

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2026

Том 26

Выпуск 1



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



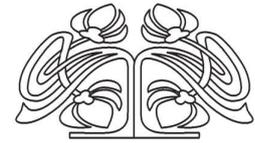
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2026 Том 26

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Ибадов Э. Дж.** Теорема о покомпонентной равносходимости для оператора Дирака с суммируемым потенциалом 4
- Сорокина М. М., Новикова Д. Г.** \mathfrak{F}^ω -инъекторы конечных групп 17
- Юрченко И. С.** О существовании совершенного множества единственности кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы для сходимости по кубам 28

Механика

- Анесян В. М., Колесников А. М.** Определение постоянной материала при индентировании круговой высокоэластичной мембраны с учётом трения 35
- Ватульян А. О., Узлов М. Н.** О прикладной теории сжатия цилиндра 46
- Лэ Ван Хоанг.** Особенности использования алгоритмов оптимизации для персонализации геометрических и биомеханических параметров модели роговицы 56
- Норкин М. В.** Некоторые особенности начального этапа кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости 68
- Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Zabiya I. Yu., Volkov S. S.** Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 2. Microgeometrical properties [Садырин Е. В., Николаев А. Л., Забияка И. Ю., Волков С. С. Характеризация свойств современных стоматологических материалов и тканей в их окрестности. Часть 2. Микрогеометрические свойства] 81
- Смирнова В. В.** Разработка и валидация программно-аппаратного комплекса для количественной оценки осанки с использованием цифровых видеоданных 91
- Федоров Ю. В.** Динамика инкапсулированного пузырька газа около упругой стенки 101

Информатика

- Бурцев Г. Е., Немирович-Данченко М. М.** Описание существующих подходов к автоматизации определения первых вступлений на сейсмических трассах 106
- Zverev O. V., Shelemekh E. A.** European option pricing on an incomplete market as an antagonistic game [Зверев О. В., Шелемех Е. А. Расчет европейского опциона на неполном рынке как антагонистическая игра] 132
- Курганский А. Н., Максимова А. Ю., Корнев С. А.** Модель динамического ценообразования без отрицательных примеров, основанная на безградиентной выпуклой оптимизации с неточным оракулом 139
- Сергеева Н. В., Станкевич Е. П., Тананко И. Е.** Приближенный метод анализа системы массового обслуживания с неординарным входящим потоком и групповым обслуживанием 145

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

Верстка

Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

Адрес учредителя, издателя

и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49,
52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 20.02.2026.

Подписано в свет 02.03.2026.

Выход в свет 02.03.2026.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 18,13 (19,5).

Тираж 100 экз. Заказ 4-Т

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2026

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS**Scientific Part****Mathematics**

Ibadov E. J. Componentwise equiconvergence theorem for the Dirac operator with a summable potential 4

Sorokina M. M., Novikova D. G. \mathfrak{S}^ω -injectors of finite groups 17

Yurchenko I. S. Existence of a perfect U-set of multiple series over a system of characters of a zero-dimensional group convergent on cubes 28

Mechanics

Anesyan V. M., Kolesnikov A. M. Determination of a material constant in indentation of a circular hyperelastic membrane accounting for friction 35

Vatulyan A. O., Uzlov M. N. On the applied theory of compression of an elastic cylinder 46

Le Van Hoang. Features of using optimization algorithms for personalizing the geometric and biomechanical parameters of the cornea model 56

Norkin M. V. Some features of the initial stage of cavitation motion of a circular cylinder under the free surface of a heavy liquid 68

Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Zabiya I. Yu., Volkov S. S. Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 2. Microgeometrical properties 81

Smirnova V. V. Development and validation of a hardware-software system for quantitative assessment of posture using digital video data 91

Fedorov Yu. V. Dynamics of an encapsulated gas bubble near an elastic wall 101

Computer Sciences

Burtsev G. Ye., Nemirovich-Danchenko M. M. The description of approaches to seismic waves automatic first breaks picking 106

Zverev O. V., Shelemekh E. A. European option pricing on an incomplete market as an antagonistic game 132

Kurganskii A. N., Maximova A. Ju., Kornev S. A. Dynamic pricing model without negative examples based on gradient-free convex optimization with inexact oracle 139

Sergeeva N. V., Stankevich E. P., Tananko I. E. An approximate method for analyzing a queueing system with batch arrivals and batch services 145



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Лисовенко Дмитрий Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Dmitry S. Lisovenko (Moscow, Russia)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

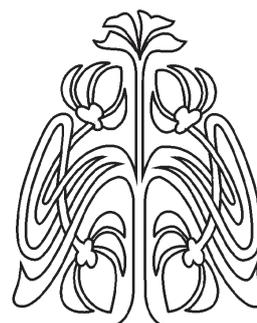
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

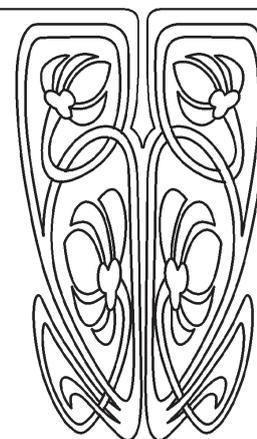
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 4–16

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 4–16

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-4-16>

EDN: <https://elibrary.ru/DXTJFB>

Научная статья

УДК 517

Теорема о покомпонентной равносходимости для оператора Дирака с суммируемым потенциалом

Э. Дж. Ибадов

Азербайджанский государственный педагогический университет,
Азербайджан, AZ1000, г. Баку, ул. Узеира Гаджибекова, д. 68

Ибадов Эльчин Джамал оглы, доцент кафедры математического
анализа, e.c_ibadov@yahoo.com, <https://orcid.org/0009-0002-8829-4885>

Аннотация. В работе рассматривается оператор Дирака с суммируемым потенциалом на конечном интервале (a, b) . Изучаются вопросы покомпонентной равносходимости ортогонального разложения с тригонометрическим рядом Фурье, и найдено достаточное условие для покомпонентной равносходимости на компакте основного интервала (a, b) .

