с аналогичными уравнениями, полученными в [8, 10] для соответствующих оболочек, а при  $t_r \rightarrow \infty$  (упругий материал) совпадают с аналогичными уравнениями, полученными в [9] для случая произвольной упругой оболочки вращения. Данные факты подтверждают достоверность полученных результатов.

Таким образом, представленный в данной статье вывод асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в оболочке вращения общего очертания, выполненной из вязкоупругого материала, представленного моделью Максвелла, полностью подтверждает универсальный характер асимптотического подхода, разработанного на примере упругих оболочек вращения.

## Список литературы

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
2. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва : Наука, 1979. 384 с.
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
4. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // International Journal of Solids and Structures. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)



5. Коссович Л. Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 12–33. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-2-12-33>, EDN: JVRXQX
6. Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 35–49. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>, EDN: HHWAXC
7. Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 80–90. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV
8. Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. № 2. С. 17–24. EDN: UJSTAD
9. Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWBV
10. Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю. Погранслои в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругих оболочках вращения // Проблемы прочности и пластичности. 2000. Вып. 62. С. 22–26.

## References

1. Gol'denveizer A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).
2. Gol'denveizer A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells]. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (in Russian).
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p.
4. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
5. Kossovich L. Yu. Asymptotic methods in dynamics of shells under shock loading. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, iss. 2, pp. 12–33 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-2-12-33>, EDN: JVRXQX
6. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 232–243. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422020078>, EDN: WCTBUQ
7. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 80–90 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV
8. Bazhanova N. S., Kossovich L. Yu., Sukholovskaya M. S. Unsteady waves in viscoelastic shells: The Maxwell's model. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2000, iss. 2, pp. 17–24 (in Russian). EDN: UJSTAD
9. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWBV
10. Bazhanova N. S., Kossovich L. Yu. Boundary layer in the vicinity of the expansion wave front in viscoelastic shells of revolution. *Problems of Strength and Plasticity*, 2000, iss. 62, pp. 22–26 (in Russian).

Received / Поступила в редакцию 19.05.2025

Accepted / Принята к публикации 18.06.2025

Published / Опубликовано 28.11.2025





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 498–512

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 498–512

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-498-512>

EDN: <https://elibrary.ru/JUEHET>

Научная статья

УДК 514.85,531.36

## Движение материальной точки вблизи двух касающихся параболоидов

С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем, Россия, 191167, г. Санкт-Петербург, набережная Обводного канала, д. 29

**Бурьян Сергей Николаевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [burianserg@yandex.ru](mailto:burianserg@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092

**Аннотация.** Рассматривается движение материальной точки вблизи особенности типа двух касающихся поверхностей. Поверхности расположены симметрично относительно общей касательной плоскости и имеют общую ось вращения. Сначала рассматривается модель движения для голономной механики. Показано, что через особую точку могут проходить только траектории в фиксированной плоскости, содержащей ось вращения поверхностей. В точке касания возникает динамическая неопределенность, так как у траектории существует несколько ветвей движения. Для исследования движения материальной точки вблизи особенности типа двух касающихся параболоидов рассматривается модель реализации сил реакции голономных связей через упругий потенциал с большим параметром жесткости, или жесткий потенциал. Потенциал должен обращаться в ноль на многообразии с особенностями и быть строго положительным вне его. Для модели с жестким потенциалом также получается, что через особую точку могут проходить только траектории в фиксированной плоскости, содержащей ось вращения параболоидов. Сделано численное моделирование динамики. Получено, что траектории системы с жестким потенциалом могут качественно отличаться от траекторий соответствующей голономной системы. Голономная система мгновенно проходит геометрическую особенность, двигаясь с ненулевой скоростью. Система с жестким потенциалом может двигаться в сингулярной области конечное время, в результате чего возникают быстрые смены направления вектора скорости. В реальных механических системах данный тип движения может приводить к поломкам или к неустойчивости траекторий.

**Ключевые слова:** особая точка, многообразие с особенностями, особенность типа касания, голономные связи, реализация связей в механике

**Для цитирования:** Бурьян С. Н. Движение материальной точки вблизи двух касающихся параболоидов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 498–512. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-498-512>, EDN: JUEHET

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Model of motion of a material point near two tangent paraboloids

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems, 29 naberezhnaya Obvodnogo kanala, St. Petersburg 191167, Russia

**Sergey N. Burian**, [burianserg@yandex.ru](mailto:burianserg@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092



**Abstract.** The motion of a material point near a singularity of the type of two tangent surfaces is considered. The surfaces are located symmetrically with respect to a common tangent plane and have a common axis of rotation. First, a model of motion for holonomic mechanics is considered. It is shown that only trajectories in a fixed plane containing the axis of rotation of the surfaces can pass through a singular point. At the point of contact, dynamic uncertainty arises, since the trajectory has several possible branches of motion. To study the motion of a material point near a singularity of the type of double tangent paraboloid, a model of the implementation of holonomic constraints through an elastic potential with a large stiffness parameter, or a “stiff potential”, is considered. The potential must vanish on the manifold with singularities and must be strictly positive outside it. For a model with a stiff potential, it also turns out that only trajectories in a fixed plane containing the axis of rotation of the paraboloids can pass through a singular point. Numerical modeling of the dynamics was done. It was found that the trajectories of a system with a stiff potential can qualitatively differ from the trajectories of the corresponding holonomic system. A holonomic system instantly passes a geometric singularity, moving with a non-zero velocity. A system with a stiff potential can move in a singular region for a finite time, resulting in rapid changes in the direction of the velocity vector. In real mechanical systems, this type of motion can lead to breakdowns or instability of trajectories.

**Keywords:** singular point, manifolds with singularities, tangency type singularity, holonomic constraints, realization of constraints in mechanics

**For citation:** Burian S. N. Model of motion of a material point near two tangent paraboloids. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 498–512 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-498-512>, EDN: JUEHET

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Для исследования движения голономных механических систем в большинстве случаев применяются уравнения Лагранжа или Гамильтона. Неявно предполагается, что голономные связи всюду являются независимыми. В этом случае конфигурационное пространство, задаваемое голономными связями, является гладким многообразием. Положение изображающей точки описывается конечным (и постоянным) числом обобщенных координат, которые позволяют составить уравнения Лагранжа второго рода.

Зависимые голономные связи возникают в теории систем с избыточными связями, в которых число связей больше числа независимых координат. Дополнительные связи могут давать дополнительную функциональность или служить для повышения устойчивости конструкции. Пример механизма с «избыточным» звеном приводится в [1]. Линейная система уравнений для определения множителей Лагранжа для систем с избыточными связями является переопределенной. В большинстве случаев решение формулируется с помощью псевдообратной матрицы [2]. Обычно предполагается, что в системах с избыточными связями есть обобщенные координаты, которые однозначно описывают состояние системы. Ранг связей постоянный.

Геометрические особенности возникают, когда ранг связей может меняться от точки к точке. Особенности голономных или неголономных связей рассматриваются в небольшом числе работ. Движение балки с двумя коньками исследуется в статье [3]. В статье [4] рассматриваются бифуркации положений равновесия одномерной механической системы на плоскости с особенностью типа пересечения в зависимости от параметров связи. Геометрические особенности конфигурационного пространства встречаются как один из типов особенностей в теории параллельных механизмов [5]. В работе [6] исследуется движение материальной точки на поверхности конуса в рамках голономной механики и квантовой механики. Движение «парадоксального» механизма П. Л. Чебышёва изучается в статье автора [7].

В голономной механике обычно не рассматриваются силы, которые задают голономные

связи. С учетом способа реализации голономных связей возможно получить более точную физическую модель. В литературе существует несколько вариантов реализации голономных связей, таких как дополнительные массы или упругий потенциал [8, с. 53-60]. Начальные данные для системы с упругим потенциалом должны совпадать с начальными данными для голономной системы. Тогда траектории системы с упругим потенциалом должны стремиться к траекториям системы с голономными связями при увеличении параметра жесткости потенциала. В работе [9] данная реализация голономных связей доказана для консервативных систем. Случай более общих систем рассматривается в [10]. Движение с начальным вектором скорости, который не касается многообразия связей, исследуется в [11].

Метод с заменой сил реакций голономных связей упругим потенциалом с большим коэффициентом жесткости (жестким потенциалом) естественно обобщается для механических систем с особенностями конфигурационного пространства. Поэтому метод с жестким потенциалом применим для широкого класса механических систем. Но (возможная) сходимость траекторий является открытой задачей.

Основная цель данной работы — сформулировать и описать качественные эффекты, связанные с динамикой механической системы вблизи особенности типа касания. Для анализа рассматривается движение материальной точки по двум касающимся параболоидам.

Новизна работы заключается в применении методов реализации голономных связей для систем с геометрическими особенностями конфигурационного пространства. В рамках стандартной голономной механики движение через особые точки не описывается. Также теоретически построены траектории движения материальной точки при подходе к геометрической особенности для двойной поверхности вращения.

Для качественного описания динамики вблизи особенности вводятся новые понятия: «область возможного движения» и «сингулярная область». Делается численное моделирование траекторий. Получено, что траектории системы с жестким потенциалом могут качественно отличаться от траекторий движения системы с голономными связями. Например, траектория голономной системы проходит геометрическую особенность за нулевое время. Но траектория системы с жестким потенциалом может длительное время находиться в сингулярной области, последовательно «отражаясь» от границ области возможного движения. Быстрая смена вектора скорости и «ударные» движения могут приводить к неустойчивому режиму работы механизма.

Для построения уравнений движения для голономных систем и для систем с жестким потенциалом применяется общая теория уравнений Лагранжа [12, гл. 5]. Матричная форма уравнений приводится в [13, гл. 8]. В предыдущих статьях автора на примере сингулярного маятника рассматривалось движение голономных систем с особенностью типа пересечения или касания двух кривых на плоскости [14]. Обобщение динамики сингулярного маятника с помощью упругого потенциала исследуется в статье [15].

## 1. Двойная поверхность вращения

В данном разделе изучается движение материальной точки по подмножеству евклидова пространства, которое состоит из двух гладких поверхностей. Предполагается, что поверхности имеют касание первого порядка в одной изолированной точке (особой точке конфигурационного пространства). Основным интересом представляет движение через геометрическую особую точку. Динамика исследуется в рамках голономной механики.

**Симметричные поверхности.** Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Зафиксируем некоторую систему прямоугольных координат  $Oxyz$ . Пусть две поверхности  $M_+$  и  $M_-$  расположены в  $\mathbb{R}^3$  симметрично относительно плоскости  $Oxy$ :

$$M_+ = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}, \quad M_- = \{(x, y, z) : z = -f(x, y)\}. \quad (1)$$

Функция  $f(x, y) \geq 0$  является гладкой. Предположим, что поверхности  $M_+$  и  $M_-$  пересекаются в изолированной точке  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Обозначение « $T$ » соответствует транспо-



нированию вектора или матрицы. Далее векторы рассматриваются как векторы-столбцы. Объединение двух поверхностей  $X = M_+ \cup M_-$  является многообразием с особенностями, а точка  $\mathbf{s}$  является особой точкой. В окрестности точки  $\mathbf{s}$  множество  $X$  не диффеоморфно евклидову пространству  $\mathbb{R}^2$ . Также в окрестности точки  $\mathbf{s}$  нет однозначных обобщенных координат.

Если множество  $X$  является конфигурационным пространством механической системы, то вблизи точки  $\mathbf{s}$  есть геометрическая возможность смены типа движения (переход с одной поверхности на другую). Движение в окрестности точки  $\mathbf{s}$  не описывается голономной механикой.

Для дальнейшего анализа предположим, что поверхности  $M_+$  и  $M_-$  являются поверхностями вращения вокруг оси  $Oz$ . Введем цилиндрическую систему координат, основная ось которой совпадает с осью  $Oz$ . Для произвольной точки  $P \in \mathbb{R}^3$  обозначим расстояние от точки  $P$  до оси  $Oz$  как  $r$ , координату  $z$  как  $h$  (высоту) и угол поворота точки  $P$  относительно оси  $Ox$  как  $\varphi$ . Для поверхностей  $M_+$  и  $M_-$  высота  $h$  является функцией расстояния —  $h = h(r)$ . Тогда из уравнения (1) получается следующая параметризация двух поверхностей:

$$M_+ = \{(r, \varphi, h) : h = h(r)\}, \quad M_- = \{(r, \varphi, h) : h = -h(r)\}, \quad X = M_+ \cup M_- \quad (2)$$

Координаты и скорости для точек поверхностей  $M_+$  и  $M_-$  в декартовых координатах выражаются через координаты и скорости в цилиндрических координатах (2):

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi), & y &= r \sin(\varphi), & z &= h(r), \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \dot{\varphi}, & \dot{y} &= \dot{r} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \dot{\varphi}, & \dot{z} &= h'(r) \dot{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для функции  $h = r^2$  множество  $X$  состоит из двух касающихся параболоидов.

**Замечание 1.** В данной статье применяется метрическая система единиц СИ. Но для записи математических выражений формально необходим переход к безразмерным переменным. Поэтому переменные размерности «длины» делятся на 1 метр, переменные размерности «времени» делятся на 1 секунду, переменные размерности «массы» делятся на 1 кг. В формуле  $h = r^2$  величина  $r^2$  в размерном виде имеет размерность длины [м], а не площади [м<sup>2</sup>], как должно следовать из размерности длины для величины  $r$ . В общем случае формулы типа  $h = h(r)$  с точки зрения метрических соотношений означают, что длина  $h$  [м] равна величине

$$h(r[\text{м}]) := h\left(\frac{r[\text{м}]}{1\text{м}}\right) [\text{м}]$$

для вещественной функции  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Общая схема двух касающихся параболоидов показана на рис. 1. Точка  $P'$  соответствует проекции точки  $P$  на поверхности одного из параболоидов на плоскость  $Oxy$ . Также схематично показана траектория материальной точки, которая в особой точке  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  может переходить с «верхней» поверхности на «нижнюю» поверхность.

Далее в статье изучается движение материальной точки по двойной поверхности с помощью методов голономной механики и методов реализации голономных связей через упругий потенциал.

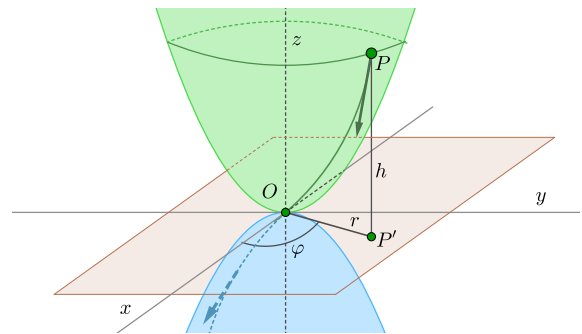


Рис. 1. Два касающихся параболоида с общей касательной плоскостью  $Oxy$   
Fig. 1. Two tangent paraboloids with common tangent plane  $Oxy$



## 2. Движение голономной системы

**Цилиндрические координаты.** Рассмотрим движение материальной точки массой  $m$  по множеству  $X$ , задаваемому уравнениями (2). Вне особой точки  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  положение материальной точки однозначно параметризуется величинами  $(r, \varphi)$ . Проанализируем уравнения движения материальной точки по множеству  $X$  в цилиндрических координатах. Кинетическая энергия материальной точки

$$T = \frac{1}{2}m(1 + (h'(r))^2)(\dot{r})^2 + \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi})^2. \quad (4)$$

Матрица кинетической энергии  $T$  в (4) имеет диагональный вид. Коэффициент  $1/2 mr^2$  перед множителем  $(\dot{\varphi})^2$  равен нулю при  $r = 0$ , поэтому матрица кинетической энергии (4) является положительно полуопределенной. Вне особой точки (при  $r \neq 0$ ) матрица кинетической энергии является положительно определенной. Уравнения Лагранжа второго рода для движения материальной точки по инерции имеют вид

$$m(1 + (h'(r))^2)\ddot{r} + mh'(r)h''(r)(\dot{r})^2 - mr(\dot{\varphi})^2 = 0, \quad mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Из уравнений (5) следует, что ускорение  $\ddot{\varphi}$  формально не определено при  $r \rightarrow 0$ . При  $r = 0$  уравнения (5) фактически не зависят от  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ , и условие задается только на ускорение  $\ddot{r}$ .

Для анализа траекторий движения материальной точки по инерции делается переход к уравнениям движения в форме Гамильтона:

– обобщенные импульсы

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m(1 + (h')^2)\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi};$$

– механическая энергия

$$H = \frac{p_r^2}{2m(1 + (h')^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2};$$

– уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m(1 + (h')^2)}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \\ \dot{p}_r &= \frac{p_r^2}{m} \frac{h'h''}{(1 + (h')^2)^2} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3}, \quad \dot{p}_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из последнего уравнения системы (6) следует, что импульс  $p_\varphi = J = \text{const}$ . Аналогичный случай для траекторий материальной точки на поверхности двойного конуса рассматривался в работе [6]. Возможно два различных варианта поведения траекторий. Пусть  $J \neq 0$ , тогда

$$H = \frac{1}{2}m(1 + (h')^2)(\dot{r})^2 + \frac{J^2}{2mr^2}.$$

Из сохранения механической энергии следует, что величина  $r$  ограничена и не может доходить до 0. Следовательно, любые траектории материальной точки на двойной поверхности вращения при  $J \neq 0$  не доходят до геометрической особенности  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ .

Пусть теперь  $J = 0$ . Тогда из уравнений (6) следует, что:

$$\varphi = \text{const}, \quad H = H_0 = \frac{p_r^2}{2m(1 + (h')^2)}.$$





Значит, при  $p_\varphi = 0$  движение при  $r > 0$  идет вдоль плоскости  $\varphi = \text{const}$ . Четырехмерное движение переходит в двумерное движение. Также заметим, что при  $J = 0$  импульс

$$p_r = \pm \sqrt{2mH_0(1 + (h')^2)}$$

сохраняет знак при движении, так как выражение под корнем не меньше  $\sqrt{2mH_0}$ . Соответственно, скорость  $\dot{r}$  в (6) сохраняет знак при  $r \rightarrow 0$ . Траектория не имеет особенностей при  $r \rightarrow 0$ . Но движение с началом в особой точке  $\mathbf{s}$  не определено, так как уравнения (6) не продолжаются на  $r < 0$ , поскольку по определению  $r \geq 0$ . Поэтому для описания движения материальной точки через особенность нужно рассмотреть другую систему координат.

**Декартовы координаты.** Для дальнейшего анализа будем считать, что поверхности  $M_+$  и  $M_-$  являются параболоидами вращения. Множество  $X$  в системе координат  $Oxyz$  является объединением  $M_+$  и  $M_-$ . Параболоиды вращения  $M_+$  и  $M_-$  расположены симметрично относительно плоскости  $Oxy$  и задаются следующими голономными связями  $f_1$  и  $f_2$ :

$$f_1 = z - (x^2 + y^2) = 0, \quad f_2 = z + (x^2 + y^2) = 0. \quad (7)$$

Голономная связь  $f$  для двойного параболоида  $X$  является произведением двух голономных связей  $f_1$  и  $f_2$ , задаваемых уравнениями (7):

$$f = f_1 \cdot f_2 = z^2 - (x^2 + y^2)^2.$$

Градиенты связей  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\nabla f_1 = (-2x, -2y, 1)^T, \quad \nabla f_2 = (2x, 2y, 1)^T.$$

В особой точке  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  градиенты  $\nabla f_1$  и  $\nabla f_2$  не обращаются в ноль. Но градиент произведения связей

$$\nabla f = \nabla(f_1 f_2) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$$

обращается в ноль в особой точке  $\mathbf{s}$ , так как  $f_1(\mathbf{s}) = 0$  и  $f_2(\mathbf{s}) = 0$ .

Согласно предыдущему пункту только траектория движения в плоскости  $\varphi \equiv \text{const}$  может достигать геометрической особенности  $\mathbf{s}$ . В этом случае движение фактически происходит в сечении двойного параболоида плоскостью, проходящей через ось  $Oz$ . Такие сечения являются объединением двух касающихся парабол. Предположим, что в начальный момент времени материальная точка находится на первой параболе. Если траектория движения является гладкой кривой, то после прохождения особой точки (точки ветвления) с ненулевой скоростью траектория должна оставаться на первой параболе.

Уравнения Лагранжа первого рода для движения материальной точки массой  $m$  по первому параболоиду  $M_+$  в декартовых координатах  $\mathbf{q} = (x, y, z)^T$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{q}} &= \lambda_1 \nabla f_1, \\ \nabla f_1^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Второе уравнение в (8) получается при дифференцировании связи (7) дважды по времени. Прямым вычислением проверяется, что для связи  $f_1$  в формуле (7)

$$\nabla f_1^T \nabla f_1 = 1 + 4x^2 + 4y^2, \quad \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = -2(\dot{x})^2 - 2(\dot{y})^2, \quad \lambda_1 = m \cdot \frac{2(\dot{x})^2 + 2(\dot{y})^2}{1 + 4x^2 + 4y^2}. \quad (9)$$

В последнем уравнении  $f_1''$  обозначает матрицу вторых производных (матрицу Гессе) для связи  $f_1(\mathbf{q}) = 0$ . Уравнения (8) и (9) применяются для численного моделирования движения голономной системы с одной связью  $f_1(\mathbf{q}) = 0$ .



**Неопределенность движения.** Рассмотрим движение с голономной связью  $f$  вместо связи  $f_1$  в уравнениях (8). Предположим конечное значение величины  $\lambda$  в особой точке. Тогда в особой точке  $\mathbf{s}$ , учитывая  $\nabla f(\mathbf{s}) = 0$ ,

$$m\ddot{\mathbf{q}} = 0, \quad \dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = 0.$$

Из соотношения  $m\ddot{\mathbf{q}} = 0$  получаем мгновенное прямолинейное движение вдоль вектора скорости. Плоскость  $Oxy$  является касательной плоскостью к параболоидам  $M_+$  и  $M_-$  в точке  $\mathbf{s}$ . Тогда из условия  $\dot{\mathbf{q}}^T f_1'' \dot{\mathbf{q}} = 0$  получается, что  $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 0$ , т. е. вектор скорости материальной точки должен быть равен нулю. Следовательно, для конечного значения множителя Лагранжа  $\lambda$  для связи  $f$  в особой точке  $\mathbf{s}$  траектория движения — это точка покоя  $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{s}$ .

Уравнения движения голономной механики не описывают возможные изменения параметров системы (скорости, ветви движения) при прохождении траектории через геометрическую особенность  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  в конфигурационном пространстве. Поэтому рассматривается другой метод, связанный с реализацией связей.

### 3. Реализация связей через упругий потенциал

В разделе исследуется модель движения материальной точки через геометрическую особую точку  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$  двойного параболоида вращения. Для описания динамики вблизи особенности применяется метод с упругим потенциалом, который моделирует голономную связь.

**Упругий потенциал.** Динамика механической системы с обобщенными координатами  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , кинетической энергией  $T$ , обобщенными силами  $\mathbf{G}$  и голономными связями  $f_k(\mathbf{q}) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$  описывается уравнениями Лагранжа второго рода с неопределенными множителями  $\lambda_k$  [11, гл. 5]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G} + \lambda_k \sum_{k=1}^m \nabla f_k. \quad (10)$$

В голономной механике не рассматривается, какими силами реализуются голономные связи в уравнениях (10). Среди методов реализации голономных связей в основном рассматривается модель с упругим потенциалом [8]. В этой модели голономная связь «возникает» в результате действия упругого потенциала  $kW$  с большим коэффициентом жесткости  $k$ . Функция  $W$  должна быть равна нулю на многообразии  $M$  (которое задается связями  $f_k(\mathbf{q}) = 0$ , где  $k = 1, \dots, m$ ) и быть строго положительной вне  $M$ . Уравнения движения системы с потенциалом  $W$  и параметром жесткости  $k$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G} - k \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}. \quad (11)$$

Для независимых голономных связей  $f_k(\mathbf{q}) = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ , в уравнении (11) можно положить

$$W = \sum_{k=1}^m c_k (f_k)^2,$$

где константы  $c_k$  положительны.

В работах [8] и [9] рассматривается реализация голономных связей через упругий потенциал  $kW$  при  $k \rightarrow \infty$ . При некоторых условиях гладкости на коэффициенты уравнений (11) показано, что для конечного интервала времени  $[t_1, t_2]$  траектория движения системы с упругим потенциалом (11) сходится к траектории движения системы со связями (10) при  $k \rightarrow \infty$ . Сходимость получается для координат и скоростей траекторий, сходимость для



ускорений будет только в среднем. Начальные данные для траектории системы с потенциалом (11) должны быть согласованы с многообразием связей, т. е.  $\mathbf{q}_0 \in M$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0 \in T_{\mathbf{q}_0}M$ .

Метод с упругим потенциалом применялся для доказательства реализации голономных связей для механических систем с гладким конфигурационным пространством. Но данный метод естественно обобщается на механические системы с особенностями конфигурационного пространства.

Упругий потенциал с большим параметром жесткости далее называется жестким потенциалом.

**Цилиндрические координаты.** Запишем уравнения движения материальной точки по двойному параболоиду  $X$  в форме уравнений Гамильтона в цилиндрических координатах. Покажем, что в модели с жестким потенциалом только траектории движения в плоскости  $\varphi = \text{const}$  могут проходить через особую точку  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Определим потенциал  $W$ , который равен нулю на множестве  $X$  и строго больше нуля вне множества  $X$ , как квадрат связи  $f = f_1 f_2$  в (7):

$$W = (f_1 f_2)^2 = (z^2 - (x^2 + y^2)^2)^2 = (h^2 - r^4)^2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия материальной точки в цилиндрических координатах определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} m \left( (\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\varphi})^2 + (\dot{h})^2 \right);$$

обобщенные импульсы —

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_h = m\dot{h};$$

гамильтониан —

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{p_h^2}{2m} + k \cdot (h^2 - r^4)^2.$$

Не будем выписывать полную систему уравнений движения, но заметим, что они содержат следующие два уравнения:

$$\dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}. \quad (13)$$

Обозначим  $p_\varphi = J = \text{const}$ . Если  $J \neq 0$ , то траектория движения (13) не может приблизиться к значению  $r = 0$  для конечной энергии  $H$ .

Если  $J = 0$ , то  $\dot{\varphi} = 0$ , т. е. угол  $\varphi$  является константой для траектории. Следовательно, только траектории с  $\varphi = \text{const}$  могут достичь особой точки  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Начальный вектор скорости такой траектории должен быть направлен в плоскости  $\varphi = \text{const}$ . Траектория лежит в плоскости, проходящей через ось вращения двойного параболоида. Уравнения движения в цилиндрических координатах содержат особенности при  $r \rightarrow 0$ , поэтому для численной модели применяются другие координаты.

**Декартовы координаты.** Для построения численной модели движения материальной точки вблизи двойного параболоида  $X$  запишем уравнения движения с упругим (жестким) потенциалом (12) в декартовых координатах с параметром жесткости  $k$ :

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} &= -k \cdot \frac{dW}{dx} = 8k \cdot (z^2 - (x^2 + y^2)^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot x, \\ m \frac{dy}{dt} &= -k \cdot \frac{dW}{dy} = 8k \cdot (z^2 - (x^2 + y^2)^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot y, \\ m \frac{dz}{dt} &= -k \cdot \frac{dW}{dz} = -4k \cdot (z^2 - (x^2 + y^2)^2) \cdot z. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения движения (14) не имеют особенностей типа вырожденной матрицы кинетической энергии, как для цилиндрических координат. Поэтому для численного анализа применяются декартовы координаты.



Рассматривается движение вдоль плоскости  $\varphi = 0$ . В этом случае траектория движения теоретически может проходить через особую точку  $\mathbf{s} = (0, 0, 0)^T$ . Для численной модели задаются начальное положение  $\mathbf{q}_0 = (r_0, h_0)^T$  и начальная скорость  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{r}_0, \dot{h}_0)^T$ . Начальные условия  $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T \in T\mathbb{R}^3$  берутся на поверхности верхнего параболоида  $M_+$  по выражениям (3).

Интерес представляет общее поведение траектории системы с жестким потенциалом вблизи геометрической особенности. При движении в плоскости  $\varphi \equiv \text{const} = 0$  траектория движения системы с дополнительным потенциалом (12) движется около сечения двойного параболоида вращения плоскостью  $\varphi \equiv 0$ , т. е. объединения двух парабол. Пространственная задача переходит в плоскую.

**Ограничения динамики.** Сформулируем некоторые определения в динамике голономных систем с геометрическими особенностями, когда голономная связь реализуется с помощью жесткого потенциала. Эти определения формализуют наблюдения, полученные при численном моделировании траекторий движения для данного класса механических систем.

**Определение 1.** Область возможного движения (или положения) механической системы — это область конфигурационного пространства механической системы с жестким потенциалом, которая является проекцией множества  $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq H_0$  для заданной максимальной механической энергии  $H_0$ .

Когда параметр жесткости возрастает, то траектория механической системы с упругим потенциалом (12) все меньше отклоняется от исходного конфигурационного пространства с особенностями [15]. Поэтому область возможного движения «сужается» до малой окрестности множества  $X$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Для движения материальной точки вблизи двойного параболоида по инерции потенциальная энергия и кинетическая энергия являются положительными функциями:

$$H = H_0 = \frac{1}{2}mv^2 + k \cdot (h^2 - r^4)^2.$$

При движении по связи  $(h^2 - r^4)^2 \equiv 0$ . Максимальное отклонение  $\varepsilon = (h^2 - r^4)^2$  от связи соответствует максимальной потенциальной энергии при  $v = 0$ :

$$k \cdot (h^2 - r^4)^2 \leq H_0. \quad (15)$$

Границей области возможного движения являются значения  $(h, r)$ , при которых в неравенстве (15) достигается равенство. Получаются следующие четыре кривые:  $h_{\text{upp}}(r)$ ,  $h_{\text{low}}(r)$ ,  $r_{\text{right}}(h)$ ,  $r_{\text{left}}(h)$ , которые ограничивают движение системы:

$$\begin{aligned} h_{\text{upp}}(r) &= \sqrt{r^4 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}, & h_{\text{low}}(r) &= -\sqrt{r^4 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}, \\ r_{\text{right}}(h) &= \sqrt[4]{h^2 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}, & r_{\text{left}}(h) &= -\sqrt[4]{h^2 + \sqrt{\frac{H_0}{k}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Кривые (16) можно сравнить со «стенками», о которые при движении «ударяется» материальная точка. Моделирование показывает, что когда материальная точка приближается к границе области (16), то ее вектор скорости быстро меняется, как при упругом ударе о неудерживающую связь. Геометрически при этом вектор скорости в пространстве  $T\mathbb{R}^3$  становится почти вертикальным.

**Численное моделирование.** Для моделирования движения голономной системы по верхнему параболоиду  $M_+$  применялись уравнения (8) и (9). При моделировании соответствующей системы с жестким потенциалом применялись уравнения (14). Граница области



возможного движения строилась по формулам (16). В начальный момент времени материальная точка находится на параболоиде  $M_+$ . Начальный вектор скорости лежит в плоскости, проходящей через ось вращения параболоидов  $M_+$  и  $M_+$  и касается параболоида  $M_+$ . Заданы значения  $r_0$  и  $\dot{r}_0 < 0$ , при этом  $\varphi \equiv 0$ . Начальные данные для траектории с упругим потенциалом определялись по выражениям (3).

Для большой жесткости  $k$  система с жестким потенциалом (14) разбивается на быстро-медленную систему. Обобщенные координаты меняются медленно, обобщенные скорости меняются быстро. Поэтому необходимо учитывать возможную жесткость системы (14) и переменный шаг интегрирования. Для численного решения применяется метод LSODA (Livermore Solver for Ordinary Differential Equation) с автоматическим определением жесткости системы.

Численное интегрирование уравнений движения делалось на языке Python. Движение материальной точки вблизи двойного параболоида получено с применением метода LSODA из библиотеки `scipy`. При моделировании задавались следующие параметры: абсолютная погрешность  $10^{-10}$ , относительная погрешность  $10^{-10}$ . Графики траекторий строились в библиотеке `matplotlib`. Для построения графиков диапазон значений по осям  $Ox$  и  $Oz$  подбирался для приведения графиков движения для разных значений параметра жесткости  $k$  к «стандартной форме»:

$$x_{\max} = 2\sqrt[8]{\frac{H_0}{k}}, \quad x_{\min} = -2\sqrt[8]{\frac{H_0}{k}}, \quad z_{\max} = x_{\max}^2, \quad z_{\min} = -x_{\max}^2.$$

Координаты  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  получены как удвоенные координаты пересечения границы области возможного движения (16) с осью  $Ox$ . Графики траекторий в плоскости  $\varphi = 0^\circ$  показаны на рис. 2, 3.

**Аналогия с движением голономной системы.** При движении материальной точки по инерции с начальными условиями  $r_0 = 1$  м и  $\dot{r}_0 = -1$  м/с координата  $x$  меняется от 1 м до  $-\infty$ . После прохождения особенности двойного параболоида гладкая траектория движения материальной точки должна продолжить движение по верхней параболе. Система проходит особенность за нулевое время. Поэтому естественно предположить, что аналогичные свойства будут и у системы с упругим потенциалом с достаточно большим параметром жесткости  $k$ .

**Типичное движение системы с упругим потенциалом.** Было сделано моделирование траекторий для системы (14). На рис. 2 показаны типичные формы траекторий для различных параметров жесткости  $k$  при одинаковых начальных данных:  $m = 1$  кг,  $r_0 = 1$  м,  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\dot{r}_0 = -1.0$  м/с.

На рис. 3 показаны графики координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14) (синий), координаты  $z(t)$  для системы с голономной связью (8) (зеленый) и некоторые ограничения на выход из «сингулярного прямоугольника» (красный).

При численном моделировании получены следующие наблюдения, в которых сформулированы отличия динамики голономной системы (8) от системы с жестким потенциалом (14).

**Наблюдение 1.** Траектория движения голономной системы переходит из области  $x \geq 0$  в область  $x \leq 0$ , координата  $x(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Траектория движения системы с жестким потенциалом совершает некоторые колебания вблизи сингулярной области, периодически переходя между полуплоскостями  $x \geq 0$  и  $x \leq 0$ .

**Наблюдение 2.** Гладкое движение голономной системы происходит вдоль верхней параболы. Движение системы с жестким потенциалом может происходить как в малой окрестности верхней параболы, так и в малой окрестности нижней параболы.

**Наблюдение 3.** Траектория голономной системы проходит через особую точку мгновенно. Траектория движения системы с жестким потенциалом может некоторое (конечное) время двигаться вблизи особой точки. В этом случае происходит несколько последовательных «отражений» траектории вблизи границы области возможного движения. В примере на рис. 4 траектория более 15 с находится в малой окрестности особой точки.



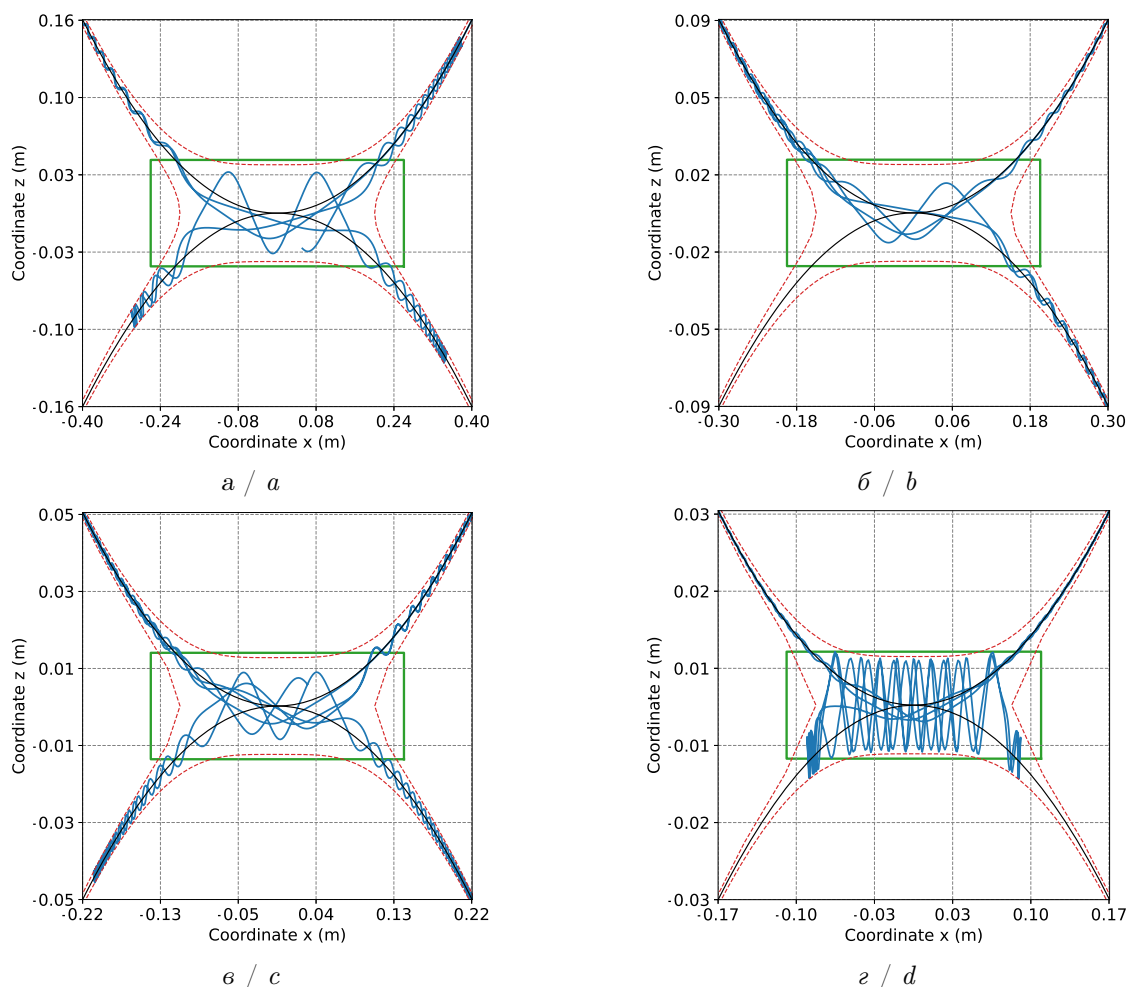


Рис. 2. Траектории движения материальной точки вблизи поверхности двойного параболоида в плоскости  $\varphi \equiv 0^\circ$  для параметров жесткости:  $a - k = 10^6$ ;  $b - k = 10^7$ ;  $c - k = 10^8$ ;  $d - k = 10^9$ . Начальные условия:  $r_0 = 1$  м,  $\dot{r}_0 = -1$  м/с,  $\Delta t = 3$  с. Синий — траектория движения системы в плоскости  $Oxz$ ; черный — две касающиеся параболы как сечение двойного параболоида  $X$ ; красный — граница области возможного движения (16); зеленый — «сингулярный прямоугольник» (цвет онлайн)

Fig. 2. Trajectories of motion of a material point near the surface of a double paraboloid in the plane  $\varphi \equiv 0^\circ$  for the stiffness parameters:  $a$  is  $k = 10^6$ ;  $b$  is  $k = 10^7$ ;  $c$  is  $k = 10^8$ ;  $d$  is  $k = 10^9$ . Initial conditions:  $r_0 = 1$  m,  $\dot{r}_0 = -1$  m/sec,  $\Delta t = 3$  sec. Blue — the trajectory of the system's motion in the  $Oxz$  plane; black — two tangential parabolas as a section of the double paraboloid  $X$ ; red — the boundary of the possible motion region (16); green — “singular rectangle” (color online)

**Замечание 2.** Описанные в данном пункте построения для движения материальной точки можно обобщить для начального анализа конкретных механических систем, конфигурационное пространство которых имеет особенность типа двух симметричных касающихся поверхностей в пространстве или двух касающихся кривых на плоскости.

**Область перехода.** При анализе численных траекторий движения системы (14) можно сделать следующее замечание. Для двух касающихся парабол (как сечения двойного параболоида вертикальной плоскостью) около особой точки есть область, в которой материальная точка может перейти с одного типа движения (вблизи первой параболы) на другой тип (вблизи второй параболы). Данную область можно заключить в «сингулярный прямоугольник», который показан на рис. 2 зеленым цветом.

Если координата  $z$  траектории системы (14) выходит за сингулярный прямоугольник, то данную точку траектории можно однозначно сопоставить с верхней или нижней параболой. По координатам  $(x, z)$  можно соотнести положение материальной точки с опре-



деленной ветвью движения. Если изображающая точка системы находится в сингулярном прямоугольнике, то положение системы «сложно соотнести» с одной параболой (см. рис. 4).

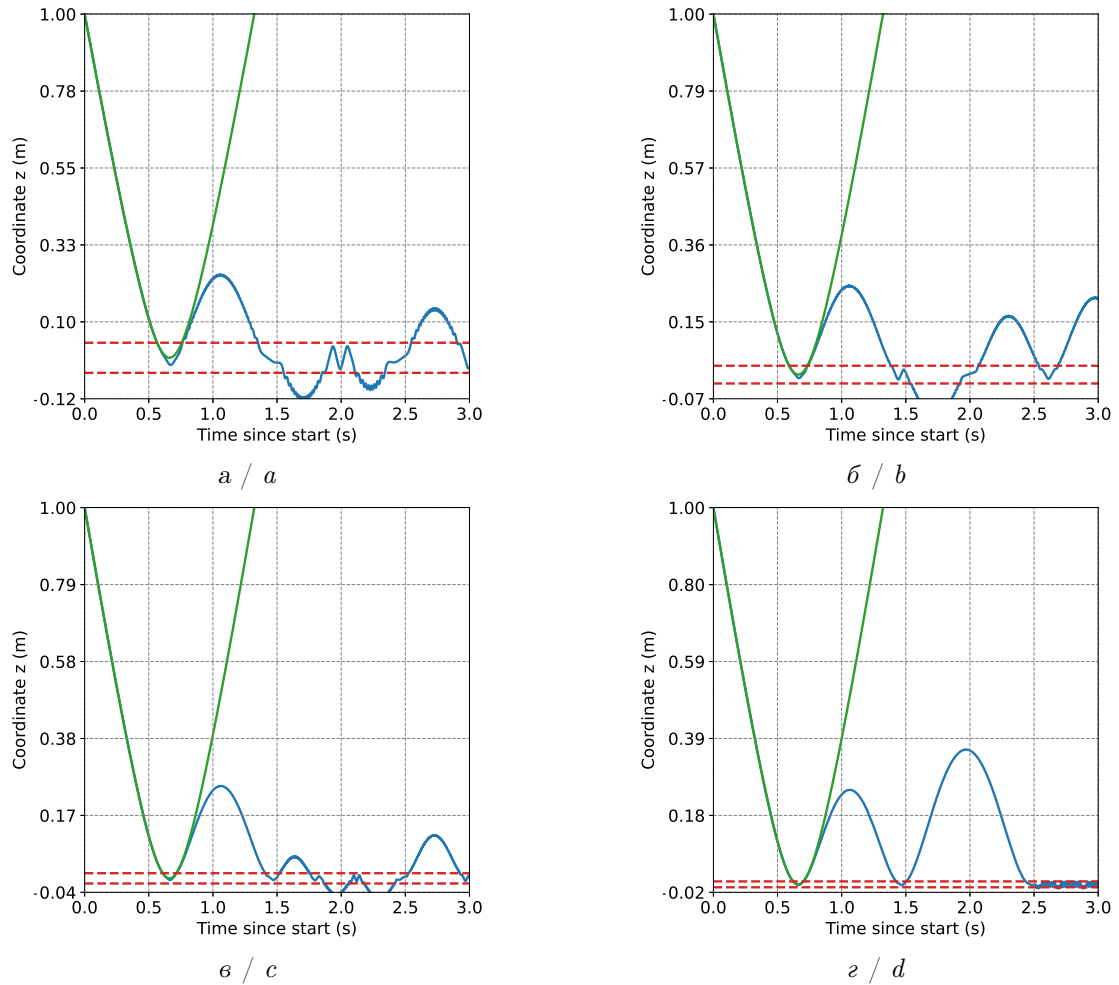


Рис. 3. Траектории движения материальной точки в плоскости  $\varphi \equiv 0^\circ$  для параметров жесткости:  $a - k = 10^6$ ;  $b - k = 10^7$ ;  $c - k = 10^8$ ;  $d - k = 10^9$ . Начальные условия:  $r_0 = 1$  м,  $\dot{r}_0 = -1$  м/с,  $\Delta t = 3$  с. Синий — график координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14); зеленый — график координаты  $z(t)$  для системы с голономной связью (8); красный — некоторые ограничения на выход из «сингулярного прямоугольника» (цвет онлайн)

Fig. 3. Trajectories of motion of a material point in the plane  $\varphi \equiv 0^\circ$  for the stiffness parameters:  $a$  is  $k = 10^6$ ;  $b$  is  $k = 10^7$ ;  $c$  is  $k = 10^8$ ;  $d$  is  $k = 10^9$ . Initial conditions:  $r_0 = 1$  m,  $\dot{r}_0 = -1$  m/sec,  $\Delta t = 3$  sec. Blue — graph of the  $z(t)$  coordinate for a system with a rigid potential (14); green — graph of the  $z(t)$  coordinate for a system with holonomic coupling (8); red — some restrictions on exiting “singular rectangle” (color online)

Для анализа траекторий общих механических систем с геометрическими особенностями можно ввести несколько определений, которые расширяют понятие «особой точки» до «особой области» для движения механических систем, в которых голономные связи реализуются с помощью жесткого потенциала.

В общем случае рассматривается конфигурационное пространство  $X$ , состоящее из объединения нескольких гладких многообразий,  $M_1, M_2, \dots, M_p$ , в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^N$ . Многообразия  $M_1, M_2, \dots, M_p$  могут иметь точки пересечения, в которых геометрически возможна смена типа движения голономной системы. Движение вне точек пересечения определяется уравнениями типа (10) для одного многообразия  $M_k$ , где  $k \in \overline{1, p}$ . Движение голономной системы не определено в особых точках  $s \in X$ . Поэтому движение исследуется с помощью введения упругого (жесткого) потенциала  $W$  (11).

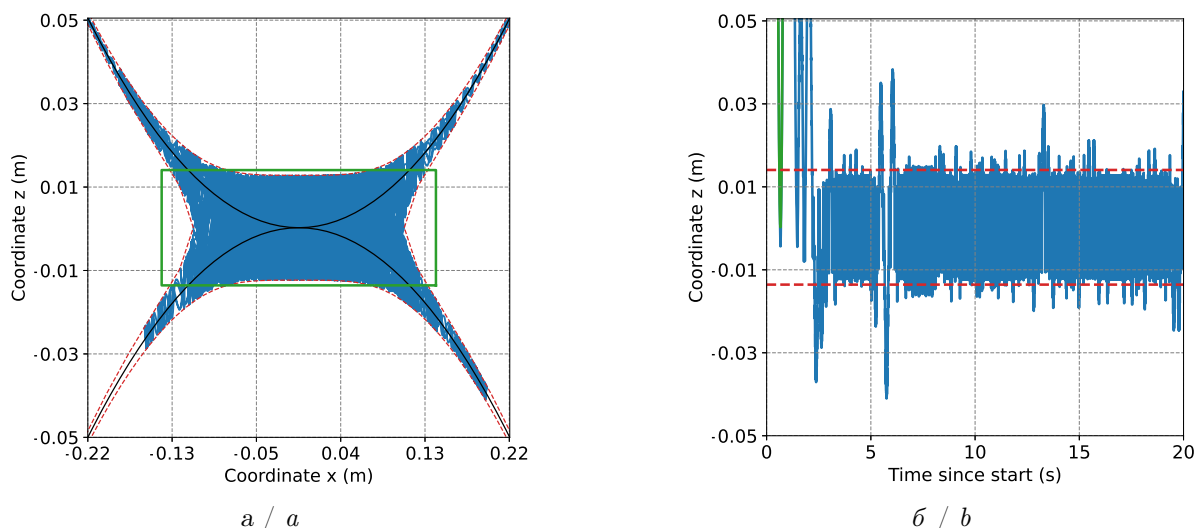


Рис. 4. Траектория движения материальной точки на поверхности двойного параболоида в плоскости  $\varphi \equiv 0^\circ$  для параметра  $k = 10^8$ . Начальные условия:  $r_0 = 1$  м,  $\dot{r}_0 = -1$  м/с,  $\Delta t = 20$  с. На рис. 4, а: зеленый — вариант сингулярного прямоугольника (области перехода); синий — график координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14) в плоскости  $Oxz$ ; красный — граница области возможного движения (16); черный — две касающиеся параболы как сечение двойного параболоида (12). На рис. 4, б: зеленый — график координаты  $z(t)$  для системы с голономной связью (8); синий — график координаты  $z(t)$  для системы с жестким потенциалом (14); красный — верхняя и нижняя граница сингулярного прямоугольника по координате  $z(t)$ , как на рис. 4, а (цвет онлайн)

Fig. 4. Trajectory of motion of a material point on the surface of a double paraboloid in the plane  $\varphi \equiv 0^\circ$  for the parameter  $k = 10^8$ . Initial conditions:  $r_0 = 1$  m,  $\dot{r}_0 = -1$  m/sec,  $\Delta t = 20$  sec. In Fig. 4, a: green — a variant of the singular rectangle (transition region); blue — a graph of the coordinate  $z(t)$  for a system with a hard potential (14) in the  $Oxz$  plane; red — the boundary of the possible motion region (16); black — two tangential parabolas as a section of a double paraboloid (12). In Fig. 4, b: green — graph of the coordinate  $z(t)$  for the system with holonomic coupling (8); blue — graph of the coordinate  $z(t)$  for the system with a hard potential (14); red — upper and lower boundary of the singular rectangle in the coordinate  $z(t)$  as in Fig. 4, a (color online)

**Определение 2.** Область определенности — это подмножество области возможных положений системы с жестким потенциалом, точки которого можно однозначно соотнести с одним из гладких многообразий  $M_1, M_2, \dots, M_p$ , составляющих конфигурационное пространство  $X$ .