Ключевые слова: оператор Дирака, собственная вектор-функция, покомпонентная равносходимость, неравенство Рисса

Для цитирования: Ибадов Э. Дж. Теорема о покомпонентной равносходимости для оператора Дирака с суммируемым потенциалом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 4–16. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-4-16>, EDN: DXTJFB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

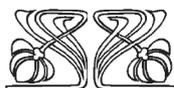
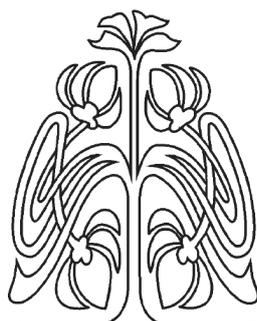
Article

Componentwise equiconvergence theorem for the Dirac operator with a summable potential

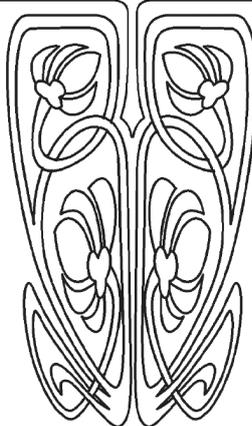
E. J. Ibadov

Azerbaijan State Pedagogical University, 68 Uzeir Hajibeyov St., Baku
AZ1000, Azerbaijan

Elchin J. Ibadov, e.c_ibadov@yahoo.com, <https://orcid.org/0009-0002-8829-4885>



Научный
отдел





Abstract. The article considers the Dirac operator with a summable potential on the finite interval (a, b) . It studies the componentwise equiconvergence of the orthogonal decomposition with a trigonometric Fourier series and finds a sufficient condition for componentwise equiconvergence on the compact main interval (a, b) .

Keywords: Dirac operator, eigenvector function, componentwise equiconvergence, Riss inequality

For citation: Ibadov E. J. Componentwise equiconvergence theorem for the Dirac operator with a summable potential. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-4-16>, EDN: DXTJFB This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение и формулировка результатов

Задача равносходимости спектрального разложения по системе собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с тригонометрическим рядом исследована В. А. Ильиным. В его работах [1, 2] собственные и присоединенные функции определяются как регулярные решения дифференциальных уравнений со спектральными параметрами, т. е. независимыми от граничных условий. Там же найдено необходимое и достаточное условие для равномерной равносходимости на компакте биортогонального разложения по системе собственных и присоединенных функций с тригонометрическим рядом дифференциального оператора произвольного порядка с гладкими коэффициентами.

В. М. Курбанов для дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами исследовал скорость равномерной равносходимости и равносходимость в метриках L_p , $1 \leq p < \infty$ на компакте [3, 4].

И. С. Ломов изучал скорость равносходимости в метриках L_p , $1 \leq p < \infty$ при определенных условиях на убывание биортогональных коэффициентов и на нормы собственных и присоединенных функций [5, 6].

Для оператора Шрёдингера с матричными коэффициентами равномерная равносходимость на компакте исследована в работе [7], а для дифференциальных операторов произвольного порядка в метриках L_p^n , $1 \leq p \leq \infty$ скорость равносходимости на компакте — в [8], а также при $1 \leq p < \infty$ — в работах [9, 10].

Вопросы покомпонентной равномерной равносходимости на компакте и другие спектральные свойства оператора Дирака исследованы в работах [11–16].

Рассмотрим на конечном интервале $G = (a, b)$ оператор Дирака

$$Dy = B \frac{dy}{dx} + P(x)y, \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T,$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \text{diag}(p_1(x), p_2(x))$ — действительная матрица-функция и $p_i(x) \in L_1(G)$, $i = 1, 2$.

Пусть $L_p^2(G)$, $p \geq 1$ — пространство вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ с нормой

$$\|f\|_{p,2,G} \equiv \|f\|_{p,2} = \left(\int_G (|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)^{p/2} dx \right)^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ норма в $L_\infty^2(G)$ определяется равенством

$$\|f\|_{\infty,2} = \sup_G \text{vrai} |f(x)|.$$

Очевидно, что при $f(x) \in L_p^2(G)$, $g(x) \in L_q^2(G)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ($1 \leq p \leq \infty$), существует

$$(f, g) = \int_G \sum_{j=1}^2 f_j(x) \overline{g_j(x)} dx.$$

Следуя работе [1], под собственной функцией оператора D , отвечающей действительному собственному значению λ , будем понимать любую тождественно не равную нулю вектор-функцию $y(x)$, которая абсолютно непрерывна на замкнутом интервале $\bar{G} = [a, b]$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $Dy = \lambda y$.

Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — произвольная полная ортонормированная в $L^2_2(G)$ система собственных вектор-функций оператора D , $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — соответствующая система собственных значений.

Для произвольной $f(x) \in L^2_p(G)$ ($p \geq 1$) составим частичную сумму порядка ν ортогонального разложения по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$:

$$\sigma_\nu(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leq \nu} (f, u_n) u_n(x), \quad x \in G.$$

Для каждого $j = 1, 2$ рассмотрим j -ю компоненту частичной суммы $\sigma_\nu(x, f)$:

$$\sigma_\nu^j(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leq \nu} (f, u_n) u_n^j(x), \quad x \in G,$$

и сравним $\sigma_\nu^j(x, f)$ с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье, соответствующей j -й компоненте $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$:

$$S_\nu(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y} f_j(y) dy.$$

Определение 1. Будем говорить, что j -я компонента разложения вектор-функции $f(x) \in L^2_p(G)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равносходится в метрике L_s , $s \in [1, \infty]$ на любом компакте множества $G = (a, b)$ с разложением соответствующей j -й компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, если на любом компакте $K \subset G$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left\| \sigma_\nu^j(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f_j) \right\|_{L_s(K)} = 0. \tag{1}$$

Теорема. Пусть $f(x) \in L^2_p(G)$ ($p > 1$), функции $p_i(x)$ ($i = 1, 2$) принадлежат классу $L_\alpha(G)$ ($\alpha \geq 1$) и справедливо неравенство

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{q} \right\}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Тогда на любом компакте $K \subset G$ справедливо равенство (1), т. е. j -я компонента разложения вектор-функции $f(x) \in L^2_p(G)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равносходится в метрике L_s , $s \in [1, \infty]$ на любом компакте множества $G = (a, b)$ с разложением соответствующей j -й компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Замечание. При $s = \infty$ равенство (1) означает, что

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left\| \sigma_\nu^j(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f_j) \right\|_{C(K)} = 0.$$

Поэтому при $\alpha > 2$ имеем равномерную равносходимость на любом компакте $K \subset G$ (см. [11]).



2. Некоторые вспомогательные утверждения

Определение 2. Будем говорить, что для системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ выполняется неравенство Рисса, если существует такая постоянная $M = M(p)$, что для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_p^2(G)$ ($1 < p \leq 2$) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^q \leq M \|f\|_{p,2}^q,$$

где $q = p/(p-1)$, $M(p)$ — константа, не зависящая от $f(x)$.

Для доказательства теоремы необходимы некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть функции $p_i(x)$ ($i = 1, 2$) принадлежат классу $L_1(G)$. Тогда существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что справедливы неравенства

$$\|u_n\|_{\infty,2} \leq C_1, \tag{2}$$

$$\sum_{|\mu-\lambda_n| \leq 1} \leq C_2, \tag{3}$$

где μ — произвольное действительное число.

Оценки (2) и (3) установлены соответственно в работах [15, 16].

Пусть

$$\Phi_n^1(r, R, \nu) = \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \sin \lambda_n(t-r) dt,$$

$$\Phi_n^2(r, R, \nu) = \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n(t-r) dt,$$

$$\frac{R_0}{2} \leq R \leq R_0, \quad R_0 > 0, \quad 0 < r < R < \infty, \quad \nu > 0, \quad n \in N,$$

$$\left\| \Phi_n^j(\cdot, R, \nu) \right\|_{p,[0,R]} \equiv \left\{ \int_0^R \left| \Phi_n^j(r, R, \nu) \right|^p dr \right\}^{1/p}.$$

Лемма 2. Если $\beta \in (0, 1]$, то для интегралов $\Phi_n^j(r, R, \nu)$ ($j = 1, 2; n \in N$) справедливы следующие оценки:

$$|\Phi_n^j| \leq C(\beta) \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{-\beta} r^{-\beta}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geq 1, \\ \max\{|\ln r|, |\ln R|\}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma,[0,R]} \leq C(R_0) \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{-1/\gamma}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geq 1, \gamma \in (1, \infty), \\ 1, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{1,[0,R]} \leq C(R_0) \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{-1/\tau}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geq 1, \tau > 1, \\ 1, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим только случай $j = 2$, ибо при $j = 1$ доказательство оценки (4) проводится совершенно аналогично. Учитывая равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

для интеграла $\Phi_n^j(r, R, \nu)$ получим

$$\begin{aligned} \Phi_n^2(r, R, \nu) &= \cos \lambda_n r \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n t dt + \sin \lambda_n r \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \sin \lambda_n t dt = \\ &= H_1(r, R, \nu, \lambda_n) \cos \lambda_n r + H_2(r, R, \nu, \lambda_n) \sin \lambda_n r. \end{aligned} \quad (7)$$