**Определение 3.** Сингулярная область — это подмножество области возможных положений системы с жестким потенциалом, в котором допустим быстрый переход между разными типами движения (вблизи одного из многообразий  $M_1, M_2, \dots, M_p$ ).

Ветви движения отличаются гладким многообразием, в малой окрестности которого происходит движение системы с жестким потенциалом.

На рис. 4 показано, что траектория системы с жестким потенциалом может двигаться вблизи двух парабол, обходя как верхнюю, так и нижнюю параболу. С точки зрения голономной механики переход с верхней параболы на нижнюю параболу соответствует «негладкому» движению. Если рассмотреть траектории на более длительном интервале времени, то изображающая точка достаточно плотно замечает сингулярную область (см. рис. 4). На рис. 2 и 3 показано, что траектория движения материальной точки при сужении области возможного движения переходит на «возвратное» движение.

## Заключение

При моделировании движения материальной точки по двойному параболоиду было получено, что траектории голономной системы и траектории соответствующей системы с



жестким потенциалом качественно отличаются. В рассматриваемом случае, когда траектория может проходить через особенность, пространственная задача переходит в плоскую задачу о движении материальной точки вблизи двух касающихся парабол.

Траектории голономной системы неограниченно движутся в одну сторону. Траектории движения системы с жестким потенциалом обычно не продолжаются неограниченно в одну сторону от двух парабол, а совершают некоторые колебания в окрестности особой точки. Для рассмотренных примеров траекторий с увеличением жесткости поведение траекторий качественно не меняется. Траектории движения системы с жестким потенциалом можно разбить на несколько участков:

- движение в области определенности, вблизи одной из парабол;
- движение в сингулярной области, в которой траектория может быстро изменить тип движения (перейти с малой окрестности верхней параболы на малую окрестность нижней параболы);
- быстрые колебания в сингулярной области, когда двумерное движение фактически переходит в последовательность одномерных «импульсных ударов» вблизи границы области возможного движения.

Траектории голономной системы проходят геометрическую особенность за нулевое время. Но траектории системы с жестким потенциалом могут находиться в сингулярной области длительное время, которое можно наблюдать. Если некоторая механическая система окажется в такой модельной сингулярной области, то последовательность быстрых смен направлений движения может привести к поломке. Поэтому необходимо учитывать возможность выхода системы на сингулярный режим движения.

### Список литературы

1. Yang L., Xue S., Yao W. A regularization method for solving the redundant problems in multibody dynamic system // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1634. Art. 012100. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1634/1/012100>
2. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17, № 11. С. 236–242. EDN: SHKDYR
3. Закалюкин И. В. Особенности вырождения неголономных связей и управляемость // Труды МАИ. 2010. № 39. С. 1–18. EDN: MTIBHR
4. Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 13–16. EDN: HRVSYR
5. Zlatanov D., Fenton R. G., Benhabib B. A unifying framework for classification and interpretation of mechanism singularities // Journal of Mechanical Design. 1995. Vol. 117, iss. 4. P. 566–572. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2826720>
6. Kowalski K., Rembieliński J. On the dynamics of a particle on a cone // Annals of Physics. 2013. Vol. 329. P. 146–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2012.10.003>, EDN: RRDOKD
7. Бурьян С. Н. «Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK
8. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва : ВИНТИ, 1985. 304 с.
9. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1957. Vol. 10. P. 65–87. DOI: <https://doi.org/10.1002/CPA.3160100103>
10. Козлов В. В., Нейштадт А. И. О реализации голономных связей // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 5. С. 858–861.
11. Takens F. Motion under influence of a strong constraining force // Global theory of dynamical systems / eds. Z. Nitecki, C. Robinson. Berlin ; Heidelberg : Springer, 1980. P. 425–445. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 819). DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087006>
12. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П., Товстик П. Е., Солтаханов Ш. Х., Филиппов С. Б., Петрова В. И. Теоретическая и прикладная механика : в 2 т. Т. I: Общие вопросы теоретической механики. Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2022. 560 с.
13. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. Москва : Физматлит, 2001. 320 с.
14. Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского уни-



верситета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9, № 2. С. 278–293. DOI: <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>, EDN: GCBILE

15. Бурьян С. Н. Сильные связи в динамике систем с геометрическими особенностями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 53–67. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-53-67>, EDN: BOLUFQ

### References

1. Yang L., Xue S., Yao W. A regularization method for solving the redundant problems in multibody dynamic system. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1634, art. 012100. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1634/1/012100>
2. Mukharlyamov R. G., Deressa C. T. Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints. *Vestnik of Kazan Technological University*, 2014, vol. 17, iss. 11, pp. 236–242. EDN: SHKDYR
3. Zakalyukin I. V. Peculiarities of the degeneracy of nonholonomic constraints and controllability. *Trudy MAI*, 2010, iss. 39, pp. 1–18 (in Russian). EDN: MTIBHR
4. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the position space of a mechanical system. *Problems of Mechanical Engineering and Reliability of Machines*, 2005, vol. 4, pp. 13–16 (in Russian). EDN: HRVSYR
5. Zlatanov D., Fenton R. G., Benhabib B. A unifying framework for classification and interpretation of mechanism singularities. *Journal of Mechanical Design*, 1995, vol. 117, iss. 4, pp. 566–572. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2826720>
6. Kowalski K., Rembieliński J. On the dynamics of a particle on a cone. *Annals of Physics*, 2013, vol. 329, pp. 146–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2012.10.003>, EDN: RRDOKD
7. Burian S. N. The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK
8. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neistadt A. I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010. 505 p. (Russ. ed.: Moscow, VINITI, 1985. 304 p.).
9. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1957, vol. 10, pp. 65–87. DOI: <https://doi.org/10.1002/CPA.3160100103>
10. Kozlov V. V., Neistadt A. I. On the implementation of holonomic connections in dynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, vol. 54, iss. 5, pp. 858–861 (in Russian).
11. Takens F. Motion under influence of a strong constraining force. In: Nitecki Z., Robinson C. (eds.) *Global theory of dynamics systems*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 819. Berlin, Heidelberg, Springer, 1980, pp. 425–445. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0087006>
12. Polyakhov N. N., Yushkov M. P., Zegzhda S. A., Tovstik P. E. *Rational and applied mechanics. Vol. 1. Complete general course for students of engineering*. Cham, Springer, 2021. 520 p. (Russ. ed.: St. Petersburg, St. Petersburg University Publ., 2022. 560 p.).
13. Zhuravlev V. F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Fundamentals of theoretical mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian).
14. Burian S. N. Reaction forces of singular pendulum. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2022, vol. 55, pp. 192–202. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063454122020054>
15. Burian S. N. Strong constraints in the dynamics of systems with geometric singularities. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, iss. 3, pp. 53–67 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-53-67>, EDN: BOLUFQ

Поступила в редакцию / Received 01.03.2025

Принята к публикации / Accepted 06.06.2025

Опубликована / Published 28.11.2025





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 513–523

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 513–523

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-513-523>

EDN: <https://elibrary.ru/KMPNKO>

Научная статья

УДК 539.3

## Решение задачи об изгибе многосвязной кусочно-однородной электромагнитоупругой тонкой плиты

С. А. Калоеров, О. Э. Ермаков<sup>✉</sup>

Донецкий государственный университет, Россия, 283001, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24

**Калоеров Стефан Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А. С. Космодамианского, [kaloerov@mail.ru](mailto:kaloerov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1339-6035>, SPIN: 8113-1310, AuthorID: 1049003

**Ермаков Олег Эдуардович**, аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А. С. Космодамианского, [ermakov.donetsk@mail.ru](mailto:ermakov.donetsk@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0007-4854-4209>, SPIN: 7090-2033, AuthorID: 1247657

**Аннотация.** С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит получено решение задачи об изгибе многосвязной пьезоплиты с эллиптическими включениями из других материалов. При этом функции, голоморфные вне отверстий, представлены рядами Лорана, а функции, голоморфные во включениях, — рядами по полиномам Фабера. Удовлетворением граничным условиям на контурах контактов плиты и включений, обобщенным методом наименьших квадратов, определение неизвестных коэффициентов рядов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Исследованы закономерности влияния физико-механических свойств материалов и геометрических характеристик включений на значения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов для концов линейных включений.

**Ключевые слова:** пьезоплита, пьезовключения, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, изгибающие моменты

**Для цитирования:** Калоеров С. А., Ермаков О. Э. Решение задачи об изгибе многосвязной кусочно-однородной электромагнитоупругой тонкой плиты // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 513–523. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-513-523>, EDN: KMPNKO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Solution of the problem on bending of a multiconnected piecewise homogeneous electromagnetoelastic thin plate

S. A. Kaloerov, O. E. Ermakov<sup>✉</sup>

Donetsk State University, 24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia

**Stefan A. Kaloerov**, [kaloerov@mail.ru](mailto:kaloerov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1339-6035>, SPIN: 8113-1310, AuthorID: 1049003

**Oleg E. Ermakov**, [ermakov.donetsk@mail.ru](mailto:ermakov.donetsk@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0007-4854-4209>, SPIN: 7090-2033, AuthorID: 1247657



**Abstract.** Using the complex potentials of the theory of bending of thin electromagnetoelastic plates, a solution has been obtained to the problem of bending a multiconnected piezoplate with elliptical inclusions made of other materials. In this case, functions holomorphic outside the holes are represented by Laurent series, and functions holomorphic in inclusions are represented by Faber polynomial series. By satisfying the boundary conditions on the contact contours of the plate and inclusions using the generalized least squares method, the determination of unknown coefficients of the series is reduced to an overriden system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The results of numerical studies for a plate with two circular or linear inclusions are described. The patterns of the influence of the physical and mechanical properties of materials and geometric characteristics of inclusions on the values of bending moments and coefficients of the moment intensity for the ends of linear inclusions are investigated.

**Keywords:** piezoplate, piezoinclusions, complex potentials, generalized least squares method, bending moments

**For citation:** Kaloerov S. A., Ermakov O. E. Solution of the problem on bending of a multiconnected piecewise homogeneous electromagnetoelastic thin plate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 513–523 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-513-523>, EDN: KMPNKO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Элементы различных конструкций современной техники изготавливаются из пьезоматериалов [1–7]. Часто такие элементы находятся в условиях изгиба тонких плит, имеют отверстия, трещины и инородные включения. При различных механических и электромагнитных воздействиях вблизи контуров этих отверстий, трещин и включений возникают высокие концентрации моментов (напряжений), что нужно учитывать при проектировании соответствующих конструкций. А для этого нужно иметь надежные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязных тонких плит.

Как показывают исследования, наиболее достоверные результаты по определению ЭМУС многосвязных плит получаются при решении задач с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [8].

В данной работе с использованием этих функций построено общее решение задачи об изгибе бесконечной пьезоплиты с произвольными включениями. При этом комплексные потенциалы для бесконечной плиты представлены рядами Лорана, для включений — рядами по полиномам Фабера, а определение неизвестных коэффициентов рядов обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [9] сведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Для плиты с двумя круговыми или линейными включениями проведены широкомасштабные численные исследования распределения изгибающих моментов и изменения коэффициентов интенсивности моментов (КИМ). Установлен ряд закономерностей влияния на ЭМУС плит геометрических характеристик включений и физико-механических свойств материалов бесконечной плиты и включений.

## 1. Постановка и метод решения задачи

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$  электромагнитоупругую тонкую плиту с эллиптическими отверстиями с контурами  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) и полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  (рис. 1), в которые вложены включения из других пьезоматериалов, находящиеся с плитой в условиях идеального электромагнитоупругого контакта. Каждое из включений способно переходить в линейное, которое можно рассматривать как эллиптическое, у которого  $b_l = 0$  (в практике расчетов  $b_l \leq 10^{-3}a_l$ ). Обозначим бесконечную многосвязную область, ограниченную контурами  $L_l$ , через  $S$ , области включений — через  $S^{(l)}$ . Введем локальные системы координат  $O_l x_l y_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с началами в центрах эллипсов  $L_l$



и осями  $O_l x_l$  вдоль полуосей  $a_l$  так, что в этих системах и в основной системе координат уравнения эллипсов имеют вид

$$\begin{aligned} x_l &= a_l \cos \theta, & y_l &= b_l \sin \theta; \\ x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, & y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned}$$

где  $\varphi_l$  — угол между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от положительного направления  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}, y_{0l}$  — координаты начала локальной системы  $O_l x_l y_l$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\theta$  — параметр, изменяющийся в интервале от 0 до  $2\pi$ . На бесконечности плита находится под действием механических моментов  $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$  и моментов индукций  $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$ . При этом на основе уравнений ЭМУС можно найти и моменты напряженностей  $H_{dx}^\infty, H_{dy}^\infty, H_{bx}^\infty, H_{by}^\infty$ .

Если для решения задачи об определении ЭМУС рассматриваемой кусочно-однородной пьезоплиты использовать комплексные потенциалы изгиба тонких электромагнитоупругих плит [8], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий комплексных потенциалов  $W'_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для бесконечной плиты и  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для каждого включения.

Комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1)$$

где  $\mu_k$  — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (2)$$

$l_{ij}(\mu)$  — полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= -\left(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}\right), \\ l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\ l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11}, \\ l_{2\nu}(\mu) &= C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11}; \end{aligned}$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$  — упругие жесткости плиты;  $C_{gij} = c_{gij}D_0$ ,  $C_{pij} = c_{pij}D_0$ ,  $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$ ,  $C_{\nu ij} = c_{\nu ij}D_0$ ,  $C_{\chi ij} = c_{\chi ij}D_0$  — электромагнитные жесткости плиты;  $D_0 = \frac{2}{3}h^3$ ;  $h$  — полутолщина плиты;  $b_{ij}, c_{gij}, c_{pij}, c_{\beta ij}, c_{\nu ij}, c_{\chi ij}$  — элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22} \end{pmatrix} =$$

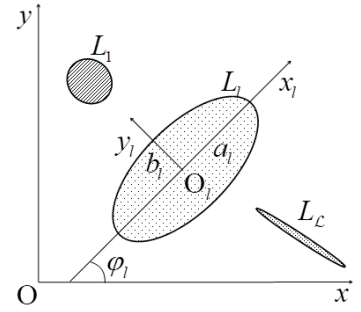


Рис. 1. Многосвязная плита с включениями  
Fig.1. Multiconnected plate with inclusions



$$= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

$s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях [8].

Комплексные потенциалы  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для каждой плиты-включения  $S^{(l)}$  являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \quad (3)$$

где  $\mu_k^{(l)}$  — корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения (2) заменой всех величин на аналогичные величины с индексом  $(l)$  сверху.

Функции  $W_k^{(l)}(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями (1) и ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими контурам  $L_l$  при этих преобразованиях, и в общем случае многосвязной плиты можно представить в виде [8, 9]

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n},$$

в котором  $\Gamma_k$  — известные постоянные, определяемые по значениям моментов на бесконечности;  $\zeta_{kl}$  — переменные, получаемые из конформных отображений внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{kl}$  [10],

$$\begin{aligned} z_k &= z_{kl0} + R_{kl} / (\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}), \quad z_{kl0} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= (a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2, \\ m_{kl} &= (a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2R_{kl}; \end{aligned}$$

$a_{kln}$  — неизвестные коэффициенты рядов, определяемые из условий на контурах плиты.

Функции  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  голоморфны в конечных областях  $S_k^{(l)}$ , получаемых из областей  $S^{(l)}$  аффинными преобразованиями (3), и их можно представить рядами по полиномам Фабера для этих областей

$$W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}),$$

где  $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$  — полиномы Фабера для эллипса  $L_k^{(l)}$ , имеющие вид [11]

$$P_{k0}^{(l)} = 1, \quad P_{kn}^{(l)} = (\zeta_k^{(l)})^n + (m_k^{(l)})^n / (\zeta_k^{(l)})^n;$$

$\zeta_k^{(l)}$  — переменные, получаемые из конформных отображений внешности единичных кругов  $|\zeta_k^{(l)}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_k^{(l)}$  с помощью следующих формул:

$$z_k^{(l)} = z_{k0}^{(l)} + R_k^{(l)} / (\zeta_k^{(l)} + m_k^{(l)}/\zeta_k^{(l)}), \quad z_{k0}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l},$$



$$R_k^{(l)} = \left( a_l (\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l) \right) / 2,$$

$$m_k^{(l)} = \left( a_l (\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l) \right) / 2R_k^{(l)}.$$

Но полиномы Фабера  $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$  можно представить рядами по степеням  $z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)}$  [11]. Поэтому функции  $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  можно представить и в виде степенных рядов

$$W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n,$$

где  $a_{kn}^{(l)}$  — неизвестные постоянные, которые, как и  $a_{kln}$ , будем определять из граничных условий на контурах контактов плиты  $S$  и включений  $S^{(l)}$ .

На контурах включений, где имеет место идеальный контакт плиты с включениями, граничные условия для определения функций имеют вид [8]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( g_{ikl} W_k'(z_k) - g_{ik}^{(l)} W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (4)$$

в котором

$$\begin{aligned} g_{1kl} &= \frac{p_k}{\mu_k}, & g_{2kl} &= q_k, & g_{3kl} &= 1, & g_{4kl} &= \mu_k, \\ g_{5kl} &= d_{yk}, & g_{6kl} &= b_{yk}, & g_{7kl} &= \nu_k, & g_{8kl} &= \rho_k, \\ g_{1k}^{(l)} &= \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, & g_{2k}^{(l)} &= q_k^{(l)}, & g_{3k}^{(l)} &= 1, & g_{4k}^{(l)} &= \mu_k^{(l)}, \\ g_{5k}^{(l)} &= d_{yk}^{(l)}, & g_{6k}^{(l)} &= b_{yk}^{(l)}, & g_{7k}^{(l)} &= \nu_k^{(l)}, & g_{8k}^{(l)} &= \rho_k^{(l)}, \\ f_{1l} &= -c_l x + c_{1l}, & f_{2l} &= c_l y + c_{2l}, & f_{3l} &= f_{4l} = 0, \\ f_{jl} &= c_{jl}, & j &= 5, 6, 7, 8, \end{aligned}$$

$p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk}, \nu_k, \rho_k$  — известные постоянные [8];  $c_l$  — вещественные постоянные, причем все величины со значком  $(l)$  вверху относятся к включению  $S^{(l)}$  и получаются по формулам для плиты заменой величин без значка на величины со значком  $(l)$ ;  $\mu_k^{(l)} (k = \overline{1, 4})$  — корни уравнения (2) для включения  $S^{(l)}$ .

Для многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из условий (4) их дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[ g_{ikl} \delta_{k,s} W_k''(z_k) - g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} W_k^{(l)''}(z_k^{(l)}) \right] = \frac{df_{il}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (5)$$

в котором

$$\begin{aligned} W_k''(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_{kln}(z_k) a_{kln}, & W_k^{(l)''}(z_k^{(l)}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{kn}'^{(l)}(z_k^{(l)}) a_{kn}^{(l)}, \\ \delta_{k,s} &= \frac{dz_k}{ds}, & \delta_{k,s}^{(l)} &= \frac{dz_k^{(l)}}{ds}, \\ \phi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, & \phi_{kn}'^{(l)}(z_k^{(l)}) &= n(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \end{aligned} \quad (6)$$





Граничным условиям (5) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9, 12, 13]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (6) в граничные условия (5) в точках  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ , для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  и  $a_{kn}^{(l)}$  получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s} \phi_{kn}'^{(l)}(t_{km}^{(p)}) a_{kn}^{(l)} \right] = \\ = \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 8}; p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M}). \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме уравнений (7), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (8)$$

следующие из однозначности прогиба при полном обходе каждого из контуров  $L_p$ .

Систему (7), дополненную уравнениями (8), будем решать методом сингулярных разложений [14, 15]. После нахождения псевдорешений этой системы функции  $W'_k(z_k)$  и  $W_k'^{(l)}(z_k^{(l)})$  будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического и магнитного полей, перерезывающие силы) [8]. Если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейное включение, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ)  $k_{1M}^{\pm}$  и  $k_{2M}^{\pm}$  по известным формулам

$$\begin{aligned} k_{1M}^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \left[ p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \cos \varphi_l \sin \varphi_l \right] M_k, \\ k_{2M}^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \left[ (q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k, \end{aligned}$$

в которых

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln},$$

причем «+» и «-» у КИМ в локальной системе координат  $O_l x_l y_l$  относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

Как частные случаи из приведенных решений задач электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). При проведении численных исследований решения всех этих задач можно получить по программе решения задачи ЭМУ, проводя вычисления для модельного материала с постоянными  $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$ ,  $p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}$ ,  $\nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij}$ , причем их нужно принять такими:  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$  для задач ЭМУ;  $\lambda_g = 1, \lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ЭУ;  $\lambda_p = 1, \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач МУ;  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ТУ.

## 2. Результаты численных исследований

Были проведены численные исследования для плит из материалов: 1) композит на основе  $BaTiO_3 - CaFe_2O_4$  (материал М1) [16, 17]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия  $CdSe$ , а пьезомагнитные и магнитные —  $BaTiO_3$  (материал М2) [18]. При проведении расчетов упругие свойства



материала каждого включения связывались со свойствами материала бесконечной плиты соотношениями  $s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}$ , где  $\lambda_s^{(l)}$  — параметры, связывающие соответствующие постоянные материалов бесконечной плиты с областями  $S$  и включений с областями  $S^{(l)}$ . Ввиду того что на значения моментов в бесконечной плите пьезосвойства включений влияют незначительно, при проведении расчетов эти свойства включений не учитывались, т.е. считалось, что  $\lambda_g^{(l)} = \lambda_p^{(l)} = \lambda_{gp}^{(l)} = 0$ .

В табл. 1 для изгиба моментами  $M_y^\infty = m_y$  бесконечной плиты с двумя одинаковыми круговыми упругими (не обладающими пьезосвойствами) включениями радиуса  $a_1$  ( $b_1 = a_1$ ,  $b_2 = a_2 = a_1$ ) (рис. 2), с точностью до множителя  $m_y$ , в зависимости от  $c/a_1$ , где  $c$  — расстояние между включениями, параметра механической жесткости включений  $\lambda_s^{(1)}$  и центрального угла  $\theta$  контура  $L_1$ , отсчитываемого от направления оси  $Ox$  против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов  $M_s$  в точках контакта плиты с левым включением на площадках, перпендикулярных к контуру. Значения  $\lambda_s^{(1)}$ , равные 0 и  $\infty$ , относятся к случаям плиты с абсолютно жесткими включениями и абсолютно мягкими включениями (отверстиями). На рис. 3 изображены графики распределения этих моментов около контура  $L_1$  в плите из материала М2 при различных значениях  $c/a_1$ . Сплошные линии относятся к случаю  $c/a_1 = 0, 1$ , штриховые — к случаю  $c/a_1 = \infty$ .

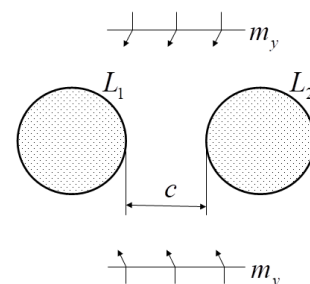


Рис. 2. Схема задачи с двумя круговыми включениями

Fig. 2. Task diagram with two circular inclusions

Таблица 1 / Table 1

Значения  $M_s/m_y$  в плите около контура левого включения  
The values of  $M_s/m_y$  in the plate near the contour of the left switch

$c/a_1$	$\lambda_s^{(1)}$	$\theta$ , рад.								
		0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
		Задача ЭМУ					Задача ТУ			
		Материал М2								
$\infty$	0.0	−0.747	−0.400	0.958	0.986	−0.747	−0.849	−0.218	0.679	1.027
	0.1	−0.150	0.002	0.648	0.540	−0.150	−0.170	0.106	0.447	0.559
	0.5	0.647	0.526	0.323	0.088	0.647	0.669	0.546	0.253	0.094
	2.0	1.332	0.953	0.233	−0.001	1.332	1.280	0.945	0.302	−0.013
	10.0	1.903	1.293	0.287	0.132	1.903	1.696	1.272	0.469	0.078
	$\infty$	2.184	1.457	0.336	0.232	2.184	1.876	1.424	0.565	0.146
1.00	0.0	−0.542	−0.579	0.611	0.875	−0.726	−0.649	−0.382	0.439	0.907
	0.1	−0.137	−0.127	0.476	0.485	−0.160	−0.185	−0.004	0.344	0.500
	10.0	2.256	1.430	0.279	0.126	2.010	2.098	1.406	0.438	0.075
	$\infty$	2.703	1.645	0.317	0.220	2.332	2.454	1.617	0.519	0.138
0.10	0.0	−1.478	−0.624	0.553	0.867	−0.780	−1.627	−0.449	0.386	0.899
	0.1	−0.549	−0.219	0.415	0.466	−0.188	−0.575	−0.105	0.299	0.480
	10.0	4.207	1.453	0.249	0.148	2.148	3.816	1.355	0.320	0.091
	$\infty$	6.973	1.506	0.244	0.237	2.554	6.146	1.386	0.281	0.148
0.01	0.0	−4.843	−0.288	0.628	0.874	−0.812	−5.690	−0.224	0.435	0.907
	0.1	−1.131	−0.147	0.423	0.463	−0.197	−1.267	−0.078	0.300	0.477
	0.5	0.376	0.436	0.281	0.070	0.612	0.459	0.462	0.240	0.076
	2.0	1.939	1.028	0.237	0.010	1.399	1.746	1.002	0.274	−0.002
	10.0	6.521	1.265	0.221	0.154	2.189	5.453	1.192	0.279	0.096

Из данных табл. 1, рис. 3 и других полученных результатов следует, что влияние одного включения на ЭМУС около другого значительно, если расстояние между включениями

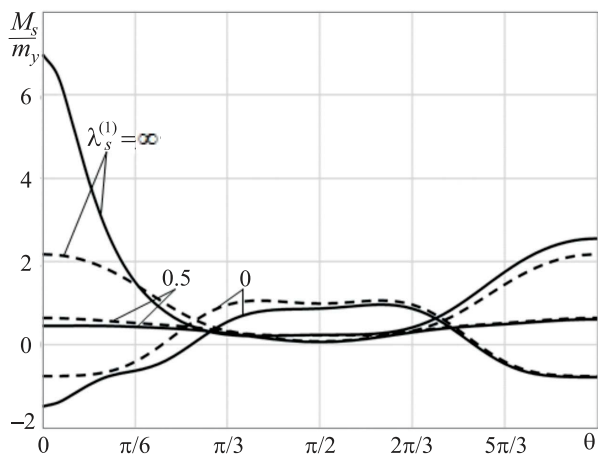


Рис. 3. Графики распределения моментов  $M_s$  около контура  $L_1$  при  $c/a_1 = 0,1$  (сплошные линии) и  $c/a_1 = \infty$  (штриховые линии)

Fig. 3. Graphs of the distribution of moments  $M_s$  near the contour  $L_1$  at  $c/a_1 = 0.1$  (solid lines) and  $c/a_1 = \infty$  (dashed lines)

Вдали от перемычки значения моментов изменяются незначительно. Как видно, отрицательные моменты в плите вблизи горизонтальных диаметров включений возникают, когда  $\lambda_s^{(1)} < 0.14$ , при  $0 \leq \theta < \pi/6$  и  $11\pi/12 \leq \theta \leq \pi$ . Последнее наглядно видно на рис. 4, где для некоторых малых значений  $\lambda_s^{(1)}$  приведены графики распределения этих моментов  $M_s$  для плиты с одним включением (при  $c/a_1 = \infty$ ).

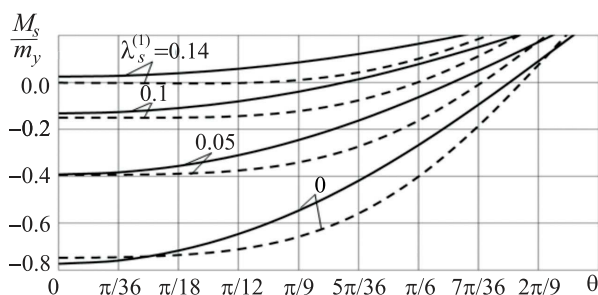


Рис. 4. Графики распределения моментов  $M_s$  для некоторых значений  $\lambda_s^{(1)}$  в плите с одним включением (при  $c/a_1 = \infty$ ) из материалов М1 (сплошные линии) и М2 (штриховые линии)

Fig. 4. Graphs of the distribution of moments  $M_s$  for some values of  $\lambda_s^{(1)}$  in a single-inclusion plate (at  $c/a_1 = \infty$ ) made of M1 (solid lines) and M2 (dashed lines) materials

ности концов больших полуосей  $a_l$ , стремясь к бесконечности, и при  $b_l/a_l \leq 10^{-3}$  можно говорить о КИМ для концов линейных включений.

В табл. 2 для плиты из материала М2 с двумя одинаковыми упругими линейными включениями (не обладающими пьезосвойствами) длины  $2a_1$  ( $2a_2 = 2a_1$ ) (рис. 5) в зависимости от  $c/a_1$ , где  $c$  — расстояние между включениями, и параметра механической жесткости включений  $\lambda_s^{(1)}$  даны значения КИМ  $k_1^\pm$  (в данном случае  $k_2^\pm = 0$ ). Значения  $\lambda_s^{(1)}$ , равные 0 и  $\infty$ , относятся к случаям абсолютно жестких включений и трещин соответственно. Для случаев, когда параметр  $\lambda_s^{(1)}$  равен 0, 1 и 10 значения  $k_1^+$  (КИМ для правого конца трещины) для всех  $c/a_1$  получаются такими же, как и  $k_1^-$ , поэтому они в табл. 2 не приведены.

меньше диаметров включений ( $c/a_1 \leq 2$ ), с уменьшением расстояния  $c$  между включениями значения моментов  $M_s$  в плите около контуров включений резко изменяются вблизи точек перемычки и несколько меньше в зонах противоположной перемычке (растут при  $\lambda_s^{(1)} > 1$  (при  $E_1^{(1)} < E_1$ ) и уменьшаются при  $\lambda_s^{(1)} < 1$  (при  $E_1^{(1)} > E_1$ )). При этом на значения моментов в этой зоне существенно влияет значение параметра жесткости  $\lambda_s^{(1)}$ : с увеличением значения  $\lambda_s^{(1)}$  (с уменьшением жесткости включений) значения моментов  $M_s$  резко растут. Так, если  $c/a_1 = 0.01$ , то в точке контура, соответствующей  $\theta = 0$ , при изменении  $\lambda_s^{(1)}$  от 0 (абсолютно жесткие включения) до  $\infty$  (неподкрепленные отверстия) значения моментов растут от  $-4.843$  до  $21.831$ .

Значения изгибающих моментов в плите из «сильно анизотропного» материала М2 значительно больше, чем в плите из «близкого к изотропному» материала М1. На изгибающие моменты в плите значительно влияют пьезосвойства, порой значения моментов с учетом пьезосвойств (задача ЭМУ) в 2 и более раз отличаются от их значений без учета пьезосвойств (задача ТУ).

Как показывают исследования, с уменьшением отношения полуосей эллиптических включений  $b_l/a_l$  значения моментов  $M_s$  в окрестности концов малых полуосей эллипсов  $b_l$  значительно уменьшаются, но резко растут в окрестности концов больших полуосей  $a_l$ , стремясь к бесконечности, и при  $b_l/a_l \leq 10^{-3}$  можно говорить о КИМ для концов линейных включений.

В табл. 2 для плиты из материала М2 с двумя одинаковыми упругими линейными включениями (не обладающими пьезосвойствами) длины  $2a_1$  ( $2a_2 = 2a_1$ ) (рис. 5) в зависимости от  $c/a_1$ , где  $c$  — расстояние между включениями, и параметра механической жесткости включений  $\lambda_s^{(1)}$  даны значения КИМ  $k_1^\pm$  (в данном случае  $k_2^\pm = 0$ ). Значения  $\lambda_s^{(1)}$ , равные 0 и  $\infty$ , относятся к случаям абсолютно жестких включений и трещин соответственно. Для случаев, когда параметр  $\lambda_s^{(1)}$  равен 0, 1 и 10 значения  $k_1^+$  (КИМ для правого конца трещины) для всех  $c/a_1$  получаются такими же, как и  $k_1^-$ , поэтому они в табл. 2 не приведены.



Таблица 2 / Table 2

Значения КИМ для концов левого линейного включения в плите из материала М2 с двумя линейными включениями  
 The CMI (the coefficient of the moments intensity) values for the ends of the left linear inclusion in a plate made of M2 material with two linear inclusions

$\lambda_s^{(1)}$	КИМ	$c/a_1$					
		$\infty$	2	1	0.5	0.1	0.01
0	$k_1^-$	-0.527	-0.542	-0.554	-0.568	-0.603	-0.639
	$k_1^+$	-0.527	-0.552	-0.585	-0.645	-0.935	-1.971
$10^{-3}$	$k_1^-$	-0.160	-0.161	-0.162	-0.162	-0.164	-0.164
	$k_1^+$	-0.160	-0.162	-0.166	-0.173	-0.206	-0.319
0.1	$k_1^-$	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
10	$k_1^-$	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
$10^3$	$k_1^-$	0.404	0.408	0.410	0.413	0.417	0.419
	$k_1^+$	0.404	0.412	0.423	0.444	0.543	0.882
$\infty$	$k_1^-$	0.998	1.026	1.049	1.079	1.148	1.221
	$k_1^+$	0.998	1.046	1.110	1.226	1.791	3.836

Как видно из данных, приведенных в табл. 2, если механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ( $\lambda_s^{(1)} > 1$ ), то КИМ положительны и в малой окрестности концов линейных включений при положительных толщинных координатах  $z$  напряжения положительны (происходит растяжение), если же механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ( $\lambda_s^{(1)} < 1$ ), то КИМ отрицательны и в малой окрестности концов включений при положительных толщинных координатах  $z$  напряжения в плите отрицательны (происходит сжатие). Если материалы плиты и включений по механическим свойствам одинаковы ( $\lambda_s^{(1)} = 1$ ), то, как и следовало ожидать, КИМ равны нулю и напряженное состояние в плите такое, как в плите без включения. При сближении друг с другом включений из более жесткого материала, чем материал плиты ( $\lambda_s^{(1)} < 1$ ), значения КИМ уменьшаются; при сближении друг с другом включений из материала, который значительно мягче материала плиты ( $\lambda_s^{(1)} \gg 1$ ), значения КИМ резко растут, особенно для ближайших друг к другу концов включений (трещин). Для случая трещин ( $\lambda_s^{(1)} = \infty$ ) значения КИМ совпадают с известными [19].

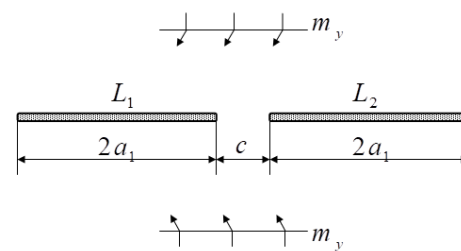


Рис. 5. Схема задачи с двумя линейными включениями  
 Fig. 5. Task diagram with two linear inclusions

## Заключение

Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких пьезоплит [8] решена задача об изгибе плиты с включениями из других материалов. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера за счет выполнения краевых условий ОМНК [9] задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений [14, 15]. Численные исследования проведены для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Установлены закономерности изменения ЭМУС плиты в зависимости от физико-механических свойств материалов и геометрических характеристик включений.



## Список литературы

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика : в 7 т., 11 кн. / под ред. У. Мезона. Москва : Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204–326.
2. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. Москва : Иностранная литература, 1949. 717 с.
3. Бичурин М. И., Петров В. М., Филиппов Д. А. Магнитоэлектрические материалы. Москва : Академия Естествознания, 2006. 296 с.
4. Пятаков А. П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюллетень МАГО. 2006. Т. 5, № 2. С. 1–3.
5. Rahmoune M., Benjeddou A., Ohayon R. New thin piezoelectric plate models // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1998. Vol. 9. P. 1017–1029.
6. Srinivas S., Jiang Yu Li The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites // Acta Materialia. 2005. Vol. 53, iss. 15. P. 4135–4142. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.05.014>
7. Vel S. S., Batra R. C. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10, iss. 2. P. 240–251. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/309>
8. Калоеров С. А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. 2022. № 1. С. 22–38. EDN: EZZZBN
9. Калоеров С. А., Паришкова О. А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. 2012. Т. 48, № 3. С. 106–116.
10. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теоретическая и прикладная механика. 1995. № 25. С. 45–56.
11. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев ; Донецк : Вища школа, 1983. 160 с.
12. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. Москва : Наука, 1977. 304 с.
13. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Москва : Мир, 1980. 280 с.
14. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2008. Vol. 29, iss. 4. P. 1322–1342. DOI: <https://doi.org/10.1137/050639193>
15. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2008. Vol. 29, iss. 4. P. 1343–1362. DOI: <https://doi.org/10.1137/05063920X>
16. Tian Wen-Ye, Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids // European Journal of Mechanics. Part A: Solids. 2004. Vol. 23, iss. 4. P. 599–614. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.02.002>
17. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures. Amsterdam : Elsevier Science-North Holland, 1987. 450 p.
18. Hou P.-F., Teng G. -H., Chen H. -R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic materials // Mechanics of Materials. 2009. Vol. 41, iss. 3. P. 329–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.12.001>
19. Калоеров С. А., Сероштанов А. В. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты // Прикладная математика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 4. С. 143–155. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20220415>, EDN: LWKFFP

## References

1. Berlincourt D. A., Curran D. R., Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function as transducers. Mason W. P. (ed.) *Physical Acoustics*. New York, Academic Press, 1964. Vol. 1, pt. A, pp. 169–270. (Russ. ed: Moscow, Mir, 1966. Vol. 1, pt. A, pp. 204–326).
2. Cady W. G. *Piezoelectricity: An introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystals*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1946. 806 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1949. 717 p.)





3. Bichurin M. I., Petrov V. M., Filippov D. A. *Magnitoelektricheskie materialy* [Magnetoelectric materials]. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2006. 296 p. (in Russian).
4. Pyatakov A. P. Magnetolectric materials and their practical application. *Byulleten' MAGO* [Bulletin of the Magnetic Society], 2006, vol. 5, iss. 2, pp. 1–3 (in Russian).
5. Rahmoune M., Benjeddou A., Ohayon R. New thin piezoelectric plate models. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1998, vol. 9, pp. 1017–1029.
6. Srinivas S., Jiang Yu Li. The effective magnetolectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites. *Acta Materialia*, 2005, vol. 53, iss. 15, pp. 4135–4142. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.05.014>
7. Vel S. S., Batra R. C. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators. *Smart Materials and Structures*, 2001, vol. 10, iss. 2, pp. 240–251. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/309>
8. Kaloerov S. A. The main relations for the applied theory of thin electromagnetoelastic plates bending. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 2022, iss. 1, pp. 22–38 (in Russian). EDN: EZZZBN
9. Kaloerov S. A., Parshikova O. A. Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plates. *International Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, iss. 3, pp. 319–331. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0523-0>
10. Kaloerov S. A., Goryanskaya E. S. Two-dimensional stress state of a multiconnected anisotropic body with cavities and cracks. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and applied mechanics], 1995, iss. 25, pp. 45–56 (in Russian).
11. Kosmodamianskiy A. S., Kaloerov S. A. *Temperaturnye napryazheniya v mnogosvyaznykh plastinkakh* [Temperature stresses in multicoupled plates]. Kiev, Donetsk, Vishcha shkola, 1983. 160 p. (in Russian).
12. Voevodin V. V. *Vychislitel'nye osnovy lineynoy algebrы* [Computational foundations of linear algebra]. Moscow, Nauka, 1977. 304 p. (in Russian).
13. Forsythe G., Malcolm M., Moler C. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977. 280 p. (Russ. ed: Moscow, Mir, 1980. 280 p).
14. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2008, vol. 29, iss. 4, pp. 1322–1342. DOI: <https://doi.org/10.1137/050639193>
15. Drmac Z., Veselic K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2008, vol. 29, iss. 4, pp. 1343–1362. DOI: <https://doi.org/10.1137/05063920X>
16. Tian Wen-Ye, Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids. *European Journal of Mechanics. Part A: Solids*, 2004, vol. 23, iss. 4, pp. 599–614. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.02.002>
17. Yamamoto Y., Miya K. *Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures*. Amsterdam, Elsevier Science-North Holland, 1987. 450 p.
18. Hou P.-F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic materials. *Mechanics of Materials*, 2009, vol. 41, iss. 3, pp. 329–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.12.001>
19. Kaloerov S. A., Seroshtanov A. V. Solving the problem of electro-magneto-elastic bending of a multiply connected area. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022, vol. 63, iss. 4, pp. 676–687. <https://doi.org/10.1134/s0021894422040150>, EDN: FCTIZV

Поступила в редакцию / Received 07.04.2025

Принята к публикации / Accepted 18.06.2025

Опубликована / Published 28.11.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 524–533

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 524–533

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-524-533>

EDN: <https://elibrary.ru/MVMKLN>

Научная статья

УДК 519.6

## Метод вариационных итераций исследования гибких пористых функционально-градиентных размерно зависимых косоугольных пластин

Л. А. Калущий, А. В. Крысько, Т. В. Яковлева, В. А. Крысько<sup>✉</sup>

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15

**Калущий Леонид Александрович**, младший научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [leon199703@gmail.com](mailto:leon199703@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>, SPIN: 6245-5920, AuthorID: 1175393

**Крысько Антон Вадимович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [anton.krysko@gmail.com](mailto:anton.krysko@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, SPIN: 3862-0430, AuthorID: 357800

**Яковлева Татьяна Владимировна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [yan-tan1987@mail.ru](mailto:yan-tan1987@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3238-2317>, SPIN: 9900-0883, AuthorID: 673156

**Крысько Вадим Анатольевич**, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, [krysko1937@gmail.com](mailto:krysko1937@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, SPIN: 1024-5028, AuthorID: 3929

**Аннотация.** Получена модель гибких косоугольных пластин Кирхгофа из пористых функционально-градиентных материалов. Нелинейность учитывается по теории Т. фон Кармана. Нелинейные уравнения в частных производных решаются с помощью метода вариационных итераций. Достоверность результатов, полученных методом вариационных итераций, обеспечивается проведением сравнительного анализа с известными решениями. Исследовано напряженно-деформированное состояние косоугольных пластин. Проведен анализ влияния угла наклона пластины, размерных эффектов, пористости и функциональной градиентности материала на ее напряженно-деформированное состояние и несущую способность. Концентрацией напряжений вблизи пустот можно пренебречь ввиду их малого размера, предполагается плавное, непрерывное изменение напряжений по толщине пластины. Выявлено, что увеличение объемной доли керамики в функционально-градиентных материалах позволяет существенно увеличить несущую способность косоугольных пластин. Косоугольные пластины с увеличенной концентрацией пор от верхней и нижней поверхностей к центру имеют наибольшую несущую способность по сравнению с равномерным распределением пористости и уменьшенной концентрацией. Величина угла наклона и размерно зависимого параметра существенно влияет на несущую способность пористых функционально-градиентных косоугольных пластин.

**Ключевые слова:** гибкие косоугольные пластины, пластины сложной геометрии, распределение пористости, теория Янга

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00160-П).

**Для цитирования:** Калущий Л. А., Крысько А. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Метод вариационных итераций исследования гибких пористых функционально-градиентных размерно зависимых косоугольных пластин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.



Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 524–533. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-524-533>, EDN: MVMKLN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Variational iteration method for investigating flexible porous functionally graded size-dependent oblique plates

L. A. Kalutsky, A. V. Krysko, T. V. Yakovleva, V. A. Krysko<sup>✉</sup>

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 15 Academician Lavrentyev Ave., Novosibirsk 630090, Russia

**Leonid A. Kalutsky**, [leon199703@gmail.com](mailto:leon199703@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>, SPIN: 6245-5920, AuthorID: 1175393

**Anton V. Krysko**, [anton.krysko@gmail.com](mailto:anton.krysko@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, SPIN: 3862-0430, AuthorID: 357800

**Tatiana V. Yakovleva**, [yan-tan1987@mail.ru](mailto:yan-tan1987@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3238-2317>, SPIN: 9900-0883, AuthorID: 673156

**Vadim A. Krysko**, [krysko1937@gmail.com](mailto:krysko1937@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, SPIN: 1024-5028, AuthorID: 3929

**Abstract.** A model of flexible oblique Kirchhoff plates made of porous functional-gradient materials is derived. Nonlinearity is accounted for by the theory of T. von Karman. The nonlinear partial derivative equations are solved using the method of variational iterations. The validity of the results obtained by the method of variational iterations is ensured by comparative analysis with known solutions. The stress-strain state (STS) of oblique-angled plates is investigated. The influence of plate inclination angle, dimensional effects, porosity and functional gradient of the material is analyzed. The stress concentration near voids can be neglected due to their small size, and a smooth, continuous stress variation along the plate thickness is assumed. It is revealed that the increase in the volume fraction of ceramics in functionally graded materials allows to significantly increase the bearing capacity of oblique plates. The oblique plates with increased pore concentration from the upper and lower surfaces to the center have the highest bearing capacity compared to the uniform porosity distribution and reduced concentration. The magnitude of the inclination angle and size-dependent parameter significantly affects the bearing capacity of porous functional-gradient oblique-angled plates.

**Keywords:** flexible oblique plates, plates of complex geometry, porosity distribution, Yang's theory

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00160-P).

**For citation:** Kalutsky L. A., Krysko A. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Variational iteration method for investigating flexible porous functionally graded size-dependent oblique plates. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 524–533 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-524-533>, EDN: MVMKLN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Многие инженерные приложения требуют применения пластин с косоугольной (перекошенной) геометрией, например для хвостового оперения и стреловидных крыльев самолетов, а также в судостроении, машиностроении, медицине и др.

Для исследования косоугольных пластин необходимо разработать эффективные и точные методы. В исследованиях [1–10] эффективность метода вариационных итераций (МВИ)

была выявлена для исследования прямоугольных в плане пластин. Настоящая работа посвящена применению метода вариационных итераций для косоугольных геометрически нелинейных пластин. Наряду с методом вариационных итераций для исследования косоугольных пластин в линейной постановке применялись методы конечных элементов [11–13], дифференциальных квадратур [14] и конечных разностей [15] без учета пористости материала и размерной зависимости.

Исследование пластин с пористостью является важным ввиду их уникальных особенностей. Пористые материалы для пластин обладают рядом преимуществ, которые делают их востребованными в различных областях, включая электрохимию, энергетику, фильтрацию. Основными преимуществами пористых материалов являются:

- 1) термоизоляционные свойства — воздух в порах снижает теплопроводность, что делает такие материалы пригодными для изоляции;
- 2) экономия материала — меньший расход сырья по сравнению с монолитными структурами без потери функциональности;
- 3) уменьшение веса — это особенно важно в авиа-, судо- и автомобилестроении.

Настоящая работа посвящена исследованию геометрически нелинейных по Т. фон Карману косоугольных пористых функционально-градиентных пластин при действии поперечной нагрузки с учетом размерной зависимости. Исследуется влияние пористости, функциональной градиентности, размерных эффектов и угла наклона косоугольных пластин.

## 1. Математическое моделирование косоугольных размерно зависимых пористых функционально-градиентных пластин

Рассмотрим косоугольную пластину в пространстве  $R^3$  как трехмерное тело  $V \in \{0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$  (рис. 1), где  $h$  — толщина пластины,  $a$ ,  $b$  — стороны пластины,  $\varphi$  — угол наклона.

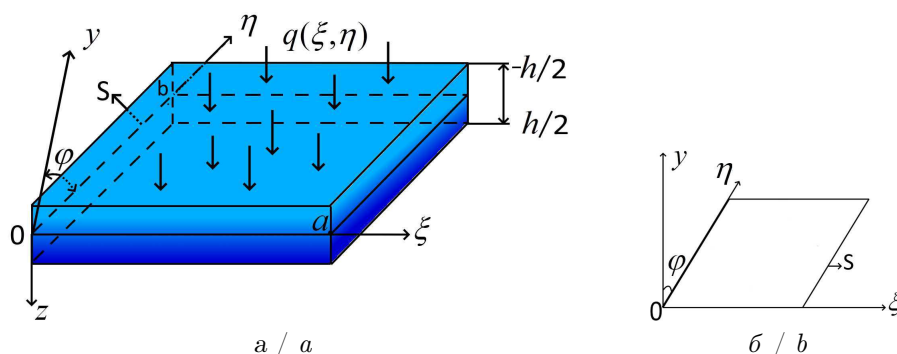


Рис. 1. Расчетная схема косоугольной пластины:  $a$  — в 3D виде;  $b$  — срединная плоскость косоугольной пластины (цвет онлайн)

Fig. 1. Calculation scheme of an oblique plate:  $a$  — in 3D view;  $b$  — the middle plane of an oblique plate (color online)

Приняты следующие гипотезы:

- 1) гипотеза Кирхгофа;
- 2) размерные эффекты пластин учитываются в соответствии с [16];
- 3) модуль упругости  $E = E(z)$  и коэффициент Пуассона  $\mu = \mu(z)$  являются функциями от  $z$ .

Исследуются следующие распределения пор  $(U, X, O)$  [17]:

- 1) U-ПФГМ:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) (1/2 + z/h)^p + E_m - (E_c + E_m) \Gamma/2, \\ \mu(z) &= (\mu_c - \mu_m) (1/2 + z/h)^p + \mu_m - (\mu_c + \mu_m) \Gamma/2; \end{aligned} \quad (1)$$



2) X-ПФГМ:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) (1/2 + z/h)^p + E_m - (E_c + E_m) (1/2 - |z|/h) \Gamma, \\ \mu(z) &= (\mu_c - \mu_m) (1/2 + z/h)^p + \mu_m - (\mu_c + \mu_m) (1/2 - |z|/h) \Gamma; \end{aligned} \quad (2)$$

3) O-ПФГМ:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) (1/2 + z/h)^p + E_m - (E_c + E_m) |z| \Gamma/h, \\ \mu(z) &= (\mu_c - \mu_m) (1/2 + z/h)^p + \mu_m - (\mu_c + \mu_m) |z| \Gamma/h, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p$  — функционально-градиентный параметр, отвечающий за соотношения объемных долей материала;  $\Gamma$  — показатель пористости материала. Следует заметить, что концентрацией напряжений вблизи пустот можно пренебречь ввиду их малого размера, предполагается плавное, непрерывное изменение напряжений по толщине пластины.

Из принципа Гамильтона

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (-U + W + K) dt = 0 \quad (4)$$

получены уравнения движения гибких ПФГМ размерно зависимых косоугольных пластин в принятой системе координат, а также краевые и начальные условия.

Приведем статические уравнения гибких ПФГМ косоугольных микро/нанопластин (5)–(7) в перемещениях  $u(\xi, \eta)$ ,  $v(\xi, \eta)$  и  $w(\xi, \eta)$  как функции  $\xi, \eta$  с краевыми условиями (8)–(9), опустив динамические члены:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right) + A_3 c^{-2} \left( s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right) + \\ &+ A_4 c^{-1} \left( -s \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c^{-1} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &c^{-2} \left( s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + c^{-1} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \left( s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right) + \\ &+ A_3 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + c^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right) + \\ &+ A_4 c^{-1} \left( \left( -s \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &Dc^{-4} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(1 + 2s) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right] + \\ &+ A_1 c^{-1} \left( c^{-1} \left( -s \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial v}{\partial \xi} + c^{-1} \frac{\partial w}{\partial \xi} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right) \left( -s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) - q = \\ &= A_2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \mu \left( c^{-1} \left( -s \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} c^{-2} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] + \\ &+ A_2 c^{-2} \left[ \left( c^{-1} \left( -s \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} c^{-2} \left( -s \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } A_1 = \int_0^1 \frac{E}{(1+\mu)} dz, \quad A_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E}{1-\mu^2} dz, \quad A_3 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-\mu}{2} dz, \quad A_4 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-\mu}{2} dz;$$





граничные условия:

– шарнир по контуру пластины:

$$w|_S = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}|_S = 0, \quad u|_S = 0, \quad v|_S = 0; \quad (8)$$

– защемление по контуру пластины:

$$w|_S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_S = 0, \quad u|_S = 0, \quad v|_S = 0. \quad (9)$$

Для косоугольных ПФГМ пластин согласно модифицированной моментной теории выражение для цилиндрической  $\bar{D}$  примет вид

$$\bar{D} = \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{E(z)z^2}{1 - \mu^2(z)} + \frac{E(z)l^2}{1 + \mu(z)} \right) dz. \quad (10)$$

В выражении (10) первый член относится к классической теории, второй член учитывает размерно зависимый параметр  $l$  согласно модифицированной моментной теории Янга [16]. Уравнения (5)–(10) приведены к безразмерному виду с использованием параметров (11). Черточки над безразмерными параметрами в уравнениях (5)–(10) и далее опущены.

$$\bar{w} = \frac{w}{h} \bar{q} = \frac{a^2 b^2}{E h^4} q, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(z)}{E_m}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{a}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{b}, \quad \bar{l} = \frac{l}{h}. \quad (11)$$

## 2. Метод вариационных итераций

Рассмотрим использование метода вариационных итераций на примере системы нелинейных дифференциальных уравнений в операторном виде

$$L_i[\varphi_1(\xi, \eta), \dots, \varphi_m(\xi, \eta)] = f_i(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Решение МВИ для косоугольных пластин представляется в виде суммы произведения функций для МВИ в высших приближениях  $\varphi_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N T_{i,j}(\xi) P_{i,j}(\eta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Применение МВИ подробно описано в работах [1–5]. Показано, что МВИ позволяет минимизировать время расчета при высокой точности вычислений [1–5].

### 2.1. Сравнительный анализ решений

Таблица 1 / Table 1

Сопоставление решений квадратной ( $\lambda = 1$ ) полноразмерной ( $l = 0$ ) пластинки, защемленной по контуру (9)  
Comparison of solutions of a square ( $\lambda = 1$ ) full-size ( $l = 0$ ) plate clamped along the contour (9)

Методы	$w(0.5; 0.5)$	Погрешность, %
Yamaki [18]	1.25	0.79
Wang [19]	1.23	2.38
МКЭ [20]	1.23	2.38
МВИ 1 прибл. ( $n = 49$ )	1.26	0.00

Проведем сравнительный анализ известных решений, имеющихся в литературе. Решения  $w(0.5; 0.5)$  для защемления по контуру пластин (9) при  $q = 150$ ,  $\lambda = 1$ ,  $l = 0$ ,  $\varphi = 0$  сопоставляются с решениями, полученными методами Галеркина [18, 19] и конечных элементов [20].

Из данных, представленных в табл. 1, следует, что результаты, полученные МВИ, обладают высокой точностью и отличаются от [18–20] менее чем на 3%.



### 3. Исследование ПФГМ размерно зависимых косоугольных пластин

Геометрия косоугольных пластин существенно влияет на ее напряженно-деформированное состояние и несущую способность. Исследуем влияние угла наклона  $\varphi$  для размерно зависимой на изгибание функционально-градиентной пористой косоугольной пластины У-ПФГМ. На рассматриваемые пластины действует равномерная поперечная нагрузка  $q$ . На рис. 2 приведено сопоставление решений  $q[w(0.5; 0.5)]$  для макроразмерных и микропластин при  $l = 0.4$ , а также изображена поверхность прогибов пластины  $w(\xi, \eta)$  при  $\varphi = 25^\circ$ ,  $l = 0.5$ ,  $q = 200$ .

На рис. 3 изображены графики зависимости максимального прогиба в зависимости от угла наклона  $\varphi$  для трех типов распределения пор: У-ПФГМ, Х-ПФГМ, О-ПФГМ для макро- и наноразмерных пластин. Решения получены при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q = 150$  для шарнирно опертый по контуру пластины (8). На рис. 3 также изображены поверхности  $w(\xi, \eta)$  при  $\varphi = 45^\circ$ ,  $l = 0.5$ ,  $q = 150$ .

Таким образом, увеличение угла наклона косоугольной пластины приводит к уменьшению величины прогиба  $w(\xi, \eta)$ . Зависимость функции  $w(\xi, \eta)$  от угла  $\varphi$  нелинейная (см. рис. 3). Увеличение параметра  $l$  увеличивает несущую способность косоугольных пластин.

Пористость материала является важным фактором при анализе напряженно-деформированного состояния косоугольных пластин. Отметим, что концентрацией напряжений вблизи пустот можно пренебречь ввиду их малого размера.

Исследуем влияние параметра пористости  $\Gamma$  на изгибание функционально-градиентной пористой косоугольной пластины У-ПФГМ.

На рис. 4 приведены решения  $q[w(0.5; 0.5)]$  косоугольных пластин У-ПФГМ для  $p = 1$ ,  $\lambda = 1$  и поверхность  $w(\xi, \eta)$  при  $\varphi = 15^\circ$ ,  $l = 0$ ,  $q = 250$  для шарнирного опирания (9). Цвет кривых указан на рис. 4 в соответствии с параметром пористости  $\Gamma$ .

Параметр пористости  $\Gamma$  определяет объем пор в материале пластинки. Значение параметра пористости оказывает существенное влияние на несущую способность косоугольных пластин. В частности, рост этого параметра способствует снижению величины прогиба для всех видов пористой структуры. Например, для косоугольных пластин с распределением пор типа У-ПФГМ при изменении коэффициента  $\Gamma$  от 0 до 0.4 прогиб возрастает

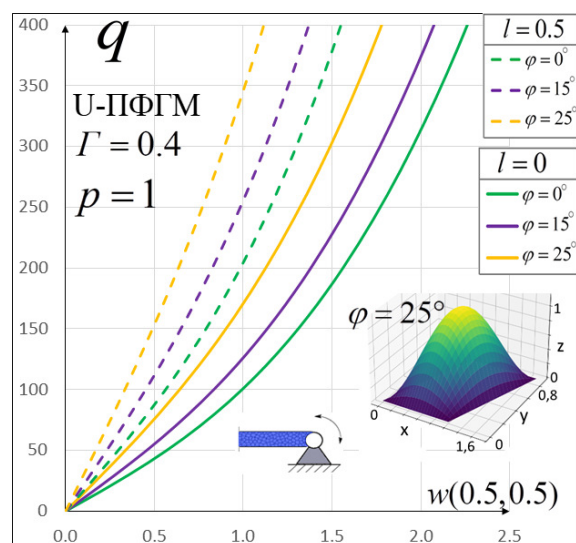


Рис. 2. Зависимость  $q[w(0.5, 0.5)]$  косоугольных пластин У-ПФГМ при  $p = 0$ ,  $\Gamma = 0.4$  макроразмерных ( $l = 0$ ) и микропластин ( $l = 0.5$ ) для граничных условий (8) (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of  $q[w(0.5, 0.5)]$  of oblique U-PFGM plates at  $p = 0$ ,  $\Gamma = 0.4$  of macro-sized ( $l = 0$ ) and micro-plates ( $l = 0.5$ ) for boundary conditions (8) (color online)

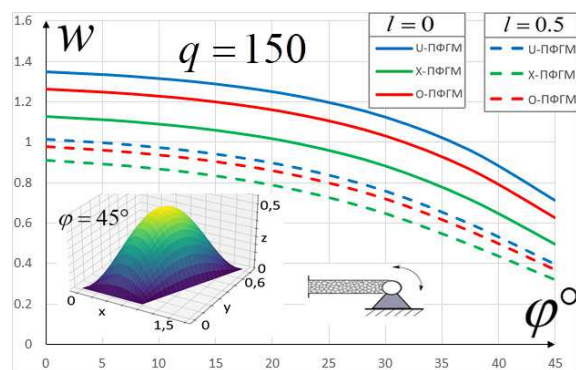


Рис. 3. Сопоставление распределения пористости пластины (цвет онлайн)

Fig. 3. Comparison of the plate's porosity distribution (color online)

на 18–25%, тогда как для микропластин (при  $l = 0.4$ ) увеличение составляет лишь 10%. Учет размерных эффектов также существенно изменяет НДС, приводя к уменьшению прогиба косоугольных пластин на 40–50%.

Соотношение материалов в композите может существенно влиять на их несущую способность. Для анализа данного эффекта исследуем влияние функционально-градиентного параметра материала  $p$  на изгиб ПФГМ косоугольных пластин с распределением пор U-ПФГМ (1). Приведены решения  $q[w(0.5; 0.5)]$  для  $l = 0, 0.4$  (рис. 5).

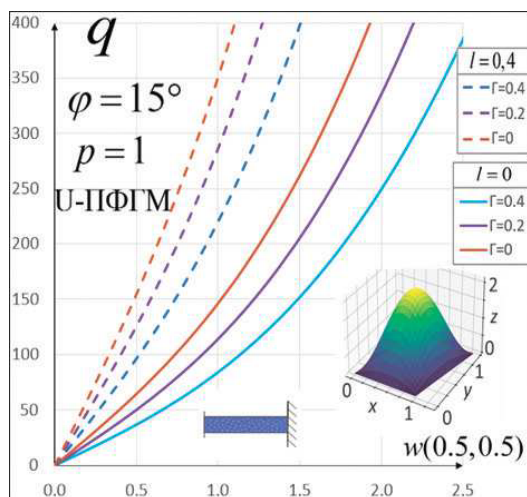


Рис. 4. Зависимость  $q[w(0.5, 0.5)]$  косоугольных пластин при  $\Gamma = 0, 0.2, 0.4$ ,  $\varphi = 15^\circ$  для граничных условий (8) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of  $q[w(0.5, 0.5)]$  on oblique plates at  $\Gamma = 0, 0.2, 0.4$ ,  $\varphi = 15^\circ$  for boundary conditions (8) (color online)

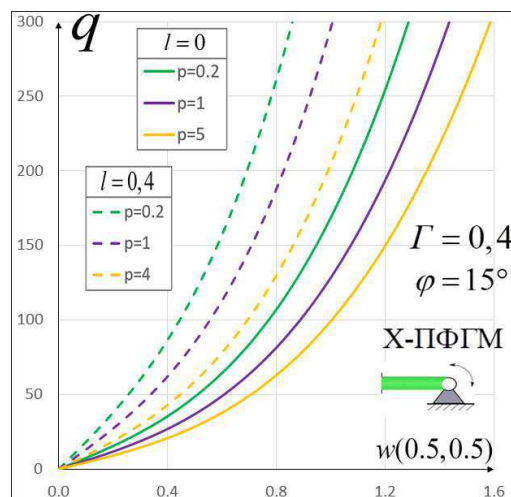


Рис. 5. Зависимость  $q[w(0.5, 0.5)]$  косоугольных пластин при  $\varphi = 15^\circ$ ,  $\lambda = 1$ ,  $p = 0.25, 1, 4$  для граничных условий (8) (цвет онлайн)

Fig. 5. Dependence  $q[w(0.5, 0.5)]$  of oblique plates at  $\varphi = 15^\circ$ ,  $\lambda = 1$ ,  $p = 0.25, 1, 4$  for boundary conditions (8) (color online)

Параметр  $p$  влияет на объемные доли керамики и металла в материале косоугольных пластин. Использование рассматриваемых функционально-градиентных материалов позволяет сочетать в себе особенности гибкости металлических пластин и прочности керамики. С ростом параметра  $p$  увеличивается отношение объема металла к керамике и приводит к значительному росту несущей способности косоугольных пластин для  $l = 0, 0.4$ .

## Заключение

Получена математическая модель косоугольных ПФГМ пластин по модифицированной моментной теории упругости и нелинейности Т. фон Кармана.

Метод вариационных итераций — расширенный метод Канторовича — применяется для расчета указанного класса задач. Показана его высокая точность, позволяющая получать практически точные решения.

Впервые в геометрически нелинейной постановке исследуется напряженно-деформированное состояние пористых функционально-градиентных размерно зависимых косоугольных пластин.

Увеличение объемной доли керамики в функционально-градиентных материалах позволяет существенно увеличить несущую способность косоугольных пластин. Косоугольные пластины с типом пор X (см. (2)) имеют наименьший прогиб по сравнению с порами U (см. (1)), O (см. (3)).

Величина угла наклона существенно влияет на несущую способность ПФГМ косоугольных пластин.



## Список литературы

1. *Awrejcewicz J., Krysko jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A.* Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. Vol. 146. Art. 104162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>
2. *Krysko jr V. A., Awrejcewicz J., Kalutsky L. A., Krysko V. A.* Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates // Computers and Mathematics with Applications. 2023. Vol. 133. P. 61–84. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>
3. *Крысько А. В., Калуцкий Л. А., Захарова А. А., Крысько В. А.* Математическое моделирование пористых геометрически нелинейных металлических нанопластин с учетом влажности // Известия Томского политехнического университета. 2023. Т. 334, вып. 9. С. 36–48. DOI: <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/9/4210>, EDN: WQMCIR
4. *Krysko A. V., Kalutsky L. A., Krysko V. A.* Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods // Thin-Walled Structures. 2024. Vol. 196. Art. 111512. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>
5. *Куриченко В. Ф., Крысько В. А.* Метод вариационных итераций в теории пластин и оболочек и его обоснование // Прикладная механика. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 71–76.
6. *Hassan A. H. A., Kurgan N.* Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method // Engineering Science and Technology, an International Journal. 2020. Vol. 23, iss. 4. P. 788–800. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2020.03.009>
7. *Hassan A. H. A., Kurgan N.* Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method // Heliyon. 2020. Vol. 6, iss. 6. P. e04236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04236>
8. *Joodaky A., Joodaky I.* A semi-analytical study on static behavior of thin skew plates on Winkler and Pasternak foundations // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 100. P. 322–327. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.025>
9. *Kargarnovin M. H., Joodaky A.* Bending analysis of thin skew plates using extended Kantorovich method // Engineering Systems Design and Analysis. 2010. Art. 24138. P. 39–44. DOI: <https://doi.org/10.1115/ESDA2010-24138>
10. *Topping B. H. V., Montero G., Montenegro R.* Bending analysis of curve-sided quadrilateral thin plates using the extended Kantorovich method // Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology / eds. B. H. V. Topping, G. Montero, R. Montenegro. Stirlingshire, UK : Civil-Comp Press, 2006. Art. 159. DOI: <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>
11. *Wankhade R. L.* Geometric nonlinear analysis of skew plates using finite element method // International Journal of Advanced Engineering Technology. 2011. Vol. 2, iss. 2. P. 154–163.
12. *Mishra B. B., Kumar A., Samui P., Roshni T.* Buckling of laminated composite skew plate using FEM and machine learning methods // Engineering Computations. 2021. Vol. 38, iss. 1. P. 501–528. DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-08-2019-0346>
13. *Alwar R. S., Rao N. R.* Nonlinear analysis of orthotropic skew plates // AIAA Journal. 1973. Vol. 11, iss. 4. P. 495–498. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6777>
14. *Kim C. K., Hwang M. H.* Non-linear analysis of skew thin plate by finite difference method // Journal of Mechanical Science and Technology. 2012. Vol. 26. P. 1127–1132. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-012-0226-9>
15. *Wang X., Yuan Z.* Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 56. P. 83–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.11.031>
16. *Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P.* Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
17. *Fan F., Xu Y., Sahmani S., Safaei B.* Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 372. Art. 113400. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113400>





18. Yamaki N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates // ZAMM. Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1961. Vol. 41, iss. 12. P. 501–510. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19610411204>
19. Wang M., Huang X., Wang X., Qiu X. An approximate solution to the finite deformation of an elastic rectangular plate under static and dynamic transverse loadings // International Journal of Impact Engineering. 2021. Vol. 155. Art. 103916. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2021.103916>
20. Wang M., Huang X., Qiu X. The finite deformation approximate solution and pressure–impulse diagram of an elastic–brittle rectangular glass plate under pressure loading // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 182, pt. A. Art. 110168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110168>

## References

1. Awrejcewicz J., Krysko jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, vol. 146, art. 104162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>
2. Krysko jr V. A., Awrejcewicz J., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates. *Computers and Mathematics with Applications*, 2023, vol. 133, pp. 61–84. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>
3. Krysko A. V., Kalutsky L. A., Zakharova A. A., Krysko V. A. Mathematical modeling of porous geometrically nonlinear metal nanoplates taking humidity into account. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2023, vol. 334, iss. 9, pp. 36–48 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/9/4210>, EDN: WQMCIR
4. Krysko A. V., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods. *Thin-Walled Structures*, 2024, vol. 196, art. 111512. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>
5. Kirichenko V. F., Krysko V. A. The method of variational iterations in plate and shell theory and its justification. *Applied Mechanics*, 1981, vol. 17, iss. 4, pp. 71–76 (in Russian).
6. Hassan A. H. A., Kurgan N. Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2020, vol. 23, iss. 4, pp. 788–800. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jestech.2020.03.009>
7. Hassan A. H. A., Kurgan N. Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method. *Heliyon*, 2020, vol. 6, iss. 6, pp. e04236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04236>
8. Joodaky A., Joodaky I. A semi-analytical study on static behavior of thin skew plates on Winkler and Pasternak foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, vol. 100, pp. 322–327. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.025>
9. Kargarnovin M. H., Joodaky A. Bending analysis of thin skew plates using extended Kantorovich method. *Engineering Systems Design and Analysis*, 2010, art. 24138, pp. 39–44. DOI: <https://doi.org/10.1115/ESDA2010-24138>
10. Topping B. H. V., Montero G., Montenegro R. Bending Analysis of Curve-Sided Quadrilateral Thin Plates Using the Extended Kantorovich Method. In: Topping B. H. V., Montero G., Montenegro R. (eds.) *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology*. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, 2006, art. 159. DOI: <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>
11. Wankhade R. L. Geometric nonlinear analysis of skew plates using finite element method. *International Journal of Advanced Engineering Technology*, 2011, vol. 2, iss. 2, pp. 154–163.
12. Mishra B. B., Kumar A., Samui P., Roshni T. Buckling of laminated composite skew plate using FEM and machine learning methods. *Engineering Computations*, 2021, vol. 38, iss. 1, pp. 501–528. DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-08-2019-0346>
13. Alwar R. S., Rao N. R. Nonlinear analysis of orthotropic skew plates. *AIAA Journal*, 1973, vol. 11, iss. 4, pp. 495–498. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6777>
14. Kim C. K., Hwang M. H. Non-linear analysis of skew thin plate by finite difference method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, vol. 26, pp. 1127–1132. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-012-0226-9>





15. Wang X., Yuan Z. Buckling analysis of isotropic skew plates under general in-plane loads by the modified differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 56, pp. 83–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.11.031>
16. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
17. Fan F., Xu Y., Sahmani S., Safaei B. Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 372, art. 113400. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113400>
18. Yamaki N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. *ZAMM. Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1961, vol. 41, iss. 12, pp. 501–510. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19610411204>
19. Wang M., Huang X., Wang X., Qiu X. An approximate solution to the finite deformation of an elastic rectangular plate under static and dynamic transverse loadings. *International Journal of Impact Engineering*, 2021, vol. 155, art. 103916. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2021.103916>
20. Wang M., Huang X., Qiu X. The finite deformation approximate solution and pressure–impulse diagram of an elastic–brittle rectangular glass plate under pressure loading. *Thin-Walled Structures*, 2023, vol. 182, pt. A, art. 110168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110168>

Поступила в редакцию / Received 05.06.2025

Принята к публикации / Accepted 20.07.2025

Опубликована / Published 28.11.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 534–545

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 534–545

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-534-545>

EDN: <https://elibrary.ru/PKGXTO>

Научная статья

УДК 534.2

## Расчет рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким телом произвольной формы на основе граничного интегрального уравнения Бертона – Миллера

Д. Р. Лепетков

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Россия, 300026, г. Тула, пр. Ленина, д. 125

**Лепетков Даниил Русланович**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, [Lepetckov@ya.ru](mailto:Lepetckov@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5474-1328>, SPIN: 9047-2173, AuthorID: 1246103

**Аннотация.** Рассматривается задача расчета рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким трехмерным телом. Предполагается, что поверхность тела задана неструктурированной полигональной сеткой (треугольным 3D-мешем), что важно для практических приложений. Развивается метод граничных элементов на основе регуляризованного интегрального уравнения Бертона – Миллера с параметром  $\alpha$ . Применение этого уравнения решает проблему неединственности решения. Несмотря на то, что данный подход изучался многими авторами, некоторые факты оставались неисследованными, в частности, регуляризация для неструктурированных сеток, обоснование метода коллокаций для регуляризованного уравнения Бертона – Миллера. В данной работе даны некоторые ответы на эти вопросы. Предложены регуляризованное уравнение Бертона – Миллера и его дискретная обоснованная версия на основе метода коллокаций. Это позволило разработать устойчивый численный метод, работающий для произвольных волновых чисел. В нем применяется интегрирование по ячейкам Вороного, оценка поверхностного градиента акустического потенциала по соседним вершинам. С целью валидации и тестирования численного метода, обоснования выбора параметра  $\alpha$  для случая шара сделан вывод аналитического решения напрямую из уравнения Бертона – Миллера и сферического разложения Джексона функции Грина. Приведены результаты программной реализации.

**Ключевые слова:** акустический потенциал, плоская звуковая волна, абсолютно жесткое тело, метод граничных элементов, уравнение Гельмгольца, функция Грина, граничное интегральное уравнение Бертона – Миллера, треугольный 3D-меш

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ, соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024, тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике». Автор благодарит Д. В. Горбачева и С. А. Скобельцына за полезные замечания.

**Для цитирования:** Лепетков Д. Р. Расчет рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким телом произвольной формы на основе граничного интегрального уравнения Бертона – Миллера // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 534–545. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-534-545>, EDN: PKGXTO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Calculation of scattering of a plane sound wave by a hard body of arbitrary shape based on the Burton – Miller boundary integral equation

D. R. Lepetkov

Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, 125 Lenin Ave., Tula 300026, Russia

Daniil R. Lepetkov, Lepetkov@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5474-1328>, SPIN: 9047-2173, AuthorID: 1246103

**Abstract.** The problem of calculating the scattering of a plane sound wave by a hard three-dimensional body is considered. It is assumed that the surface of the body is given by an unstructured triangular mesh, which is important for practical applications. We develop the boundary element method based on the regularized Burton – Miller integral equation with parameter  $\alpha$ . The use of this equation solves the problem of non-uniqueness of the solution. Despite the fact that this approach has been studied by many authors, some aspects remained unexplored, in particular, the regularization for unstructured meshes and justification for the collocation method for regularized Burton – Miller equation. We provide some answers to these questions. The regularized Burton – Miller equation and its discrete justified version based on the collocation method are proposed. This made it possible to develop a robust numerical method that works for arbitrary wavenumbers. The method involves integration over Voronoi cells and estimation of the surface gradient of the acoustic potential using adjacent vertices. In order to validate and test the numerical method and justify the choice of the parameter  $\alpha$  for the case of a sphere, we derive an analytical solution directly from the Burton – Miller equation and the Jackson spherical expansion of the Green's function. The results of the software implementation are presented.

**Keywords:** acoustic potential, plane sound wave, hard body, boundary element method, Helmholtz equation, Green's function, Burton – Miller boundary integral equation, triangular 3D-mesh

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education of the Russian Federation agreement No. 073-00033-24-01 dated 02/09/2024 scientific research topic “Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics”. The author thanks D. V. Gorbachev and S. A. Skobeltsyn for their useful comments.

**For citation:** Lepetkov D. R. Calculation of scattering of a plane sound wave by a hard body of arbitrary shape based on the Burton – Miller boundary integral equation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 534–545 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-534-545>, EDN: PKGXT0

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая односвязная область (тело),  $S = \partial D$  — граница  $D$  (поверхность),  $n = n_x \in \mathbb{S}^2$  — внешняя нормаль в точке  $x \in S$ ,  $\Psi_i(x) = Ae^{ikxd}$  — потенциал падающей на  $D$  плоской звуковой волны,  $k > 0$  — волновое число,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $d \in \mathbb{S}^2$  — направление,  $xd = x_1d_1 + x_2d_2 + x_3d_3$ ,  $(x)_n = x - (xn)n$ ,  $\partial_n = \nabla n$ ,  $\nabla_S = (\nabla)_n$  — поверхностный градиент,  $f'$  для функций обозначает производную,  $c$  — положительные константы,  $A \approx B$  значит, что  $A$  и  $B$  в пределе равны.

Требуется рассчитать акустический потенциал рассеянной волны  $\Psi_s(x)$  в дальней зоне  $x \in D^c$ . Рассмотрим случай абсолютно жесткого тела с преимущественно гладкой поверхностью (см. [1, гл. 2]). Примеры геометрии сцены приведены в разд. 3.

Данная задача хорошо изучена в теоретической акустике (см., например, [2–5]). Однако ее аналитическое решение известно только для тел канонической формы, задающихся фиксированием одной из координат в некоторой ортогональной системе координат, где разделяются переменные в уравнении Гельмгольца (например, плоскость, сфера или эллипсоид,



бесконечный круговой или эллиптический цилиндр). Для практических приложений важно рассмотреть произвольные тела. В этом случае предложены разные численные методы. Рассмотрим метод граничных элементов (МГЭ) на основе регуляризованной версии граничного интегрального уравнения (ГИУ) Бертона – Миллера с параметром  $\alpha$  (см. [1, 5–9]). Такой выбор связан с тем, что ГИУ в стандартной постановке ( $\alpha = 0$ ) имеет неединственное решение для волновых чисел  $k$ , отвечающих собственным значениям внутренней задачи Дирихле. Это приводит к численной неустойчивости.

МГЭ широко применяется при теоретическом и практическом исследовании задач волновой механики. В ряде работ этот метод используется для приближенного решения задач рассеяния звуковых волн на телах неканонической формы, задаваемых аналитически [2, 10, 11]. Однако в инженерных приложениях чаще всего встречаются либо CAD-поверхности (В-сплайны) [5], либо полигональные сетки (3D-меш). Рассмотрим случай неструктурированного треугольного меша. Например, он может быть получен 3D-сканированием объекта или триангуляцией CAD-модели.

Основной вклад работы в теорию МГЭ состоит в предложении 1 и его дискретной версии 3, полученной обоснованным методом коллокаций (предложение 4). На основе предложения 3 для неструктурированных сеток разработан устойчивый численный метод, включающий применение дискретного градиента (разд. 4). Его преимуществом, по сравнению, например, с [2], является учет произвольных  $k$  и сложных поверхностей. Для случая шара доказано предложение 2, нужное для валидации численного метода и аргументации в пользу выбора параметра  $\alpha = i/k$  (замечание 1).

## 1. Основные уравнения метода граничных элементов

Пусть  $\Psi = \Psi_i + \Psi_s$  — суммарный потенциал. Акустические потенциалы удовлетворяют уравнению Гельмгольца. Для потенциала  $\Psi_s$  справедливо условие излучения Зоммерфельда для уходящих на бесконечность волн. На границе абсолютно жесткого тела  $D$  выполняется условие Неймана  $\partial_n \Psi(x) = 0$ . Потенциал  $\Psi_s(x)$  интересен в дальней зоне, поэтому для уравнения Гельмгольца берется внешняя задача  $x \in D^c$ .

Из результатов [1, 4–8, 12, 13] вытекают следующие факты, в которых  $G_k(x', x) = (4\pi r)^{-1} e^{ikr}$ ,  $r = |x' - x|$ , — функция Грина для уравнения Гельмгольца с условием излучения для уходящих волн,  $G = G_k$ ,  $n' = n_{x'}$ ,  $dx' = dS(x')$ .

1. Во внешности тела  $D$  суммарный потенциал  $\Psi$  гладкий и

$$\Psi_s(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx', \quad x \in D^c. \quad (1)$$

2. На поверхности  $S$  имеем ГИУ в стандартной постановке

$$C(x) \Psi(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx' + \Psi_i(x), \quad x \in S, \quad (2)$$

где  $C(x)$  — геометрический коэффициент, равный  $1/2$  в точках гладкости. В этих точках  $\partial_{n'} G = O(r^{-1})$ , поэтому интеграл в (2) слабо сингулярный.

3. Если  $k^2$  является собственным значением внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, то решение ГИУ (2) неединственно. Для решения этой проблемы вместо (2) применяется комбинированное уравнение Бертона – Миллера

$$C(x) \Psi(x) = \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx' + \Psi_i(x) + \alpha \left( \int_S \partial_{n,n'}^2 G(x', x) \Psi(x') dx' + \partial_n \Psi_i(x) \right), \quad (3)$$

получаемое суммированием (2) и продифференцированной правой части (2). В точках гладкости  $\partial_{n,n'}^2 G = O(r^{-2})$ , поэтому второй интеграл в (3) гиперсингулярный. При  $\text{Im } \alpha \neq 0$  ГИУ (3) имеет единственное решение класса  $C^{1,\beta}(S)$ ,  $\beta \in (0, 1)$  (см. определение (21)). Обычно полагают  $\alpha = i/k$  (см. замечание 1).



4. Для решения проблемы сингулярности берутся следующие тождества:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'} G_0(x', x) dx' &= -C(x), \quad \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x', x) dx' = 0, \\ \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x', x)(x' - x) dx' &= \int_S \partial_n G_0(x', x) n' dx' - C(x)n, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C(x) = 1$ ,  $x \in D^c$ ,  $C(x) = 0$ ,  $x \in D \setminus S$ ,  $n \in \mathbb{S}^2$  — произвольный вектор при  $x \notin S$ . С учетом (4) применяется следующая регуляризация сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') dx' &= A_1 \Psi(x) - C(x) \Psi(x), \quad \int_S \partial_{n,n'}^2 G(x', x) \Psi(x') dx' = A_2 \Psi(x), \\ A_1 \Psi(x) &= \int_S [\partial_{n'} G(x', x) \Psi(x') - \partial_{n'} G_0(x', x) \Psi(x)] dx', \\ A_2 \Psi(x) &= \int_S [\partial_{n,n'}^2 G(x', x) \Psi(x') - \partial_{n,n'}^2 G_0(x', x) L(x', x)] dx' + \int_S \partial_n G_0(x', x) \nabla_S \Psi(x) n' dx', \\ L(x', x) &= \Psi(x) + \nabla_S \Psi(x)(x' - x) = \Psi(x) + \nabla_S \Psi(x)(x' - x)_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Из фактов 1–4 вытекает следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть  $A = A_0 - A_1 - \alpha A_2$ ,  $B = I + \alpha \partial_n$ , где  $A_0 \Psi(x) = 2C(x) \Psi(x)$ . Тогда справедливо регуляризованное ГИУ Бертона – Миллера

$$A \Psi(x) = B \Psi_1(x), \quad x \in S. \quad (8)$$

При  $\text{Im } \alpha \neq 0$  оно имеет единственное решение  $\Psi \in C^{1,\beta}(S)$ .

Уравнение (8) встречается в немного другой форме и без обсуждения гладкости решения в работе [8]. Идея использовать (d) и линейную функцию  $L$  взята из [5]. В разд. 3 она адаптируется для треугольных мешей.

## 2. Вывод аналитического решения для шара из ГИУ Бертона – Миллера

Для обоснования выбора  $\alpha$ , валидации и тестирования численного решения нужно рассмотреть пример, где известно аналитическое решение. Удобно взять единичный шар,  $A = 1$ ,  $d = (1, 0, 0)$ . Тогда  $S = \mathbb{S}^2$  — единичная сфера,  $C(x) \equiv 1/2$ .

Пусть  $(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi)$  — сферические координаты  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $r = |x|$ .

Имеем [3]

$$\Psi_1(x) = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad \gamma_l = (2l+1)i^l, \quad (9)$$

где  $j_l$  — сферические функции Бесселя,  $P_l$  — многочлены Лежандра. В численных расчетах сходящийся ряд (9) применяется с конечным числом слагаемых. Тогда по теореме Парсеваля приближенное решение ГИУ (3) также будет содержать конечное число слагаемых. Поэтому далее считаем, что это верно для всех рядов Фурье – Лежандра. Тогда их можно свободно дифференцировать, в частности,

$$\partial_n \Psi_1(x) = k \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j'_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (10)$$

Для внешней задачи в силу условия излучения для уходящих волн имеем

$$\Psi_s(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l(kr) P_l(\cos \theta),$$





где  $h_l$  — сферические функции Ганкеля первого рода,  $A_l$  — неизвестные коэффициенты. В итоге суммарный потенциал равен

$$\Psi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(kr)P_l(\cos \theta), \quad B_l(z) = \gamma_l j_l(z) + A_l h_l(z). \quad (11)$$

Из условия Неймана для  $r = 1$  и произвольного  $\theta$  находим

$$k \sum_{l=0}^{\infty} B'_l(k)P_l(\cos \theta) = 0, \quad B'_l(k) = \gamma_l j'_l(k) + A_l h'_l(k) = 0, \quad A_l = -\frac{\gamma_l j'_l(k)}{h'_l(k)},$$

где  $h'_l(k) \neq 0$ . Получили известное выражение для коэффициентов  $A_l$  потенциала  $\Psi_s$  (см., например, [5, разд. 7.2]). Соответственно,  $B_l(z) = \frac{\gamma_l}{h'_l(k)} [j_l(z)h'_l(k) - j'_l(k)h_l(z)]$ . Если воспользоваться вронскианом  $j_l(z)h'_l(z) - j'_l(z)h_l(z) = \frac{i}{z^2}$ , получим

$$B_l(k) = \frac{i\gamma_l}{k^2 h'_l(k)}. \quad (12)$$

Выведем теперь решение (12) из ГИУ Бертона–Миллера (3).

**Предложение 2.** Для всех  $l = 0, 1, 2, \dots$  справедливо равенство

$$-ik^2 h'_l(k)[j_l(k) + \alpha k j'_l(k)]B_l(k) = \gamma_l [j_l(k) + \alpha k j'_l(k)]. \quad (13)$$

**Доказательство.** Воспользуемся сферическим разложением Джексона [14]

$$G(x', x) = ik \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j_l(k \min(r, r')) h_l(k \max(r, r')) P_l(\cos \gamma),$$

где  $(r' \cos \theta', r' \cos \varphi' \sin \theta', r' \sin \varphi' \sin \theta')$  — сферические координаты  $x'$ ,  $xx' = rr' \cos \gamma$ .

Производные функции Грина вычисляем в смысле главного значения. Тогда

$$\partial_{n'} G(x', x) = \frac{ik^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} [j_l(k)h'_l(k) + j'_l(k)h_l(k)]P_l(\cos \gamma), \quad (14)$$

$$\partial_{n,n'}^2 G(x', x) = ik^3 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j'_l(k)h'_l(k)P_l(\cos \gamma), \quad x, x' \in \mathbb{S}^2. \quad (15)$$

Подставим (9), (10), (11), (14), (15) в ГИУ (3) и воспользуемся формулой

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} P_l(x'd)P_l(x'x)dx' = P_l(xd)\delta_{ll'}, \quad x, d \in \mathbb{S}^2.$$

Тогда для всех  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} B_l(k)P_l(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{ik^2}{2} [j_l(k)h'_l(k) + j'_l(k)h_l(k)]B_l(k) + \gamma_l j_l(k) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha [ik^3 j'_l(k)h'_l(k)B_l(k) + k\gamma_l j'_l(k)] \right\} P_l(\cos \theta), \end{aligned}$$

откуда с учетом вронскиана

$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{ik^2}{2} \left( 2j_l(k)h'_l(k) - \frac{i}{k^2} \right) - \alpha ik^3 j'_l(k)h'_l(k) \right] B_l(k) = \gamma_l [j_l(k) + \alpha k j'_l(k)]$$

после упрощений получаем искомое равенство (13).  $\square$



**Замечание 1.** Известно, что  $j_l(k) + \alpha k j'_l(k) \neq 0$  при  $\text{Im } \alpha \neq 0$ . Тогда (13) влечет (12). Если  $\alpha = 0$ , что отвечает стандартной постановке ГИУ, то для  $k$ , совпадающих с нулями функции Бесселя  $j_l(k)$  (равносильно,  $k^2$  — собственное значение задачи Дирихле в шаре) значения  $B_l(k)$  в (13) не определены, что влечет неединственность решения и численную неустойчивость.

Из (13) и определения оператора  $A$  следует, что в базисе из многочленов Лежандра  $A$  является диагональным с элементами  $a_l = -ik^2 h'_l(k) [j_l(k) + \alpha k j'_l(k)]$ , поэтому его число обусловленности  $\kappa = \frac{\max_l |a_l|}{\min_l |a_l|}$ . Если положить  $\alpha k = ic$  (можно ограничиться  $c > 0$ ) и построить гистограмму значений  $c_{\min} = \arg\min_c \kappa(k, c)$ , то увидим пик при  $c_{\min} \approx 1$ . Это обосновывает выбор  $\alpha = i/k$  (см. также [4, 12]).

### 3. Описание метода коллокаций для треугольного меша

Приведем дискретную версию предложения 1, нужную для численной реализации. Для этого, отталкиваясь от задания поверхности тела, аппроксимируем ГИУ (8).

**Геометрия поверхности.** Пусть поверхность тела  $D$  представлена неструктурированным равномерным невырожденным водонепроницаемым треугольным мешом  $S$ , состоящим из вершин  $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$  с внешними нормальными  $\{n_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{S}^2$  (примеры см. на рис. 1). Ребра приблизительно равны и их средняя длина  $h \approx 0$ .

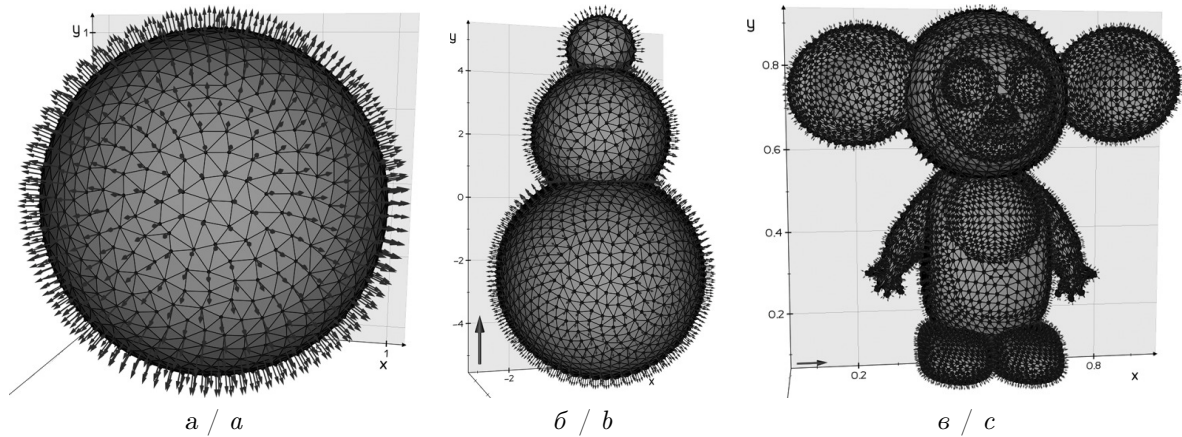


Рис. 1. Примеры мешей (показаны вершины, нормали и ребра): а — сфера Фибоначчи; б — «Снеговик» (объединение трех сфер); в — «Чебурашка»

Fig. 1. Examples of meshes (vertices, normals, and edges are shown): a is the Fibonacci sphere; b is “Snowman” (union of three spheres); c is “Cheburashka”

**Дискретизация интегралов и функций.** Пусть  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $\sum_i = \sum_{i=1}^N$ . Точки  $x, x'$  ассоциируем с вершинами  $x_i, x_j$ , нормали  $n, n'$  — с нормальными  $n_i, n_j$ . Меш  $S$  разбивается на ячейки Вороного  $S_i$  с центрами в  $x_i$  и площадями  $w_i = |S_i|$ ,  $\sum_i w_i = |S|$ . Для равномерного меша  $\max_{x \in S_i} |x - x_i| \asymp h$ ,  $w_i \asymp h^2$ .

Функции на меше аппроксимируются кусочно-линейными функциями и

$$\int_S f(x) dx = \sum_i \int_{S_i} f(x) dx \approx \sum_i w_i f(x_i). \quad (16)$$

Точность квадратурной формулы (16) определяется погрешностью кусочно-линейной аппроксимации  $f$ . Действительно, если  $T$  — треугольная грань с барицентром  $x_T$  и  $f$  — линейная на  $T$ , то  $\int_T f(x) dx = |T|f(x_T)$ . Так как ячейка  $S_i$  разбивается на соизмеримые треугольники  $T$  с общей вершиной  $x_i$ , то  $\sum_T |T| x_T \approx w_i x_i$  и

$$\int_{S_i} f(x) dx = \sum_T \int_T f(x) dx = \sum_T |T| f(x_T) = f\left(\sum_T |T| x_T\right) \approx w_i f(x_i).$$



Интегралы вида  $\int_S f(x', x_i) dx'$  аппроксимируем  $\sum_j w_j f(x_j, x_i)$ . Если  $f$  имеет слабую сингулярность  $O(|x' - x_i|^{-\gamma})$ ,  $x' \in S_i$ ,  $\gamma \in [0, 2)$ , то учтем, что по [1, гл. 2]

$$\int_{S_i} f(x', x_i) dx' = O(|x' - x_i|^{2-\gamma}) = O(h^{2-\gamma}). \quad (17)$$

Напомним, что  $\Psi_i(x) = e^{k_1 x d}$ ,  $G(x', x) = (4\pi)^{-1} e^{k_1 r t}$ , где  $k_1 = ik$ ,  $r = |y|$ ,  $y = x' - x$ ,  $t = r^{-1}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \partial_n \Psi_i &= k_1 e^{k_1 x d} dn, \quad \partial_{n'} G = G(k_1 - t) \partial_{n'} r, \quad \partial_n G = G(k_1 - t) \partial_n r, \\ \partial_{n,n'} G &= k_1^2 G \partial_{n'} r \partial_n r - G(k_1 - t) t (n' n + 3 \partial_{n'} r \partial_n r), \quad \partial_{n'} r = t y n', \quad \partial_n r = -t y n. \end{aligned}$$

Положим  $\Psi_i^{(i)} = \Psi_i(x_i)$ ,  $(\partial_n \Psi_i)^{(i)} = \partial_{n_i} \Psi_i(x_i)$ ,  $C^{(i)} = C(x_i)$ ,  $(\partial_n G_k)^{(j,i)} = \partial_{n_i} G_k(x_j, x_i)$ ,  $(\partial_{n'} G_k)^{(j,i)} = \partial_{n_j} G_k(x_j, x_i)$ ,  $(\partial_{n,n'}^2 G_k)^{(j,i)} = \partial_{n_i, n_j}^2 G_k(x_j, x_i)$  и приближенно  $\Psi^{(i)} \approx \Psi(x_i)$ ,  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} \approx \nabla_S \Psi(x_i)$ ,  $L^{(j,i)} \approx L(x_j, x_i)$ . В силу (17) можно положить  $(\partial_{n'} G_k)^{(i,i)} = 0$  и аналогично в остальных случаях.