Представим интеграл H_1 в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n t dt = \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos |\lambda_n| t dt = \int_r^\infty - \int_R^\infty = \\ &= \frac{1}{2} \int_r^\infty \frac{\sin(\nu - |\lambda_n|)t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_r^\infty \frac{\sin(\nu + |\lambda_n|)t}{t} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_R^\infty \frac{\sin(\nu - |\lambda_n|)t}{t} dt - \frac{1}{2} \int_R^\infty \frac{\sin(\nu + |\lambda_n|)t}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\nu - |\lambda_n|) \int_{|\nu - |\lambda_n||r}^\infty \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_{(\nu + |\lambda_n|)r}^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\nu - |\lambda_n|) \int_{|\nu - |\lambda_n||R}^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{2} \int_{(\nu + |\lambda_n|)R}^\infty \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство $|\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt| \leq C(\varepsilon)/x^\varepsilon$, $x > 0$, $\varepsilon \in [0, 1]$, получим

$$|H_1| \leq \frac{C_1(\beta)}{|\nu - |\lambda_n||^\beta r^\beta} + \frac{C_1(\beta)}{|\nu + |\lambda_n||^\beta R^\beta} \leq \frac{C(\beta)}{|\nu - |\lambda_n||^\beta r^\beta}.$$

Аналогично для интеграла H_2 получим

$$H_2 = \operatorname{sign} \lambda_n \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \sin |\lambda_n| t dt = \frac{\operatorname{sign} \lambda_n}{2} \int_r^R \frac{\cos(\nu - |\lambda_n|)t}{t} dt - \frac{\operatorname{sign} \lambda_n}{2} \int_r^R \frac{\cos(\nu + |\lambda_n|)t}{t} dt.$$

Интегрируя по частям $\int_r^R \frac{\cos(\nu - |\lambda_n|)t}{t} dt$ и применяя неравенство $|\sin x| \leq |x|^{1-\beta}$, $\beta \in [0, 1]$, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_r^R \frac{\cos(\nu - |\lambda_n|)t}{t} dt \right| &= \left| \frac{\sin(\nu - |\lambda_n|)t}{(\nu - |\lambda_n|)t} \Big|_r^R + \frac{1}{\nu - |\lambda_n|} \int_r^R \frac{\sin(\nu + |\lambda_n|)t}{t^2} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\nu - |\lambda_n||^\beta R^\beta} + \frac{1}{|\nu - |\lambda_n||^\beta r^\beta} + \frac{1}{|\nu - |\lambda_n||^\beta} \int_r^R \frac{dt}{t^{1+\beta}} \leq \\ &\leq \frac{2}{|\nu - |\lambda_n||^\beta r^\beta} + \frac{\beta^{-1}}{|\nu - |\lambda_n||^\beta} \left(\frac{1}{r^\beta} - \frac{1}{R^\beta} \right) \leq \frac{C_2(\beta)}{|\nu - |\lambda_n||^\beta r^\beta}, \end{aligned}$$

где $C_2(\beta) = 2(1 + \beta^{-1})$, $\beta > 0$.



Аналогично для интеграла $\int_r^R \frac{\cos(\nu+|\lambda_n|)t}{t} dt$ имеем оценку

$$\int_r^R \frac{\cos(\nu + |\lambda_n|)t}{t} dt \leq \frac{C_2(\beta)}{|\nu + |\lambda_n||^{\beta} r^{\beta}}.$$

Следовательно, для интеграла H_2 справедлива оценка

$$|H_2| \leq \frac{C(\beta)}{|\nu - |\lambda_n||^{\beta} r^{\beta}}.$$

Учитывая эти оценки для интегралов H_1 и H_2 , из равенства (7) получим

$$|\Phi_n^2(r, R, \nu)| \leq |H_1| + |H_2| \leq \frac{C(\beta)}{|\nu - |\lambda_n||^{\beta} r^{\beta}}.$$

Вторая часть оценки (4) следует из неравенства

$$\left| \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n(t-r) dt \right| \leq \int_r^R \frac{dt}{t} \leq 2 \max[|\ln r|, |\ln R|].$$

Теперь докажем оценку (5). Пусть число $R_0 > 0$ зафиксировано и справедливо неравенство $|\nu - |\lambda_n|| \geq \frac{2}{R_0} \geq 1$, тогда $|\nu - |\lambda_n||^{-1} \leq \frac{R_0}{2} \leq R$. Учитывая неравенство $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 \leq p < \infty$, для интеграла $\Phi_n^j(r, R, \nu)$ ($j = 1, 2$) получим

$$\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [0, R]} \leq 2^{1/\gamma} \left(\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [0, |\nu - |\lambda_n||^{-1}]} + \|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [|\nu - |\lambda_n||^{-1}, R]} \right).$$

Для оценки $\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [0, |\nu - |\lambda_n||^{-1}]}$ применим (4) при $\beta \in (0, 1)$, $\beta\gamma < 1$, а для оценки $\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [|\nu - |\lambda_n||^{-1}, R]}$ — (4) при $\beta = 1$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [0, |\nu - |\lambda_n||^{-1}]} &= O\left(\left(\int_0^{|\nu - |\lambda_n||^{-1}} |\nu - |\lambda_n||^{-\beta\gamma} r^{-\beta\gamma} dr\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) = \\ &= O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-\beta}\right) \cdot \left(|\nu - |\lambda_n||^{\gamma\beta-1}\right) = O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-1/\gamma}\right); \\ \|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [|\nu - |\lambda_n||^{-1}, R]} &= O\left(\left(\int_{|\nu - |\lambda_n||^{-1}}^R |\nu - |\lambda_n||^{-\gamma} r^{-\gamma} dr\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) = \\ &= O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-1}\right) \cdot \left(\int_{|\nu - |\lambda_n||^{-1}}^R r^{-\gamma} dr\right)^{1/\gamma} = \\ &= O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-1}\right) \cdot \left[(R^{-1})^{\gamma-1} - |\nu - |\lambda_n||^{\gamma-1}\right]^{1/\gamma} = \\ &= O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-1}\right) \cdot \left(2|\nu - |\lambda_n||^{\gamma-1}\right)^{1/\gamma} = O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-1/\gamma}\right). \end{aligned}$$