**Оценка поверхностного градиента.** В соответствии с (7) для  $x' \approx x_i$

$$\nabla_S \Psi(x_i)(x' - x_i)_{n_i} = L(x', x_i) - \Psi(x_i) \approx \Psi(x') - \Psi(x_i).$$

Для оценки  $\nabla_S \Psi(x_i)$  используем соседние с  $x_i$  вершины  $x_{i'}$  из 1-ринга  $R_i$ .

Пусть  $U^{(i)} = ((x_{i'} - x_i)_{n_i})_{i' \in R_i}$  — матрица размера  $|R_i| \times 3$ ,  $F^{(i)} = (\Psi^{(i')} - \Psi^{(i)})_{i' \in R_i}$  — вектор длины  $|R_i|$ . Тогда для дискретного градиента  $(\nabla_S \Psi)^{(i)}$  получаем переопределенную систему линейных уравнений  $U^{(i)}(\nabla_S \Psi)^{(i)} = F^{(i)}$ , которая решается с помощью псевдообратной матрицы  $(U^{(i)})^+$  размером  $3 \times |R_i|$ :  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} = (U^{(i)})^+ F^{(i)}$ . Матрица  $(U^{(i)})^+$  вычисляется быстро, так как  $|R_i| \approx 6$ . Ее колонки обозначим  $(U^{(i)})_{i'}^+$ .

**Система линейных уравнений.** В соответствии с предложением 1 имеем  $A\Psi(x) = B\Psi_i(x)$ ,  $x \in S$ , где  $A = A_0 - A_1 - \alpha A_2$ ,  $B = I + \alpha \partial_n$ . Найдем дискретные варианты этих операторов. В случае  $A_0$  и  $B$  имеем

$$(A_0 \Psi)^{(i)} = 2C^{(i)} \Psi^{(i)}, \quad (B \Psi_i)^{(i)} = \Psi_i^{(i)} + \alpha (\partial_n \Psi_i)^{(i)}. \quad (18)$$

С учетом (5), (6) получаем

$$\begin{aligned} (A_1 \Psi)^{(i)} &= \sum_j w_j (\partial_{n'} G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \Psi^{(i)} \sum_j w_j (\partial_{n'} G_0)^{(j,i)}, \\ (A_2 \Psi)^{(i)} &= \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} L^{(j)} + \sum_j w_j (\partial_n G_0)^{(j,i)} (\nabla_S \Psi)^{(i)} n_j, \end{aligned}$$

где  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} = (U^{(i)})^+ (\Psi^{(i')} - \Psi^{(i)})_{i' \in R_i}$ . Из этой формулы следует, что

$$(\nabla_S \Psi)^{(i)} v = \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ v \Psi^{(i')} - \Psi^{(i)} \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ v, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

Если раскрыть  $L^{(j,i)} = \Psi^{(i)} + (\nabla_S \Psi)^{(i)}(x_j - x_i)$ , находим

$$\begin{aligned} (A_2 \Psi)^{(i)} &= \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \Psi^{(i)} \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} - \\ &- \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} \left( \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ (x_j - x_i) \Psi^{(i')} - \Psi^{(i)} \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ (x_j - x_i) \right) + \\ &+ \sum_j w_j (\partial_n G_0)^{(j,i)} \left( \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ n_j \Psi^{(i')} - \Psi^{(i)} \sum_{i'} (U^{(i)})_{i'}^+ n_j \right). \end{aligned}$$

Запишем данные формулы в следующий дискретный вариант предложения 1.



**Предложение 3.** Дискретный потенциал  $\Psi^{(i)}$  удовлетворяет системе линейных уравнений

$$(A^{(i,j)})(\Psi^{(j)}) = (B^{(i)}), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (19)$$

где  $B^{(i)} = (B\Psi_1)^{(i)}$  взят из (18), а  $i$ -я строка матрицы определяется из равенства

$$\begin{aligned} \sum_j A^{(i,j)} \Psi^{(j)} &= (A_0 \Psi)^{(i)} - (A_1 \Psi)^{(i)} - \alpha (A_2 \Psi)^{(i)} = \\ &= 2C^{(i)} \Psi^{(i)} - \sum_j w_j (\partial_{n'} G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} + \left( \sum_j w_j (\partial_{n'} G_0)^{(j,i)} \right) \Psi^{(i)} - \\ &\quad - \alpha \left[ \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G)^{(j,i)} \Psi^{(j)} - \left( \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} \right) \Psi^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i'} V_1^{(i,i')} \Psi^{(i')} + \left( \sum_{i'} V_1^{(i,i')} \right) \Psi^{(i)} + \sum_{i'} V_2^{(i,i')} \Psi^{(i')} - \left( \sum_{i'} V_2^{(i,i')} \right) \Psi^{(i)} \right], \\ V_l^{(i,i')} &= (U^{(i)})_{i'}^+ Q_l^{(i)}, \quad Q_1^{(i)} = \sum_j w_j (\partial_{n,n'}^2 G_0)^{(j,i)} (x_j - x_i), \quad Q_2^{(i)} = \sum_j w_j (\partial_n G_0)^{(j,i)} n_j. \end{aligned}$$

**Расчет акустического потенциала.** Решая систему (19), находим приближенные граничные значения потенциала  $\Psi^{(j)}$ , после чего дискретизируем (1) и приближенно записываем  $\Psi_s(x) \approx \sum_j w_j \partial_{n_j} G(x_j, x) \Psi^{(j)}$ ,  $x \in D^c$ ,  $|x| \gg 1$ .

**Сходимость дискретного решения.** Метод коллокаций для уравнения Гельмгольца обосновывается, например, в работе [15] с помощью теории Вайникко. Сделаем это для регуляризованного уравнения Бертона – Миллера (8) напрямую. Спроектировав меш на поверхность, теперь будем считать, что  $S = \partial D$ , ячейки  $S_i$  отвечают разбиению  $S$  на криволинейные многоугольники, параметр  $h \asymp N^{-1}$  характеризует размер множеств  $S_i$  и не зависит от разбиения,  $|x - x_i| = O(h)$  для  $x \in S_i$ . Для простоты пусть  $S$  гладкая (иначе ее и решение нужно разбить на гладкие куски). Тогда по [1, теорема 2.2] имеем  $|(x' - x)n'| = O(r^2)$ ,  $|n' - n| = O(r)$ ,  $\partial_{n'} r = O(r)$ ,

$$\partial_{n'} G(x', x) = O(r^{-1}), \quad \partial_{n,n'}^2 G(x', x) = O(r^{-2}). \quad (20)$$

Пусть  $C^{1,\beta}(S)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ , — пространство Гёльдера функций с нормой [1, гл. 2]

$$\|f\|_{1,\beta} = \|f\|_\infty + \|\nabla_S f\|_\infty + \sup_{x, x' \in S, x \neq x'} \frac{|\nabla_S f(x) - \nabla_S f(x')|}{|x - x'|^\beta}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|. \quad (21)$$

По [7, теорема 3.5] существует единственное решение  $\Psi \in C^{1,\beta}(S)$  уравнения Бертона – Миллера (3), а значит, и его регуляризованной версии (8). Интегралы в (8) слабо сингулярные, поэтому по [1, гл. 2] оператор  $A$  из предложения 1 компактный при действии из  $C^{1,\beta}(S)$  в пространство непрерывных функций  $C(S)$ . Обоснование метода коллокаций, по сути, заключается в доказательстве равномерной по  $i = 1, \dots, N$ ,  $x \in S_i$  сходимости в пространстве решения  $C^{1,\beta}(S)$  дискретных конечномерных операторов  $(A\Psi)^{(i)}$ ,  $(B\Psi_1)^{(i)}$  к  $A\Psi(x)$ ,  $B\Psi_1(x)$  при измельчении разбиения  $h \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) (см. также [1, теорема 1.10]).

**Предложение 4.** Пусть  $\Psi \in C^{1,\beta}(S)$ . Равномерно по  $x \in S_i$

$$A\Psi(x) = (A\Psi)^{(i)} + o(1), \quad B\Psi_1(x) = (B\Psi_1)^{(i)} + O(h), \quad h \rightarrow 0,$$

где константы в  $O$  не зависят от  $i$  и включают нормы функций.

**Доказательство.** Напомним, что  $A = A_0 - A_1 - \alpha A_2$ . Для гладкой поверхности  $A_0 = I$ , поэтому равномерная сходимость  $(A_0\Psi)^{(i)} = \Psi(x_i)$  к  $A_0\Psi(x)$  вытекает из

$$|\Psi(x) - \Psi(x_i)| \leq \|\nabla_S \Psi\|_\infty |x - x_i| \leq \|\Psi\|_{1,\beta} |x - x_i| = O(h) \quad (22)$$

(см. также [1, теорема 2.5]). Аналогично, так как  $B\Psi_i(x) = e^{k_1 x d}(1 + \alpha k_1 d n)$  гладкая функция,  $(B\Psi_i)^{(i)} = B\Psi_i(x_i)$ , то  $|B\Psi_i(x) - (B\Psi_i)^{(i)}| = O(h)$ .

Рассмотрим интегральные операторы  $A_1, A_2$  (5), (6). Из оценок (20), (22) и

$$\begin{aligned}\partial_{n'}(G - G_0)(x', x) &= O(1), \quad \partial_{n,n'}^2(G - G_0)(x', x) = O(1), \\ |\Psi(x') - L(x', x)| &= |\Psi(x') - \Psi(x) - \nabla_S \Psi(x)(x' - x)| = O(r^{1+\beta}), \\ |\nabla_S \Psi(x)n'| &= |(\nabla_S \Psi(x) - \nabla_S \Psi(x'))n'| = O(r^\beta)\end{aligned}$$

следует, что нужно исследовать на равномерную сходимость интеграл  $\int_S f(x', x) dx'$ , где в худшем случае  $f$  имеет сингулярность  $O(r^{\beta-1})$ . Достаточно изучить только этот случай. Положим  $f = r^{\beta-1}g$ , где  $g$  — равномерно непрерывная ограниченная функция. Интеграл сравнивается с суммой  $\sum_j w_j f(x_j, x_i)$ , где считаем  $f(x_i, x_i) = 0$ , так как  $\int_{S_i} f dx' = O(h^{1+\beta})$  по (17).

Пусть  $j \neq i$ ,  $x' \in S_j$ . Так как  $g(x', x) - g(x_j, x_i) = o(1)$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $i, j$ , то  $\int_{S_j} f(x', x) dx' = (g(x_j, x_i) + o(1)) \int_{S_j} r^{\beta-1} dx'$ .

Имеем

$$\left| \frac{1}{|x' - x|^{1-\beta}} - \frac{1}{|x_j - x_i|^{1-\beta}} \right| = \frac{||x_j - x_i|^{1-\beta} - |x' - x|^{1-\beta}|}{|x' - x|^{1-\beta}|x_j - x_i|^{1-\beta}} \leq \frac{|x_j - x_i - x' + x|^{1-\beta}}{|x' - x|^{1-\beta}|x_j - x_i|^{1-\beta}}.$$

Числитель последней дроби есть  $O(h^{1-\beta})$ . Так как  $|x_j - x_i| \geq c_0 h$ ,  $|x' - x| \leq |x_j - x_i| + c_1 h$  для всех  $i, j$ , то  $|x' - x| \leq c|x_j - x_i|$ , поэтому дробь есть  $|x' - x|^{2\beta-2} O(h^{1-\beta})$ . Отсюда

$$\int_{S_j} \left( \frac{1}{|x' - x|^{1-\beta}} - \frac{1}{|x_j - x_i|^{1-\beta}} \right) dx' = s_j O(h^{1-\beta}), \quad s_j = \int_{S_j} \frac{1}{|x' - x|^{2-2\beta}} dx'.$$

Сингулярный интеграл  $\int_S |x' - x|^{-\gamma} dx' = O(1)$ ,  $x \in S$ ,  $\gamma \in (0, 2)$  (см. [1, гл. 2]), поэтому

$$\sum_j s_j = O(1) \quad \text{и} \quad \int_S \frac{1}{|x' - x|^{1-\beta}} dx' = \sum_{j \neq i} \frac{w_j}{|x_j - x_i|^{1-\beta}} + O(h^{1-\beta}).$$

В итоге находим

$$\begin{aligned}\int_{S_j} f(x', x) dx' &= (g(x_j, x_i) + o(1))(w_j |x_j - x_i|^{\beta-1} + s_j O(h^{1-\beta})) = \\ &= w_j f(x_j, x_i) + w_j |x_j - x_i|^{\beta-1} o(1) + g(x_j, x_i) s_j O(h^{1-\beta}) + s_j o(1) O(h^{1-\beta})\end{aligned}$$

и искомое равенство  $\int_S f(x', x) dx' = \sum_j w_j f(x_j, x_i) + o(1)$ .

Сходимость дискретного градиента  $(\nabla_S \Psi)^{(i)}$  в  $A_2$  вытекает из равномерной оценки  $\Psi(x_{i'}) - \Psi(x_i) = (\nabla_S \Psi(x_i) + O(h^\beta))(x_{i'} - x_i)_{n_i}$ , откуда  $(\nabla_S \Psi)^{(i)} = \nabla_S \Psi(x) + O(h^\beta)$ .  $\square$

#### 4. Примеры результатов расчета

Компьютерная реализация валидировалась и тестировалась для жесткого шара на основе формул разд. 2 и на телах, задаваемых мешом небольшого размера (см. рис. 1).

На рис. 2 приведены диаграммы рассеяния аналитического (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в дальней зоне для случая единичного шара. Результаты даны для  $k = 2\pi$ , когда решение при  $\alpha = 0$  неединственно, что привело к расхождению.

На рис. 3 изображены 3D-диаграммы рассеяния для тел «Снеговик» и «Чебурашка», а также примеры 2D-сечений, где штриховой линией показано аналитическое решение для шара того же объема, что и тело. Отметим, что в случае тела «Снеговик» идентичный результат был получен в COMSOL методом конечных элементов, адаптированным для акустических задач [3].



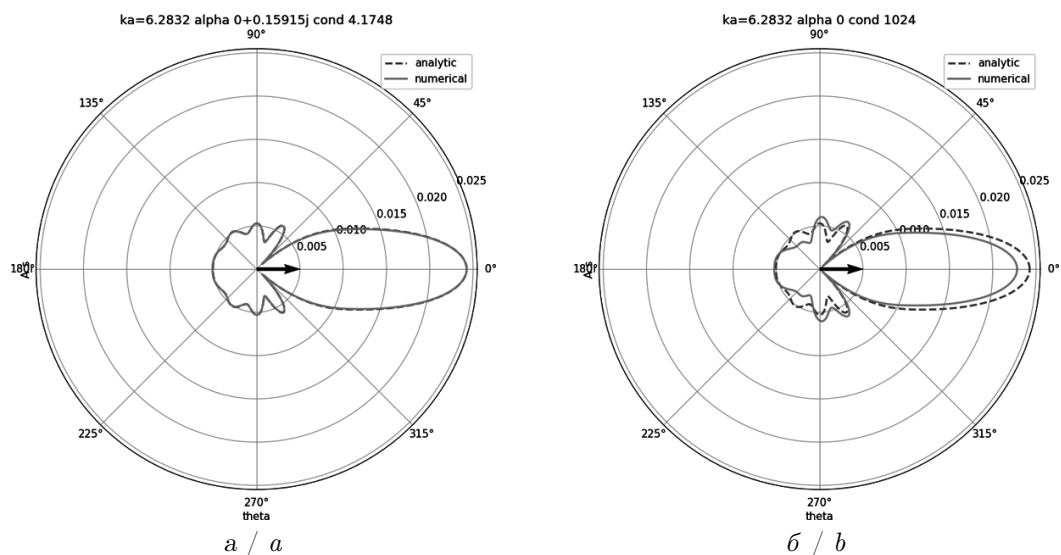


Рис. 2. Сравнение решений для шара:  $a$  — при  $\alpha = i/k$ ;  $b$  —  $\alpha = 0$   
 Fig. 2. Comparison of solutions for the ball:  $a$  is when  $\alpha = i/k$ ;  $b$  is when  $\alpha = 0$

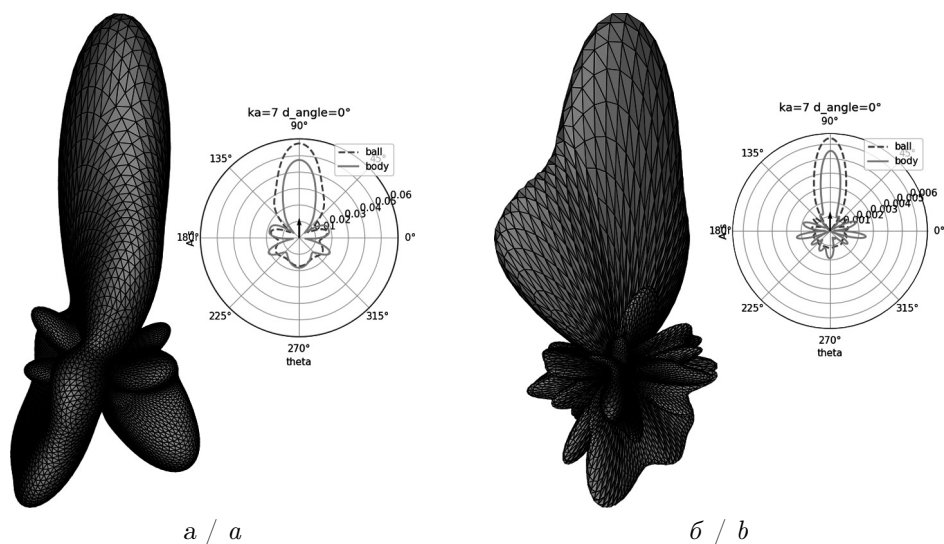


Рис. 3. 3D-диаграммы рассеяния:  $a$  — для тела «Снеговик»;  $b$  — для тела «Чебурашка»  
 Fig. 3. 3D scatter plots:  $a$  is for the body “Snowman”;  $b$  is for the body “Cheburashka”

## Заключение

В работе предложен метод расчета рассеяния плоской звуковой волны абсолютно жестким трехмерным телом произвольной формы, поверхность которого аппроксимирована треугольной сеткой. Метод базируется на граничном интегральном уравнении Бертон – Миллера и методе граничных элементов. Для его реализации выполнена регуляризация сингулярных интегралов, адаптированная для треугольных сеток. Аналитическая модель дискретизована методом коллокаций, и обоснована сходимость численного решения. Для валидации численной модели получено аналитическое решение для сферы напрямую из уравнения Бертон – Миллера и разложения Джексона функции Грина. Показаны совпадение численных и аналитических результатов, а также устойчивость численной реализации для волновых чисел из средневолновой области. Метод сравнивался с FEM и при сопоставимой точности показал значительно большую эффективность.



## Список литературы

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Москва : Мир, 1987. 311 с.
2. Авдеев И. С. Рассеяние звука телами неканонической формы : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2011. 153 с. EDN: QFDEQF
3. Скобелъцын С. А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Тула, 2020. 317 с. EDN: TNKMIA
4. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem // *Applicable Analysis*. 1990. Vol. 35, iss. 1–4. P. 75–92. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036819008839905>
5. Simpson R. N., Scott M. A., Taus M., Thomas D. C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 269. P. 265–290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.10.026>
6. Burton A. J., Miller G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems // *Proceedings of the Royal Society of London. A*. 1971. Vol. 323, iss. 1553. P. 201–210. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0097>
7. Lin T.-C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1984. Vol. 103, iss. 2. P. 565–574. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(84\)90146-X](https://doi.org/10.1016/0022-247X(84)90146-X)
8. Chen K., Cheng J., Harris P. J. A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem // *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2009. Vol. 74, iss. 2. P. 163–177. DOI: <https://doi.org/10.1093/imamat/hxp002>
9. Langrenne C., Garcia A., Bonnet M. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2015. Vol. 138, iss. 5. P. 3332–3340. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4935134>
10. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1995. Vol. 61, iss. 3. P. 345–360. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)00073-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)00073-7)
11. Gaunaurd G. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1994. Vol. 96, iss. 4. P. 2526–2536. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.410126>
12. Meyer W. L., Bell W. A., Stallybrass M. P., Zinn B. T. Prediction of the sound field radiated from axisymmetric surfaces // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1979. Vol. 65, iss. 3. P. 631–638. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.382498>
13. Liu Y. J., Rudolphi T. J. Some identities for fundamental solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1991. Vol. 8, iss. 6. P. 301–311. DOI: [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(91\)90043-S](https://doi.org/10.1016/0955-7997(91)90043-S)
14. Jackson J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. New York : Wiley City, 1999. 808 p.
15. Халилов Э. Г. О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 310–325. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325>, EDN: XVVVZH

## References

1. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 287 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 311 p.).
2. Avdeev I. S. *Scattering of sound by bodies of non-canonical shape*. Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.). Tula, 2011. 153 p. (in Russian). EDN: QFDEQF
3. Skobeltsyn S. A. *Some inverse problems of diffraction of sound waves on inhomogeneous anisotropic elastic bodies*. Diss. Dr. Sci. (Phys. and Math.). Tula, 2020. 317 p. (in Russian). EDN: TNKMIA
4. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem. *Applicable Analysis*, 1990, vol. 35, iss. 1–4, pp. 75–92. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036819008839905>
5. Simpson R. N., Scott M. A., Taus M., Thomas D. C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, vol. 269, pp. 265–290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.10.026>
6. Burton A. J., Miller G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution



- of some exterior boundary-value problems. *Proceedings of the Royal Society of London. A*, 1971, vol. 323, iss. 1553, pp. 201–210. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0097>
7. Lin T. C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1984, vol. 103, iss. 2, pp. 565–574. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(84\)90146-X](https://doi.org/10.1016/0022-247X(84)90146-X)
  8. Chen K., Cheng J., Harris P. J. A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2009, vol. 74, iss. 2, pp. 163–177. DOI: <https://doi.org/10.1093/imamat/hxp002>
  9. Langrenne C., Garcia A., Bonnet M. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2015, vol. 138, iss. 5, pp. 3332–3340. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4935134>
  10. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1995, vol. 61, iss. 3, pp. 345–360. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)00073-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)00073-7)
  11. Gaunaurd G. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, vol. 96, iss. 4, pp. 2526–2536. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.410126>
  12. Meyer W. L., Bell W. A., Stallybrass M. P., Zinn B. T. Prediction of the sound field radiated from axisymmetric surfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, vol. 65, iss. 3, pp. 631–638. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.382498>
  13. Liu Y. J., Rudolphi T. J. Some identities for fundamental solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1991, vol. 8, iss. 6, pp. 301–311. DOI: [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(91\)90043-S](https://doi.org/10.1016/0955-7997(91)90043-S)
  14. Jackson J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. New York, Wiley City, 1999. 808 p.
  15. Khalilov E. H. On the approximate solution of a class of weakly singular integral equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 310–325 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325>, EDN: XVVVZH

Поступила в редакцию / Received 21.06.2024

Принята к публикации / Accepted 21.04.2025

Опубликована / Published 28.11.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 546–554

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 546–554

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-546-554>

EDN: <https://elibrary.ru/ZYDAHE>

Обзорная статья

УДК 616.71-089.85/620.17

## Обзор результатов механических испытаний по исследованию прочностных свойств остеотомий scarf и chevron первой плюсневой кости

К. А. Марьянкин, А. Р. Халиулова, Л. В. Бессонов, С. И. Киреев,  
Н. В. Островский, Д. В. Иванов<sup>✉</sup>

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Марьянкин Константин Александрович**, студент факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий, kostya.maryankin.04@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0001-7374-388X>, SPIN: 1970-0138, AuthorID: 1307780

**Халиулова Алсу Рафаиловна**, студент факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий, alisahaliulova03@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-6565-0440>, SPIN: 5539-7738, AuthorID: 1308092

**Бессонов Леонид Валентинович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, bessonov@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, SPIN: 9022-8177, AuthorID: 774968

**Киреев Сергей Иванович**, доктор медицинских наук, ведущий научный сотрудник лаборатории цифровых медицинских технологий, kireevsi@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3318-5633>, SPIN: 5885-9996, AuthorID: 620012

**Островский Николай Владимирович**, доктор медицинских наук, профессор кафедры основ медицины и медицинских технологий, nvostrovsky@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8370-2299>, SPIN: 2398-6172, AuthorID: 116256

**Иванов Дмитрий Валерьевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ivanovdv.84@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, SPIN: 4459-1094, AuthorID: 201794

**Аннотация.** Вальгусная деформация первого пальца стопы является довольно распространенной патологией и диагностируется у четверти взрослого населения. При умеренной и тяжелой деформации показано выполнение остеотомии первой плюсневой кости, самыми распространенными типами которой являются scarf и chevron. Прочностные свойства остеотомий широко исследуются с помощью натурных механических испытаний на образцах трупных и синтетических костей. Данный обзор посвящен биомеханическим натурным исследованиям по оценке прочностных свойств остеотомий scarf и chevron. Был проведен поиск соответствующих научных статей по базам данных PubMed, Google Scholar, Medline, E-Library, опубликованных до мая 2025 г. включительно. Поиск и первичный анализ литературы был проведен в соответствии с методологией PRISMA. Рассматривались статьи, в которых остеотомии подвергались статическим консольным (закрепленные под углом 15 градусов к горизонту) испытаниям на универсальных испытательных машинах. Критериям включения в исследование отвечали 13 работ, которые вошли в обзор. В 10 исследованиях использовалась остеотомия chevron, а в 9 — остеотомия scarf. Остеотомии, смоделированные на трупных костях, показали в среднем более высокие прочностные характеристики по сравнению с синтетическими аналогами. В среднем остеотомия scarf продемонстрировала и меньшую изгибную жесткость, и меньшую максимальную нагрузку по сравнению с остеотомией chevron. Проведенное исследование показывает существенный интерес ученых к исследованию прочностных свойств остеотомий первой плюсневой кости. Количественные параметры прочностных свойств остеотомий



приведены в данной статье и могут быть использованы клиницистами при выборе типа остеотомии для конкретного пациента, а также при валидации биомеханических моделей.

**Ключевые слова:** hallux valgus, scarf, chevron, биомеханика, консольное нагружение, первая плюсневая кость, бурсит большого пальца, остеотомия, хирургическое лечение, натурные испытания, тип разрушения

**Для цитирования:** Марьянкин К. А., Халиулова А. Р., Бессонов Л. В., Киреев С. И., Островский Н. В., Иванов Д. В. Обзор результатов натурных испытаний по исследованию прочностных свойств остеотомий scarf и chevron первой плюсневой кости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 546–554. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-546-554>, EDN: ZYDAHE

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Review

## Review of the results of mechanical tests on the strength properties of the scarf and chevron osteotomies of the first metatarsal bone

К. А. Maryankin, A. R. Khaliulova, L. V. Bessonov,  
S. I. Kireev, N. V. Ostrovsky, D. V. Ivanov<sup>✉</sup>

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Konstantin A. Maryankin**, kostya.maryankin.04@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0001-7374-388X>, SPIN: 1970-0138, AuthorID: 1307780

**Alsu R. Khaliulova**, alisahaliulova03@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-6565-0440>, SPIN: 5539-7738, AuthorID: 1308092

**Leonid V. Bessonov**, bessonov@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, SPIN: 9022-8177, AuthorID: 774968

**Sergey I. Kireev**, kireevsi@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3318-5633>, SPIN: 5885-9996, AuthorID: 620012

**Nikolay V. Ostrovsky**, nvostrovsky@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8370-2299>, SPIN: 2398-6172, AuthorID: 116256

**Dmitry V. Ivanov**, ivanovdv.84@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, SPIN: 4459-1094, AuthorID: 201794

**Abstract.** Hallux valgus deformity of the first toe is a fairly common pathology and is diagnosed in a quarter of the adult population. In moderate and severe deformity, osteotomy of the first metatarsal bone is indicated; the most common types of osteotomy are scarf and chevron. The strength properties of osteotomies are widely studied using full-scale mechanical tests on cadaveric and synthetic bone samples. This review is devoted to biomechanical field studies evaluating the strength properties of scarf and chevron osteotomies. A search was conducted for relevant scientific articles in the databases PubMed, Google Scholar, Medline, and E-Library, published up to and including May 2025. The search and primary analysis of the literature were carried out in accordance with the PRISMA methodology. Articles were considered in which osteotomies were subjected to static cantilever (fixed at an angle of 15 degrees to the horizon) tests on universal testing machines. The criteria for inclusion in the study were met by 13 papers that were included in the review. Chevron osteotomy was used in 10 studies, and scarf osteotomy was used in 9 studies. Osteotomies modeled on cadaver bones showed, on average, higher strength characteristics compared to synthetic analogues. By and large, the scarf osteotomy demonstrated lower flexural stiffness and maximum load compared to the chevron osteotomy. It was revealed that the use of additional implants in the form of spokes, plates, and spirals does not necessarily lead to an increase in the strength properties of osteotomy. The conducted research shows a significant interest of scientists in the study of the strength properties of osteotomies of the first metatarsal bone. The quantitative parameters of the strength properties of the osteotomies studied are given in this article and can be used





by clinicians when choosing the type of osteotomy for a particular patient, as well as when validating biomechanical models.

**Keywords:** hallux valgus, scarf, chevron, biomechanics, cantilever loading, first metatarsal bone, osteotomy, surgical treatment, field studies, type of fracture

**For citation:** Maryankin K. A., Khaliulova A. R., Bessonov L. V., Kireev S. I., Ostrovsky N. V., Ivanov D. V. Review of the results of mechanical tests on the strength properties of the scarf and chevron osteotomies of the first metatarsal bone. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 546–554 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-546-554>, EDN: ZYDAHE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Биомеханические параметры опорно-двигательной функции стопы играют важную роль в возникновении и прогрессировании распространенной ортопедической патологии, проявляющейся отклонением первого пальца кнаружи (hallux valgus, HV). Это заболевание с точки зрения клинической биомеханики является проявлением деформации первого луча стопы (1ЛС), который включает в себя фаланги первого пальца, первую плюсневую кость (M1), медиальную клиновидную кость стопы, соединенные между собой соответствующими суставами. 1ЛС вместе с прилегающими мышцами и связками играет важную роль в обеспечении опорно-двигательной функции стопы [1].

Основными взаимосвязанными компонентами деформации 1ЛС при HV являются отклонение M1 в сторону, противоположную второй плюсневой кости, а также отклонение большого пальца стопы по направлению ко второму пальцу [2], что сопровождается подвывихом первого плюснефалангового сустава [3]. HV встречается у 23% взрослых в возрасте 18–65 лет и у 35,7% пожилых людей старше 65 лет [4]. При умеренной и тяжелой деформации 1ЛС основным и наиболее эффективным подходом к хирургической коррекции HV является выполнение остеотомии M1 [5]. Остеотомия — это хирургическая операция, при которой хирург целенаправленно рассекает кость, чтобы изменить ее форму, положение и угол между фрагментами [6].

Наиболее популярными в клинической практике способами разделения M1 на два фрагмента признаны остеотомии scarf и chevron [1]. Успех хирургического лечения HV в значительной степени зависит от первичной и окончательной стабильности остеотомии. Для решения вопроса о безопасности и обоснованной возможности ранней нагрузки на стопу в послеоперационном периоде было проведено множество экспериментальных биомеханических исследований. Остеотомии scarf и chevron наиболее подробно изучены с использованием методов биомеханики [7]. В рамках натурных экспериментов на образцах трупных или синтетических костей моделируется остеотомия, которая затем анализируется с использованием универсальных испытательных машин при консольном изгибе [8].

Первое биомеханическое сравнительное исследование остеотомий M1 датируется 1991 г. [9]. Несмотря на довольно большое число работ, посвященных натурным испытаниям остеотомий M1, сравнительный анализ результатов этих работ еще не проводился.

Цель обзора — обобщение опубликованных исследований в области биомеханических статических консольных испытаний остеотомий scarf и chevron с винтовой фиксацией, применяющихся при хирургическом лечении вальгусной деформации первого пальца стопы.

## Методы

В данный обзор были включены исследования, в которых в качестве остеотомии для коррекции вальгусной деформации первого пальца стопы были использованы остеотомии scarf и (или) chevron. Авторами был проведен в базах данных Pubmed, Google Scholar, Medline, E-Library поиск научной литературы, посвященной статическим биомеханическим



исследованиям консольного нагружения остеотомий, опубликованной до мая 2025 г. включительно.

Поиск исследований осуществлялся по ключевым словам: вальгусная деформация, бурсит большого пальца стопы, остеотомия, chevron, scarf, хирургическое лечение вальгусной деформации, натурные исследования, натурные испытания, консольное нагружение остеотомии. Поиск и первичный анализ литературы были проведены в соответствии с методологией PRISMA [10].

## Результаты

Изначально было найдено 39 статей. После удаления дубликатов окончательно в обзор вошли 13 статей, соответствующих всем критериям отбора. Включенные исследования охватывают период с 1991 по 2025 гг. с заметным ростом количества публикаций после 2010 г. В трех исследованиях остеотомии изучались с применением синтетических материалов (sawbone), в 10 статьях изучались свойства остеотомий на трупном материале. В 10 исследованиях использовалась остеотомия chevron, а в 9 — остеотомия scarf. Средний возраст людей, от которых были получены трупные кости, составляет 78 лет (от 56 до 99). Большая часть костей была получена от женщин (60%), от мужчин — 35% [8, 11, 12], для остальных костей пол не был указан.

Всего в обзор были включены результаты биомеханических исследований со 169 трупными костями и 122 синтетическими образцами. Размеры выборок в исследованиях варьировались от 6 [8] до 60 образцов [13]. Медианное значение составило 16 остеотомий на одно исследование.

Анализ названий статей и поставленных в них целей выявил, что цель большинства исследований (8 из 13) состояла в сравнении биомеханических свойств различных способов фиксации остеотомий, в том числе и новых методов фиксации [5], которые обеспечивают быстрое и прочное закрепление для проведения испытаний в день забора костного материала. В [2] проведен сравнительный анализ биомеханических свойств винтов из титанового и магниевых сплавов, используемых для фиксации при дистальной шевронной остеотомии. В [8, 11, 14] сравнивались разные техники остеотомий scarf и chevron. В работах [13, 15] проведен сравнительный анализ механических свойств и сагиттальной стабильности некоторых методик диафизарных остеотомий.

Фрагменты M1, полученные при выполнении остеотомий, скреплялись преимущественно 3.5 мм винтами [5, 6, 8, 12, 13, 16, 17], в других работах использовались 2.4–3.0 мм винты [2, 3, 8, 11, 14, 15]. В некоторых работах [8, 11–13, 16] винты дополнялись пластинами или спицами Киршнера [6]. В качестве материала используемых имплантатов в большинстве работ (12 из 13) применялся титановый сплав и только в одной статье [2] — винты из магниевого сплава.

Как правило, M1 при испытаниях с выполненной на ней остеотомией с одной стороны фиксируют с помощью собственных зажимов испытательной машины [3, 6, 8, 11, 14]. В [5] для этого применялся цианоакрилатный клей. В четырех исследованиях [8, 13, 15, 17] для фиксации кости применяли полиэфирную смолу, а в двух работах [2, 12] — винтовой крепеж.

Изгибная жесткость scarf остеотомий на трупных костях, скрепленных только винтами, составила от 24.8 до 52 Н/мм (медиана 24.8 Н/мм) [3, 5], а chevron — от 20 до 60 Н/мм (медиана 38.2 Н/мм) [17]. Изгибная жесткость scarf остеотомий, исследованных на синтетических образцах, составила 14 Н/мм [15], chevron — от 13 до 58 Н/мм (медиана 33.8 Н/мм) [2, 15].

Максимальная нагрузка scarf остеотомий на трупных костях варьировалась от 124 до 150 Н (медиана 124.3 Н) [5, 11], chevron — от 16 до 150 Н (медиана 185.5 Н) [11, 17]. Максимальная нагрузка scarf остеотомий на синтетических костях варьировалась от 74.7 до 90.5 Н (медиана 85.6 Н) [14, 15], chevron — от 54.8 до 144 Н (медиана 139.6 Н) [2, 16]. Прочностные характеристики остеотомий приведены в табл. 1, а их медианные значения — в табл. 2.



Таблица 1 / Table 1

Изгибная жесткость и максимальная нагрузка при разных остеотомиях  
Flexural stiffness and maximum load of different osteotomies

Источ- ник	Материал	Тип фиксатора*	Остеотомия	Изгибная жесткость, Н/мм	Максимальная нагрузка, Н
[3]	труп.	винты 2.0 и 3.0 мм	scarf	$52.0 \pm 48.0$	$124.6 \pm 56.8$
[5]	труп.	винты 2.2 мм	scarf	24.8	124.0
[6]	труп.	спица Киршнера, винты 3.5 мм, винты 4.0 мм	chevron	38.2 24.9	227.9 232.4
[11]	труп.	винты 2.4 мм	scarf	–	150.0
[11]	труп.	винты 2.4 мм	chevron	–	150.0
[8]	труп.	винты	scarf	52.1	124.63
[8]	труп.	пластина, винты 3.5 мм	scarf dorsomedial	7.0	110.0
[8]	труп.	пластина, винты 3.5 мм	scarf plantar	24.8	196.2
[13]	труп.	скобы 3.5 мм, винты 3.5 мм, пластина	scarf	111.0	428.4 кПа
[12]	труп.	винты 3.5 мм, пластина 2.7 мм	chevron	33.0	220.9
[17]	труп.	винты 3.5 мм	chevron дорсальный	20.0	16.0
[13]	труп.	винты 3.5 мм	chevron плантарный	60.0	70.0
[13]	труп.	скобы 3.5 мм, винты 3.5 мм, пластина	chevron	48.0	205.3 кПа
[2]	синт.	магнелиевые винты (внутренний 2.0 мм, внешний — 3.0 мм)	chevron	$43.06 \pm 17.59$	$144.2 \pm 7.43$
[2]	синт.	винты 2.0 и 3.0 мм	chevron	$46.6 \pm 12.14$	$141.4 \pm 10.85$
[14]	синт.	винты 2.5 мм и L-пластина	scarf	–	$90.5 \pm 20.5$
[16]	синт.	винты 2.5 мм, 1.3 мм, пластина	chevron	24.67	54.8
[15]	синт.	винты 2.7 мм	scarf	$14.4 \pm 2.6$	$74.7 \pm 26.4$
[15]	синт.	винты 2.7 мм	chevron	$16.6 \pm 3.3$	$137.8 \pm 19.1$

Примечание. \*Если материал не указан, то имплантаты изготовлены из титанового сплава.

Note. \*If the material is not specified, the implants are made of titanium alloy.

Таблица 2 / Table 2

Медианные значения прочностных характеристик остеотомий  
Median values of osteotomy strength characteristics

Остеотомия	Материал	Максимальная нагрузка, Н	Изгибная жесткость, Н/мм
scarf	труп.	124.3	24.8
chevron	труп.	185.5	38.2
scarf	синт.	85.6	14.0
chevron	синт.	139.6	33.8



## Обсуждение

Несмотря на то, что известно более 130 различных вариантов остеотомий M1, применяемых при хирургическом лечении HV, самыми популярными из них являются scarf и chevron. Оба этих типа считаются идентичными с точки зрения клинических результатов лечения, однако chevron менее инвазивен [2]. Во многих современных биомеханических работах остеотомии исследуются на прочность при статическом консольном нагружении с применением универсальных испытательных машин. Первая подобная работа была опубликована еще в 1991 г., а последняя — в 2025 г. Неугасающий интерес ученых к этому вопросу подтверждает факт актуальности и необходимости обобщения накопленных данных по прочностным свойствам остеотомий. В данной работе обобщены данные по механическим испытаниям остеотомий scarf и chevron на трупных и синтетических образцах первой плюсневой кости.

Выявлено, что остеотомии, смоделированные на трупных костях, показали в среднем более высокие прочностные характеристики по сравнению с аналогами, изготовленными на синтетических костях. В среднем остеотомия scarf продемонстрировала меньшую изгибную жесткость и максимальную нагрузку по сравнению с chevron. Этот вывод справедлив для моделей на трупных и на синтетических костях (см. табл. 2). В то же время в работе [11] оба вида остеотомии scarf и chevron показали идентичную прочность.

Отметим, что использование дополнительных имплантатов в виде спиц, пластин, спиралей не обязательно ведет к увеличению прочностных свойств остеотомии, что было доказано экспериментально [8, 11, 13, 16]. Однако в работе [15] выявлено существенное увеличение прочностных характеристик при дополнении винтов пластиной: максимальная сила составила 16 Н при установке только винтов и 220 Н при дополнении их пластиной, а изгибная жесткость при этом увеличилась с 2.1 до 33.0 Н/мм.

В исследовании [8] выявлена разница биомеханических свойств между двумя вариантами проведения остеотомии scarf: плантарной (операция, при которой плоскость опилов направлена от плантарной к дорсальной поверхности кости) и дорсомедиальной (операция, при которой плоскость опилов направлена от дорсальной к плантарной поверхности кости в проксимально-дистальном направлении). Для плантарной фиксации изгибная жесткость составила  $24.8 \pm 10.7$  Н/мм при максимальной нагрузке 192.6 Н, а для дорсомедиальной —  $7.0 \pm 7.6$  Н/мм и 110.0 Н соответственно. Плантарный вариант оказался гораздо прочнее по показателям изгибной жесткости и максимально выдерживаемой нагрузки. Подобное исследование [17] также выявило разницу между плантарным и дорсальным вариантами остеотомии chevron. Плантарный способ в данном исследовании также оказался прочнее: изгибная жесткость  $70.0 \pm 41.0$  Н/мм против изгибной жесткости дорсального варианта  $16.0 \pm 12.1$  Н/мм.

Найдены работы, в которых исследуются прочностные свойства остеотомий с использованием разных материалов изготовления винтов [2]. Титановые имплантаты демонстрируют несколько более высокие показатели прочности по сравнению с магниевыми аналогами ( $46.6 \pm 12.14$  Н/мм и  $43.06 \pm 17.59$  Н/мм соответственно).

У данного исследования есть ряд ограничений. Относительно небольшое количество включенных исследований отражает специализированный характер механических испытаний с объектами такого типа. Различия в технике крепежа образцов в испытательной машине, а также в типах и типоразмерах используемых имплантатов ограничивают возможности прямого сравнения результатов испытаний. Это подтверждается довольно широким диапазоном количественных прочностных характеристик остеотомий. В исследованных работах оценивается воздействие статических нагрузок, что может не в полной мере отражать физиологические условия функционирования остеотомий. Данное исследование может быть полезно при разработке стандартов натурных испытаний с остеотомиями первой плюсневой кости и других костей, что, в свою очередь, облегчит анализ, интерпретацию данных, а также сравнение результатов исследований, выполненных разными научными группами.



## Заключение

Проведенное обзорное исследование показывает существенный интерес ученых к исследованию прочностных свойств остеотомий первой плюсневой кости. В обзоре аккумулированы прочностные свойства остеотомий scarf и chevron, исследованных при статическом консольном нагружении, проведенном на универсальных испытательных машинах. Количественные параметры прочностных свойств исследованных остеотомий приведены в данной статье и могут быть использованы клиницистами при выборе типа остеотомии для конкретного пациента, а также при валидации биомеханических моделей.

## Список литературы

1. Guo J., Wang L., Mao R., Chang C., Wen J., Fan Y. Biomechanical evaluation of the first ray in pre-/post-operative hallux valgus: A comparative study // *Clinical Biomechanics*. 2018. Vol. 60. P. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2018.06.002>
2. Sahin A., Gulabi D., Buyukdogan H., Agar A., Kilic B., Mutlu I., Erturk C. Is the magnesium screw as stable as the titanium screw in the fixation of first metatarsal distal chevron osteotomy? A comparative biomechanical study on sawbones models // *Journal of Orthopaedic Surgery*. 2021. Vol. 29, iss. 3. Art. 23094990211056439. DOI: <https://doi.org/10.1177/23094990211056439>
3. Popoff I., Negrine J. P., Zecovic M., Svehla M., Walsh W. R. The effect of screw type on the biomechanical properties of SCARF and crescentic osteotomies of the first metatarsal // *The Journal of Foot & Ankle Surgery*. 2003. Vol. 42, iss. 3. P. 161–164. DOI: <https://doi.org/10.1053/jfas.2003.50029>
4. Cai Y., Song Y., He M., He W., Zhong X., Wen H., Zhong X., Wen H., Wei Q. Global prevalence and incidence of hallux valgus: A systematic review and meta-analysis // *Journal of Foot and Ankle Research*. 2023. Vol. 16, iss. 1. Art. 63. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13047-023-00661-9>
5. Иванов Д. В., Доль А. В., Бессонов Л. В., Куреев С. И., Гуляева А. О. Методика механических испытаний при консольном нагружении плюсневых костей стопы // *Российский журнал биомеханики*. 2023. Т. 27, № 4. С. 84–92. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2023.4.06>, EDN: QWJFLW
6. Kasperek M. F., Benca E., Hirtler L., Willegger M., Boettner F., Zandieh S., Holinka J., Windhager R., Schuh R. Biomechanical evaluation of the proximal chevron osteotomy in comparison to the Lapidus arthrodesis for the correction of hallux valgus deformities // *International Orthopaedics (SICOT)*. 2022. Vol. 46, iss. 10. P. 2257–2264. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00264-022-05514-x>
7. Esses S. I., McGuire R., Jenkins J., Finkelstein J., Woodard E., Watters W. C., Goldberg M. J., Keith M., Turkelson C. M., Wies J. L., Sluka P., Boyer K. M., Hitchcock K. The treatment of symptomatic osteoporotic spinal compression fractures // *American Academy of Orthopaedic Surgeon*. 2011. Vol. 19, iss. 3. P. 176–182. DOI: <https://doi.org/10.5435/00124635-201103000-00007>
8. Klos K., Simons P., Hajduk A.-S., Hoffmeier K. L., Gras F., Fröber R., Hofmann G. O., Mückley T. Plantar versus dorsomedial locked plating for Lapidus arthrodesis: A biomechanical comparison // *Foot & Ankle International*. 2011. Vol. 32, iss. 11. P. 1081–1085. DOI: <https://doi.org/10.3113/FAI.2011.1081>
9. Shereff M. J., Sobel M. A., Kummer F. J. The stability of fixation of first metatarsal osteotomies // *Foot & Ankle*. 1991. Vol. 11, iss. 4. P. 208–211. DOI: <https://doi.org/10.1177/107110079101100404>
10. Page M. J., Moher D., Bossuyt P. M., Boutron I., Hoffmann T. C., Mulrow C. D. et al. PRISMA 2020 explanation and elaboration: Updated guidance and exemplars for reporting systematic reviews // *BMJ*. 2021. Vol. 372, iss. 160. DOI: <https://doi.org/10.1136/bmj.n160>
11. Newman A. S., Negrine J. P., Zeeovie M., Stanford P., Walsh W. R. A biomechanical comparison of the Z step-cut and basilar crescentic osteotomies of the first metatarsal // *Foot & Ankle International*. 2000. Vol. 21, iss. 7. P. 584–587. DOI: <https://doi.org/10.1177/107110070002100710>
12. Schuh R., Hofstaetter J. G., Benca E., Willegger M., von Skrbensky G., Zandieh S., Wanivenhaus A., Holinka J., Windhager R. Biomechanical analysis of two fixation methods for proximal chevron osteotomy of the first metatarsal // *International Orthopaedics (SICOT)*. 2014. Vol. 38, iss. 5. P. 983–989. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00264-014-2286-1>
13. Trnka H.-J., Parks B. G., Ivanic G., Chu I.-T., Easley M. E., Schon L. C., Myerson M. S. Six first metatarsal shaft osteotomies: Mechanical and immobilization comparisons // *Clinical Orthopaedics and Related Research*. 2000. Vol. 381. P. 256–265. DOI: <https://doi.org/10.1097/00003086-200012000-00030>





14. Bohnert L., Radeideh A., Bigolin G., Gautier E., Lottenbach M. Mechanical testing of maximal shift scarf osteotomy with inside-out plating compared to classic scarf osteotomy with double screw fixation // *The Journal of Foot & Ankle Surgery*. 2018. Vol. 57, iss. 6. P. 1056–1058. DOI: <https://doi.org/10.1053/j.jfas.2018.02.010>
15. Shaw N., Wertheimer S., Krueger J., Haut R. A mechanical comparison of first metatarsal diaphyseal osteotomies for the correction of hallux abducto valgus // *The Journal of Foot & Ankle Surgery*. 2001. Vol. 40, iss. 5. P. 271–276. DOI: [https://doi.org/10.1016/s1067-2516\(01\)80062-4](https://doi.org/10.1016/s1067-2516(01)80062-4)
16. Kim J. S., Cho H. K., Young K. W., Kim J. S., Lee K. T. Biomechanical comparison study of three fixation methods for proximal chevron osteotomy of the first metatarsal in hallux valgus // *Clinics in Orthopedic Surgery*. 2017. Vol. 9, iss. 4. P. 514–520. DOI: <https://doi.org/10.4055/cios.2017.9.4.514>
17. Sharma K. M., Parks B. G., Nguyen A., Schon L. C. Plantar-to-Dorsal compared to dorsal-to-plantar screw fixation for proximal chevron osteotomy: A biomechanical analysis // *Foot & Ankle International*. 2005. Vol. 26, iss. 10. P. 854–858. DOI: <https://doi.org/10.1177/107110070502601011>

## References

1. Guo J., Wang L., Mao R., Chang C., Wen J., Fan Y. Biomechanical evaluation of the first ray in pre-/post-operative hallux valgus: A comparative study. *Clinical Biomechanics*. 2018, vol. 60, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2018.06.002>
2. Sahin A., Gulabi D., Buyukdogan H., Agar A., Kilic B., Mutlu I., Erturk C. Is the magnesium screw as stable as the titanium screw in the fixation of first metatarsal distal chevron osteotomy? A comparative biomechanical study on sawbones models. *Journal of Orthopaedic Surgery*, 2021, vol. 29, iss. 3, art. 23094990211056439. DOI: <https://doi.org/10.1177/23094990211056439>
3. Popoff I., Negrine J. P., Zecovic M., Svehla M., Walsh W. R. The effect of screw type on the biomechanical properties of SCARF and crescentic osteotomies of the first metatarsal. *The Journal of Foot & Ankle Surgery*, 2003, vol. 42, iss. 3, pp. 161–164. DOI: <https://doi.org/10.1053/jfas.2003.50029>
4. Cai Y., Song Y., He M., He W., Zhong X., Wen H., Zhong X., Wen H., Wei Q. Global prevalence and incidence of hallux valgus: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Foot and Ankle Research*, 2023, vol. 16, iss. 1, art. 63. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13047-023-00661-9>
5. Ivanov D. V., Dol A. V., Bessonov L. V., Kireev S. I., Gulyaeva A. O. Methods of mechanical tests for cantilever loading of metatarsal foot bones. *Russian Journal of Biomechanics*, 2023, vol. 27, iss. 4, pp. 70–76. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2023.4.06>, EDN: OVYCKA
6. Kasperek M. F., Benca E., Hirtler L., Willegger M., Boettner F., Zandieh S., Holinka J., Windhager R., Schuh R. Biomechanical evaluation of the proximal chevron osteotomy in comparison to the Lapidus arthrodesis for the correction of hallux valgus deformities. *International Orthopaedics (SICOT)*, 2022, vol. 46, iss. 10, pp. 2257–2264. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00264-022-05514-x>
7. Esses S. I., McGuire R., Jenkins J., Finkelstein J., Woodard E., Watters W. C., Goldberg M. J., Keith M., Turkelson C. M., Wies J. L., Sluka P., Boyer K. M., Hitchcock K. The treatment of symptomatic osteoporotic spinal compression fractures. *American Academy of Orthopaedic Surgeon*, 2011, vol. 19, iss. 3, pp. 176–182. DOI: <https://doi.org/10.5435/00124635-201103000-00007>
8. Klos K., Simons P., Hajduk A.-S., Hoffmeier K. L., Gras F., Fröber R., Hofmann G. O., Mückley T. Plantar versus dorsomedial locked plating for Lapidus arthrodesis: A biomechanical comparison. *Foot & Ankle International*, 2011, vol. 32, iss. 11, pp. 1081–1085. DOI: <https://doi.org/10.3113/FAI.2011.1081>
9. Shereff M. J., Sobel M. A., Kummer F. J. The stability of fixation of first metatarsal osteotomies. *Foot & Ankle*, 1991, vol. 11, iss. 4, pp. 208–211. DOI: <https://doi.org/10.1177/107110079101100404>
10. Page M. J., Moher D., Bossuyt P. M., Boutron I., Hoffmann T. C., Mulrow C. D. et al. PRISMA 2020 explanation and elaboration: Updated guidance and exemplars for reporting systematic reviews. *BMJ*, 2021, vol. 372, iss. 160. DOI: <https://doi.org/10.1136/bmj.n160>
11. Newman A. S., Negrine J. P., Zeeovie M., Stanford P., Walsh W. R. A biomechanical comparison of the Z step-cut and basilar crescentic osteotomies of the first metatarsal. *Foot & Ankle International*, 2000, vol. 21, iss. 7, pp. 584–587. DOI: <https://doi.org/10.1177/107110070002100710>
12. Schuh R., Hofstaetter J. G., Benca E., Willegger M., von Skrbensky G., Zandieh S., Wanivenhaus A., Holinka J., Windhager R. Biomechanical analysis of two fixation methods for proximal chevron osteotomy of the first metatarsal. *International Orthopaedics (SICOT)*, 2014, vol. 38, iss. 5, pp. 983–989. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00264-014-2286-1>
13. Trnka H.-J., Parks B. G., Ivanic G., Chu I.-T., Easley M. E., Schon L. C., Myerson M. S. Six first



- metatarsal shaft osteotomies: Mechanical and immobilization comparisons. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 2000, vol. 381, pp. 256–265. DOI: <https://doi.org/10.1097/00003086-200012000-00030>
14. Bohnert L., Radeideh A., Bigolin G., Gautier E., Lottenbach M. Mechanical testing of maximal shift scarf osteotomy with inside-out plating compared to classic scarf osteotomy with double screw fixation. *The Journal of Foot & Ankle Surgery*, 2018, vol. 57, iss. 6, pp. 1056–1058. DOI: <https://doi.org/10.1053/j.jfas.2018.02.010>
  15. Shaw N., Wertheimer S., Krueger J., Haut R. A mechanical comparison of first metatarsal diaphyseal osteotomies for the correction of hallux abducto valgus. *The Journal of Foot & Ankle Surgery*, 2001, vol. 40, iss. 5, pp. 271–276. DOI: [https://doi.org/10.1016/s1067-2516\(01\)80062-4](https://doi.org/10.1016/s1067-2516(01)80062-4)
  16. Kim J. S., Cho H. K., Young K. W., Kim J. S., Lee K. T. Biomechanical comparison study of three fixation methods for proximal chevron osteotomy of the first metatarsal in hallux valgus. *Clinics in Orthopedic Surgery*, 2017, vol. 9, iss. 4, pp. 514–520. DOI: <https://doi.org/10.4055/cios.2017.9.4.514>
  17. Sharma K. M., Parks B. G., Nguyen A., Schon L. C. Plantar-to-dorsal compared to dorsal-to-plantar screw fixation for proximal chevron osteotomy: A biomechanical analysis. *Foot & Ankle International*, 2005, vol. 26, iss. 10, pp. 854–858. DOI: <https://doi.org/10.1177/107110070502601011>

Received / Поступила в редакцию 19.06.2025

Accepted / Принята к публикации 05.09.2025

Published / Опубликовано 28.11.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 555–565

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 555–565

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-555-565>

EDN: <https://elibrary.ru/SRTEFP>

Article

## Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 1. Mechanical properties

E. V. Sadyrin<sup>✉</sup>, A. L. Nikolaev, A. P. Evsyukov, D. A. Nizhnik, A. S. Vasiliev

Don State Technical University, 1 Gagarin Square, Rostov-on-Don 344003, Russia

**Evgeniy V. Sadyrin**, esadyrin@donstu.ru, <https://orcid.org/0009-0000-2227-1299>, SPIN: 7472-7963, AuthorID: 770513

**Andrey L. Nikolaev**, andreynicolaev@eurosites.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3491-4575>, SPIN: 8183-3370, AuthorID: 968623

**Alexander P. Evsyukov**, aevsukov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5521-7563>, SPIN: 2397-2193, AuthorID: 178681

**Daria A. Nizhnik**, dnijnik@donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4069-2166>, SPIN: 1934-1455, AuthorID: 966926

**Andrey S. Vasiliev**, andrevasiliev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7844-1314>, SPIN: 8496-1554, AuthorID: 644756

**Abstract.** In the present paper, an *ex vivo* nanoindentation study of the mechanical properties of fillings made of composite resin and glass ionomer cement, as well as infiltrated enamel and tissues in their vicinity, was carried out, followed by a comparison of the results with the properties of the sound tissues. For a more in-depth interpretation of the obtained experimental data, optical images of the sample surface structure were obtained. Composite fillings have been shown to be superior to glass ionomer ones due to greater similarity in mechanical properties to the sound enamel and fewer internal structure artifacts. The possibility of the polymerization stress appearing in dentine adjacent to the filling was demonstrated. Pathologically altered demineralized enamel treated with polymer infiltrant, despite a slight decrease in the values of properties compared to sound tissue, turned out to be generally close to it both in terms of the mechanical characteristics, which indicates the high potential for the use of polymer infiltration in dental practice for the treatment of early caries.

**Keywords:** tooth, enamel, dentine, composite resin, glass ionomer cement, polymer infiltrant, filling, nanoindentation

**Acknowledgements:** This work was supported by the grant of the Russian Science Foundation (project No. 25-29-00829, <https://rscf.ru/en/project/25-29-00829/>). The authors thank S. Yu. Maksyukov for assistance in performing *ex vivo* sealing of the samples. Nanoindentation was carried out using the equipment of the Resource Center for Collective Use of the Scientific and Educational Center for Functional Gradient Materials of Don State Technical University (RCCP DSTU).

**For citation:** Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Evsyukov A. P., Nizhnik D. A., Vasiliev A. S. Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 1. Mechanical properties. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 555–565. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-555-565>, EDN: SRTEFP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья  
УДК 531.7

## Характеризация свойств современных стоматологических материалов и тканей в их окрестности. Часть 1. Механические свойства

Е. В. Садырин<sup>✉</sup>, А. Л. Николаев, А. П. Евсюков, Д. А. Нижник,  
А. С. Васильев

Донской государственный технический университет, Россия, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

**Садырин Евгений Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики биосовместимых материалов, esadyrin@donstu.ru, <https://orcid.org/0009-0000-2227-1299>, SPIN: 7472-7963, AuthorID: 770513

**Николаев Андрей Леонидович**, заведующий лабораторией механики биосовместимых материалов, andreynicolaev@eurosites.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3491-4575>, SPIN: 8183-3370, AuthorID: 968623

**Евсюков Александр Павлович**, кандидат биологических наук, доцент кафедры «Биология и общая патология», aevsukov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5521-7563>, SPIN: 2397-2193, AuthorID: 178681

**Нижник Дарья Андреевна**, старший преподаватель кафедры «Теоретическая и прикладная механика», dnijnik@donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4069-2166>, SPIN: 1934-1455, AuthorID: 966926

**Васильев Андрей Сергеевич**, ведущий научный сотрудник лаборатории механики биосовместимых материалов, andrevasiliev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7844-1314>, SPIN: 8496-1554, AuthorID: 644756

**Аннотация.** В настоящей работе было проведено *ex vivo* исследование механических свойств пломб из композитного материала и стеклоиономерного цемента, а также инфильтрированной эмали и тканей в их окрестности с использованием наноиндентирования с последующим сравнением результатов со свойствами здоровых тканей. Для более подробной интерпретации полученных экспериментальных данных были получены снимки структуры поверхности образцов с использованием оптического микроскопа. Исследование показало, что пломба из композитного материала имеет ряд преимуществ перед стеклоиономерным цементом ввиду большего сходства её механических свойств со свойствами здоровой эмали и меньшего количества артефактов внутренней структуры. Показана возможность возникновения полимеризационных напряжений в дентине в окрестности пломбы. Патологически изменённая деминерализованная эмаль, обработанная полимерным инфильтратом, несмотря на некоторое снижение значений свойств по сравнению со здоровой тканью, оказалась в целом близка к ней по механическим характеристикам, что свидетельствует о высоком потенциале применения полимерной инфильтрации в стоматологической практике при лечении раннего кариеса.

**Ключевые слова:** зуб, эмаль, дентин, композитный материал, стеклоиономерный цемент, полимерный инфильтрант, наноиндентирование

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00829, <https://rscf.ru/project/25-29-00829/>). Авторы благодарят С. Ю. Максуюкова за помощь в проведении *ex vivo* установки пломб на образцах. Наноиндентирование выполнено на оборудовании Ресурсного центра коллективного пользования НОЦ «Материалы» Донского государственного технического университета (РЦКП ДГТУ).

**Для цитирования:** Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Evsyukov A. P., Nizhnik D. A., Vasiliev A. S. Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 1. Mechanical properties [Садырин Е. В., Николаев А. Л., Евсюков А. П., Нижник Д. А., Васильев А. С. Характеризация свойств современных стоматологических материалов и тканей в их окрестности. Часть 1. Механические свойства] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 555–565. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-555-565>, EDN: SRTEFP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



## Introduction

The state of the tissues of the human oral cavity is an important component of the health of the body as a system, significantly affecting quality of life in general. At the same time, untreated caries of permanent and primary teeth is one of the most common diseases in the world — according to the global report of the World Health Organization, it affects about 2 billion 510 million people all over the world [1]. Moreover, a number of studies have shown that pathological changes in the tooth hard tissues contribute to the development of respiratory diseases [2], lower respiratory tract infections and influenza [3], as well as a number of other diseases [4].

Caries occurs as a result of the interaction of acidogenic oral bacteria with components of the human diet within the plaque biofilm, resulting in the formation of organic acids, mainly lactic acid. The appearance of acids in the oral cavity can also occur when consuming a number of foods and drinks [5,6], which contributes to the demineralization process — partial dissolution of the main structural elements of enamel — hydroxyapatite crystallites [7]. Early caries (stage of the white spot lesions, WSLs) is characterized by the process of demineralization of tooth enamel without cavitation [8]. A dental clinician plans a treatment of WSLs depending on a list of factors (the size of the demineralized area, its location, degree of activity, and others). With early manifestations of WSLs, treatment may be limited to the methods of non-invasive dentistry [9]. In more complex cases, it becomes necessary to use methods of preparing the area of demineralization and filling it or minimally invasive treatment (such as polymer infiltration [10]). Glass ionomer cements (GICs) can be used in a wide range of clinical situations due to the ability to control their mechanical properties by changing the powder/liquid ratio or the chemical composition of the material [11]. Treatment of WSLs by the infiltration method consists of acid etching of the damaged enamel surface, drying of the subsurface porous area, and impregnation of it with liquid polymer material, which modifies the microstructure of the enamel prisms [12]. However, the efficacy of this clinical procedure has not been fully investigated: in a number of clinical cases, high efficiency has been reported [13], whereas in other studies, it did not show the desired result for the practicing dental clinician [14].

In the present work, an *ex vivo* study of the mechanical properties of fillings made of the composite material and the GIC, the enamel surrounding these fillings, dentine in their vicinity (i.e., dentine adjacent to the dentine-enamel junction, DEJ), as well as sound dentine and enamel on the opposite side of the tooth was carried out. According to a similar scheme, a study was made of the properties of enamel modified by the infiltrant and dentine in its vicinity, as well as sound dentine and enamel on the opposite medial side of the tooth (the procedure was repeated on two samples each demonstrating the manifestations of WSLs in order to gather more statistical data).

## 1. Materials and methods

Four human molars were extracted for orthodontic reasons in the dental department of the Rostov State Medical University clinic, Rostov-on-Don, Russia. The local independent ethical committee of the university approved the research (extract 14/21 dated September 23, 2021), and the patients provided informed consent. The following dental materials were used in the study according to the manufacturers' protocols: Vitremer glass ionomer cement (3M ESPE, St. Paul, USA), Estelite Flow Quick composite material (Tokuyama Dental, Tokyo, Japan), and Icon infiltrant (DMG Chemisch-Pharmazeutische, Berlin, Germany). To form thin sections of the surface of the samples containing the areas under study, they were prepared in longitudinal section using an Isomet 4000 precision saw (Buehler, Lake Bluff, USA), then ground and polished.

The mechanical properties of the areas under study were assessed using a nanoindentation test machine (NanoTest 600 Platform 3, Micro Materials, Wrexham, UK) using a calibrated Berkovich diamond indenter. In each test, the load increased linearly for 20 s, remained constant for 30 s, then decreased linearly for 20 s. The maximum load  $P_{max}$  was 50 mN. To prevent damage to the



tooth tissues caused by uncontrolled dehydration, the specimens were kept moist with drops of distilled water using an infusion pump (Terufusion TE-332, Terumo, Leuven, Belgium). Reduced Young's modulus  $E_r$  and indentation hardness  $H$  for each of the areas were obtained utilizing the Oliver — Pharr method [15]. In nanoindentation experiments, creep meant a change in the deformation of the material during the experiment when the maximum load was held for 30 s. For each area under study, from 8 to 12 identical indentations were made, and the results were averaged afterwards.

Microscopy of fillings and tissues in the vicinity of indenter prints was carried out using the optical system of a nanoindentation system. Overview images of the prepared cross-sections were made using a Zeiss StereoDiscovery V.20 stereomicroscope (Carl Zeiss Microscopy GmbH, Oberkochen, Germany) according to the Abbe scheme. Zeiss ZEN software (Carl Zeiss Microscopy GmbH, Oberkochen, Germany) was used for image processing.

The Shapiro — Wilk normality test was used to examine whether the nanoindentation datasets were normally distributed. The test statistic ( $D$ ) provided a measurement of the divergence of the dataset distribution from the normal one. The one-way analysis of variance (ANOVA) was used to detect statistically significant differences between the means of the two or three groups under study. Specifically, the null hypothesis was tested:  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ , where  $\mu$  is a group mean and  $k$  is a number of groups. The above hypothesis was tested for three sets of indentation data for the composite filling case, three sets for the glass ionomer filling case, and two sets for each polymer infiltration case using the  $F$ -ratio at a significance level of  $\alpha = 0.05$ . The Tukey — Kramer test was then used to identify specific groups that differed from each other.

## 2. Results and discussion

Figure 1 shows optical images of surface sections of all samples, indicating both the areas of interest and the anatomical features of the crowns. Indenter imprints at a distance of 60  $\mu\text{m}$  from the interface with the filling, in its internal and external parts (the central region of the enamel in Fig. 1, *a*, the approximate boundaries of the filling are outlined by a burgundy dotted line), demineralized dentine, and sound tooth tissues are shown in Fig. 2. The results of the property evaluation are given in Table 1.

Figure 2, *b* shows large pores found on the examined surface of the composite filling. Diagrams of the dependence of the indentation depth on the applied load for the case of this filling are shown in Fig. 3. For the GIC filling (Fig. 1, *b*) from the cervical area to the pulp horn, an assessment was made of its mechanical properties, enamel at the border with the filling (about 400  $\mu\text{m}$  from the interface due to the presence of a crack in the immediate vicinity), bordering dentine, as well as the sound enamel and dentine on the opposite medial side of the tooth. The measurement results are shown in Table 2.

The results of optical microscopy of the interface of a filling made of GIC and dentine are shown in Fig. 2, *c*, *d*. Diagrams of the dependence of the indentation depth on the applied force for the case of a GIC filling application are shown in Fig. 4.

Considering that in the current research, polymer infiltration was carried out on the two samples, further, the first and second cases of using this material will be mentioned.

For the first case of the WSL infiltration (Fig. 1, *c*), the mechanical properties of the treated enamel, dentine in its vicinity, as well as sound enamel and dentine on the opposite medial side of the tooth were assessed.

A visual examination of the infiltrated enamel showed the presence of a WSL focus, extending from the enamel surface to the DEJ. In this regard, the mechanical properties of the infiltrated enamel were measured close to the DEJ. On the opposite side of the junction, presumably pathologically altered dentine was examined. The test results are given in Table 3. Diagrams of the dependence of the indentation depth on the applied force for the first case of the WSL infiltration are shown in Fig. 5. For the second case of polymer infiltration of the molar in the upper third of the enamel in height (Fig. 1, *d*), the mechanical properties were assessed similarly to the first case (see Table 4).

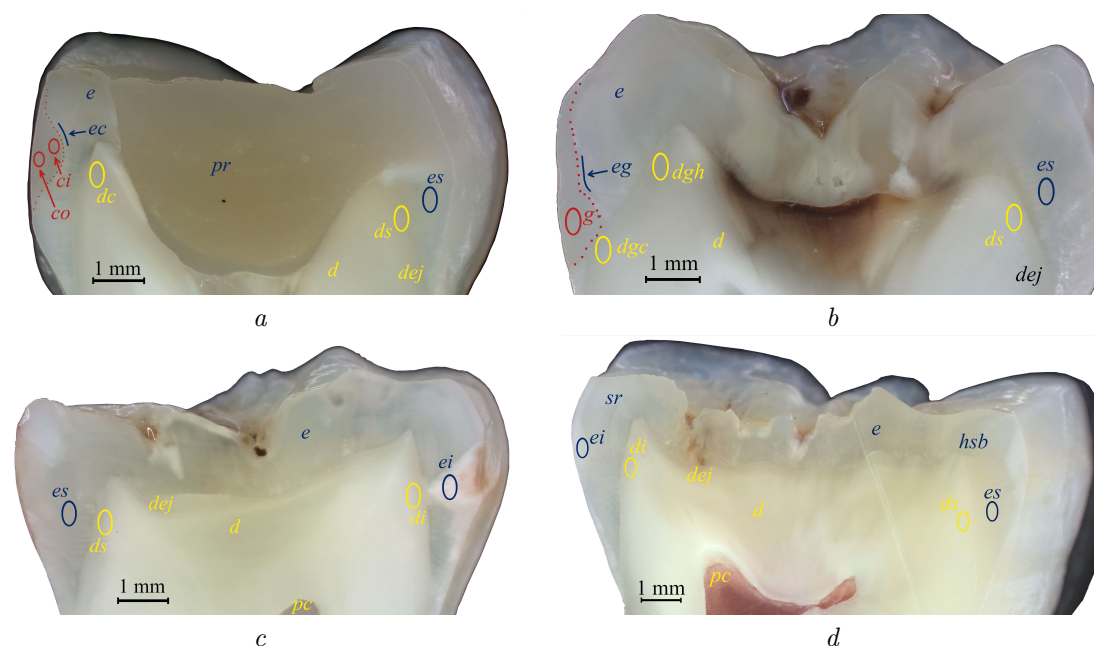


Fig. 1. Optical microscope images of samples after *ex vivo* dental treatment: *a* shows composite filling; *b* shows GIC filling; *c* shows enamel infiltration, first case; *d* shows enamel infiltration, second case; *e* stands enamel, *d* stands for dentine, *dej* stands for DEJ, *es* stands for sound enamel, *ds* stands for sound dentine, *ci* stands for internal part of the composite filling, *co* stands for external part of the composite filling, *ec* stands for enamel at the interface with the composite filling material, *dc* stands for dentine in the vicinity of a filling made of composite material, *pr* stands for previous crown restoration, *g* stands for GIC filling, *dgc* stands for dentine in the vicinity of a filling of GIC in the cervical region, *eg* stands for enamel on the interface of a filling of GIC, *dgh* stands for dentine in the vicinity of the GIC filling in the area of the pulp horn (crown part), *sr* stands for stria of Retzius, *hsb* stands for Hunter-Schreger bands, *ei* stands for infiltrated enamel, *di* stands for dentine in the vicinity of infiltrated enamel, *pc* stands for pulp chamber (color online)

Table 1

Mechanical properties of the sample treated with the composite material

Area	Red. Young's modulus $E_r$ , GPa	Hardness $I$ , GPa	Creep, nm
Filling outer part	$11.47 \pm 1.05$	$1.11 \pm 0.17$	$236.3 \pm 56.1$
Filling inner part	$11.51 \pm 0.32$	$0.93 \pm 0.05$	$293.5 \pm 30.0$
Enamel bordering filling	$40.55 \pm 3.85$	$2.48 \pm 0.65$	$229.7 \pm 65.7$
Sound enamel	$97.77 \pm 5.50$	$5.98 \pm 0.37$	$36.5 \pm 11.1$
Dentine bordering filling	$23.50 \pm 2.82$	$1.16 \pm 0.13$	$162.3 \pm 33.7$
Sound dentine	$26.48 \pm 3.34$	$1.14 \pm 0.15$	$101.5 \pm 15.4$

To assess statistically significant differences in the indentation results, three sets of Young's modulus values were selected for the composite material and GIC (the inner part of the composite filling, the enamel in the vicinity of the filling, and sound enamel with sample sizes of 11, 9, and 9 tests, respectively; the GIC filling, the enamel in the vicinity of the GIC, and sound enamel with sample sizes of 8, 6, and 9 tests, respectively), and two sets of values for the samples treated with the infiltrant (treated and sound enamel with sample sizes of 7 and 11 tests for the first sample, 12 and 12 tests for the second sample, respectively). In all cases, from the sample information, we obtained that the test statistic  $F$  was not in the 95% acceptance region, based on which a conclusion was made to reject the null hypothesis (at  $p < 0.05$ ), thus, at least two group mean values for each material were statistically significantly different from each other. Additionally, Tukey–Kramer test subsequently revealed a significant difference between all three pairs for filling materials.

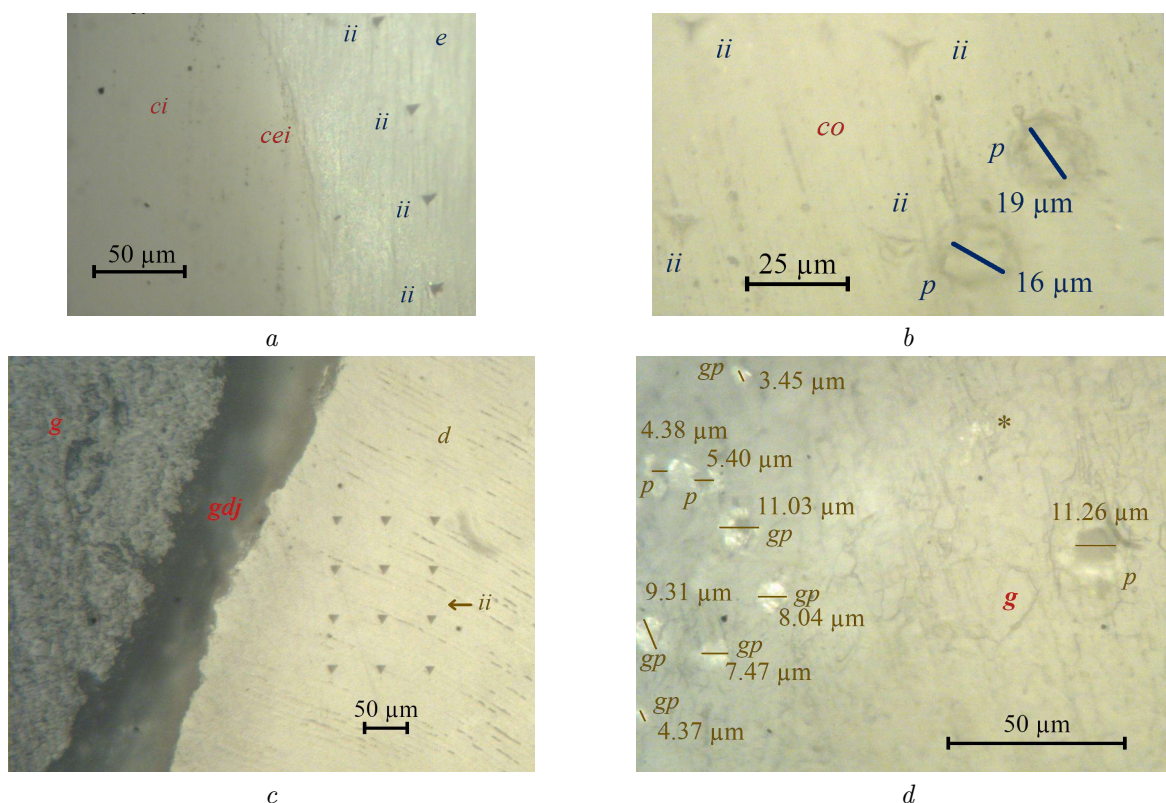


Fig. 2. Optical microscopy of fillings and surrounding tissues: *a* shows indenter marks on the surface of a composite filling; *b* shows indenter marks and pores in the outer layer of the filling; *c* shows indenter marks on dentine in the immediate vicinity of the filling; *d* shows surface of the GIC filling; *g* stands for GIC filling surface, *e* stands for enamel, *ci* stands for inner layer of the filling, *co* stands for outer layer of the filling, *ii* stands for indenter imprint, *cei* stands for interface between the filling and enamel, *p* stands for pore, *d* stands for dentine, *g* stands for GIC, *gdj* stands for interface between filling and dentine, *gp* stands for glass particle; symbol \* marks the agglomerate of glass microparticles (color online)

Table 2

Mechanical properties of the sample treated with the GIC

Area	Red. Young's modulus $E_r$ , GPa	Hardness $I$ , GPa	Creep, nm
Filling	$1.57 \pm 0.34$	$0.14 \pm 0.05$	$927.0 \pm 159.5$
Enamel bordering filling	$16.27 \pm 7.51$	$1.25 \pm 0.93$	$502.5 \pm 285.5$
Sound enamel	$91.18 \pm 4.89$	$5.61 \pm 0.99$	$49.5 \pm 27.7$
Dentine (pulp horn)	$39.37 \pm 0.96$	$2.03 \pm 0.07$	$116.3 \pm 9.0$
Dentine (cervical area)	$25.36 \pm 1.04$	$1.48 \pm 0.10$	$182.9 \pm 25.3$
Sound dentine	$23.33 \pm 4.15$	$1.14 \pm 0.01$	$124.6 \pm 45.9$

The analysis of experimental data of nanoindentation shows that the outer and inner layers of the composite filling are characterized by practically identical values of the Young's modulus and a decrease in the value of indentation hardness of the inner layer by 16.2% compared to the outer one, as well as an increased creep value by 24.2%. This observation partially agrees with the studies of the mineral density of composite fillings [16]. At the same time, the values of the reduced Young's modulus and the indentation hardness of the inner part of the filling are significantly lower than both the surrounding enamel, noted in Fig. 2, *a* (by 3.5 and 2.7 times, respectively), and sound enamel (by 8.5 and 6.4 times, respectively). The observed features are important from a practical point of view for creating a strong filling and high adhesion to natural



enamel. For the enamel in the filling area, both the reduced Young's modulus and the indentation hardness were equal to 41.5% of the similar characteristics for sound enamel, and creep was 6.3 times higher, practically not inferior in creep value to the outer part of the composite filling (Fig. 2, b).

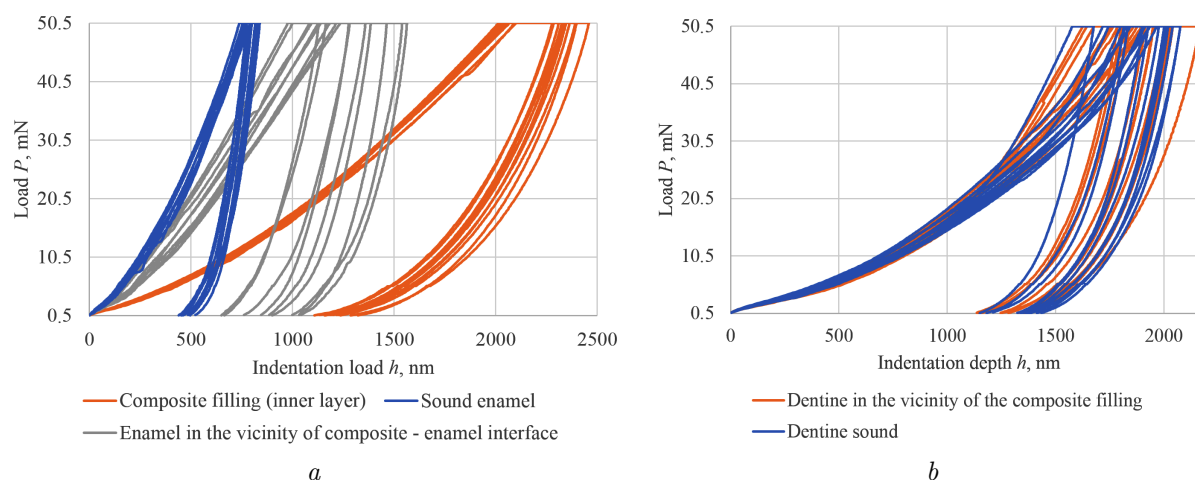


Fig. 3. Diagrams of the dependence of the indentation depth on the applied force for the case of a composite filling: *a* shows composite filling, enamel in its vicinity, and sound enamel; *b* shows dentine in the vicinity of the composite filling and sound dentine (color online)

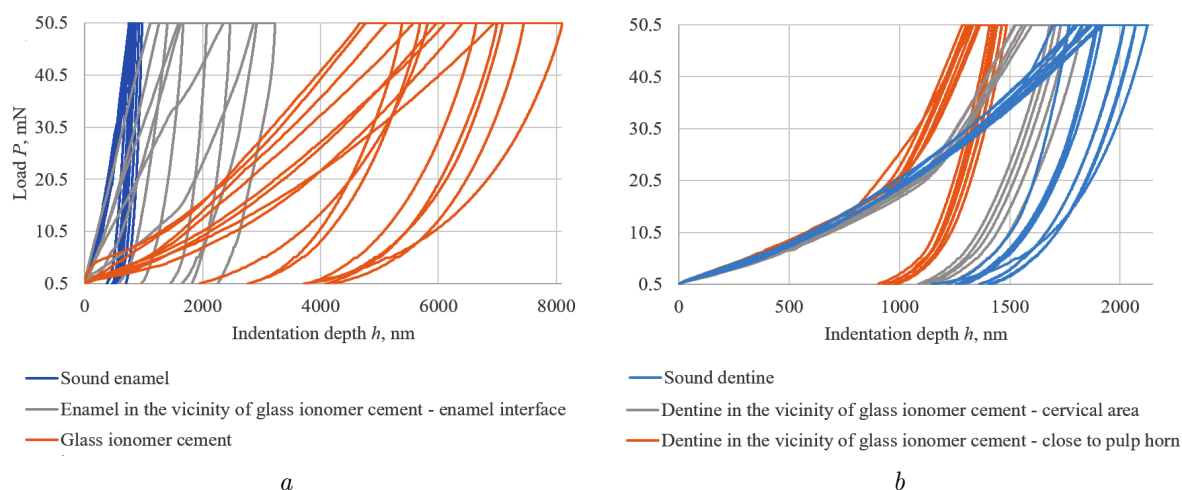


Fig. 4. Diagrams of the dependence of the indentation depth on the applied force for the case of a GIC filling: *a* shows GIC, enamel in its vicinity, and sound enamel; *b* shows dentine in the vicinity of the GIC filling close to the cervical area and to the pulp horn, sound dentine (color online)

Table 3

Properties of the sample treated with the infiltrant — first case

Area	Red. Young's modulus $E_r$ , GPa	Hardness $\bar{I}$ , GPa	Creep, nm
Infiltrated enamel	$94.54 \pm 6.53$	$6.32 \pm 0.95$	$42.7 \pm 27.8$
Sound enamel	$107.67 \pm 11.89$	$7.02 \pm 0.90$	$29.0 \pm 11.9$
Dentine bordering infiltrated enamel	$23.38 \pm 1.76$	$1.16 \pm 0.07$	$119.4 \pm 241.0$
Sound dentine	$26.38 \pm 5.60$	$1.07 \pm 0.07$	$132.1 \pm 26.0$



Table 4

Properties of the sample treated with the infiltrant — second case

Area	Red. Young's modulus $E_r$ , GPa	Hardness $\bar{I}$ , GPa	Creep, nm
Infiltrated enamel	$77.9 \pm 3.99$	$4.90 \pm 0.55$	$58.5 \pm 10.9$
Sound enamel	$88.84 \pm 4.88$	$6.62 \pm 1.32$	$42.0 \pm 21.2$
Dentine bordering infiltrated enamel	$19.37 \pm 2.89$	$1.09 \pm 0.17$	$204.0 \pm 38.6$
Sound dentine	$21.22 \pm 1.62$	$1.25 \pm 0.17$	$152.2 \pm 21.9$

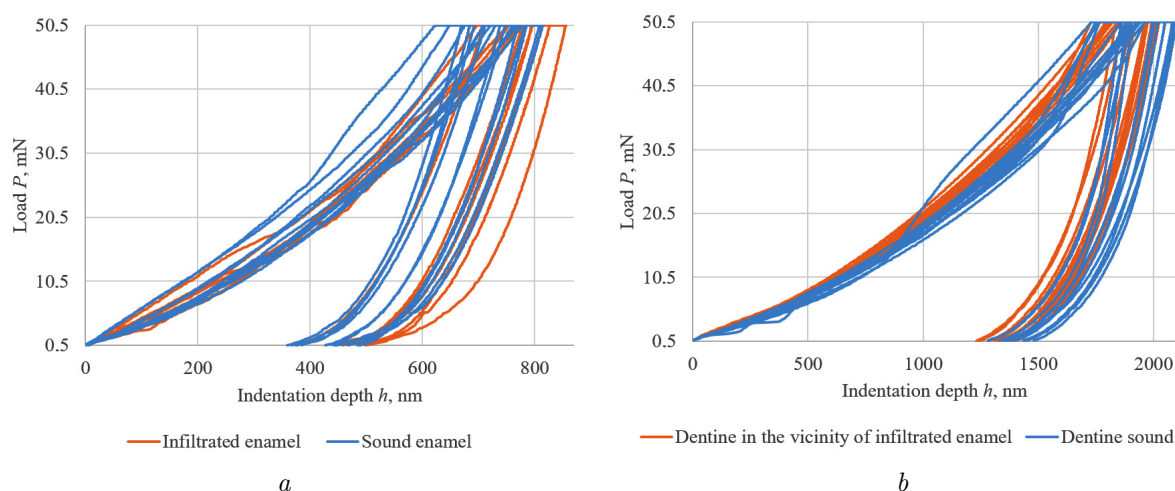


Fig. 5. Diagrams of the dependence of the indentation depth on the applied force for the first case of WLS infiltration: *a* shows infiltrated and sound enamel; *b* shows dentine in the vicinity of the infiltrated enamel and sound dentine (color online)

Observations of the dependence of the indentation depth on the applied force ( $P-h$  diagrams) show that the nature of both the loading and unloading branches of the curves for enamel at the border with the filling is generally similar to that for the sound enamel, but an increase in the indentation depth is observed. These facts indicate a change in the mechanism of resistance to loads of such enamel, despite the fact that during optical microscopy, no visual signs of pathological changes were noted (homogeneous tissue, without color changes and distinguishable cavities [17], Fig. 1, *a*). At the same time, a small number of large defects in the form of pores with a diameter of up to  $19 \mu\text{m}$  are observed on the surface (this pore is shown in Fig. 2, *b*). Similar effects are observed for dentine: its Young's modulus in the filling area decreases by 11.3%, and creep increases by 59.9% in relation to the sound tissue, while the hardness values are comparable.

As for filling materials made of GIC, extremely low values of the reduced Young's modulus and indentation hardness are obvious: they are significantly lower than those of the surrounding (10.4 and 8.9 times, respectively) and sound enamel (58.1 and 40.1 times, respectively). At the same time, the creep of GIC was 1.84 times higher than that of the surrounding enamel and 18.7 times higher than that of sound enamel. Such a low value of mechanical characteristics is consistent with the recent results obtained by Petrović et al. [18] during nanoindentation of a number of commercial GICs. It should be noted that at the boundary between the filling and enamel, as well as between the filling and dentine, there was a delamination of the interface (more than  $50 \mu\text{m}$  wide, Fig. 2, *c*), presumably caused by an increased stress concentration due to an excessive difference in the mechanical characteristics of the filling and the surrounding tissue (which can be further studied using the approaches of [19]). Analysis of optical images showed a high content of glass particles on the cement surface with a diameter of  $6.68 \pm 2.70 \mu\text{m}$ , as well as pores reaching  $15.12 \mu\text{m}$ , and agglomerates of glass microparticles (Fig. 2, *d*).





For the GIC filling, an even smaller angle of inclination of the unloading branches of the  $P - h$  diagrams (Fig. 4) relative to the abscissa axis and a greater spread in depth (due to the heterogeneity of the surface and high porosity) is characteristic compared to the case of the composite filling. The study of dentine in the vicinity of the GIC filling (Fig. 4, b) was carried out in two areas: near the pulp horn and in the cervical area. It is noteworthy that, unlike demineralized dentine or dentine around carious enamel, the values of the reduced Young's modulus and indentation hardness in both areas of dentine in the vicinity of the GIC were higher than the values of the sound tissue: in the cervical area by 8.7% and 29.8%, and near the pulp horn by 68.8% and 78.1%, respectively. Presumably, this phenomenon is associated with tissue deformation caused by polymerization stresses inside the GIC [20, 21]. This observation is consistent with the results of Dias et al. [22], in whose work increased hardness was observed in all areas of direct contact with the GIC in sound and demineralized dentine.

The nanoindentation data of the first case of using a polymer infiltrant show that, despite the lower reduced values of Young's modulus and indentation hardness of the infiltrated enamel compared to sound tissue (by 12.2% and 10.0%, respectively), as well as an increased creep value (by 47.2%), both branches of the  $P - h$  diagrams for the pairs "infiltrated enamel — sound enamel" have a similar character, including the angle of inclination (Fig. 5, a). As for dentine, we note lower values of the reduced Young's modulus and creep of this tissue in the vicinity of the infiltrated enamel (by 11.4% and 9.6%, respectively), as well as a higher hardness value (by 8.4%) compared to sound dentine (Fig. 5, b).

For the second case of using a polymer infiltrant, lower values of the reduced Young's modulus and indentation hardness of the infiltrated enamel relative to the sound tissue were recorded (by 12.3% and 26.0%, respectively), as well as a higher creep value (by 39.3%). The unloading branches of the  $P - h$  diagrams for the pairs "infiltrated enamel — sound enamel" demonstrate a similar character, including the angle of inclination, while the loading branches of the infiltrated enamel have a smaller angle of inclination and a noticeable increase in the depth of indentation. In this sample, the behavior of dentine largely repeats the features of the enamel.

## Conclusion

In this work, an *ex vivo* study of the mechanical properties of composite and GIC fillings, as well as infiltrated enamel and tissues in their vicinity, was conducted, followed by a comparison of the results with the corresponding properties of the sound tissues. The results showed that a composite filling appears more preferable for use in dentistry than a GIC filling due to greater similarity of mechanical properties, a lower probability of adhesion loss at the enamel border, and a smaller content of internal structure artifacts.

The information collected for both samples treated with the infiltrant allows us to draw several conclusions:

- the mechanical properties of enamel after infiltration are closer to the properties of the sound enamel, in contrast to both types of filling materials;
- given the small difference in the mechanical properties of infiltrated enamel and the sound tissue surrounding it, the probability of undesirable stress growth in the infiltrated DEJ is lower than in the case of fillings.

However, further research is needed to better understand the ability of the infiltrant to penetrate tissues in different areas of the tooth and at different stages of caries progression.

*The continuation of the article will be published in the next issue.*

## References

1. GBD 2019 Diseases and Injuries Collaborators. Global burden of 369 diseases and injuries in 204 countries and territories, 1990–2019: A systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2019. *The Lancet*, 2020, vol. 396, iss. 10258, pp. 1204–1222. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30925-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30925-9)
2. Bui F. Q., Almeida-da-Silva C. L. C., Huynh B., Trinh A., Liu J., Woodward J., Osadi H.,



- Ojcius D. M. Association between periodontal pathogens and systemic disease. *Biomedical Journal*, 2019, vol. 42, iss. 1, pp. 27–35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.bj.2018.12.001>
3. Matsumoto N., Kadowaki T., Tsukahara H., Yorifuji T. Association between dental caries and influenza infection in children: A Japanese nationwide population-based study. *Children*, 2021, vol. 8, iss. 9, art. 780. DOI: <https://doi.org/10.3390/children8090780>
  4. Balan P., Udawatte N., Seneviratne C. J. Human microbiome in health and disease with reference to dysbiosis in dental caries and periodontal diseases. *Pathological Basis of Oral and Maxillofacial Diseases*, Wiley, 2025, pp. 293–309. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781119989233.ch18>
  5. Larnani S., Song Y., Kim S., Park Y.-S. Examining enamel-surface demineralization upon exposure to acidic solutions and the remineralization potential of milk and artificial saliva. *Odontology*, 2025, vol. 113, pp. 201–212. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10266-024-00960-y>
  6. Sadyrin E. V., Kislyakov E. A., Karotkiyan R. V., Yogina D. V., Droган E. G., Swain M. V., Maksyukov S. Yu., Nikolaev A. L., Aizikovich S. M. Influence of citric acid concentration and etching time on enamel surface roughness of prepared human tooth: *In vitro* study. In: Altenbach H., Brünig M., Kowalewski Z. (eds.) *Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials*. Advanced Structured Materials, vol. 121. Cham, Springer, 2020, pp. 135–150. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-34851-9\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34851-9_8)
  7. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Evaluation of the influence of white spot lesion on the mechanical properties of human tooth enamel and dentine. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 346–359. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-346-359>
  8. Jamloo H., Majidi K., Noroozian N., Zarezadeh M., Alomar E., Nucci L., Jamilian A. Effect of fluoride on preventing orthodontics treatments-induced white spot lesions: An umbrella meta-analysis. *Clinical and Investigative Orthodontics*, 2024, vol. 83, iss. 2, pp. 53–60. DOI: <https://doi.org/10.1080/27705781.2024.2342732>
  9. Alwin R. M. I., Ragavane P. Nanosilver fluoride: A potential game changer in preventive and special care dentistry. *European Archives of Paediatric Dentistry*, 2025, vol. 26, pp. 817–818. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40368-024-00998-0>
  10. Theodory T. G., Kolker J. L., Vargas M. A., Maia R. R., Dawson D. V. Masking and penetration ability of various sealants and ICON in artificial initial caries lesions *in vitro*. *The Journal of Adhesive Dentistry*, 2019, vol. 21, iss. 3, pp. 265–272. DOI: <https://doi.org/10.3290/j.jad.a42520>
  11. de Mattos Pimenta Vidal C., LaRoy C., Toledo D. C., da Mata Almeida L., Qian F., Hilgert L. A., Bedran-Russo A. K. Hydroxy acids for adhesion to enamel and dentin: Long-term bonding performance and effect on dentin biostability. *Journal of Dentistry*, 2021, vol. 107, art. 103613. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2021.103613>
  12. Maas M., Boldt J., Soliman S., Meyer-Lueckel H., Krastl G., Krug R. Resin infiltration of trauma-induced enamel cracks — A proof-of-concept. *Journal of Dentistry*, 2021, vol. 153, art. 105552. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2024.105552>
  13. Başaran G., Veli I., Başaran E. G. Non-Cavitated approach for the treatment of white spot lesions: A case report. *International Dental Research*, 2011, vol. 1, iss. 2, pp. 65–69. DOI: <https://doi.org/10.5577/intdentres.2011.vol1.no2.5>
  14. Kim S., Kim E.-Y., Jeong T.-S., Kim J.-W. The evaluation of resin infiltration for masking labial enamel white spot lesions. *International Journal of Paediatric Dentistry*, 2011, vol. 21, iss. 4, pp. 241–248. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-263X.2011.01126.x>
  15. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, 1992, vol. 7, pp. 1564–1583. DOI: <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
  16. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Swain M. V., Maksyukov S. Yu., Vasiliev A. S. Efficacy of dental materials in terms of apparent mineral density restoration: Composite resin, glass ionomer cement and infiltrant. *Composites Part C: Open Access*, 2021, vol. 6, art. 100192. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2021.100192>
  17. Benjwal S., Goswami M., Saxena A., Kurien R. S., Mushtaq A. Comparative evaluation of bond strength of three self-adhering flowable composites to sound and demineralized enamel — An *in vitro* study. *Journal of Global Oral Health*, 2021, vol. 4, iss. 1, pp. 3–7. DOI: [https://doi.org/10.25259/JGOH\\_60\\_2020](https://doi.org/10.25259/JGOH_60_2020)
  18. Petrović B., Marković D., Kojić S., Perić T., Dubourg G., Drljaca M., Stojanović G. Characteriza-



- tion of glass ionomer cements stored in various solutions. *Materiali in Tehnologije*, 2019, vol. 53, iss. 2, pp. 285–293. DOI: <https://doi.org/10.17222/mit.2018.159>
19. Zelentsov V. B., Sadyrin E. V., Mitrin B. I., Swain M. V. Mathematical tools for recovery of the load on the fissure according to the micro-CT results. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2023, vol. 138, art. 105625. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2022.105625>
  20. Giachetti L., Scaminaci Russo D., Bambi C., Grandini R. A review of polymerization shrinkage stress: Current techniques for posterior direct resin restorations. *The Journal of Contemporary Dental Practice*, 2006, vol. 7, iss. 4, pp. 79–88. DOI: <https://doi.org/10.5005/jcdp-7-4-79>
  21. Cheetham J. J., Palamara J. E. A., Tyas M. J., Burrow M. F. A comparison of resin-modified glass-ionomer and resin composite polymerisation shrinkage stress in a wet environment. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2014, vol. 29, pp. 33–41. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.07.003>
  22. Dias G. F., Chibinski A. C. R., dos Santos F. A., Hass V., Alves F. B. T., Wambier D. S. The hardness and chemical changes in demineralized primary dentin treated by fluoride and glass ionomer cement. *Revista de Odontologia da UNESP*, 2016, vol. 45, iss. 1, pp. 33–40. DOI: <https://doi.org/10.1590/1807-2577.08815>

Received / Поступила в редакцию 19.02.2025

Accepted / Принята к публикации 18.06.2025

Published / Опубликовано / 28.11.2025



## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 566–577

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 566–577

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-566-577>

EDN: <https://elibrary.ru/TMDBOY>

Научная статья

УДК 519.254

### Алгоритм обнаружения выбросов в нестационарных временных рядах натурных измерений

В. С. Петракова

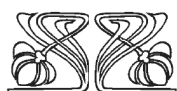
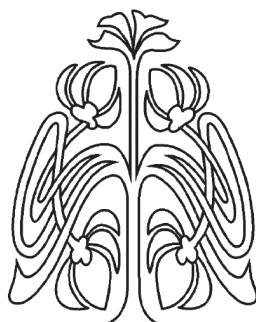
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Россия, 660036,  
г. Красноярск, ул. Академгородок, д. 50/44

**Петракова Виктория Сергеевна**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, [vika-svetlakova@yandex.ru](mailto:vika-svetlakova@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1126-2148>, SPIN: 3099-4941, AuthorID: 1182060

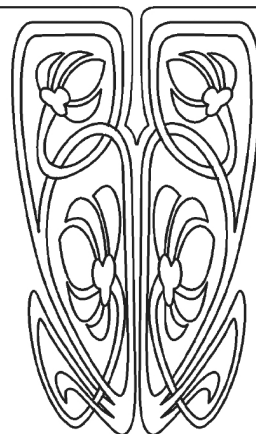
**Аннотация.** Работа посвящена поиску эффективного алгоритма обнаружения выбросов в нестационарных одномерных временных рядах, представляющих собой натурные измерения. Так, нестационарность ряда характеризуется наличием изменчивого тренда в данных, а также гетероскедастичностью — непостоянством дисперсии для отдельно взятых подпоследовательностей временного ряда. Неучет этих особенностей приводит к тому, что выбросы, связанные с поломками или неточностью аппаратуры, фиксирующей натурные измерения, могут быть классифицированы как регулярные значения. Это делает большинство существующих методов обнаружения выбросов во временных рядах неэффективными. В работе описаны реальные данные, представляющие собой наблюдения за температурой и концентрацией загрязнителя в пограничном слое атмосферы г. Красноярска, которые обладают заданными свойствами. Приведен краткий обзор существующих методов, показаны их преимущества и недостатки в применении к имеющимся данным. Предложен авторский подход к обнаружению выбросов в рядах описываемого типа. Представленный в работе метод направлен на коррекцию и объединение существующих подходов и разделен на два этапа: локализация точек, подозрительных на выброс, и регрессия по локализованному участку с адаптивным порогом отсека точек. Предложенный алгоритм протестирован на имеющихся данных. Проведено сравнение с существующими подходами.