При $1 \leq |\nu - |\lambda_n|| < \frac{2}{R_0}$ в силу оценки (4) для $\beta = \beta_0 < \frac{1}{\gamma}$ получим

$$\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [0, R]} = \left(|\nu - |\lambda_n||^{-\beta_0}\right) \cdot \left(\int_0^R r^{-\beta_0\gamma} dr\right)^{1/\gamma} =$$

$$= O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-\beta_0}\right) R_0^{\frac{1}{\gamma} - \beta_0} = O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-\beta_0}\right) |\nu - |\lambda_n||^{\beta_0 - \frac{1}{\gamma}} = O\left(|\nu - |\lambda_n||^{-\frac{1}{\gamma}}\right).$$

При $|\nu - |\lambda_n|| < 1$ оценка (5) непосредственно следует из оценки (4), учитывая интегрируемость функции $|\ln r|^\gamma$.

Лемма 2 доказана. □

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_p^2(G)$, $p > 1$. Фиксируем произвольный связной компакт $K \subset G$ и число R , удовлетворяющее условию $0 < 2R < \text{dist}(K, \partial G)$.

Введем для каждой $x \in K$ функцию

$$\varphi(x, y, R, \nu) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y}, & \text{при } |x-y| \leq R, \\ 0, & \text{при } |x-y| > R, \end{cases} \quad (8)$$

где $y \in G$, $\nu > 0$.

Обозначим

$$W(x, y, R, \nu) = \text{diag}(\varphi, \varphi), \quad W_n(x, R, \nu) = \int_G W(x, y, R, \nu) u_n(y) dy. \quad (9)$$

Лемма 3. Пусть система $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ замкнута и минимальна в $L_p^2(G)$, $p > 1$ и для произвольной функции $f(x) \in L_p^2(G)$ выполняется оценка

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty W_n f_n \right\|_{s,2,K} \leq C(\nu, K) \|f\|_{p,2}, \quad s \geq 1,$$

где $C(\nu, K)$ не зависит от $f(x)$.

Тогда в метрике $L_s^2(K)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^\infty W_n f_n = \int_G f(y) W(|x-y|, R, \nu) f(y) dy,$$

где $f_n = (f, u_n)$.

Доказательство леммы 3 полностью аналогично доказательству из [8, лемма 3].

3. Доказательство теоремы

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_p^2(G)$, $p > 1$. Фиксируем произвольный связной компакт $K \subset G$ и число R , удовлетворяющее условию $0 < 2R < \text{dist}(K, \partial G)$.

Учитывая (9) и (8), получим

$$\begin{aligned} W_n(x, R, \nu) &= \int_G W(x, y, R, \nu) u_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \leq R} \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y} u_n(y) dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \{u_n(x-t) + u_n(x+t)\} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \cdot \frac{u_n(x-t) + u_n(x+t)}{2} dt. \end{aligned}$$

В силу формулы среднего значения (см. [11])

$$\begin{aligned} \frac{u_n(x-t) + u_n(x+t)}{2} &= u_n(x) \cos \lambda_n t + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \{\sin \lambda_n(t - |x-\xi|)I + \text{sign}(\xi - x) \cos \lambda_n(t - |x-\xi|)B\} P(\xi) u_n(\xi) d\xi, \end{aligned}$$



где I — единичная матрица в E^2 , получаем

$$\begin{aligned}
 W_n(x, y, R, \nu) &= \frac{2}{\pi} u_n(x) \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n t dt + \\
 &+ \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \int_{x-t}^{x+t} \left\{ \sin \lambda_n (t - |x - \xi|) I + \text{sign}(\xi - x) \cos \lambda_n (t - |x - \xi|) B \right\} P(\xi) u_n(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{2}{\pi} u_n(x) \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n t dt + \frac{1}{\pi} \int_{x-R}^{x+R} \left(\int_{|x-\xi|}^R \frac{\sin \nu t}{t} \left\{ \sin \lambda_n (t - |x - \xi|) I + \text{sign}(\xi - x) \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \cos \lambda_n (t - |x - \xi|) B \right\} dt \right) P(\xi) u_n(\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} u_n(x) \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n t dt + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{x-R}^{x+R} \left\{ \Phi_n^1(|x - \xi|, R, \nu) I + \text{sign}(\xi - x) \Phi_n^2(|x - \xi|, R, \nu) B \right\} P(\xi) u_n(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Представим эту формулу в виде

$$\begin{aligned}
 W_n(x, R, \nu) &= u_n(x) \delta(\nu, \lambda_n) + u_n(x) \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n t dt - \delta(\nu, \lambda_n) \right\} + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{x-R}^{x+R} \left\{ \Phi_n^1(|x - \xi|, R, \nu) I + \text{sign}(\xi - x) \Phi_n^2(|x - \xi|, R, \nu) B \right\} P(\xi) u_n(\xi) d\xi = \\
 &= u_n(x) \delta(\nu, \lambda_n) + u_n(x) J(\nu, \lambda_n) + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{x-R}^{x+R} \left\{ \Phi_n^1(|x - \xi|, R, \nu) I + \text{sign}(\xi - x) \Phi_n^2(|x - \xi|, R, \nu) B \right\} P(\xi) u_n(\xi) d\xi, \quad (10)
 \end{aligned}$$

где

$$\delta(\nu, \lambda_n) = \begin{cases} 1, & \text{при } \nu > \lambda_n, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } \nu = \lambda_n, \\ 0, & \text{при } \nu < \lambda_n, \end{cases} \quad J(\nu, \lambda_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n t dt - \delta(\nu, \lambda_n).$$

Рассмотрим разность $\sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n - \sigma_\nu(x, f)$, где $f \in L_p^2(G)$ ($p > 1$) и $f_n = (f, u_n)$.

Учитывая здесь формулу (10), получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n - \sigma_\nu(x, f) &= -\frac{1}{2} \sum_{|\lambda_n|=\nu} (f, u_n) u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) u_n(x) J(\nu, \lambda_n) + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) \int_0^R \left\{ P(x+r) u_n(x+r) + P(x-r) u_n(x-r) \right\} \Phi_n^1(r, R, \nu) dr + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) \int_0^R \left\{ P(x+r) u_n(x+r) - P(x-r) u_n(x-r) \right\} \Phi_n^2(r, R, \nu) dr =
 \end{aligned}$$

$$= F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + F_4(x), \quad x \in K. \tag{11}$$

Оценим $\|F_i\|_{s,2,K}$, $i = \overline{1,4}$.

Используя оценки (2), (3) и неравенство Рисса, имеем

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{s,2,K} &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{|\lambda_n|=\nu} (f, u_n) u_n(\cdot) \right\|_{s,2,K} \leq \frac{1}{2} \sum_{|\lambda_n|=\nu} |(f, u_n)| \|u_n\|_{s,2} \leq \\ &\leq C \sum_{|\lambda_n|=\nu} |(f, u_n)| \leq C \left(\sum_{|\lambda_n|=\nu} |(f, u_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{|\lambda_n|=\nu} 1 \right)^{1/p} \leq C \|f\|_{p,2}, \quad 1 < p \leq 2. \end{aligned}$$

Применив оценки (2), (3), неравенство Рисса (см. [12]) и учитывая неравенство (см. [9])

$$|J(\nu, \lambda_n)| \leq \frac{C(R)}{1 + |\nu - |\lambda_n||},$$

имеем

$$\begin{aligned} \|F_2\|_{s,2,K} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) u_n(\cdot) J(\nu, \lambda_n) \right\|_{s,2,K} \leq C(R) \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| |J(\nu, \lambda_n)| \|u_n\|_{s,2,K} \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| \cdot |J(\nu, \lambda_n)| \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ||\lambda_n| - \nu|)^p} \right)^{1/p} \leq \\ &\leq C \|f\|_{p,2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n} \right)^p \sum_{n \leq |\nu - |\lambda_n|| \leq n+1} 1 \right)^{1/p} \leq C \|f\|_{p,2} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-p} \right)^{1/p} \leq C \|f\|_{p,2}, \quad 1 < p \leq 2. \end{aligned}$$

Теперь оценим $\|F_3\|_{s,2,K}$. В силу оценки (2) имеем

$$\begin{aligned} |F_3(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) \int_0^R \{P(x+r)u_n(x+r) + P(x-r)u_n(x-r)\} \Phi_n^1(r, R, \nu) dr \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| \int_0^R \left\{ (|p_1(x+r)u_n^1(x+r)|^2 + |p_2(x+r)u_n^2(x+r)|^2)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + (|p_1(x-r)u_n^1(x-r)|^2 + |p_2(x-r)u_n^2(x-r)|^2)^{1/2} \right\} |\Phi_n^1(r, R, \nu)| dr \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| \int_0^R Q(x, r) |\Phi_n^1(r, R, \nu)| dr, \tag{12} \end{aligned}$$

где $Q(x, r) = |p_1(x+r)| + |p_1(x-r)| + |p_2(x-r)| + |p_2(x+r)|$.

В силу неравенства Юнга (см. [17]) для этих интегралов справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|N^{\pm}\|_{s,K} &= \left\| \int_0^R p_1(\cdot \pm r) \Phi_n^1(r, R, \nu) dr \right\|_{s,K} \leq \|p_1\|_{\alpha} \|\Phi_n^1(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [0,R]}, \\ \|M^{\pm}\|_{s,K} &= \left\| \int_0^R p_2(\cdot \pm r) \Phi_n^1(r, R, \nu) dr \right\|_{s,K} \leq \|p_2\|_{\alpha} \|\Phi_n^1(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma, [0,R]}, \end{aligned}$$

где $\gamma^{-1} = 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha}$ для $s > \alpha$, $\gamma = 1$ для $s \leq \alpha$.