**Ключевые слова:** анализ временных рядов, обнаружение выбросов,  $z$ -балл, нестационарность, регрессия, разработка алгоритма

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-71-10022).



Научный  
отдел





**Для цитирования:** Петракова В. С. Алгоритм обнаружения выбросов в нестационарных временных рядах натурных измерений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 566–577. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-566-577>, EDN: TMDBOY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Algorithm for searching for outliers in non-stationary time series of field measurements

V. S. Petrakova

Institute of Computational Modelling SB RAS, 55/44 Academgorodok St., Krasnoyarsk 660036, Russia

Viktoriya S. Petrakova, vika-svetlako@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1126-2148>, SPIN: 3099-4941, AuthorID: 1182060

**Abstract.** The paper is devoted to finding an efficient algorithm for detecting outliers in non-stationary one-dimensional time series representing field measurements. Thus, the non-stationarity of a series is characterized by the presence of a variable trend in the data, as well as heteroscedasticity which is the inconstancy of variance for individual subsequences of the time series. Failure to take these features into account leads to the fact that outliers associated with breakdowns or inaccuracies of the equipment recording field measurements can be classified as regular values. This makes most existing methods for detecting outliers in time series ineffective. The paper describes real data representing observations of temperature and pollutant concentration in the boundary layer of the atmosphere in Krasnoyarsk, which have specified properties. A brief overview of existing methods is given, their advantages and disadvantages in application to the available data are shown. The author's approach to detecting outliers in the series of the described type is proposed. The method proposed in the paper is aimed at correcting and combining existing approaches and is divided into two stages: localization of points suspected of being outliers and regression on the localized section with an adaptive threshold for cutting off points. The proposed algorithm was tested on the available data. A comparison with existing approaches was made.

**Keywords:** time series analysis, outlier detection, z-score, non-stationarity, regression, algorithm development

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-71-10022).

**For citation:** Petrakova V. S. Algorithm for searching for outliers in non-stationary time series of field measurements. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 566–577 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-566-577>, EDN: TMDBOY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Временные ряды представляют собой последовательность наблюдений за изменением некоторой переменной  $x$  во времени, которые могут быть использованы в разных приложениях, в том числе для понимания и прогнозирования поведения некоторой системы, описываемой переменной. Особым видом временных рядов являются ряды, представляющие собой натурные измерения. Во-первых, достижения в области измерительной техники позволяют собирать большие объемы данных с заданной точностью [1]. Во-вторых, такие ряды, как правило, являются существенно нестационарными, т.е. не сохраняют статистические характеристики подпоследовательностей временного ряда со временем, не имеют единого тренда, а также явно выраженной сезонности. Большое количество наблюдений за переменной (т.е. большой размер выборки) усложняет анализ временных рядов, дела





ряд методов неэффективными [2]. Вместе с тем в том числе из-за требований к точности измерений обнаружение выбросов в таких данных является первым шагом в разведочном анализе данных.

С классической точки зрения широко используемое определение понятия «выброс» было дано в работе [3]. Согласно [3, с. 1], выброс — это «наблюдение, которое настолько отличается от других наблюдений, что вызывает подозрения, что оно было вызвано другим механизмом». Этим определением покрывается большой круг процессов — выброс может быть как просто шумом, так и неожиданной сменой поведения системы (аномалией) или ошибкой измерения, связанной с поломкой оборудования. Методы обнаружения выбросов в данных широко развиваются в настоящее время (см. обзорные работы [4–6]), однако лишь небольшое число из них применимо к анализу временных рядов. Это связано с тем, что временные ряды отличаются от выборок тем, что не могут быть перемешаны, так как позиция каждого измерения во временном ряду имеет значение. В обзорных работах [7, 8], посвященных анализу существующих методов для обнаружения выбросов во временных рядах, выделено порядка 15 методов, сгруппированных по нескольким направлениям. Однако выделенные авторами методы имеют ограничения по применимости к длинным нестационарным временным рядам натурных измерений. Таким образом, разработка новых подходов к поиску выбросов во временных рядах, учитывающих контекст, в котором локализуется выброс, является актуальной задачей.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приведено описание данных, которые используются на протяжении статьи для тестирования и обоснования методов. Раздел 2 посвящен краткому обзору существующих методов поиска выбросов во временных рядах и их применению к имеющимся данным. В разд. 3 приведено описание авторской методики и обсуждение результатов ее применения к имеющимся данным. Наконец, заключительный раздел посвящен описанию результатов исследования.

## 1. Описание имеющихся данных

Сложноустроенные нестационарные временные ряды встречаются, в частности, при накоплении наблюдений за окружающей средой, например за качеством атмосферного воздуха. Твердые частицы диаметром 2.5 мк и менее (PM2.5) являются одним из наиболее вредных загрязнителей воздуха в приземном слое атмосферы современных городов и широко признанным маркером качества воздуха. Анализ таких данных позволяет описать динамику смен периодов повышенных концентраций PM2.5 в пограничном слое атмосферы и прогнозировать развитие таких периодов по известным сценариям. Значительное количество текущих исследований сосредоточено на изучении данных о концентрациях PM2.5, собранных сетью пространственно распределенных датчиков, и последующем прогнозировании развития загрязнений (см., например, [9–12]).

Красноярск входит в число российских городов, где качество атмосферного воздуха контролируется на стационарных постах наблюдения по всему городу. В Министерстве экологии и рационального природопользования Красноярского края действует региональная ведомственная информационно-аналитическая система данных о состоянии окружающей среды Красноярского края (КИАС), имеющая девять автоматизированных наблюдательных пунктов (АНП) в черте города. Каждые 20 мин. замеряются температура, влажность, давление и концентрация PM2.5, которые автоматически записываются в набор данных. Собранные данные отражены на геопортале «Система мониторинга воздуха г. Красноярск» (<https://air.krasn.ru/map.html?2=>). Для контроля концентраций PM2.5 в КИАС используются анализаторы пыли модели E-BAM<sup>1</sup> (Met One Instruments Inc., США), принцип действия которых основан на измерении поглощения  $\beta$ -излучения частицами пыли, осажденными на фильтровальной ленте. Данный метод сертифицирован Агентством по

<sup>1</sup>E-BAM particulate monitor operation manual. Electronic resource. URL: <https://metone.com/wp-content/uploads/2022/06/E-BAM-9805-Manual-Rev-G.pdf> (дата обращения: 09.01.2025).



охране окружающей среды США<sup>2</sup>. Анализаторы этого класса рекомендованы для измерения содержания фракций PM10 и PM2.5 в атмосфере, сертифицированы и аккредитованы во многих странах мира, в том числе в России (№ 57884-14 в Государственном реестре средств измерений). Описанные датчики имеют особенность — при низких концентрациях PM2.5 дисперсия измерений существенно выше, чем при высоких. Это, помимо разных трендов на каждом участке (рис. 1), приводит к гетероскедастичности полученных числовых наборов значений.

На рис. 1 представлен полный набор данных по температуре и PM2.5 за период с 1 января 2019 г. по 21 декабря 2023 г. с датчика поста «Ветлужанка».

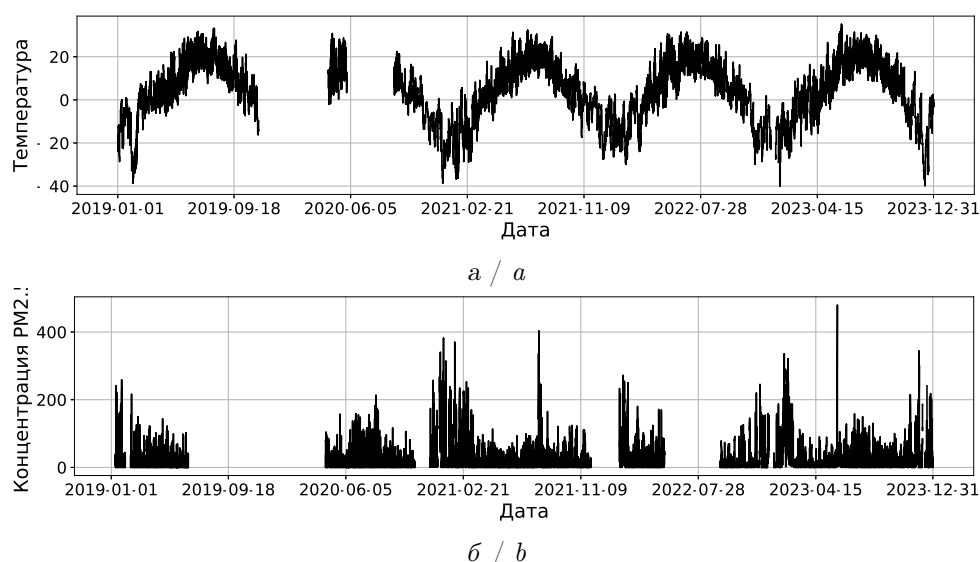


Рис. 1. Измерения температуры (а) и концентрации PM2.5 (б) в г. Красноярске за период с 1 января 2019 г. по 31 декабря 2023 г.

Fig. 1. Measurements of temperature (a) and PM2.5 concentration (b) in Krasnoyarsk from January 1, 2019, to December 31, 2023

Как видно, данные, представленные на рис. 1, содержат большие пропуски. Также в значениях большое количество недлинных пропусков, которые не видны при визуальном анализе всего набора данных. Также показания по концентрации фиксируют несколько выбросов (значения, превышающие 400), которые могут быть идентифицированы визуально. В работе рассматриваются и данные по температуре, которые имеют понятный квадратичный тренд, сезонность и одинаковую дисперсию для всего набора. Показания по концентрации PM2.5 представляют больший интерес для исследования, но, как видно из рис. 1, б, не имеют явно выраженного тренда и сезонности, а также имеют разную дисперсию при низких и высоких концентрациях PM2.5.

## 2. Обзор существующих методов обнаружения выбросов во временных рядах

Существующие методы обнаружения выбросов во временных рядах могут быть условно разделены на следующие подгруппы: основанные на статистическом описании ряда или его части; на оценке близости значения к соседним значениям; на оценке плотности распределения данных; на кластеризации; на регрессионных методах. Наиболее исчерпывающее сравнение работы разных методов на синтетических данных приведено в работе [7]. Здесь будет обсуждаться применимость существующих методов к описанным в предыдущем разделе данным.

<sup>2</sup>Environmental Technology Verification Report. URL: [https://archive.epa.gov/nrmrl/archive-etv/web/pdf/01\\_vr\\_metone\\_bam1020.pdf](https://archive.epa.gov/nrmrl/archive-etv/web/pdf/01_vr_metone_bam1020.pdf) (дата обращения: 18.08.2023).

Статистические методы основаны на предположении, что выброс — это значение, которое не вписывается в статистическое описание всего временного ряда или его подпоследовательности. Здесь основным подходом является вычисление (модифицированной)  $z$ -оценки, квартилей и межквартильного размаха [13]. Квартили и межквартильный размах показывают, какие значения наиболее распространены в выборке, в предположении, что данные распределены нормально. Это требование не выполняется для имеющихся данных, даже если рассматривать отдельно взятые подпоследовательности. Гистограммы распределения временных рядов для измерений температуры и концентрации PM2.5 приведены на рис. 2.

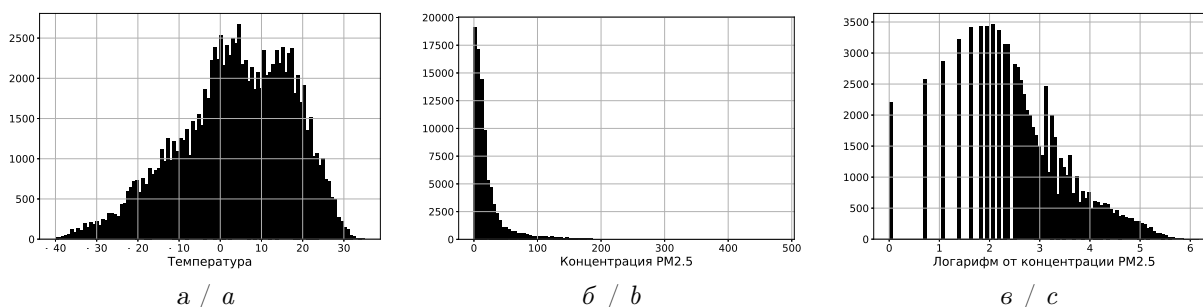


Рис. 2. Гистограммы распределения данных измерений: а — температура; б — концентрация PM2.5; в — десятичный логарифм от измерений концентрации PM2.5

Fig. 2. Histograms of measurement data distribution:  $a$  is temperature;  $b$  is PM2.5 concentration;  $c$  is decimal logarithm of PM2.5 concentration measurements

Таким образом, данные не имеют нормального распределения, более того, гистограммы распределений исследуемых временных рядов мультимодальны. Это делает критерий, основанный на расчете квартилей, непригодным для анализа имеющихся данных.

Расчет  $z$ -оценки [14] здесь является более подходящим инструментом. Под  $z$ -оценкой понимают меру относительного разброса наблюдаемого значения, которая показывает, насколько отличается разброс значений от выбранной меры центральной тенденции. Различают стандартную ( $Z_{mean}(x_i)$ ) и модифицированную ( $Z_{med}(x_i)$ )  $z$ -оценку для значения  $x_i$  временного ряда (или его подпоследовательности)  $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ :

$$Z_{mean}(x_i) = \left| \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right|, \quad Z_{med}(x_i) = \left| \frac{x_i - \text{median}(X_t)}{1.486 \cdot MAD} \right|,$$

где для  $X_t$  определены:  $\mu$  — выборочное среднее,  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение,  $\text{median}(X_t)$  — медиана,  $MAD$  — медианное абсолютное отклонение. Модифицированная  $z$ -оценка более устойчива в сравнении со стандартной  $z$ -оценкой. Значение  $x_i$  считается выбросом, если  $z$ -оценка больше некоторого заданного порога, чаще всего выбираемого равным 3 (для нормально распределенных данных). Для сложноустроенных временных рядов не имеет смысла строить  $z$ -оценку для всего ряда  $X_t$ , а только для его подпоследовательности заданной длины. Такой подход называется *MZS (Moving z-score)*. Здесь для принятия решения по точке  $x_i$  вычисляется  $z$ -оценка по последовательности  $\{x_{i-w}, \dots, x_{i-1}\}$ , где  $w$  — заранее заданная величина окна. Результаты применения стандартной и модифицированной  $z$ -оценки для некоторых подпоследовательностей исследуемых данных с  $w = 10$  приведены на рис. 3, 4. Здесь и далее использование разных цветов для выделения точек, определяемых как выброс, не является характеристикой метода, а используется только для визуального контрастирования результата применения разных методов.

Так,  $z$ -оценка хорошо справляется с определением единичных, явно выбивающихся из последовательностей значений (рис. 3,  $d$ – $z$ ), при этом модифицированная оценка определяет гораздо больше точек, подозрительных на выброс. Часть из этих точек действительно является пропущенной, как, например, точки в районе 9–11 утра на рис. 3,  $b$ ,  $g$ , а часть из них — как на рис. 3,  $d$ ,  $e$ , являются ложно принимаемыми.

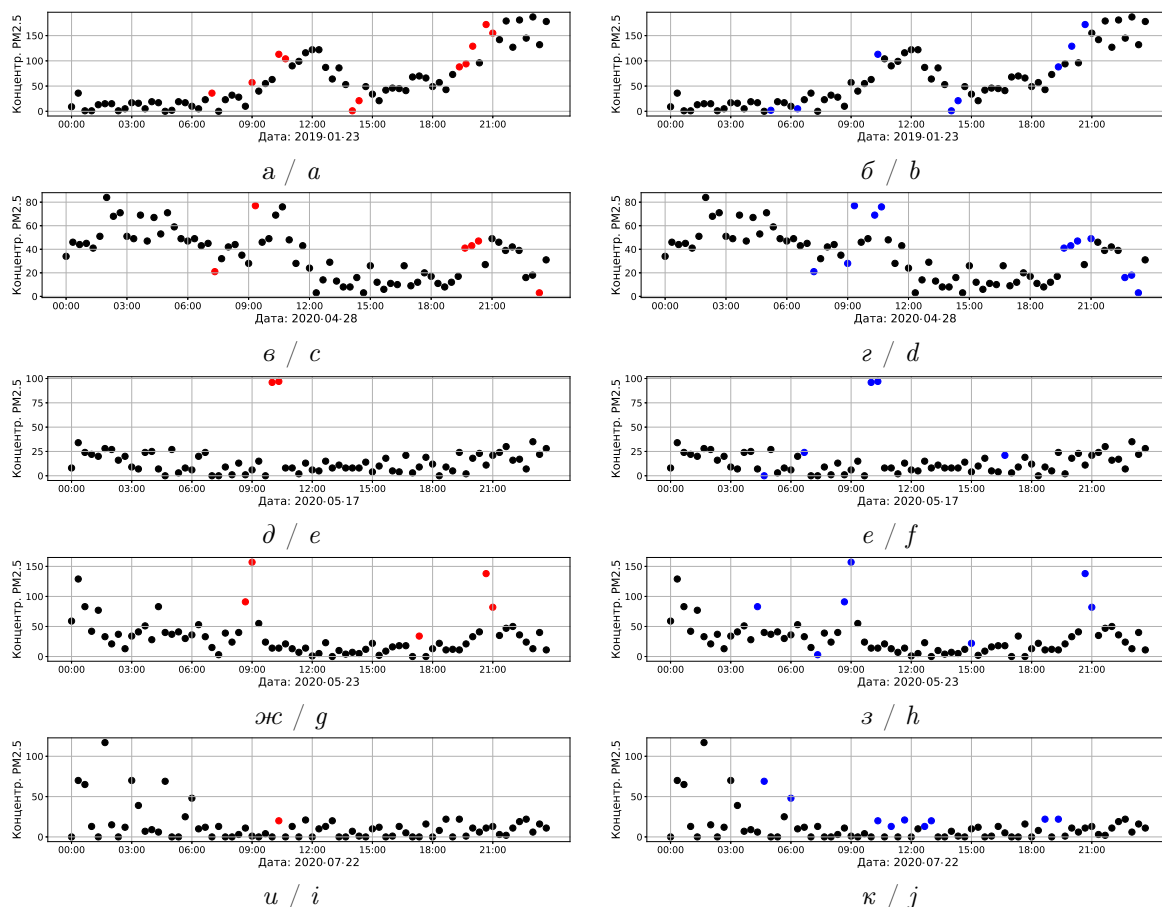


Рис. 3. Результат применения  $z$ -оценки к некоторым подпоследовательностям временного ряда по показаниям концентрации PM2.5: а, в, д, ж, u — результаты применения стандартной  $z$ -оценки; б, г, з, з, κ — результаты применения модифицированной  $z$ -оценки (цвет онлайн)

Fig. 3. The result of applying the  $z$ -score to some subsequences of the time series based on the PM2.5 concentration readings: а, в, д, ж, u are results of applying the standard  $z$ -score; б, г, з, з, κ are results of applying the modified  $z$ -score (color online)

Результат получается хуже, если данные обладают меньшей дисперсией, но частыми сменами тренда, как данные по температуре (см. рис. 4).

Поскольку статистические характеристики подпоследовательности меняются при смене тренда, то точки разладки (точки смены тренда) определяются как выбросы. Все рисунки для каждого набора данных доступны по ссылке: [https://colab.research.google.com/drive/1Hrw6Jp3X3QSwcCey\\_NumvRxBaWr7i9O?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1Hrw6Jp3X3QSwcCey_NumvRxBaWr7i9O?usp=sharing)

Методы обнаружения выбросов, основанные на оценке близости значения к ближайшим соседям [15], основаны на правиле, что расстояние между  $x_i$  и группой ее ближайших соседей  $x_{i-w}, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+w}$  значений меньше заданного порога  $d$ . Проблема такого класса методов заключается в том, что если в данных есть быстрорастущий тренд, то такие методы становятся неэффективными.

Методы, основанные на плотности распределения данных [16], заключаются в том, что для временного ряда (или его подпоследовательности)  $X_t$  строится гистограмма, а значения, определяемые как выбросы, находятся в хвосте гистограммы. Такая группа методов не подходит для исследуемых данных, поскольку данные имеют мультимодальное распределение; т. е. сначала должны быть разделены на классы, соответствующие каждой моде. Эта задача является сложной и практически не описана в литературе, за исключением небольшого числа работ (см., например, [17, 18]), а также требует предварительного знания о распределении в каждом классе.

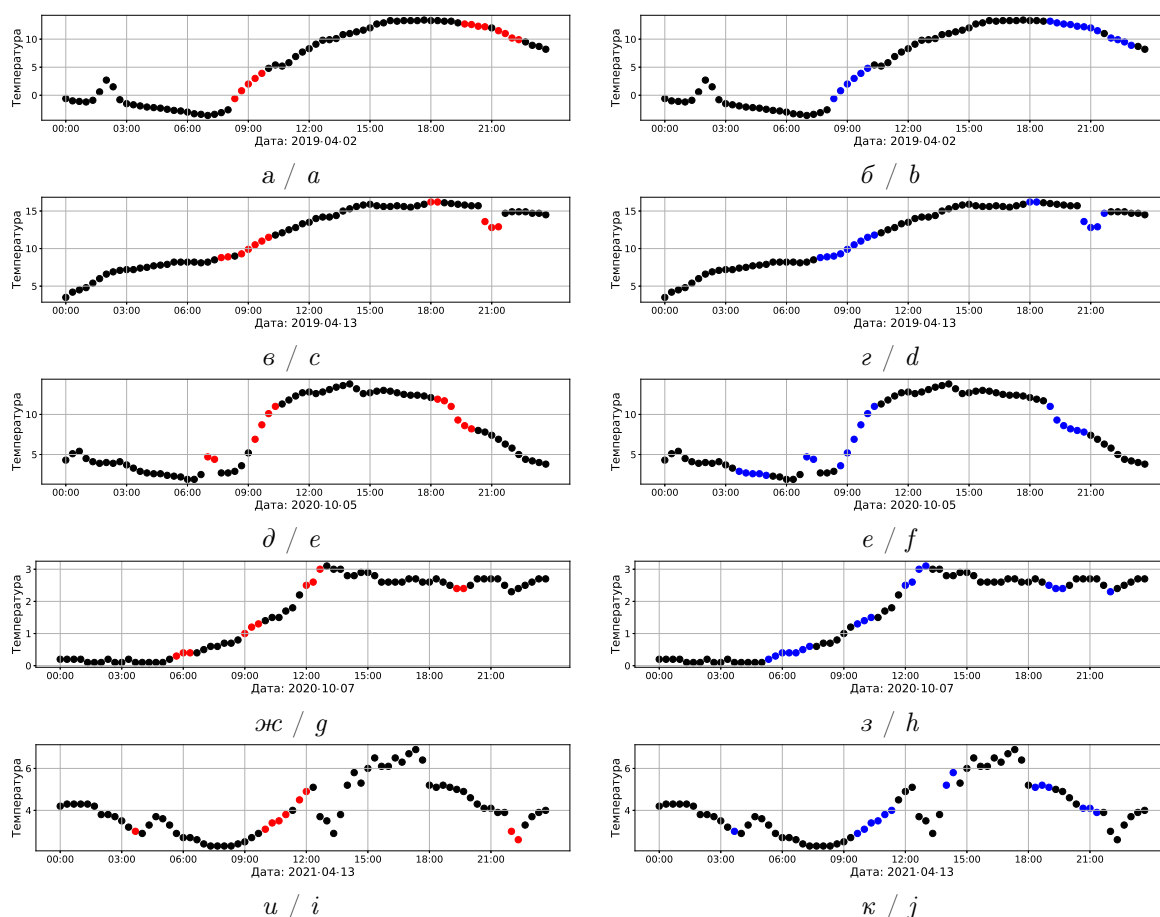


Рис. 4. Результат применения  $z$ -оценки к некоторым подпоследовательностям временного ряда по показаниям температуры:  $a, в, д, ж, u$  — результаты применения стандартной  $z$ -оценки;  $б, г, з, е, з, κ$  — результаты применения модифицированной  $z$ -оценки (цвет онлайн)

Fig. 4. The result of applying the  $z$ -score to some subsequences of the time series of temperature readings:  $a, c, e, g, i$  are results of applying the standard  $z$ -score;  $b, d, f, h, j$  are results of applying the modified  $z$ -score (color online)

Отметим, что метод, как и в предыдущих случаях, может быть применен к отдельно взятым подпоследовательностям. Но здесь подразумевается, что подпоследовательности должны быть большого размера, а значит, также отражают общую мультимодальность данных.

Последняя группа регрессионных методов является наиболее перспективной в применении к исследуемым данным. Регрессионные методы основываются на определении выброса как точки, которая значительно отклоняется от своего ожидаемого значения. Таким образом, при наличии одномерного временного ряда точка в  $i$ -й момент времени может быть объявлена выбросом, если расстояние до ее ожидаемого значения превышает предопределенный порог  $\tau$ . Так, если ожидаемое значение для  $x_i$  определяется как  $\hat{x}_i$  и  $|x_i - \hat{x}_i| > \tau$ , то  $(t_i, x_i)$  является выбросом.

Ожидаемое значение  $\hat{x}_i$  определяется по регрессионной модели, построенной по подпоследовательности временного ряда, включающей точку  $x_i$ . Основные трудности связаны с необходимостью предварительного знания о структуре тренда, определением значения порога  $\tau$  и вычислениями для больших наборов данных. Проблема автоматического поиска структуры тренда может быть решена выбором полиномиальной аппроксимации высокого порядка для небольшого числа точек. Проблема выбора порога  $\tau$  — более сложная, поскольку при гетероскедастичных данных значение порога должно определяться на каждом наборе точек самостоятельно, так как одна регрессионная кривая может объединить участки





с разной дисперсией. На рис. 5 представлен результат работы регрессионного алгоритма для тех же подпоследовательностей временного ряда, что и на рис. 3, 4. В качестве порога были выбраны значения  $\tau = 0.7$  для температуры и  $\tau = 20$  для концентрации PM2.5. Регрессионная модель строилась по 12 точкам.

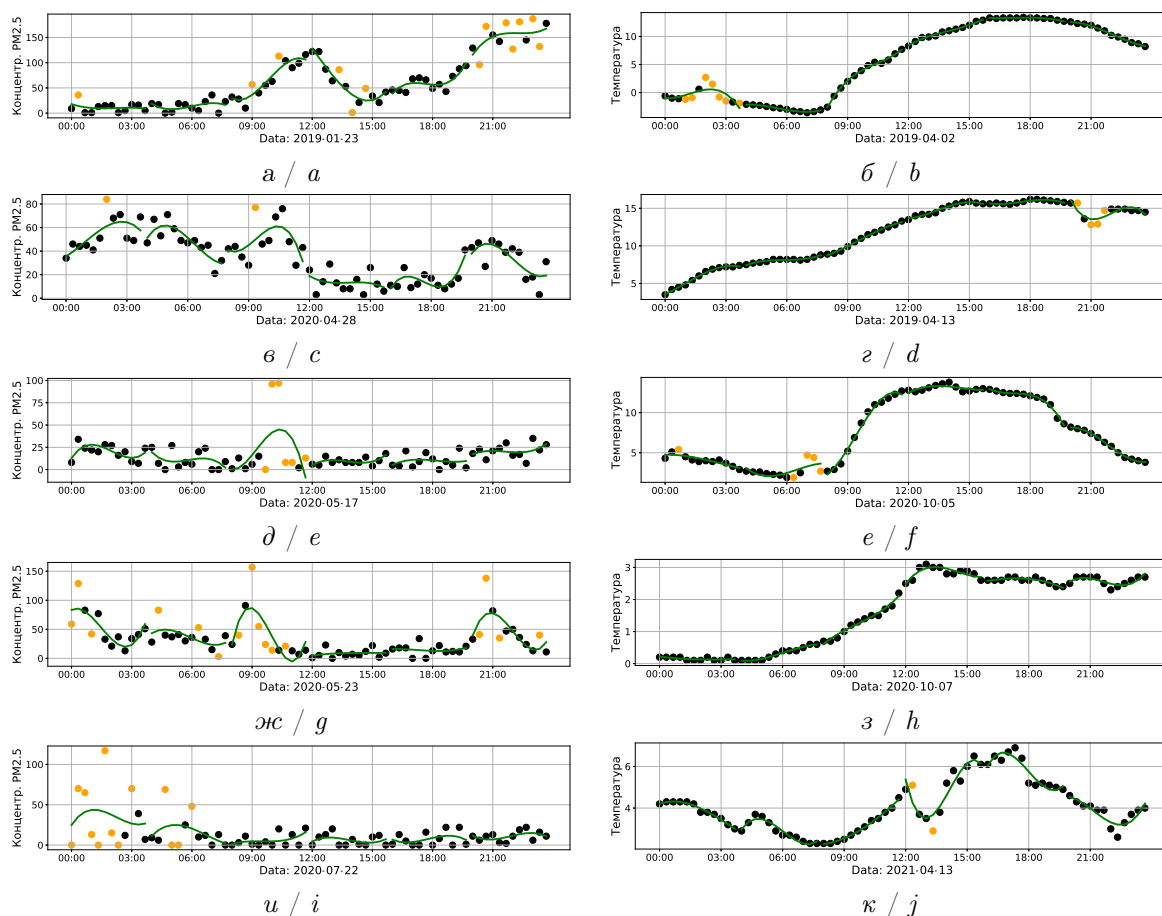


Рис. 5. Результат применения регрессионной кубической полиномиальной модели для оценки выбросов: а, в, д, жс, u — в данных по концентрации PM; б, г, е, з, κ — в данных измерений температуры (цвет онлайн)

Fig. 5. The result of applying a regression cubic polynomial model to estimate outliers: a, c, e, g, i are in the PM concentration data; b, d, f, h, j are in the temperature measurement data (color online)

Таким образом, регрессионный подход более точен в определении аномальных значений, чем описанные выше, относительно исследуемых данных. Однако, как было указано выше, такой метод может выдавать ошибки в случае гетероскедастичных данных (см., рис. 5, д, жс, u). Метод не точен, если совпадают точки смены регрессионной модели и тренда в данных, тогда крайние точки подпоследовательности определяются как выброс (см. рис. 5, κ), необходимость строить модель высокого порядка на каждом небольшом наборе точек делает подход вычислительно- и времязатратным.

### 3. Частично регрессионный метод поиска выбросов в сложноустроенных временных рядах

Предлагаемый здесь подход направлен на устранение недостатков методов, основанных на построении регрессии и оценке расстояния до ближайших соседей. Методы, основанные на расчете расстояний к рядом лежащим точкам, позволяют учесть основное свойство ряда — связанность его значений между собой, а регрессионные — оценить отклонение значения от наблюдаемого в данных тренда. Предлагаемый метод заключается в том, чтобы сначала

найти места скопления точек, подозрительных на выброс, а затем их обработать регрессионной моделью. Наличие предобработки позволит снизить вычислительную сложность регрессионного метода и устранить влияние гетероскедастичности, наблюдаемой в данных, на результат отнесения точки к выбросу. Таким образом, предлагаемый алгоритм состоит из двух этапов:

- 1) предобработка;
- 2) регрессионная модель с адаптивным условием определения выброса.

### 3.1. Первый этап. Предобработка

Предобработка заключается в том, чтобы найти точки, значение которых являются подозрительными на выброс. С этой целью для каждой точки  $x_i$  проводится две прямых. Положим, что через точки  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_{i+2}, x_{i+2})$  проходит прямая, заданная уравнением

$$y_{i,1} = k_{i,1}x + b_{i,1}, \quad (1)$$

а через точки  $(t_{i+1}, x_{i+1})$ ,  $(t_{i+3}, x_{i+3})$  — прямая

$$y_{i,2} = k_{i,2}x + b_{i,2}. \quad (2)$$

После этого для точек  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_{i+2}, x_{i+2})$  считаются расстояния  $d_i$ ,  $d_{i+2}$  до прямой, заданной уравнением (2), а для точек  $(t_{i+1}, x_{i+1})$ ,  $(t_{i+3}, x_{i+3})$  — до прямой, заданной уравнением (1). Таким образом, за один проход по временному ряду  $X_t$  вычислением 8 констант получен набор расстояний  $D = d_i$ . Эти расстояния позволяют оценить, насколько значение в точке отличается от ее ближайших соседей, при этом учитывая факт, что в данных может быть непостоянный тренд. Теперь для отсеечения набора времен  $t_i$ , рядом с которыми есть значения, подозрительные на выброс или соседние с ними, необходимо выбрать пороговое значение  $d_T$ , такое, что если  $d_i > d_T$ , то рядом с  $t_i$  может находиться выброс. В качестве  $d_T$  можно выбрать некоторое значение процентиля для набора  $D$ . Так, на рис. 6 выделены значения, которые являются подозрительными на выброс или соседствуют с ними для исследуемых данных по температуре и концентрации PM2.5. В качестве порога отсеечения использовалось значение  $d_T$ , равное 80-й перцентили ( $q_{80}$ ) набора  $D$ .

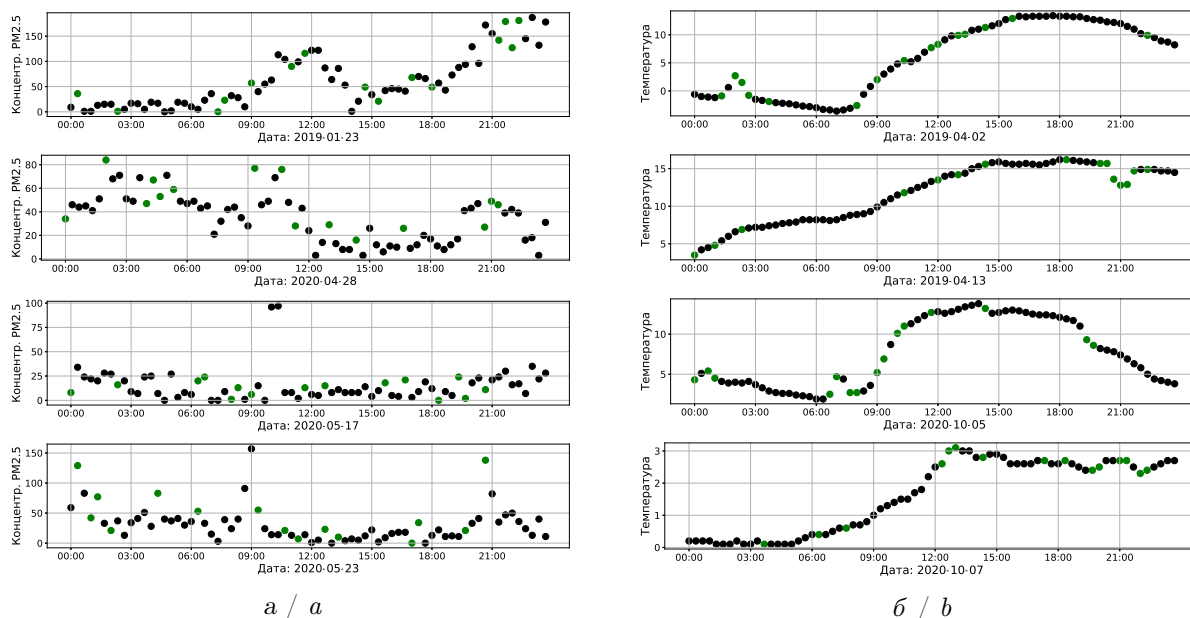


Рис. 6. Результат поиска точек, подозрительных на выброс, в данных по концентрации РМ (а) и измерений температуры (б) (цвет онлайн)

Fig. 6. The result of searching for outlier points in PM concentration data (a) and temperature measurements (b) (color online)



### 3.2. Второй этап. Регрессия и отсечение

Второй этап заключается в том, что для каждого скопления точек, подозрительных на выброс, строится регрессионная модель третьего порядка для заданного набора значений и ближайших к скоплению точек. Так, положим, точка  $(t_j, x_j)$  определена на предыдущем этапе как подозрительная на выброс. Если в диапазоне  $(t_{j-w}, t_{j+w})$  находятся еще точки, подозрительные на выброс, то рассчитывается величина  $j'$  — медианное положение точки, подозрительной на выброс. Далее по  $2w$  точкам, лежащим в диапазоне  $(t_{j'-w}, t_{j'+w})$ , строится полиномиальная регрессия третьего порядка:

$$y_{j',k}(x) = a_{j',k}x^3 + b_{j',k}x^2 + c_{j',k}x + d_{j',k}.$$

Величина  $w \in Z$  является гиперпараметром алгоритма и задается пользователем. Решение, является ли точка  $(t_j, x_j)$ , где  $t_j \in (t_{j'-w}, t_{j'+w})$ , выбросом, принимается при выполнении одного из двух (или их совокупности) условий:

$$Z_{med}(|y_{j',k}(t_j) - x_j|) > Z_T, \quad (3)$$

$$Z_{med}(\text{dist}((t_j, x_j), y_{j',k}(x))) > Z_T. \quad (4)$$

Так, условие (3) отсекает те точки  $(t_j, x_j)$ , которые далеки от прогнозируемого значения, полученного по построенной регрессии, а условие (4) — точки, которые далеки от построенной регрессионной кривой. Использование  $z$ -оценки в качестве условия позволяет снизить чувствительность метода к гетероскедастичности данных.

Условие (3) является более простым в реализации, а (4) увеличивает точность, но требует решения задачи минимизации. Результаты применения алгоритма к исследуемым данным с гиперпараметрами  $d_T = q_{80}$ ,  $w = 15$ ,  $z_T = 1.5$  представлены на рис. 7.

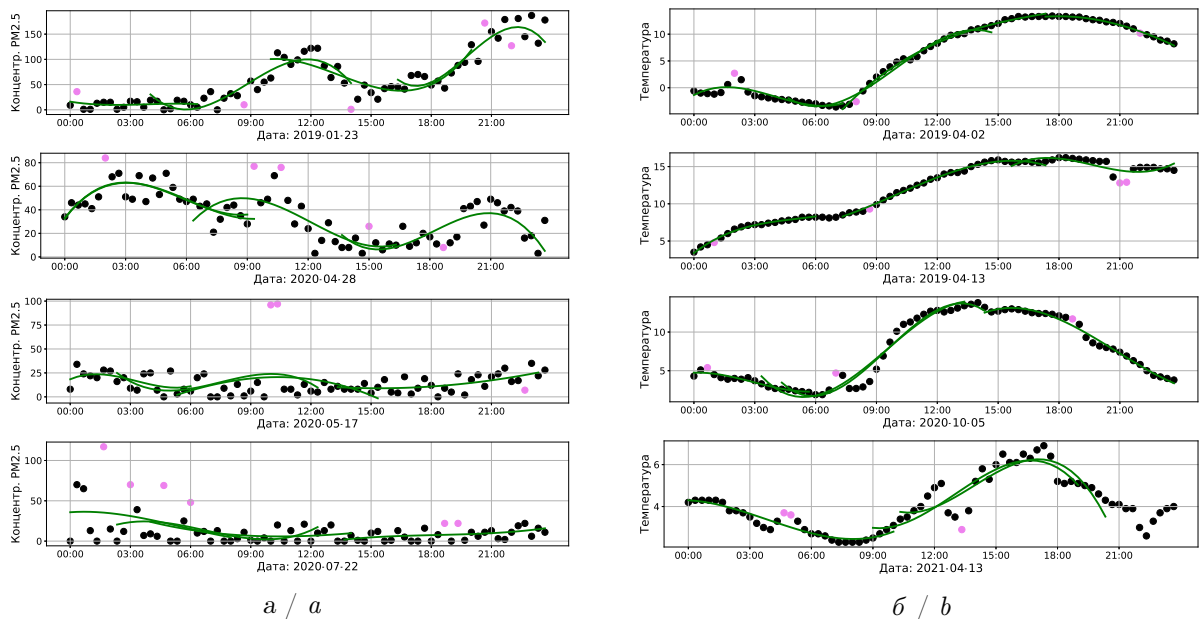


Рис. 7. Результат применения предложенного алгоритма для оценки выбросов в данных по концентрации РМ (а) и измерений температуры (б) (цвет онлайн)

Fig. 7. The result of applying the proposed algorithm to estimate emissions in PM concentration data (a) and temperature measurements (b) (color online)

Таким образом, предложенный алгоритм делает меньшее количество ложно положительных классификаций по сравнению с описанными выше алгоритмами для гетероскедастичных данных (см., например, рис. 7, а). Однако, как и другие методы, возможно ложно



отрицательное срабатывание (см., например, последний рисунок из рис. 7, а: крайние левые точки не были классифицированы как выбросы). Эта проблема может быть решена увеличением чувствительности алгоритма к выбросам (уменьшении значения  $Z_T$ ), однако это приведет к увеличению ложно положительных срабатываний.

## Выводы

Работа посвящена поиску эффективных алгоритмов обнаружения выбросов в длинных сложно устроенных временных рядах с частой сменой тренда и проявлением гетероскедастичности в данных. Рассмотрены классы существующих алгоритмов, для которых определены их преимущества и недостатки для имеющихся реальных временных рядов натурных измерений. Показано, что методы, основанные на статистическом описании временного ряда, распознают точки разладки (точки смены тренда) как выбросы, что является ложно положительным срабатыванием. Методы, основанные на анализе гистограмм, не подходят для мультимодально распределенных данных, более того, требуют предварительного знания или предположения о распределении временного ряда. Методы, основанные на сравнении расстояний между ближайшими точками, плохо работают для рядов с быстро растущим трендом. Регрессионные методы вычислительно сложны и допускают большее число ложно положительных и ложно отрицательных срабатываний для гетероскедастичных данных.

Предложенный в работе метод направлен на коррекцию и объединение известных подходов. Метод разделен на два этапа: сначала происходит предобработка, в результате которой локализуются элементы ряда, поблизости с которыми могут быть выбросы, затем локально применяется регрессионная модель. Порог определения точек на выброс является адаптивным и зависит от локализации точки, что позволяет ему учитывать смены тренда и гетероскедастичность.

Недостатки предложенного алгоритма заключаются, в первую очередь, в большом количестве гиперпараметров (три параметра), к определению одного из которых (параметр  $Z_T$ ) алгоритм крайне чувствителен. Также алгоритм является вычислительно затратным при большом числе точек, подозрительных на выброс. Так, если количество таких точек больше, чем  $N/w$ , то алгоритм за счет препроцессинга является более вычислительно- и времязатратным, чем регрессионный.

Полный набор результатов для всего набора реальных данных, описанных в разд. 1, можно найти по ссылке: [https://colab.research.google.com/drive/1Irw6Jp3X3QSwcCey\\_NumvRxBaWr7i9O?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1Irw6Jp3X3QSwcCey_NumvRxBaWr7i9O?usp=sharing).