Используя оценки (5) и (6), получаем

$$\|N^{\pm}\|_{s,K} \leq C(R) \|p_1\|_{\alpha} \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} - 1}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geq 1, \quad s \geq \alpha \\ |\nu - |\lambda_n||^{-\frac{1}{\tau}}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geq 1, \quad s \leq \alpha, \\ 1, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1, \end{cases} \tag{13}$$



$$\|M^\pm\|_{s,K} \leq C(R)\|p_2\|_\alpha \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} - 1}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geq 1, s \geq \alpha \\ |\nu - |\lambda_n||^{-\frac{1}{\tau}}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geq 1, s \leq \alpha, \\ 1, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1. \end{cases} \quad (14)$$

Для $s > \alpha$ в силу оценки (13) и (14) из неравенства (12) следует

$$\begin{aligned} \|F_3\|_{s,2,K} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| \left\| \int_0^R Q(x, r) |\Phi_n^1(r, R, \nu)| dr \right\|_{s,2,K} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{|\nu - |\lambda_n|| < 1} |(f, u_n)| \left\{ \|N^+\|_{s,K} + \|N^-\|_{s,K} + \|M^+\|_{s,K} + \|M^-\|_{s,K} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\nu - |\lambda_n|| \geq 1} |(f, u_n)| \left\{ \|N^+\|_{s,K} + \|N^-\|_{s,K} + \|M^+\|_{s,K} + \|M^-\|_{s,K} \right\} \right) \leq \\ &\leq C(\|p_1\|_\alpha + \|p_2\|_\alpha) \left\{ \sum_{|\nu - |\lambda_n|| < 1} |(f, u_n)| + \sum_{|\nu - |\lambda_n|| \geq 1} |(f, u_n)| \cdot |\nu - |\lambda_n||^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Рисса, неравенства $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \frac{1}{q}$ и (3) следует оценка

$$\|F_3\|_{s,2,K} \leq C(\|p_1\|_\alpha + \|p_2\|_\alpha) \|f\|_{p,2}.$$

В случае $s \leq \alpha$, применяя оценки (14) с параметром $\tau > \frac{1}{p}$ и неравенство Рисса и учитывая (2), (3), имеем

$$\begin{aligned} \|F_3\|_{s,2,K} &\leq C(\|p_1\|_\alpha + \|p_2\|_\alpha) \left\{ \sum_{|\nu - |\lambda_n|| < 1} |(f, u_n)| + \sum_{|\nu - |\lambda_n|| \geq 1} |(f, u_n)| \cdot |\nu - |\lambda_n||^{-\frac{1}{\tau}} \right\} \leq \\ &\leq C(\|p_1\|_\alpha + \|p_2\|_\alpha) \|f\|_{p,2}. \end{aligned}$$

Следовательно, для $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \frac{1}{q}$ получим справедливость оценки

$$\|F_3\|_{s,2,K} \leq C(K) \|f\|_{p,2}.$$

Аналогично устанавливается оценка для вектор-функции $F_4(x)$:

$$\|F_4\|_{s,2,K} \leq C(K) \|f\|_{p,2}.$$

Следовательно, в силу полученных оценок для сумм $F_k(x)$, $k = \overline{1, 4}$ из (11) следует, что для любой функции $f(x) \in L_p^2(G)$, $1 < p \leq 2$ выполняется оценка

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n - \sigma_\nu(\cdot, f) \right\|_{s,2,K} \leq C(K) \|f\|_{p,2}, \quad (15)$$

где $f_n = (f, u_n)$.

Поскольку пространство $L_p^2(G)$ ($p > 2$) вложено в пространство $L_p^2(G)$ ($1 < p \leq 2$), то при условии $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \frac{1}{2}$ оценка (15) справедлива и в случае $f(x) \in L_p^2(G)$ ($p > 2$).

Таким образом, получаем, что при $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$ оценка (15) справедлива для произвольного $f(x) \in L_p^2(G)$ ($p > 1$).

С другой стороны, понятна справедливость оценки

$$\|\sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} \leq \sum_{|\lambda_n| \leq \nu} |(f, u_n)| \|u_n\|_{s,K} \leq C(K) \|f\|_{p,2} \sum_{|\lambda_n| \leq \nu} 1 \leq C(K) \nu \|f\|_{p,2}.$$



Тогда для любой функции $f(x) \in L_p^2(G)$, $p > 1$, имеет место оценка

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n \right\|_{s,2,K} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n - \sigma_\nu(\cdot, f) \right\|_{s,2,K} + \|\sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} \leq C(K)\nu \|f\|_{p,2}.$$

А это означает, что условие леммы 3 выполнено. Поэтому из неравенства (15) следует, что для любой вектор-функции $f \in L_p^2(G)$ ($p > 1$) выполняется оценка

$$\|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} \leq C(K)\|f\|_{p,2}. \quad (16)$$

Из замкнутости системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_p^2(G)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $n_0(\varepsilon, f)$, что

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{n_0(\varepsilon, f)} (f, u_n) u_n(x) \right\|_{p,2} < \frac{\varepsilon}{2C(K)}.$$

Обозначим $g(x) = \sum_{n=1}^{n_0(\varepsilon, f)} (f, u_n) u_n(x)$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$\begin{aligned} \|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} &= \|S_\nu(\cdot, f - g) + S_\nu(\cdot, g) - \sigma_\nu(\cdot, f - g) - \sigma_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K} \leq \\ &\leq \|S_\nu(\cdot, f - g) - \sigma_\nu(\cdot, f - g)\|_{s,2,K} + \|\sigma_\nu(\cdot, g) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу оценки (16) и равенства $\sigma_\nu(x, g) = g(x)$ для достаточно больших ν получим

$$\begin{aligned} \|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} &\leq C(K)\|f - g\|_{p,2} + \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому следует доказать равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K} = 0. \quad (18)$$