## Список литературы / References

1. Bezmenov I. V., Drozdov A. E., Pasynok S. L. A strategy for finding outliers in noisy data series including an unknown trend. *Measurement Techniques*, 2022, vol. 65, iss. 5, pp. 339–345. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11018-022-02085-6>
2. Fan J., Han F., Liu H. Challenges of big data analysis. *National Science Review*, 2014, vol. 1, iss. 2, pp. 293–314. DOI: <https://doi.org/10.1093/nsr/nwt032>
3. Hawkins D. M. *Identification of outliers*. Monographs on Statistics and Applied Probability. New York, Springer Netherlands, 1980. 188 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-3994-4>
4. Kiani R., Jin W., Sheng V. S. Survey on extreme learning machines for outlier detection. *Machine Learning*, 2024, vol. 113, pp. 5495–5531. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10994-023-06375-0>
5. Rhyu J., Bozinovski D., Dubs A. B., Mohan N., Cummings Bende E. M., Maloney A. J., Nieves M., Sangerman J., Lu A. E., Hong M. S., Artamonova A., Ou R. W., Barone P. W., Leung J. C., Wolfrum J. M., Sinskey A. J., Springs S. L., Braatz R. D. Automated outlier detection and estimation of missing data. *Computers & Chemical Engineering*, 2024, vol. 180, art. 108448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2023.108448>
6. Hu R., Chen L., Wang Y. *An efficient outlier detection algorithm for data streaming*. arXiv:2501.01061 [stat] January 2, 2025. 12 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.01061>
7. Alimohammadi H., Shengnan N. Ch. Performance evaluation of outlier detection techniques in



- production timeseries: A systematic review and meta-analysis. *Expert Systems with Applications*, 2022, vol. 191, art. 116371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116371>
8. Blázquez-García A., Conde A., Mori U., Lozano J. A. A review on outlier/anomaly detection in time series data. *ACM Computing Surveys*, 2021, vol. 54, iss. 3, pp. 1–33. DOI: <https://doi.org/10.1145/3444690>
  9. Zhao N., Liu Y., Vanos J. K., Cao G. Day-of-week and seasonal patterns of PM2.5 concentrations over the United States: Time-series analyses using the Prophet procedure. *Atmospheric Environment*, 2018, vol. 192, pp. 116–127. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2018.08.050>
  10. Zhai B., Chen J., Yin W., Huang Z. Relevance analysis on the variety characteristics of PM2.5 concentrations in Beijing, China. *Sustainability*, 2018, vol. 10, iss. 9, art. 3228. DOI: <https://doi.org/10.3390/su10093228>
  11. Liu B., Yan S., Li J., Li Y., Lang J., Qu G. A spatiotemporal recurrent neural network for prediction of atmospheric PM2.5: A case study of Beijing. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 2021, vol. 8, iss. 3, pp. 578–588. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCSS.2021.3056410>
  12. Wang P., Zhang H., Qin Z., Zhang G. A novel hybrid-Garch model based on ARIMA and SVM for PM2.5 concentrations forecasting. *Atmospheric Pollution Research*, 2017, vol. 8, iss. 5, pp. 850–860. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apr.2017.01.003>
  13. Senthamarai Kannan K., Manoj S. K., Arumugam S. Labeling methods for identifying outliers. *International Journal of Statistics and Systems*, 2015, vol. 10, iss. 2, pp. 231–238.
  14. Mare D. S., Moreira F., Rossi R. Nonstationary Z-Score measures. *European Journal of Operational Research*, 2017, vol. 260, iss. 1, pp. 348–358. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.12.001>
  15. Wang H., Bah M. J., Hammad M. Progress in outlier detection techniques: A survey. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 107964–108000. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2932769>
  16. Tang B., He H. A local density-based approach for outlier detection. *Neurocomputing*, 2017, vol. 241, pp. 171–180. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.02.039>
  17. Boulmerka A., Allili M. S., Ait-Aoudia S. A generalized multiclass histogram thresholding approach based on mixture modelling. *Pattern Recognition*, 2014, vol. 47, iss. 3, pp. 1330–1348. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2013.09.004>
  18. Karpatne A., Khandelwal A., Kumar V. Ensemble learning methods for binary classification with multi-modality within the classes. *Proceedings of the 2015 SIAM International Conference on Data Mining*, 2015, pp. 730–738. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611974010.82>

Поступила в редакцию / Received 09.01.2025

Принята к публикации / Accepted 22.04.2025

Опубликована / Published 28.11.2025





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 578–588

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 578–588

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-578-588>

EDN: <https://elibrary.ru/VXJDNT>

Article

## Mathematical models for analyzing and predicting the dynamics of the main characteristics of the road transport system with the correction procedure

A. F. Rezchikov<sup>1</sup>, M. S. Polyakov<sup>2✉</sup>, V. A. Kushnikov<sup>2</sup>, A. S. Bogomolov<sup>2,3</sup>,  
O. I. Dranko<sup>1</sup>, D. I. Putilov<sup>3</sup>, I. A. Stepanovskaya<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, 65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Center “Saratov Scientific Centre of the Russian Academy of Science”, 24B Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

<sup>3</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexander F. Rezchikov, [rw4cy@mail.ru](mailto:rw4cy@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4312-0008>, SPIN: 1677-2770, AuthorID: 8052

Maksim S. Polyakov, [maxg6000@mail.ru](mailto:maxg6000@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-2927-035X>, SPIN: 6409-2890, AuthorID: 1188650

Vadim A. Kushnikov, [kushnikoff@yandex.ru](mailto:kushnikoff@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

Aleksey S. Bogomolov, [bogomolov@iptmuran.ru](mailto:bogomolov@iptmuran.ru), <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

Oleg I. Dranko, [olegdranko@gmail.com](mailto:olegdranko@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-4664-1335>, SPIN: 1670-9570, AuthorID: 314460

Daniil I. Putilov, [putilov.dania@ya.ru](mailto:putilov.dania@ya.ru), <https://orcid.org/0009-0001-6754-8228>

Iraida A. Stepanovskaya, [irstepan2016@yandex.ru](mailto:irstepan2016@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2012-8063>, SPIN: 1416-6241, AuthorID: 6701

**Abstract.** This article discusses a set of mathematical models that utilize the system-dynamic approach. We have created a set of interconnected system dynamics models, enabling us to forecast key road safety indicators in Russia. These indicators were carefully chosen by referring to the regulatory documents of the State Traffic Inspectorate under the Ministry of Internal Affairs in Russia. The findings will be used to enhance the traffic control systems' software.

**Keywords:** road transport network, system dynamics models, safety, cause-and-effect relationship, analysis, forecasting

**For citation:** Rezchikov A. F., Polyakov M. S., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S., Dranko O. I., Putilov D. I., Stepanovskaya I. A. Mathematical models for analyzing and predicting the dynamics of the main characteristics of the road transport system with the correction procedure. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 578–588. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-578-588>, EDN: VXJDNT

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья

УДК 519.7

## Математические модели анализа и прогнозирования динамики основных характеристик дорожно-транспортной системы с процедурой коррекции

А. Ф. Резчиков<sup>1</sup>, М. С. Поляков<sup>2✉</sup>, В. А. Кушников<sup>2</sup>, А. С. Богомоллов<sup>2,3</sup>,  
О. И. Дранко<sup>1</sup>, Д. И. Путилов<sup>3</sup>, И. А. Степановская<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Россия, 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр Российской академии наук», Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

<sup>3</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Резчиков Александр Федорович**, доктор технических наук, главный научный сотрудник, gw4cy@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4312-0008>, SPIN: 1677-2770, AuthorID: 8052

**Поляков Максим Сергеевич**, аспирант лаборатории комплексных научных исследований, maxg6000@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2927-035X>, SPIN: 6409-2890, AuthorID: 1188650

**Кушников Вадим Алексеевич**, доктор технических наук, главный научный сотрудник, kushnikoff@iptmuran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

**Богомоллов Алексей Сергеевич**, доктор технических наук, <sup>2</sup>ведущий научный сотрудник; <sup>3</sup>профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, alexbogomolov@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

**Дранко Олег Иванович**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, olegdranko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4664-1335>, SPIN: 1670-9570, AuthorID: 314460

**Путилов Даниил Иванович**, аспирант кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, putilov.dania@ya.ru, <https://orcid.org/0009-0001-6754-8228>

**Степановская Ираида Александровна**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник,irstepan@ipu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2012-8063>, SPIN: 1416-6241, AuthorID: 6701

**Аннотация.** Разработан комплекс взаимосвязанных моделей системной динамики, предназначенный для прогнозирования ключевых индикаторов безопасности дорожного движения в Российской Федерации. Выбор указанных индикаторов был осуществлен на основании анализа нормативно-правовых актов, регламентирующих деятельность Государственной автомобильной инспекции МВД России. Полученные результаты исследования послужат основой для дальнейшего совершенствования математического обеспечения систем управления дорожно-транспортным движением, что, в свою очередь, может способствовать повышению уровня безопасности на автомобильных дорогах.

**Ключевые слова:** дорожно-транспортная сеть, модели системной динамики, безопасность, причинно-следственная взаимосвязь, анализ, прогнозирование

**Для цитирования:** Rezchikov A. F., Polyakov M. S., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S., Dranko O. I., Putilov D. I., Stepanovskaya I. A. Mathematical models for analyzing and predicting the dynamics of the main characteristics of the road transport system with the correction procedure [Резчиков А. Ф., Поляков М. С., Кушников В. А., Богомоллов А. С., Дранко О. И., Путилов Д. И., Степановская И. А. Математические модели анализа и прогнозирования динамики основных характеристик дорожно-транспортной системы с процедурой коррекции] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 578–588. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-578-588>, EDN: VXXJNT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



## Introduction

Road transport remains the dominant mode of transportation in Russia, playing a critical role in the country's economy by facilitating the movement of goods and passengers. The number of vehicles on Russian roads continues to grow annually. However, road transportation is also among the least safe modes of travel, as evidenced by concerning trends in safety statistics.

One of the most pressing issues facing Russia's road transport system is the high incidence of traffic accidents. According to official data from the State Traffic Inspectorate of the Ministry of Internal Affairs, nearly 33,000 road accidents occurred in the first half of 2023 alone. These incidents resulted in the tragic loss of approximately 3,500 lives and left more than 42,000 individuals injured<sup>1</sup> [1]. This alarming situation highlights the urgent need for improved safety measures and a comprehensive approach to mitigating risks within the road transport sector.

In this context, several articles published between 2018 and 2023 offer valuable ideas and methods for analyzing and predicting road safety indicators.

One significant study by I. E. Ilina examines the modeling of accident rates involving trucks in Russia [2]. The author analyzes existing data and proposes methods to enhance road safety, particularly relevant given the increasing number of freight transportations.

In a review conducted by Jameel and Evdorides, existing indicators of the road safety system are explored, and modifications are suggested to improve their effectiveness [3]. The authors emphasize the importance of adapting indicators to modern conditions and the transport system's challenges.

M. Polyakov, V. Ivashchenko, and I. Shuvalov presented a model predicting the main indicators of road transport system safety [4]. Their work utilizes a system dynamics approach for analysis and forecasting, which can assist in developing more effective traffic management strategies.

Finally, the article by O. Mayboroda and B. Sarymsakov discusses ways to improve the system of road safety indicators in the context of analyzing the quality of motor vehicle transportation [5]. The authors propose new approaches to assessing and monitoring safety, which can help reduce the number of road traffic accidents.

However, the results of these studies do not contain results on management using the proposed mathematical models, as well as information on procedures for correcting models of system dynamics, the need for which is very urgent.

The article is structured as follows. Section 1 contains a statement of the problem and approach to its solution. Section 2 describes the complex of mathematical models proposed for solving the problem. The third section presents the results of the numerical solution of a system of differential equations. Section 4 contains information about the correction of the mathematical model. The fifth section contains information related to the use of the proposed results by decision makers. Section 6 contains brief conclusions on the article.

### 1. Statement of the problem and approach to its solution

To effectively analyze and predict the primary safety characteristics of the road transport system, it is essential to develop a complex of mathematical models. These models should leverage a system-dynamic approach, regression models, and products to formalize the cause-and-effect relationships of a complex structure between model variables.

Considering the aforementioned information, employing system dynamics is the appropriate method for addressing this issue. System dynamics has proven effective in modeling diverse complex processes and systems multiple times [2, 3, 6].

The construction of the proposed mathematical model complex involves several structured steps, as illustrated in Fig. 1.

---

<sup>1</sup>Assessment of the road traffic safety situation. Available at: <http://stat.gibdd.ru/> (accessed June 22, 2024); About the road traffic safety. Federal law FZ-16 ot 09.02.2007. Available at: <http://base.garant.ru/12151931/> (accessed June 23, 2024).

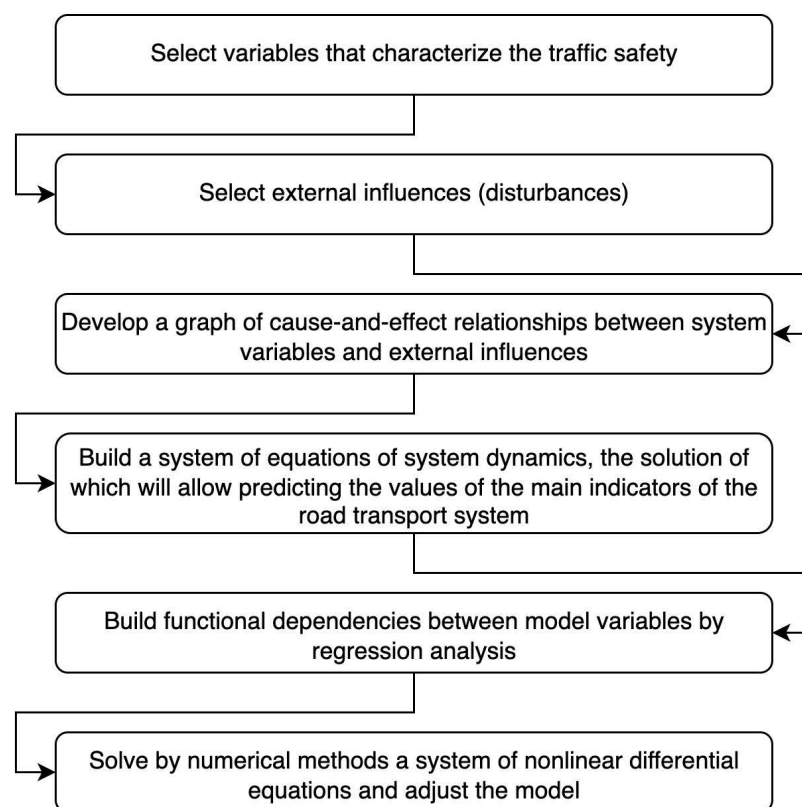


Fig. 1. Stages of developing a system dynamics model to predict the main characteristics of the road transport system

Considering the preceding, the following variables, indicated in Table 1, are taken as indicators characterizing the safety of the country's road transport system. In Table 1, all values are shown for the annual period.

Table 1

Key safety indicators of the road transport system

Variable notation	Description
$X_1(t)$	Total number of traffic accidents
$X_2(t)$	Number of fatalities in traffic accidents
$X_3(t)$	Number of injured in traffic accidents
$X_4(t)$	Number of traffic accidents with particularly severe consequences
$X_5(t)$	Number of traffic accidents during dark hours
$X_6(t)$	Number of traffic accidents involving drivers who refused medical examination
$X_7(t)$	Number of traffic accidents caused by traffic rule violations by drivers with less than two years of driving experience
$X_8(t)$	Number of traffic accidents caused by traffic rule violations by drivers with 10 to 15 years of driving experience
$X_9(t)$	Number of traffic accidents involving children under 16 due to their carelessness
$X_{10}(t)$	Number of traffic accidents on regional or intermunicipal roads
$X_{11}(t)$	Number of traffic accidents on federal highways
$X_{12}(t)$	Number of traffic accidents in the capitals of the constituent entities of the Russian Federation

In practice, quantitative scales with a clear physical meaning are used despite some of the variables being qualitative. The study assumes that for numerical modeling of the process of changing safety variables, we use the apparatus of the theory of fuzzy sets to transition to such representations. We calculate the normalized values of the variables by measuring them on a quantitative scale and using their normalized values in the calculations, determined from the following expression:

$$X_i(t) = \frac{X_i^*(t)}{X_i^{norm}}, \quad i = 1, \dots, 17,$$

where  $X_i(t)$  — the normalized value of the indicator used in the model;  $X_i^*(t)$  — the present value of the indicator, determined by the numerical scale;  $X_i^{norm}$  — normalization coefficient. Additionally, the model considers external factors that affect road safety, and these factors are presented in Table 2.

Table 2

External factors that affect the road transport system

Variable notation	Description
$F_1(t)$	Administrative offense cases initiated
$F_2(t)$	Warnings issued to police officers by court decisions
$F_3(t)$	Fines imposed on police officers by court decisions
$F_4(t)$	Decisions forwarded to bailiffs for enforcement
$F_5(t)$	Decisions received from courts regarding administrative arrest
$F_6(t)$	Decisions received from courts regarding driving license revocation, including those with an additional administrative fine

The construction of system dynamics models is carried out based on selected variables and external factors, called, in terms of system dynamics, levels that characterize the system's functioning. Based on these scales, we constructed differential equations of the form:

$$\frac{dX(t)}{dt} = X^+(t) - X^-(t),$$

where  $X^+(t)$ ,  $X^-(t)$  represent the positive and negative values of the rate of change of the variable  $X(t)$ , respectively. These values encompass all factors contributing to the growth and decrease of said variable.

It is assumed that rates are functions that depend on factors. The rates look like:

$$X^\pm(t) = f(F_1(t), F_2(t), \dots, F_k(t)) = f_1(F_1(t))f_2(F_2(t)), \dots, f_k(F_k(t)),$$

where  $F_1, \dots, F_k$  are factors that can function as as both variables and external functions.

## 2. Mathematical model

### 2.1. Development of a graph of cause-and-effect relationships of system variables and external factors

Experts in the field of road safety establish connections between road safety characteristics that have both positive and negative impacts on the behavior of these characteristics over time, relying on their judgments [7]. The presence of these relationships allows the building of an incidence matrix for security characteristics, shown in Table 3.



Incident matrix for safety performance of the road transport system

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$	$X_{11}$	$X_{12}$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$
$X_1$	0	0	0	0	0	0	+1	+1	+1	+1	0	+1	+1	+1	-1	$P_1$	-1	-1
$X_2$	0	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	+1	0	+1	-1	-1	-1	-1
$X_3$	0	0	0	0	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	-1	0	-1
$X_4$	0	+1	0	0	+1	0	+1	+1	0	0	0	+1	0	+1		-1	-1	-1
$X_5$	0	+1	0	+1	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1
$X_6$	0	0	+1	0	0	0	+1	+1	+1	0	+1	+1	0	0	-1	-1	0	-1
$X_7$	+1	-1	0	0	-1	0	0	+1	-1	0	+1	+1	+1	0	-1	-1	-1	$P_2$
$X_8$	+1	0	0	0	0	0	+1	0	0	+1	0	+1	+1	+1	0	-1	0	-1
$X_9$	+1	-1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	+1	+1	+1	0	-1	-1	-1	-1
$X_{10}$	+1	0	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	0	+1	0	-1	0	0
$X_{11}$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	+1	0	+1	-1	-1	-1	-1
$X_{12}$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

The variable  $U_{i,j}$  located at the intersection of the corresponding lines, characterizes the mutual influence of model variables, taking into account external environmental factors:

$$U_{i,j} = \begin{cases} -1, & \text{variable of external factor } X_j \text{ negatively affects } X_i, \\ 0, & \text{variable of external factor } X_j \text{ does not affect } X_i, \\ +1, & \text{variable of external factor } X_j \text{ has a positive effect on } X_i, \\ P_i, & \text{productions or element of production rule system.} \end{cases}$$

Let us determine the production values  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , characterizing the influence of the environment on the model parameters, which are determined at the stage of adaptation of the developed model to the selected control object. Productions consist of two parts: a sensory precondition (or “IF” statement) and an action (“THEN”):

$$P_i = \begin{cases} -1, & \text{if condition 1 is met,} \\ 0, & \text{if condition 2 is met,} \\ 1, & \text{if condition 3 is met.} \end{cases}$$

After the condition is met and the action is activated, the model products look like:  $P_1 = +1$ ;  $P_2 = +1$ ;  $P_3 = -1$ .

We construct the model by constructing a cause-and-effect relationship graph based on the incidence matrix. Figure 2 shows a subgraph for the variable  $X_2$ . The generated graph can describe the complex system of causal relationships between the analyzed variables and external factors. The graph's vertices represent the variables  $X_1 - X_{13}$  and external factors  $F_1 - F_6$ , while the arcs determine the cause-and-effect relationships between them, including the direction and type of connection [4].

## 2.2. Equations of system dynamics

System dynamics models are constructed by utilizing the cause-and-effect relationship graph. To develop a model, a subset of levels  $X = X_i$ ,  $i = 1, \dots, 13$ , is chosen to establish the functional dependencies between them [8]. These dependencies are determined by analyzing the available statistics provided by the State Traffic Inspectorate of the Ministry of Internal Affairs of Russia.

The variables  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 13$ , are defined within the admissible range:  $0 < X_i(t) \leq 1$ . Based on the cause-and-effect graph that represents the safety indicators of road transport systems, we

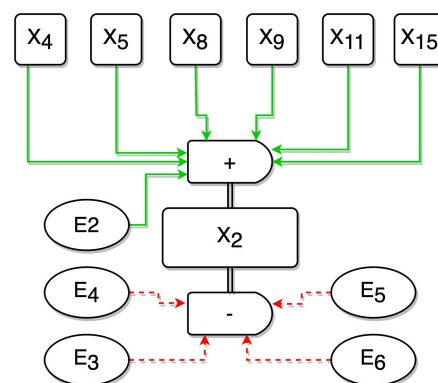


Fig. 2. A subgraph of cause-and-effect relationships for safety indicators of the functioning of the road transport system for the variable  $X_2$

created equations in the following format:

$$\frac{dX_i}{dt} = \prod_{j,i} f_{i,j}(X_j^+) \sum_m F_{i,m}^+ - \prod_{i,k} f_{i,k}(X_k^-) \sum_n F_{1,n}^-. \quad (1)$$

In general, the system of equations will look like this:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} = & f_{1,7}(X_7)f_{1,8}(X_8)f_{1,9}(X_9)f_{1,10}(X_{10})f_{1,11}(X_{11})f_{1,12}(X_{12})f_{1,14}(X_{14})f_{1,15}(X_{15}) \times \\ & \times (F_1 + F_2 + F_4) - (F_3 + F_5 + F_6) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} = & f_{2,4}(X_4)f_{2,5}(X_5)f_{2,8}(X_8)f_{2,9}(X_9)f_{2,11}(X_{11})f_{2,14}(X_{14})f_{2,15}(X_{15})F_2 - \\ & - (F_3 + F_4 + F_5 + F_6), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_3}{dt} = & f_{3,6}(X_6)f_{3,7}(X_7)f_{3,8}(X_8)f_{3,9}(X_9)f_{3,10}(X_{10})f_{3,11}(X_{11})f_{3,12}(X_{12})f_{3,13}(X_{13}) \times \\ & \times f_{3,14}(X_{14})f_{3,15}(X_{15})(F_1 + F_2) - (F_4 + F_6), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_4}{dt} = & f_{4,2}(X_2)f_{4,5}(X_5)f_{4,7}(X_7)f_{4,8}(X_8)f_{4,9}(X_9)f_{4,11}(X_{11})f_{4,14}(X_{14})f_{4,15}(X_{15})F_2 - \\ & - (F_3 + F_4 + F_5 + F_6), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_5}{dt} = & f_{5,2}(X_2)f_{5,4}(X_4)f_{5,7}(X_7)f_{5,8}(X_8)f_{5,11}(X_{11})f_{5,14}(X_{14})f_{5,15}(X_{15})(F_1 + F_2) - \\ & - (F_3 + F_4 + F_5 + F_6), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_6}{dt} = & f_{6,3}(X_3)f_{6,7}(X_7)f_{6,8}(X_8)f_{6,9}(X_9)f_{6,10}(X_{10})f_{6,11}(X_{11})f_{6,13}(X_{13})f_{6,14}(X_{14})f_{6,15}(X_{15}) - \\ & - (F_3 + F_4 + F_6), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_7}{dt} = & f_{7,1}(X_1)f_{7,8}(X_8)f_{7,13}(X_{13})f_{7,14}(X_{14})f_{7,15}(X_{15})(F_1 + F_6) - f_{7,2}(X_2)f_{7,5}(X_5) \times \\ & \times f_{7,10}(X_{10})(F_3 + F_4 + F_5), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_8}{dt} = & f_{8,1}(X_1)f_{8,7}(X_7)f_{8,9}(X_9)f_{8,11}(X_{11})f_{8,12}(X_{12})f_{8,14}(X_{14})f_{8,15}(X_{15})(F_1 + F_2) - \\ & - (F_4 + F_6), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_9}{dt} = & f_{9,1}(X_1)f_{9,7}(X_7)f_{9,8}(X_8)f_{9,9}(X_9)f_{9,13}(X_{13})f_{9,14}(X_{14})f_{9,15}(X_{15})F_1 - f_{9,2}(X_2) \times \\ & \times f_{9,3}(X_3)(F_3 + F_4 + F_5 + F_6), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{dX_{10}}{dt} = f_{10,1}(X_1)f_{10,7}(X_7)f_{10,8}(X_8)f_{10,11}(X_{11})f_{10,14}(X_{14})f_{10,15}(X_{15})F_2 - (F_4), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{11}}{dt} = & f_{11,1}(X_1)f_{11,2}(X_2)f_{11,3}(X_3)f_{11,4}(X_4)f_{11,5}(X_5)f_{11,6}(X_6)f_{11,7}(X_7)f_{11,8}(X_8) \times \\ & \times f_{11,14}(X_{14})f_{11,15}(X_{15})F_2 - (F_3 + F_4 + F_5 + F_6), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{12}}{dt} = & f_{12,1}(X_1)f_{12,2}(X_2)f_{12,3}(X_3)f_{12,4}(X_4)f_{12,5}(X_5)f_{12,6}(X_6)f_{12,7}(X_7)f_{12,8}(X_8) \times \\ & \times f_{12,9}(X_9)f_{12,10}(X_{10}). \end{aligned} \quad (13)$$

The time argument  $t$  for all functions in (2)–(13) is omitted for brevity.

### 2.3. Creation of functional relationships among the internal variables of the model

Expressions in the system of differential equations that are written as  $f_{A,B}(X_B)$  indicate the relationship between the variable  $X_A$  and  $X_B$  and are determined using regression analysis tools.



On the other hand, expressions of the form  $F_i^{if}$  for  $i = (1, \dots, 6)$  represent the dependency of the variable on an external factor, as defined by the predicate:

$$F_i^{if} = \begin{cases} -1, & \text{an inverse relationship between the variable and the external factor,} \\ 0, & \text{the variable and the external factor are not related to each other,} \\ +1, & \text{direct proportionality between a variable and a factor.} \end{cases}$$

Each expression  $F_i^{if}$  for  $i = 1, \dots, N$  has its own conditions.

In order to ascertain the nature of  $f_{A,B}(X_B)$  expressions, we utilize regression analysis to establish the relationships between the variables. In our notation of expressions  $f_{A,B}(X_B)$ , the variable  $X_B$  is the explanatory variable and  $X_A$  is the variable being explained. By employing the least squares method, we identify functional dependencies as 2nd-degree polynomials [9]. For example, in the first equation for  $X_1$  there are dependencies of this variable on variables  $X_7$ – $X_{12}$ . These dependencies, determined by the least squares method, have the form:

$$\begin{aligned} f_{1,7}(X_7) &= 6.7X_7^2 - 11.3X_7 + 5.66, \\ f_{1,8}(X_8) &= -1.51X_8^2 + 2.45X_8 - 0.04, \\ f_{1,9}(X_9) &= -0.95X_9^2 + 1.64X_9 + 0.24, \\ f_{1,10}(X_{10}) &= -2.65X_{10}^2 + 5.24X_{10} - 1.64, \\ f_{1,11}(X_{11}) &= -0.58X_{11}^2 + 0.83X_{11} + 0.65, \\ f_{1,12}(X_{12}) &= -1.55X_{12}^2 + 2.74X_{12} - 0.28. \end{aligned}$$

To illustrate, we can demonstrate the relationship between the occurrence of road accidents  $X_1$  and two factors: the number of road accidents caused by intoxicated drivers  $X_8$  (Fig. 3, a) and the number of road accidents caused by pedestrian traffic violations  $X_9$  (Fig. 3, b). For each polynomial, some characteristics were calculated, for example: for  $f_{1,9}(X_9)$ : standard deviation = 0.044; regression variance = 0.0029; regression standard error = 0.035; Pearson's test: 0.88. The Pearson criterion, in this case, shows the magnitude of the approximation reliability.

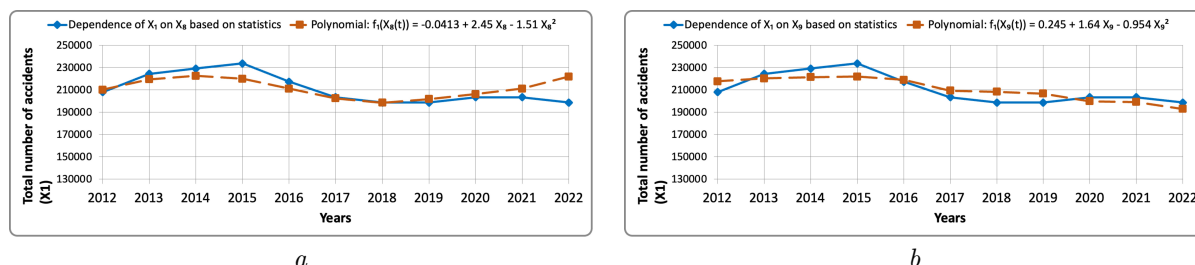


Fig. 3. Graph of the functional dependence of the number of accidents (indicator  $X_1$ ) on the number of accidents due to traffic violations:  $a$  – by drivers in a state of intoxication  $X_8$ ;  $b$  – by pedestrians  $X_9$ . The black line represents the graphs of changes in these dependencies; the gray line represents the corresponding statistical data (color online)

### 3. Solving a system of differential equations numerically

Once the construction of a system dynamics model is complete, it is necessary to define the elements and variables involved in the equations of this system. This task relies on the data obtained from the available statistics on the factors and significant variables of the system [5]. After determining the functional dependencies and coefficients in the equations, and external factors, the resulting system of equations is solved by the numerical methods of the fourth order of accuracy.

Figure 4 shows the change in time of the calculated values for all calculated values of the model variables over the interval from 2021 to 2024.

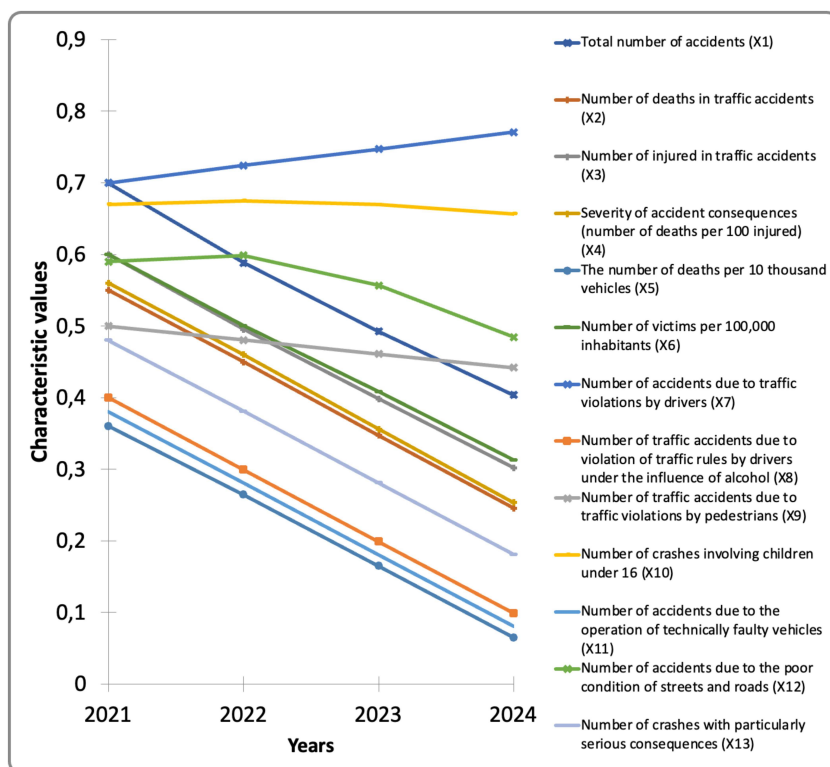


Fig. 4. Forecasting results for each variable for 2021–2024 (color online)

We compared the calculation results with actual statistical data for each variable. For example, let us present graphs comparing statistical and simulated data for 2004–2010 for variables  $X_2$  and  $X_8$ . The results are shown in Fig. 5, respectively.

In Fig. 5 *a*, the maximum deviation from statistics was 9.8 percent in 2009; in Fig. 5 *b*, it was 10 percent in 2010.

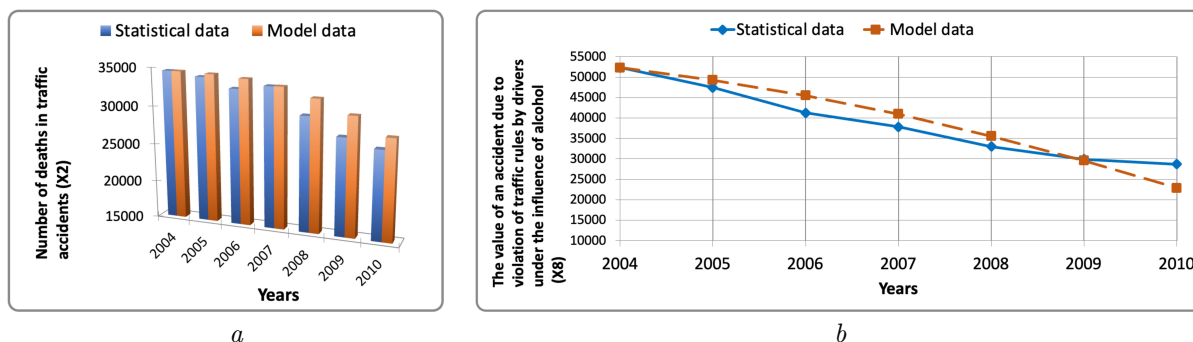


Fig. 5. Comparison of statistical and simulated data for variables  $X_2$  (a) and  $X_8$  (b) (color online)

#### 4. Correction of the system dynamics model

Correction of the mathematical model is necessary to improve its accuracy and adequacy. Numerous factors come into play when constructing a mathematical model, making certain simplifications and approximations necessary. However, these simplifications and approximations may only sometimes lead to highly accurate predictions of the simulation results.

After we tested the model on statistical data, it may become clear that it does not correspond to reality in some aspects. In this case, correcting the model can improve its accuracy and reliability. The mathematical model can be corrected by adding new parameters or variables and adjusting the parameters. As a result of model correction, it is possible to obtain a more accurate



forecast of the dynamics of the main characteristics of the road transport system, which can help make decisions in the field of accidents.

We used statistical data from 2004 to 2020 to predict system behaviors as part of the modeling process. For instance, Fig. 6 illustrates the system behavior during the period from 2004 to 2010 [10].

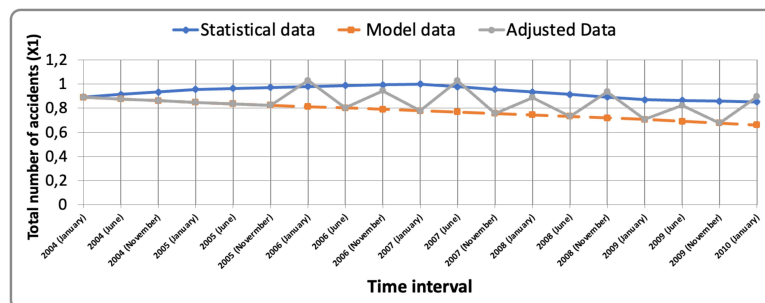


Fig. 6. The state of the system for 2004–2010 (color online)

We correct the mathematical model if the difference between the model and statistical data exceeds 10%. Figure 5 indicates that the model did not require any corrections from January 2004 to November 2005. However, corrections were made to the model during the remaining time interval. The developed models accurately align with the statistical data recorded between 2021 and 2022, indicating that the number of accidents from these models closely matches the actual figures. As a result, the developed software can be confidently recommended for practical application in simulating the primary safety metrics of the Russian road transport system.

## 5. Actions of the decision maker when the model variables go beyond the allowable values

In the decision-making sphere, when the main characteristics of the road transport system reach or exceed permissible values, a number of measures are required to return the variable's value to the acceptable zone. These are the points where serious decisions are made to restore the model's stability. Often, acceptable values are set in advance based on relevant safety documents so that they can be considered when making decisions [2].

The mathematical complex can build petal diagrams and compare the obtained values with the maximum allowable. This functionality will be recommended for use by the decision-maker. Figure 7 shows radar diagrams that characterize changes in the main safety indicators of the road transport system in the time interval of 2021 to 2023. The red line shows the limit values of these characteristics.

Figure 7 shows that the characteristic  $X_7$  goes beyond the allowable zone, and this is a signal for the decision-maker to make a decision.

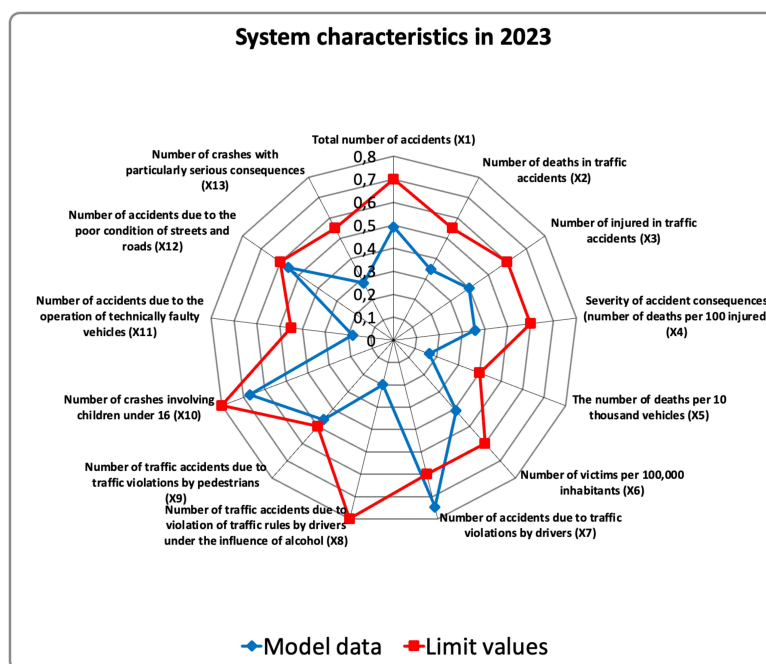


Fig. 7. Changes in key safety indicators in 2023





## Conclusion

We created a set of system dynamics models that enable the prediction of key safety indicators related to the operation of the road transport system. By utilizing the suggested approach, we also designed a non-linear differential equation system, the solution of which enables the determination of fluctuations in safety indicator values during various time intervals. A proposed procedure has been suggested to enhance the accuracy and reliability of the forecasting results by making corrections to the model.

## References

1. Yannis G., Weijermars W., Gitelman V., Vis M., Chaziris A., Papadimitriou E., Azevedo C. L. Road safety performance indicators for the interurban road network. *Accident Analysis & Prevention*, 2013, vol. 60, pp. 384–395. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aap.2012.11.012>
2. Ilina I. E. Modeling of accident rates involving trucks in order to improve road safety in the Russian Federation. *E3S Web of Conferences*, 2021, vol. 281, art. 07006. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202128107006>
3. Jameel A., Evdorides H. Review of modifying the indicators of road safety system. *Journal of Engineering and Sustainable Development*, 2023, vol. 27, iss. 2, pp. 149–170. DOI: <https://doi.org/10.31272/jeasd.27.2.1>
4. Polyakov M., Ivashchenko V., Shuvalov K. Model for predicting the main indicators of road transport system safety. *15th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD)*, Moscow, Russian Federation, 2022, pp. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/MLSD55143.2022.9934121>
5. Mayboroda O., Sarymsakov B. Improving the system of road safety indicators in the analysis of the quality of motor vehicle transportation. *Herald of the Ural State University of Railway Transport*, 2021, iss. 2 (50), pp. 85–98. DOI: <https://doi.org/10.20291/2079-0392-2021-2-85-98>, EDN: QYKALG
6. Tahir M., Tabassum S., Rahim A. Impacts of pavement performance indicators on traffic oriented parameters and road safety. *Mehran University Research Journal of Engineering and Technology*, 2023, vol. 41, iss. 4, pp. 187–197. DOI: <https://doi.org/10.22581/muet1982.2204.19>
7. Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonuk L. Yu., Khamutova M. V. Modeling of floods' consequences on the basis of Forrester's cause-and-effect systems and system dynamics approach. *Bulletin of Voronezh State Technical University*, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 13–20 (in Russian). EDN: ZDQEYR
8. Khamutova M. V., Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonuk L. Yu., Dolinina O. N., Kushnikova E. V., Shulga T. E., Tverdokhlebov V. A., Fominykh D. S. Forecasting characteristics of flood effects. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1015, iss. 5, art. 052012. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1015/5/052012>, EDN: XXRIEX
9. Tikhonova O. M., Kushnikov V. A., Fominykh D. S., Rezchikov A. F., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonuk L. Yu., Dolinina O. N., Kushnikov O. V., Shulga T. E., Tverdokhlebov V. A. Mathematical model for prediction of efficiency indicators of educational activity in high school. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1015, iss. 3, art. 032143. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1015/3/032143>, EDN: XXSZMT
10. Zakharova A., Korostelyov D. Visual classification of data sets with the assistance of experts in the problems of intelligent agents learning for incompletely automated control systems. *2019 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, Omsk, Russia, 2019, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/Dynamics47113.2019.8944638>

Поступила в редакцию / Received 22.12.2024

Принята к публикации / Accepted 05.05.2025

Опубликована / Published 28.11.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 589–599

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 589–599

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-589-599>

EDN: <https://elibrary.ru/WFWDIR>

Article

## Simulation modeling of atmospheric pollutant dispersion considering dry deposition and the influence of liquid atmospheric precipitation

I. A. Shnaider<sup>1</sup>, V. A. Kushnikov<sup>1,2</sup>, A. S. Bogomolov<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Center “Saratov Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

**Ilya A. Shnaider**, es1098@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0003-4739-0130>, SPIN: 2807-9084, AuthorID: 1243758

**Vadim A. Kushnikov**, kushnikoff@iptmuran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

**Aleksey S. Bogomolov**, bogomolov@iptmuran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

**Abstract.** The article presents the results of developing a mathematical model for computer simulation of atmospheric pollutant dispersion, taking into account dry deposition and the effects of liquid atmospheric precipitation. This development is based on well-known Gaussian and Ermak mathematical models. In our model, to account for these factors under observed atmospheric precipitation, the plume dispersion equation includes a new multiplier. This multiplier is a concentration increase coefficient, proportional to the increase in pollutant plume mass under the influence of liquid precipitation, derived from the Kelvin equation and Raoult's law. The developed model is implemented as a software package that uses data on known emission sources, meteorological conditions, and monitoring results of pollutant concentrations at specific points within an industrial area. Calculations and a comparative assessment of the model's accuracy have been conducted. It is shown that considering dry deposition and precipitation effects allows for more accurate modeling of pollutant dispersion dynamics in the studied data.

**Keywords:** ecology, pollutants, Gaussian plume, Ermak model, pollutant deposition, simulation modeling

**For citation:** Shnaider I. A., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S. Simulation modeling of atmospheric pollutant dispersion considering dry deposition and the influence of liquid atmospheric precipitation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 589–599. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-589-599>, EDN: WFWDIR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.876.5

## Имитационное моделирование распространения атмосферного загрязнителя с учетом сухого осаждения и влияния жидких осадков

И. А. Шнайдер<sup>1</sup>, В. А. Кушников<sup>1,2</sup>, А. С. Богомолов<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр Российской академии наук», Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24



**Шнайдер Илья Андреевич**, аспирант кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, es1098@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0003-4739-0130>, SPIN: 2807-9084, AuthorID: 1243758

**Кушников Вадим Алексеевич**, доктор технических наук, <sup>1</sup>профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук; <sup>2</sup>главный научный сотрудник, kushnikoff@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

**Богомолов Алексей Сергеевич**, доктор технических наук, <sup>1</sup>профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук; <sup>2</sup>ведущий научный сотрудник, bogomolov@iptmuran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

**Аннотация.** В статье представлены результаты разработки математической модели для компьютерного моделирования распространения атмосферных загрязнителей с учетом сухого осаждения и влияния жидких атмосферных осадков. Разработка базируется на известных математических моделях Гаусса и Эрмака. В нашей модели для учета обозначенных факторов в случае наблюдаемых атмосферных осадков уравнение распространения шлейфа получает новый множитель. Это коэффициент увеличения концентрации, пропорционального увеличению массы шлейфа загрязнителя под воздействием жидких осадков, определяемый из уравнения Кельвина и закона Рауля. Разработанная модель реализована в виде программного комплекса, использующего данные об известных источниках выбросов, метеорологические условия и результаты мониторинга концентраций загрязняющих веществ в определенных точках промышленной территории. Проведены расчеты и сравнительная оценка точности предлагаемой модели. Показано, что учет сухого осаждения и влияния осадков позволяет более точно моделировать динамику распространения поллютантов на рассматриваемых данных.

**Ключевые слова:** экология, поллютанты, Гауссов шлейф, модель Эрмака, осаждение загрязнителя, имитационное моделирование

**Для цитирования:** *Shneider I. A., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S.* Simulation modeling of atmospheric pollutant dispersion considering dry deposition and the influence of liquid atmospheric precipitation [Шнайдер И. А., Кушников В. А., Богомолов А. С. Имитационное моделирование распространения атмосферного загрязнителя с учетом сухого осаждения и влияния жидких осадков] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 589–599. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-589-599>, EDN: WFWDIR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

The influence of many different factors on pollutant dispersion makes the task of calculating it quite complex and necessitates the imposition of certain restrictions on the initial conditions.

Research on modeling air pollutant dispersion dates back to the 1930s. Early analytical and approximate solutions to the advection–diffusion equations were developed under various simplifying assumptions. Among these, the Gaussian plume model became the most widely used, offering a solution to the transport equation under assumptions of constant wind speed and direction. The model assumes a normal distribution of pollutant particles along three axes. Dispersion values are determined based on the generalization of experimental data for various meteorological situations.

Subsequently, modifications of the Gaussian plume model were obtained for more stringent initial conditions. The Gaussian plume model also served as the basis for various models and methods for calculating air pollutant concentrations, obtained by combining it with other approaches. A combination with the Lagrangian particle movement model was presented in [1], where a simulation program for volcanic ash dispersion was developed. The latter model is based on the Lagrangian particle dispersion model and allows for more accurate forecasting of emission concentrations and predicting the localization of pollution's potential sources.

Then, various solutions to the transport equation were considered, taking into account addi-



tional factors such as dry deposition or the terrain influence. A model incorporating sedimentation effects was developed by D. L. Ermak [2] and later implemented as a computer simulation model that showed improvements compared to the basic Gaussian plume model [3].

The study by Boulos Alam et al. [4] investigates pollutant dispersion in urban-like environments using CFD simulations under neutral and slightly stable atmospheric conditions. The study compares the performance of first- and second-order turbulence closure models, with validation against the MUST field experiment. Results show that the  $k - \epsilon$  model, especially when combined with an algebraic Scalar Gradient Diffusion Hypothesis (SGDH), provides better accuracy, capturing up to 75% of concentration values within a factor of two under slightly stable conditions. Although the Scalar Flux Transport Equation (DFM) model also performs well, its high computational cost may hinder practical use. A consistent underestimation of observed concentrations across models highlights the need for further refinement.

Other recent advancements in pollutant dispersion modeling have focused on enhancing accuracy and computational efficiency through novel approaches and improved turbulence representations. Lin [5] conducted a study on pollutant dispersion using Eulerian RANS simulations, focusing on anisotropic and near-source diffusivity behavior. The research highlighted the importance of considering anisotropic turbulence and near-source effects to improve the accuracy of dispersion models. While specific error metrics were not provided, the study emphasized the enhanced realism achieved by incorporating these factors. Advantages include improved modeling of complex dispersion patterns close to sources, though increased model complexity may lead to higher computational demands.

Fuchs et al. [6] developed the DAD-drift model, a modular approach for estimating spray drift at the landscape scale. The model combines a mechanistic droplet model, micrometeorological data, and a 3D Gaussian diffusion framework. Validated against two field trials, it achieved a high correlation with observed data ( $R^2 = 0.931$ ,  $RSR = 0.260$ ), demonstrating robustness across various environmental conditions and nozzle types. Key advantages include its modular design and adaptability to diverse scenarios, though reliance on detailed input parameters may limit applicability in data-sparse regions.

Chaloupecka et al. [7] focused on physical modeling techniques to simulate gas dispersion for emergency planning in both urban and rural settings. The study emphasized the importance of accurate dispersion modeling to inform emergency response strategies. While specific results and error metrics are not detailed, the research advocates for the integration of physical models into emergency preparedness frameworks. Advantages include the potential for real-time scenario planning, though limitations may arise from the complexity of urban topographies and the need for high-resolution data.

Lumet et al. [8] developed a surrogate modeling approach that combines Proper Orthogonal Decomposition (POD) and Gaussian Process Regression (GPR) to emulate Large-Eddy Simulations (LES) of urban pollutant dispersion. This method significantly reduces computational costs while maintaining accuracy, enabling rapid ensemble predictions. Applied to the MUST field experiment, the surrogate model improved concentration field predictions and accounted for atmospheric internal variability. Advantages include enhanced computational efficiency and uncertainty quantification, but the surrogate's accuracy depends on the quality and representativeness of the training data.

Krassas et al. [9] evaluated various numerical models to predict pollutant dispersion over Tokyo's Polytechnic University campus. The study assessed model performance against observed data, highlighting discrepancies and areas for improvement. While specific error metrics are not provided, the research underscores the challenges of modeling dispersion in complex urban environments. Advantages include the practical application of models to real-world settings, though disadvantages involve potential inaccuracies due to simplified assumptions and the need for high-resolution input data.

Pariyar et al. [10] introduced a time-fractional advection-diffusion model to capture the

anomalous diffusion behavior observed in pollutant dispersion. This approach accounts for memory effects and non-local dynamics, providing a more accurate representation of pollutant transport. The model offers improved flexibility over classical integer-order models, though it requires careful calibration of fractional parameters and may involve increased computational complexity.

Jiao et al. [11] utilized Large Eddy Simulation (LES) to study pollutant dispersion over buildings with stepped roofs, a common architectural feature in urban areas. The research reveals how roof geometry influences airflow patterns and pollutant distribution. LES provides detailed insights into turbulent flow structures, enhancing understanding of dispersion mechanisms. The main advantage is the high-resolution depiction of complex flow fields, though LES is computationally intensive and may not be practical for large-scale or real-time applications.

In Russia, current regulatory practices are based on methodologies approved by Order No. 273 of June 6, 2017, "On the approval of methods for calculating the dispersion of emissions of harmful (pollutant) substances in the ambient air"<sup>1</sup>, which for the regulation of environmental impacts. However, these methods do not account for important atmospheric factors such as humidity, precipitation, and dry deposition of pollutant particles. This omission compromises prediction accuracy and limits the reliability of identifying pollution sources under real meteorological conditions.

The primary objective of this work is to develop and implement an enhanced numerical model for pollutant dispersion that accounts for key atmospheric factors neglected in standard regulatory methods, thereby improving the realism and reliability of air quality assessments under variable weather conditions. An improved production model for pollutant dispersion was developed based on the D. Ermak model to enhance prediction accuracy and foster the development of competitive domestic software and mathematical tools for environmental monitoring. The proposed modification incorporates the effects of humidity, precipitation, and other meteorological factors, enabling a more realistic simulation of pollutant behavior in the atmospheric boundary layer.

Thus, the present study integrates into the current scientific discourse on the advancement of numerical models for atmospheric transport and addresses the urgent need for improving dispersion predictions under complex meteorological influences. The results of this research can be applied both in the development of updated regulatory methodologies and as part of real-time environmental monitoring systems.

## 1. Model derivation

### Notation

The influence of atmospheric humidity, precipitation washout of plumes, and the dry deposition of pollutant particles due to gravity leads to an underestimation of the predicted concentrations in areas near the source of pollution, and consequently, an overestimation in more distant areas. [12] We developed a dispersion model that accounts for humidity and gravitational effects to improve the accuracy of pollutant concentration predictions in the study area.

Our production model takes into account the effects of humidity and gravity on plume formation. The Table lists all the variables and symbols used in this model.

The model is based on the plume dispersion model by D. Ermak, which includes the dry deposition of pollutants:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \cdot e_1 \cdot \left[ e_2 - \sqrt{2\pi} \frac{W_0 \sigma_z}{K_z} \cdot e_3 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{W_0}{\sqrt{2K_z}} + \frac{z+H}{\sqrt{2}\sigma_z}\right) \right], \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>On the approval of methods for calculating the dispersion of emissions of harmful (pollutant) substances in the ambient air. Order of the Ministry of Natural Resources of the Russian Federation of June 6, 2017, No. 273. *Collection of Laws of the Russian Federation*, 2017, no. 37.





$$\text{where } e_1 = \exp\left(-\frac{W_{\text{set}}(z-H)}{2K_z} - \frac{W_{\text{set}}^2\sigma_z^2}{8K_z^2}\right), \quad e_2 = \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right),$$

$$e_3 = \exp\left(\frac{W_0(z+H)}{K_z} + \frac{W_0^2\sigma_z^2}{2K_z^2}\right).$$

In Equation (1)  $K_z = \sigma_z^2 u / 2x$  is the eddy diffusivity coefficient;  $W_{\text{set}} = \rho g d^2 / 18\mu$  is the settling velocity of spherical particles according to Stokes' law, where  $\rho$  is the density of the pollutant particle,  $d$  is the diameter of the pollutant particle,  $g$  is the acceleration due to gravity,  $\mu$  is the air viscosity;  $W_0 = W_{\text{dep}} - 1/2 \cdot W_{\text{set}}$ , where  $W_{\text{dep}} > 0$  is the dry deposition velocity of pollutant particles, determined experimentally.

Table. Variables used in the pollutant dispersion model derivation

Variable	Description	Units
$C(x, y, z)$	Pollutant concentration at spatial point $(x, y, z)$	kg/m <sup>3</sup>
$x, y, z$	Spatial coordinates	m
$H$	Height of the emission source	m
$Q$	Pollutant emission rate	kg/s
$u$	Wind speed	m/s
$\sigma_y, \sigma_z$	Gaussian dispersion parameter in the $y, z$ direction	m
$K_z$	Turbulent diffusion coefficient in the $z$ direction	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	Particle density	kg/m <sup>3</sup>
$d$	Particle diameter	m
$g$	Gravitational acceleration	m/s <sup>2</sup>
$W_{\text{set}}$	Sedimentation (settling) velocity by Stokes' law	m/s
$W_{\text{dep}}$	Dry deposition velocity (empirical)	m/s
$W_0$	Composite parameter related to deposition and sedimentation	m/s
$C_1$	Increased concentration under precipitation conditions	kg/m <sup>3</sup>
$C_0$	Initial concentration	kg/m <sup>3</sup>
$m_s$	Total droplet mass including water	kg
$m_p$	Dry pollutant particle mass	kg
$M_w$	Molar mass of water	kg/mol
$M_p$	Molar mass of pollutant	kg/mol
$\nu_p$	Amount of substance (pollutant)	mol
$\nu_w$	Amount of substance (water)	mol
RH	Relative humidity	dimensionless (0-1)
$\vartheta$	Hygroscopic growth factor (binding coefficient with water)	dimensionless

D. Ermak's model, despite its advantages over the Gaussian model [3], does not take into account the influence of atmospheric precipitation on pollutant dispersion. We will consider the influence of precipitation on the mass and, therefore, on the speed of pollutant dispersion. To do this, we will use the fact from Koehler's theory [13], which states that the concentration of a pollutant changes proportionally to the change in the mass of the pollutant plume due to precipitation. Using a combination of Kelvin's equation and Raoult's law [14] for droplet mass increase, we can obtain a coefficient for the increase in concentration. Kelvin's Equation describes how the saturation vapor pressure over a droplet surface depends on its curvature (droplet size) and surface tension. Raoult's Law (Solute Effect) describes how dissolved solutes (pollutants) lower the vapor pressure of water. The Koehler equation (combining both effects) predicts the critical droplet size for activation [14]. So, concentration of pollutant after the washout  $C_1$  can be found as

$$C_1 = C_0 \cdot \frac{m_s}{m_p},$$

where  $m_p = \frac{1}{6}\pi\rho d^3$  is the dry mass of the pollutant particle.

The mass of a droplet (formed in the cloud of the droplet's plume) with diameter  $d$  can be found as [13]:

$$\frac{1}{6}\pi\rho d^3 = M_w\nu_w + M_p\nu_p.$$

The dry mass of the pollutant particle can be found using the formula  $m_p = \frac{\pi}{6}\rho_p d_p^3$ .

The amount of pollutant substance is given by  $\nu_p = \frac{m_p}{M_p}$ .

The amount of water substance in the droplet can be found as  $\nu_w = \frac{RH \cdot \vartheta \cdot \nu_p}{1 - RH}$  [14].

So, the mass of bounded water is

$$m_w = \nu_w \cdot M_w = \frac{RH \cdot \vartheta \cdot \nu_p \cdot M_w}{1 - RH}.$$

From here, the total mass of the droplet can be found as

$$m_s = m_p + m_w = \nu_p M_p + \frac{RH \cdot \vartheta \cdot \nu_p \cdot M_w}{1 - RH}.$$

So, the concentration increase coefficient can be found as

$$K_{RH} = \frac{m_s}{m_p} = \frac{6}{\pi\rho_p d_p^3} \left( \frac{RH \cdot \vartheta \cdot \nu_p \cdot M_w}{1 - RH} + \nu_p M_p \right).$$

Then, the pollutant concentration at a point in the study area for cases with and without precipitation can be expressed as

$$C(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \cdot e_1 \cdot \left[ e_2 - \sqrt{2\pi} \frac{W_0 \sigma_z}{K_z} \cdot e_3 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{W_0}{\sqrt{2}K_z} + \frac{z+H}{\sqrt{2}\sigma_z}\right) \right], & \text{without precipitation,} \\ \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \cdot e_1 \cdot \left[ e_2 - \sqrt{2\pi} \frac{W_0 \sigma_z}{K_z} \cdot e_3 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{W_0}{\sqrt{2}K_z} + \frac{z+H}{\sqrt{2}\sigma_z}\right) \right] \cdot K_{RH}, & \text{with precipitation.} \end{cases}$$

## 2. Developed software

To implement the proposed approach, we developed, calibrated, and tested a stationary production model for calculating pollutant dispersion using the high-level programming language Python. The program interface is shown in Fig. 1.



Fig. 1. The developed software's interface (color online)



We configured the program to accept as input the start and end of the time interval for which the atmospheric pollutant dispersion is to be simulated, along with the sensor code whose data (wind speed and direction, air humidity) are used in the modeling process.

Additional parameters, such as the number of emission sources, their spatial coordinates, source heights, and emission intensities, grid size and resolution, particle density and diameter, molar mass, and pollutant hygroscopicity coefficient, were specified in the configuration file located in the root directory of the project.

During the study, we used a Microsoft SQL Server database containing environmental and meteorological data collected at 20-minute intervals over the past three years.

The study area is an industrial zone measuring 5 km by 5 km near a populated area, with predominantly flat terrain (Fig. 2).

Five stationary environmental monitoring stations, designated as  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  and marked with green markers on the map are installed in this area. These stations measure the concentrations of pollutants in the air and collect meteorological data, including wind speed and direction, air temperature and humidity, and atmospheric pressure. In addition, registered emission sources  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , such as oil refineries, wastewater treatment plants, and chemical storage facilities, are located in the area.

The following declared characteristics of these objects are known: location, altitude above sea level, operating hours, and emission intensity of pollutants into the atmosphere. It is also known that other industrial facilities in this area could be potential sources of pollution. Environmental monitoring data for the study area were obtained from a commercial organization responsible for conducting environmental assessments in the region and adjacent settlements. However, some meteorological parameters, such as insolation and precipitation, necessary for the simulations, were not available from this source. To supplement these missing data, we dynamically acquired relevant meteorological information via API calls to the OpenMeteo.com service at each simulation time step.

The output data are provided in an Excel file containing concentration values for each selected time step at the specified point of interest. Additionally, the simulation results include a heatmap of pollutant concentrations and a graphical visualization of the dispersion over a mapped area.

### 3. Simulation results

The experiments were conducted on a desktop computer with the following specifications: AMD Ryzen 7 5700X processor (8 cores, 16 threads, 3.4 GHz base clock), 32GB DDR4 RAM running Windows 10 64-bit. Each iteration corresponds to a simulation of air pollutant dispersion over a 20-minute time period. To ensure the interpretability of results, we simulate a full 24-hour day, which consists of 72 iterations. The entire daily simulation takes approximately 20 seconds. After all iterations have completed, the average pollutant concentration for the day is calculated and used for mapping. The simulation results are displayed as a map showing the pollutant distribution and a heat map of concentrations.

Let's take a look at some of the results. Figure 2 shows the simulation outcomes for hydrogen sulfide dispersion using the D. Ermak model, without considering pollutant removal by precipitation. According to meteorological observations, precipitation in the form of rain was observed throughout the day, and the atmosphere was predominantly highly unstable (classes A–B).

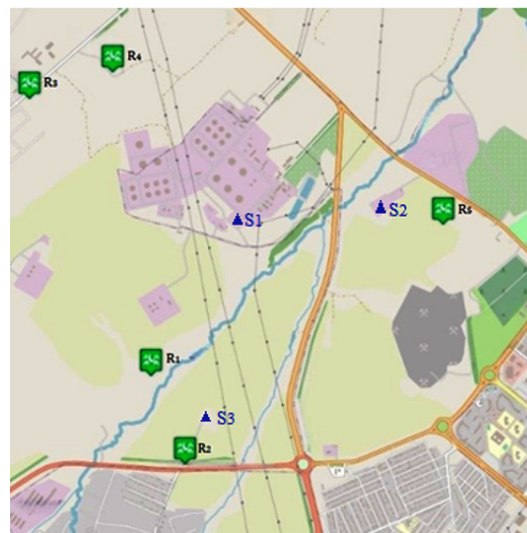


Fig. 2. The industrial area under study and the objects located on it (color online)

Figure 3 shows the simulation results for hydrogen sulfide dispersion using our production model, and how pollutant washout by precipitation affects dispersion on the same date. Considering pollutant washout helps to reduce the overestimated values typical of all exponential models in areas far from the pollution source. As seen in Fig. 3, there are more areas close to the source with elevated pollutant concentrations, which is confirmed by environmental monitoring data for the studied area.

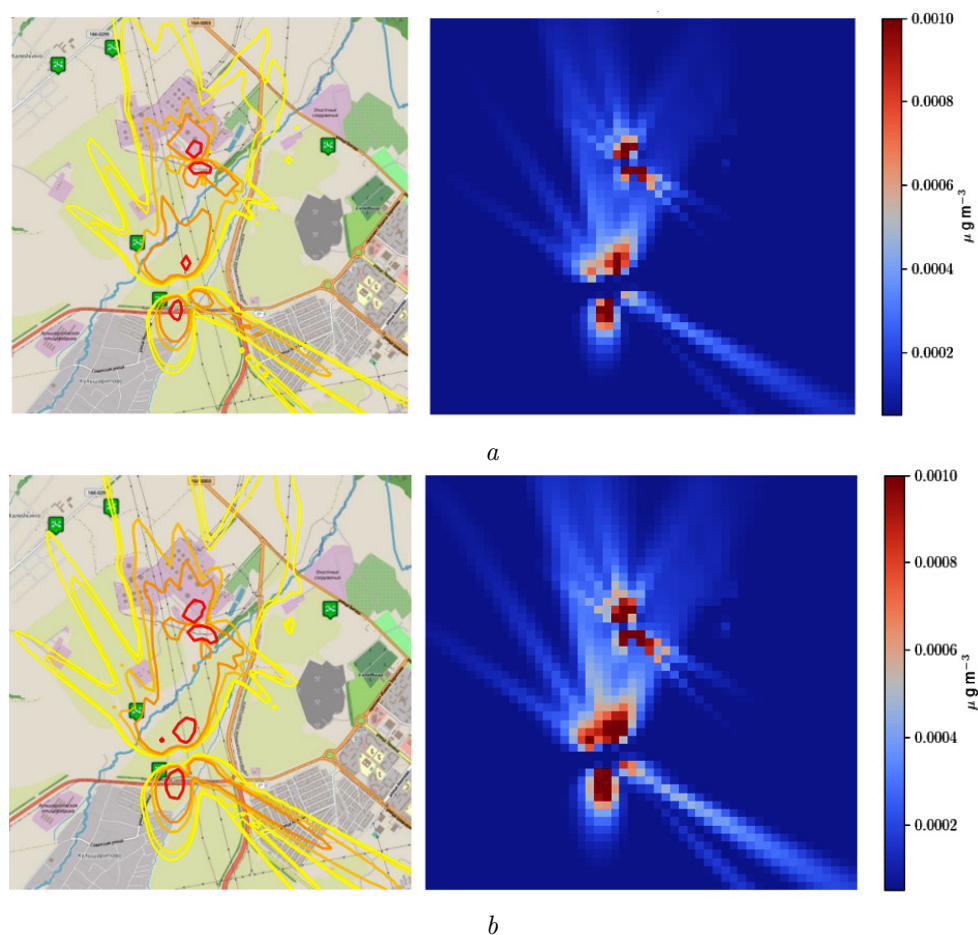


Fig. 3. Hydrogen sulfide dispersion on May 1, 2021: *a* reflects the case without considering plume washout by atmospheric precipitation; *b* reflects the case of considering plume washout by atmospheric precipitation (color online)

The model incorporating plume washout showed a notable improvement in predictive accuracy, achieving a mean absolute error (MAE) of  $MAE = 0.000086$  and a mean absolute percentage error (MAPE) of 41.04%. In comparison, our implementation of the D. Ermak model yielded a higher MAE of 0.000135 and a MAPE of 48.51%, highlighting the superior performance of the proposed approach.

The average percentage error of Ermak's model without considering the influence of precipitation was nearly identical to the error of the previously developed Gaussian plume model implementation, with a MAPE of 48.82% [15]. The obtained deviation values are within the range of errors for exponential plume models, as described by M. R. Beychok [16].

The choice of the sensor used as the primary data source also has some impact on the simulation results. Greater accuracy can be achieved by running simulations for a single time interval multiple times, using data from different sensors. Let's examine the simulation results for October 20, 2022 (Fig. 4).



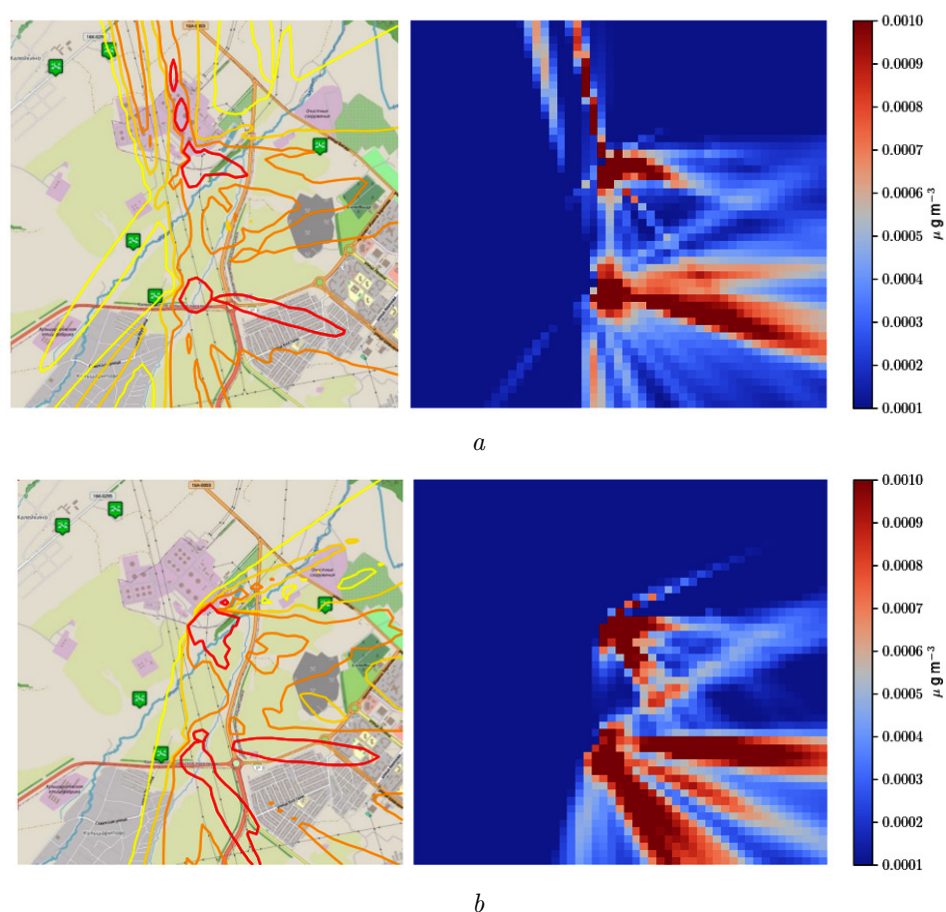


Fig. 4. Hydrogen sulfide dispersion on October 20, 2022, considering plume washout by atmospheric precipitation; data sourced: *a* from sensor  $R_1$ ; *b* from sensor  $R_5$  (color online)

A comparison of the results for the area containing sensor  $R_1$  shows a lower mean absolute error,  $MAE_1 = 0.0001081$ , when using data from this sensor, compared to data from sensor  $R_5$ , which has a mean absolute error of  $MAE_5 = 0.0001771$ . However, this approach requires a significantly larger number of simulations, proportional to the number of points of interest, and consequently, more time for analysis and result interpretation.

Overall, the model demonstrates sufficient accuracy for further use. This model takes into account both dry deposition and the effects of atmospheric precipitation and pollutant washout. However, there are some limitations to the model. For example, it is not suitable for cases with low wind speeds ( $< 1$  m/s), and it does not account for complex terrain or structures that could affect pollutant dispersion. Therefore, it may not be suitable for areas with significant topography. Additionally, the model does not consider possible chemical reactions between pollutants in the plume and other pollutants, which could affect the accuracy of the predictions. Despite these limitations, the model provides a valuable basis for solving inverse problems such as the localization of unknown sources of atmospheric emissions by enabling more accurate modeling of pollutant dispersion patterns [15].

The developed program allows users to simulate the dispersion of air pollutants from multiple sources within the adjustable study area. Users can configure the grid size, study area, number, and characteristics of the sources in the configuration file. The source code implementing the developed model and a sample dataset for simulations are available via the link <https://github.com/xtelias/Localisation-of-air-pollution-point-source>. For access to the web version of the software, please contact the author via email at [es1098@mail.ru](mailto:es1098@mail.ru).





## Conclusion

This study presents a new production-level atmospheric dispersion model that is based on the mathematical framework of D. Ermak's work, but has been extended to include the effects of atmospheric precipitation on pollutant washout. The model is implemented as a computer simulation tool that uses meteorological data and emission source information to simulate the dispersion of pollutants in a defined area.

The system also includes automated graphical visualization of simulation results, which aligns with current standards for environmental monitoring systems. Validation of the model demonstrated a significant improvement in predictive accuracy due to the incorporation of washout processes, achieving a mean absolute percentage error of 41.04% compared to 48.51% for the original D. Ermak model. This indicates enhanced reliability in simulating pollutant behavior under realistic atmospheric conditions, making it a valuable tool for environmental management and planning.

This method is suitable for practical applications in environmental risk assessment, ecological monitoring, and real-time decision support for industrial and governmental stakeholders.

## References

1. Lee J., Lee S., Son H. A., Yi W. Development of PUFF-Gaussian dispersion model for the prediction of atmospheric distribution of particle concentration. *Scientific Reports*, 2021, vol. 11, art. 6456. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-021-86039-y>
2. Ermak D. L. An analytical model for air pollutant transport and deposition from a point source. *Atmospheric Environment*, 1977, vol. 11, iss. 3, pp. 231–237. DOI: [https://doi.org/10.1016/0004-6981\(77\)90140-8](https://doi.org/10.1016/0004-6981(77)90140-8)
3. Stockie J. M. The mathematics of atmospheric dispersion modeling. *SIAM Review*, 2011, vol. 53, iss. 2, pp. 349–372. DOI: <https://doi.org/10.1137/10080991X>
4. Alam B., Soppi R. N., Feiz A.-A., Ngae P., Chpoun A., Kumar P. CFD simulation of pollutant dispersion using anisotropic models: Application to an urban like environment under neutral and stable atmospheric conditions. *Atmospheric Environment*, 2024, vol. 318, art. 120263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2023.120263>
5. Lin C., Ooka R., Jia H., Parente A., Kikumoto H. Eulerian RANS simulation of pollutant dispersion in atmospheric boundary layer considering anisotropic and near-source diffusivity behavior. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2025, vol. 258, art. 106036. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2025.106036>
6. Fuchs M. D., Gebler S., Lorke A. The droplet and atmospheric dispersion drift (DAD-drift) model – A modular approach for estimating spray drift at the landscape scale. *Environmental Research*, 2025, vol. 271, art. 121104. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.envres.2025.121104>
7. Chaloupecká H., Nevrlý V., Martiníková B., Suchánek J., Dostál M., Wild J., Dobeš P., Barabášová M., Jaňour Z. Physical modeling for emergency planning support: Gas dispersion simulations in urban and rural areas. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2025, vol. 94, art. 105571. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2025.105571>
8. Lumet E., Rochoux M. C., Jaravel T., Lacroix S. Uncertainty-aware surrogate modeling for urban air pollutant dispersion prediction. *Building and Environment*, 2025, vol. 267, pt. C, art. 112287. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2024.112287>
9. Krassas A., Renda S. M., Mijorski S., de Villiers E., Capra S. Evaluating numerical models for the prediction of pollutant dispersion over Tokyo's Polytechnic University campus. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2024, vol. 251, art. 105789. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2024.105789>
10. Pariyar S., Lamichhane B. P., Kafle J. A time fractional advection-diffusion approach to air pollution: Modeling and analyzing pollutant dispersion dynamics. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 2025, vol. 14, art. 101149. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.padiiff.2025.101149>
11. Jiao H., Takemi T. Using large eddy simulation to investigate pollutant dispersion over stepped



- roofs. *Building and Environment*, 2025, vol. 274, art. 112704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2025.112704>
12. Affad E., Saadeddine S., Assou M., Sbaibi A. Effect of the relative humidity on an industrial plume behavior. *Global NEST Journal*, 2006, vol. 8, iss. 3, pp. 297–305. DOI: <https://doi.org/10.30955/gnj.000294>
  13. Jacobson M. Z. *Fundamentals of atmospheric modeling*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2005. 813 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139165389>
  14. Connolly P. *Air quality. Lecture notes for the course EART60101*, The University of Manchester. Available at: [https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/paul.connolly/teaching/eart60101/eart60101\\_air\\_quality.pdf](https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/paul.connolly/teaching/eart60101/eart60101_air_quality.pdf) (accessed May 1, 2025).
  15. Shnaider I., Bogomolov A., Lapkovsky R., Kushnikova E. An approach to locating unknown sources of increased air emissions. *2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD)*, 2023, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/MLSD58227.2023.10303966>
  16. Beychok M. R. Error propagation in stack gas dispersion models. *National Environmental Journal*, 1996, vol. 6, iss. 1, pp. 33–37.

Поступила в редакцию / Received 13.05.2025

Принята к публикации / Accepted 20.07.2025

Опубликована / Published 28.11.2025



## Юбилей

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 600–606

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 600–606

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-600-606>

EDN: <https://elibrary.ru/FYFJFM>

Персоналия

УДК 517.51

**Хромов Август Петрович.  
Хромова Галина Владимировна.  
К 90-летию со дня рождения**

**С. И. Дудов, В. В. Корнев, В. С. Рыхлов,  
С. П. Сидоров, В. А. Халова<sup>✉</sup>**

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Дудов Сергей Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, [DudovSI@sgu.ru](mailto:DudovSI@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0098-3652>, SPIN: 9937-8404, AuthorID: 3409

**Корнев Владимир Викторович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, [KornevVV@sgu.ru](mailto:KornevVV@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-1188-373X>, SPIN: 8834-6890, AuthorID: 11545

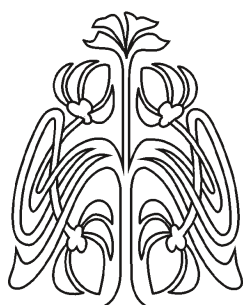
**Рыхлов Виктор Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической экономики, [RykhlovVS@yandex.ru](mailto:RykhlovVS@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1556-7707>, SPIN: 5650-4265, AuthorID: 2936

**Сидоров Сергей Петрович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функций и стохастического анализа, [SidorovSP@sgu.ru](mailto:SidorovSP@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4047-8239>, SPIN: 1323-2409, AuthorID: 16120

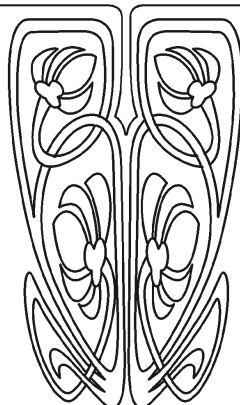
**Халова Виктория Анатольевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, [HalovaVA@sgu.ru](mailto:HalovaVA@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2148-4932>, SPIN: 5950-2300, AuthorID: 123346

**Аннотация.** В 2025 году отметили свой юбилей — 90-летие — два ветерана Саратовского университета, два профессора: Август Петрович Хромов (17 июня) и Галина Владимировна Хромова (16 сентября). Оба посвятили университету более 70 лет своей жизни, оба прошли путь от студента до профессора. Статья посвящена основным вехам их научной жизни.

**Ключевые слова:** юбилей, ведущий ученый, Хромов Август Петрович, Хромова Галина Владимировна



Приложение





**Для цитирования:** Дудов С. И., Корнев В. В., Рыжлов В. С., Сидоров С. П., Халова В. А. Хромов Август Петрович. Хромова Галина Владимировна. К 90-летию со дня рождения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 600–606. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-600-606>, EDN: FYFJFM  
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Personalia

**August P. Khromov.  
Galina V. Khromova.  
To the 90th birthday anniversary**

S. I. Dudov, V. V. Kornev, V. S. Rykhlov, S. P. Sidorov, V. A. Khalova<sup>✉</sup>

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Sergey I. Dudov**, DudovSI@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0098-3652>, SPIN: 9937-8404, AuthorID: 3409  
**Vladimir V. Kornev**, KornevVV@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1188-373X>, SPIN: 8834-6890, AuthorID: 11545

**Victor S. Rykhlov**, RykhlovVS@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1556-7707>, SPIN: 5650-4265, AuthorID: 2936

**Sergey P. Sidorov**, SidorovSP@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4047-8239>, SPIN: 1323-2409, AuthorID: 16120

**Victoria A. Khalova**, HalovaVA@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2148-4932>, SPIN: 5950-2300, AuthorID: 123346

**Abstract.** In 2025, two veterans of Saratov State University, two professors, celebrated their 90th birthdays: August Petrovich Khromov (June 17) and Galina Vladimirovna Khromova (September 16). Both have dedicated more than 70 years of their lives to the university, and both have come a long way from student to professor. This article focuses on the key milestones of their academic careers.

**Ключевые слова:** jubilee, leading scientist, Avgust P. Khromov, Galina V. Khromova

**For citation:** Dudov S. I., Kornev V. V., Rykhlov V. S., Sidorov S. P., Khalova V. A. Avgust P. Khromov. Galina V. Khromova. To the 90th birthday anniversary. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 600–606 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-600-606>, EDN: FYFJFM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Хромов Август Петрович

Август Петрович Хромов — доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, почетный профессор СГУ. Его имя внесено в энциклопедию Саратовского края [1, с. 603]. Сорок шесть лет он заведовал созданной им кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики — со дня ее основания (1974 г.) и до объединения с кафедрой математической экономики (2020 г.). Под его руководством было защищено 30 кандидатских диссертаций. Шесть учеников Августа Петровича успешно защитили докторские диссертации.

Пророческими оказались слова его учительницы математики: «Ты у нас станешь профессором», — когда в 10 лет он единственный из класса решил сложную задачу. Это стало началом его увлеченности математикой.

Август Петрович всегда отличался самостоятельностью в выборе задач и способов их решения. Так, обучаясь на механико-математическом факультете СГУ, он никогда не обращался за консультацией к преподавателям, а на четвертом курсе сам представил (чем очень



удивил профессора Георгия Петровича Боева) тему курсовой работы, которую и защитил на «отлично».

При подготовке дипломной работы по заданной Николаем Петровичем Купцовым теме выяснилось, что результат уже получен известным американским математиком М. Н. Стоуном. Поскольку для дипломной работы наличие новых результатов было обязательным, Николаю Петровичу пришлось дать другую тему по малоизученному вопросу, опубликованному в реферативном журнале. А. П. Хромов за месяц написал вторую дипломную работу, которая получила рекомендацию к опубликованию и стала пропуском в аспирантуру к Н. П. Купцову.

Работая над кандидатской диссертацией, А. П. Хромов обнаружил ошибку в статье М. В. Келдыша — академика, президента Академии наук, — которая дала ему известность в математической среде, но и причинила много беспокойства.

Кандидатская диссертация была блестяще защищена в 1964 г. в Математическом институте имени В. А. Стеклова Академии наук СССР. Результаты, полученные А. П. Хромовым, М. А. Наймарк включил в свою известную монографию «Линейные дифференциальные операторы» [2].

По совету известного советского математика Сергея Борисовича Стечкина в свою кандидатскую диссертацию А. П. Хромов не включил результаты, связанные с ошибкой М. В. Келдыша. Они стали основой его докторской диссертации, защита которой состоялась в 1973 г. в Сибирском отделении Академии наук в диссертационном совете под председательством знаменитого академика Сергея Львовича Соболева. Любопытно, что в то же время, когда Август Петрович защищал докторскую диссертацию в Академгородке, его ученик Владимир Алексеевич Молоденков в Саратове защищал кандидатскую диссертацию.

Результаты, полученные А. П. Хромовым в спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов, поставили его в ряд ведущих специалистов в этой области. Стоит отметить, что статья [3] послужила основой для 15 кандидатских диссертаций его учеников.

В качестве основного метода А. П. Хромов использовал метод Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты изучаемого оператора по спектральному параметру. Развитие этого метода, названное резольвентным подходом, позволило в 2015 г. получить новые важные результаты в задаче обоснования хорошо известного метода решения задач математической физики — метода Фурье. Эта задача была поставлена В. А. Стекловым более ста лет назад. В методе Фурье был сделан качественно новый шаг, позволяющий применить его при минимальных требованиях к исходным данным. Информацию о результатах А. П. Хромова, полученных до 2020 г., см. в [4, 5].

Последнее десятилетие до юбилейного года оказалось для Августа Петровича особенно плодотворным — были получены важные результаты и в методе Фурье, и в теории функций. Он изучал свойства формального ряда, соответствующего методу Фурье в обобщенной смешанной задаче для волнового уравнения. Этот ряд может оказаться расходящимся, и тогда вопрос обоснования метода Фурье сводится к вопросу о нахождении суммы этого ряда. И вот тут А. П. Хромов, опираясь на идеи Л. Эйлера и академика А. Н. Крылова, нашел новый метод суммирования расходящихся рядов. Окончательный результат по этому вопросу сформулирован в [6].

А. П. Хромов, наряду с научной, вел большую организационную работу: 15 лет был председателем диссертационного совета по защите кандидатских диссертаций; с 1994 г. возглавлял (от Саратовского университета) организацию известных Саратовский зимних школ по теории функций, которые проводятся уже более 40 лет [7]; был инициатором и одним из главных организаторов Воронежских зимних школ по теории функций.

В настоящее время организациями этих школ занимаются его ученики: Саратовскую зимнюю школу возглавляет доктор физико-математических наук Сергей Петрович Сидо-





ров, Воронежскую зимнюю школу — доктор физико-математических наук Мария Шаукатовна Бурлуцкая.

На ученом совете механико-математического факультета, посвященном юбилею Августа Петровича Хромова, проректор по учебной работе СГУ Игорь Герикович Малинский напомнил присутствующим: «В 1993 г. А. П. Хромов взял на себя ответственность за сохранение научной школы мехмата. Август Петрович стал наставником для нового поколения математиков после ухода из жизни выдающегося ученого и декана факультета Андрея Андреевича Привалова ... Для меня лично он [А. П. Хромов] всегда был и остается олицетворением не только факультета, но и всего СГУ — человек, чьи принципы, глубина научной мысли и преданность делу стали эталоном для коллег и учеников». Ученица Августа Петровича декан математического факультета Воронежского государственного университета Мария Шаукатовна Бурлуцкая отметила, что Август Петрович — учитель не только в науке, но и по жизни — «это целое мировоззрение, сочетающее глубину научного подхода с житейской мудростью».

В ответном выступлении А. П. Хромов отметил, что в своей научной деятельности он руководствовался правилами Декарта:

- опасаться всякой торопливости и предвзятости;
- для облегчения решения разбивать каждый вопрос на части;
- начинать всегда с простейшего;
- при представлении своих научных работ быть уверенным, что все понятно и ничего не упущено из виду.

### **Хромова Галина Владимировна**

Достойной подругой и соратницей Августа Петровича стала его супруга — Хромова Галина Владимировна, с которой они разделили не только свою жизнь, но и любовь к математике.

Г. В. Хромова — профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, первая в истории Саратовского университета женщина, получившая докторскую степень в области математики.

В ее жизни Саратовский университет играет особую роль. Родина — город Сызрань, а в Саратове она трехлетней оказалась потому, что ее отец Шувалов Владимир Иванович поступил на физико-математический факультет СГУ, и родители, чтобы семья была вместе, поменяли отдельную квартиру на комнату с соседями, без удобств, но зато в пяти минутах ходьбы до университета. А поскольку ребенка не с кем было оставить, отец часто брал маленькую Галю с собой в университет. Так что ей с детства знаком университетский городок и физический корпус. Там, на первом этаже, она часто дожидалась отца под присмотром сотрудницы университетской библиотеки (библиотека тогда размещалась в физическом корпусе).

На фотографии выпускников 1941 г., которая хранится в университетском музее, есть и Галя Шувалова [8]. Студенты этого выпуска знали ее еще и потому, что квартира Шуваловых была местом, где они часто собирались. Поэтому через 25 лет на встречу выпускников 1941 г., уцелевших за время войны, позвали и ее.

Закончив школу с золотой медалью, Галина Владимировна поступила на механико-математический факультет СГУ по специальности «Механика». Здесь она и встретила своего спутника жизни — Августа Петровича Хромова. Оба до сих пор удивляются тому, как это произошло. Хотя они два курса учились вместе, никакого внимания друг на друга не обращали, у каждого был свой круг общения. И вот однажды, когда вся группа собралась прогуляться по городу, они случайно оказались рядом и между ними завязалась беседа, которая продлилась всю прогулку. С удивлением они поняли, что о чем бы ни шел разговор, их мнения совпадают. На четвертом курсе они поженились.



Галина Владимировна писала дипломную работу у профессора Сергея Георгиевича Лехницкого и была уверена, что после окончания университета станет его аспиранткой. К сожалению, профессор собирался уезжать из Саратова в Ленинград. Поэтому он дал Г. В. Хромовой рекомендацию для поступления в аспирантуру в Институт механики в Москве. В это время профессор С. Б. Стечкин специально приехал в Саратов отбирать сильных студентов. Он предложил А. П. Хромову место в аспирантуре Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР. Поскольку молодой семье проживать в Москве вместе не было возможности, Хромовы решили остаться в Саратове.

Август Петрович пошел по научной стезе, а Галина Владимировна стала работать в Вычислительном центре СГУ. Там она занималась решением прикладных задач, одна из которых и привела ее к научным исследованиям в только еще зарождающейся области математики — теории некорректно поставленных задач.

Основоположниками этой теории являются трое советских ученых: академик Андрей Николаевич Тихонов (Москва), член-корреспондент Валентин Константинович Иванов (Свердловск), академик Михаил Михайлович Лаврентьев (Новосибирск). Каждый из них оказал влияние на научную судьбу Г. В. Хромовой.

Именно из лекций А. Н. Тихонова, которые он прочитал на конференции в Киеве, Галина Владимировна получила первое знакомство с некорректными задачами. Позже она неоднократно принимала участие в тихоновских конференциях по этой тематике. Одна из них проводилась в Саратове на острове Чардым, где Г. В. Хромова была одним из главных организаторов.

С методом В. К. Иванова были связаны первые научные результаты Г. В. Хромовой и ее первое публичное выступление (доклад на конференции в Киеве), которое стало в научной биографии одним из самых значимых. Перед поездкой Август Петрович предостерег: сказал, чтобы она ориентировалась не на аплодисменты, а на критику, возможно, жесткую, потому что могут найтись люди, которые захотят умалить, вовсе уничтожить или даже присвоить чужой результат, и нужно уметь отстаивать свои позиции, а для этого хорошо знать публикации по своей тематике. Это напутствие оказалось не напрасным. Один из представителей тихоновской школы выступил с резкой критикой доклада Г. В. Хромовой. Галина Владимировна сумела защитить свой результат, а вместе с ним и метод В. К. Иванова, доказав, что критика была несостоятельна. Поскольку на докладе присутствовали представители и тихоновской, и ивановской научных школ, Галина Владимировна приобрела известность как в Москве, так и в Свердловске.

Метод В. К. Иванова лег в основу кандидатской диссертации, которую Г. В. Хромова защитила в 1973 г. в Саратове. При этом результаты она предварительно докладывала на семинаре М. М. Лаврентьева, а сам В. К. Иванов стал главным оппонентом. Отзыв ведущей организации подписывал Гурий Иванович Марчук — будущий президент Академии наук.

После защиты диссертации Г. В. Хромова начала работать на кафедре вычислительной математики, возглавляемой профессором Н. П. Купцовым. Это ее «родная» кафедра, ныне кафедра вычислительной математики и математической физики, на которой она и проработала полвека.

Продолжая заниматься научными исследованиями, Галина Владимировна разработала новый подход к получению оценок погрешностей решений некорректных задач. По этой теме в 1998 г. она защитила докторскую диссертацию в Уральском отделении Академии наук России в г. Екатеринбурге.

После защиты диссертации Г. В. Хромова продолжила исследования и получила ряд важных научных результатов, в том числе указала границы применения методов А. Н. Тихонова и М. М. Лаврентьева. А в 2023 г., уже работая на кафедре дифференциальных уравнений и математической экономики, она нашла новый вид полиномиальных сплайнов со свойствами, востребованными при решении прикладных задач [9]. Любопытно, что до



сих пор Галина Владимировна использовала методы теории функций для получения результатов в некорректно поставленных задачах, а здесь, наоборот, увидела, что один из методов решения некорректных задач приводит к построению сплайнов — одному из математических аппаратов теории функций.

Галина Владимировна своим главным учителем считает Августа Петровича — именно он открыл ей красоту математики и научил отстаивать свои результаты. Она, как никто другой, является свидетелем его высокого мастерства.

Г. В. Хромова считает своей заслугой, что не дала пропасть одной замечательной идее, высказанной А. П. Хромовым на научном семинаре. Он предложил для улучшения аппроксимационных свойств хорошо известных в теории приближений интегральных операторов строить из них так называемые разрывные операторы, не требующие при их конструировании никаких усложнений, и продемонстрировал свою идею на операторе Стеклова, а позже — на операторе Ландау, для которого он сделал еще и упрощение. Через несколько лет после этого Г. В. Хромова стала применять такие операторы и в некорректных задачах, и в построении сплайнов. По данной теме она сделала пленарный доклад на Воронежской зимней школе в 2025 г. [10].

Отметим, что долгие годы (2002–2024 гг.) Галина Владимировна была главным редактором сборника научных трудов «Математика. Механика» (ISSN 1609-4751). Кроме того, она была представителем Поволжского региона в межрегиональном общественном движении «За возрождение отечественной науки», возглавляемом академиком Б. С. Капиным.

В заключение приведем слова профессора Московского университета И. С. Ломова на ученом совете механико-математического факультета СГУ: «С огромной радостью и глубоким уважением наблюдаю за удивительным сочетанием физического и научного долголетия в вашей семье. Ваш совместный путь в науке, десятилетия плодотворной работы служат ярким примером преданности знаниям и настоящим вдохновением для научного сообщества».

### Список литературы

1. Энциклопедия Саратовского края: в очерках, событиях, фактах, именах / редкол. : А. И. Аврус [и др.]. Саратов : Приволжское кн. изд-во, 2002. 687 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. Москва : Наука, 1969. 526 с.
3. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Математический сборник. 1981. Т. 114 (156), вып. 3. С. 378–405. EDN: ZEYLUF
4. Август Петрович Хромов (к 80-летию со дня рождения) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 351–356. EDN: UKIVHX
5. *Дудов С. И., Корнев В. В., Курдюмов В. П., Сидоров С. П.* О нашем учителе — Августе Петровиче Хроме / Очерки истории физико-математического образования в Саратовском университете. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2020. Вып. 2. С. 99–112. EDN: QHKFDQ
6. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для однородного волнового уравнения // Математика. Механика. 2025. Вып. 26. С. 48–52. EDN: CFNYWO
7. *Захаров А. М., Хромова Г. В.* О Саратовских зимних школах «Современные проблемы теории функций и их приложения» // Очерки истории физико-математического образования в Саратовском университете / под общ. ред. В. М. Аникина. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2021. Вып. 3. С. 122–128. EDN: JEBYHA
8. *Хромова Г. В.* История одной фотографии 1941 года // Очерки истории физико-математического образования в Саратовском университете / под общ. ред. В. М. Аникина. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2019. С. 51–54. EDN: BKZHJG
9. *Хромова Г. В.* Разрывный оператор Стеклова и аппроксимационные полиномиальные сплайны // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 184–188. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188>, EDN: ETQAWZ
10. *Хромова Г. В.* Модификация оператора Ландау и полиномиальные сплайны // Современные



методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 30 января – 04 февраля 2025 г. Воронеж : Воронежский гос. ун-т, 2025. С. 362–365. EDN: [JBMQYV](#)

## References

1. *Entsiklopediya Saratovskogo kraja: v ocherkakh, sobytiyakh, faktakh, imenakh* [Avrus A. I. et al. (eds.) Encyclopedia of the Saratov region: Essays, events, facts, and names]. Saratov, Privolzhskoe knizhnoe izdatel'stvo, 2002. 687 p. (in Russian).
2. Naimark M. A. *Linear differential operators*. Moscow, Nauka, 1969. 526 p. (in Russian).
3. Khromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1982, vol. 42, iss. 3, pp. 331–355 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1982v042n03ABEH002257>
4. August Petrovich Khromov (on the 80th anniversary of his birth). *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 351–356 (in Russian). EDN: [UKIVHX](#)
5. Dudov S. I., Kornev V. V., Kurdyumov V. P., Sidorov S. P. About our teacher — August Petrovich Khromov. *Essays on the History of Physics and Mathematics Education at Saratov State University*. Saratov, Saratov State University Publ., 2020, vol. 2, pp. 99–112. EDN: [QHKFDQ](#)
6. Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for homogeneous wave equation. *Mathematics. Mechanics*, 2025, vol. 26, pp. 48–52 (in Russian). EDN: [CFNYWO](#)
7. Zakharov A. M., Khromova G. V. On the Saratov Winter Schools “Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications”. In: Anikin V. M. (ed.) *Essays on the History of Physics and Mathematics Education at Saratov State University*. Saratov, Saratov State University Publ., 2021, vol. 3, pp. 122–128 (in Russian). EDN: [JEBYHA](#)
8. Khromova G. V. The story of a 1941 photograph. In: Anikin V. M. (ed.) *Essays on the History of Physics and Mathematics Education at Saratov State University*. Saratov, Saratov State University Publ., 2019, pp. 51–54 (in Russian). EDN: [BKZHHJG](#)
9. Khromova G. V. Discontinuous Steklov operator and approximate polynomial splines. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 184–188 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188>, EDN: [ETQAWZ](#)
10. Khromova G. V. Modification of the Landau operator and polynomial splines. In: *Modern Methods of Function Theory and Related Problems: Proceedings of the International Conference Voronezh Winter Mathematical School, Voronezh, January 30 – February 4, 2025*. Voronezh, Voronezh State University Publ., 2025, pp. 362–365 (in Russian). EDN: [JBMQYV](#)

Поступила в редакцию / Received 16.09.2025

Принята к публикации / Accepted 30.09.2025

Опубликована / Published 28.11.2025





ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)  
Известия Саратовского университета. Новая серия.  
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025.  
Том 25, выпуск 4

## ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития  
Серия: История. Международные отношения  
**Серия: Математика. Механика. Информатика**  
Серия: Науки о Земле  
Серия: Социология. Политология  
Серия: Физика  
Серия: Филология. Журналистика  
Серия: Философия. Психология. Педагогика  
Серия: Химия. Биология. Экология  
Серия: Экономика. Управление. Право