Из определения собственной функции $u_n(x)$ следует, что она принадлежит классу $W_\alpha^1(G)$ (см. [15]). Следовательно, функция $g(x)$ также принадлежит $W_\alpha^1(G)$. Если $s \leq 2$, то равенство (18) является следствием базисности тригонометрической системы $L_2(G)$. Если $s > 2$, то по условию $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$ находим

$$\alpha > \frac{s}{s \cdot \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\} + 1} > 1.$$

Это показывает, что функция $g(x)$ принадлежит $W_\alpha^1(G)$, $\alpha > 1$.

Следовательно, каждая компонента $g_i(x)$, $i = 1, 2$ вектор-функции $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ удовлетворяет условию Гельдера. Поэтому на любом фиксированном компакте $K \subset G$ справедливо равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{C(K)} = 0.$$

Таким образом, равенство (18) доказано.

Из неравенства (17) с учетом равенства (18) получим, что при $\nu \geq \nu_0$ (ν_0 — достаточно большое число) выполняется неравенство

$$\|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} < \varepsilon.$$

Теорема полностью доказана.



Список литературы

1. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771–794.
2. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 980–1009.
3. Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. I // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 12. С. 1597–1609.
4. Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. II // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 3. С. 319–335.
5. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. I // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 5. С. 619–628.
6. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. II // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1066–1077.
7. Ильин В. А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1862–1878.
8. Курбанов В. М. О скорости равносходимости спектральных разложений // Доклады академии наук. 1999. Т. 365, № 4. С. 444–449.
9. Ломов И. С., Марков А. С. Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов четного порядка // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 557–563. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064113050026>, EDN: PZVNNH
10. Markov A. S. Estimates for the equiconvergence rate of spectral expansions on an interval // Differential Equation. 2012. Vol. 48, iss 8. P. 1090–1102. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266112080046>
11. Курбанов В. М., Исмаилова А. М. Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложением // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 648–662. EDN: OXXWVV
12. Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M. On local uniform equiconvergence rate for the Dirac operator // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2020. Vol. 46, iss. 1. P. 16–31. DOI: <https://doi.org/10.29228/proc.14>
13. Курбанов В. М. О бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 12. С. 1608–1617.
14. Курбанов В. М., Исмаилова А. И. Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 334–340. EDN: OPTGBT
15. Курбанов В. М., Исмаилова А. И. Двусторонние оценки для корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 487–497. EDN: OWXITX
16. Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // Operator and Matrices. 2018. Vol. 12, iss. 4. P. 943–954. DOI: <https://doi.org/10.7153/oam-2018-12-57>
17. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральное представление функций и теоремы вложения. Москва : Наука, Физматлит, 1996. 479 с.

References

1. Il'in V. A. Necessary and sufficient conditions for spatial decompositions to be bases and to be equiconvergent with a trigonometric series. I. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 15, iss. 5, pp. 771–794 (in Russian).
2. Il'in V. A. Necessary and sufficient conditions for spatial decompositions to be bases and to be equiconvergent with a trigonometric series. II. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 16, iss. 6, pp. 980–1009 (in Russian).



3. Kurbanov V. M. Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators. I. *Differential Equations*, 1999, vol. 35, iss. 12, pp. 1619–1633. EDN: [XLCQMP](#)
4. Kurbanov V. M. Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators: II. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, iss. 3, pp. 358–376. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754456>
5. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. I. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, iss. 5, pp. 621–630. EDN: [PJLLDF](#)
6. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. II. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, iss. 8, pp. 1070–1081. EDN: [PJLLML](#)
7. Il'in V. A. Componentwise equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root vector functions of the Schrödinger operator with a matrix non-Hermitian potential, all elements of which are only summable. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1991, vol. 27, iss. 11, pp. 1307–1321.
8. Kurbanov V. M. On the equiconvergence rate of spectral expansions. *Doklady Mathematics*, 1999, vol. 59, iss. 2, pp. 252–257. EDN: [LFPJEP](#)
9. Lomov I. S., Markov A. S. Estimates of the local convergence rate of spectral expansions for even-order differential operators. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, iss. 5, pp. 529–535. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266113050017>, EDN: [RFJJVX](#)
10. Markov A. S. Estimates for the equiconvergence rate of spectral expansions on an interval. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss. 8, pp. 1090–1102. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266112080046>
11. Kurbanov V. M., Ismailova A. I. Componentwise uniform equiconvergence of expansions in root vector functions of the Dirac operator with the trigonometric expansion. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss. 5, pp. 655–669. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266112050047>, EDN: [XMXYPD](#)
12. Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M. On local uniform equiconvergence rate for the Dirac operator. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 2020, vol. 46, iss. 1, pp. 16–31. DOI: <https://doi.org/10.29228/proc.14>
13. Kurbanov V. M. On the Bessel property and the unconditional basis property of systems of root vector functions of the Dirac operator. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, iss. 12, pp. 1601–1610.
14. Kurbanov V. M., Ismailova A. I. Riesz inequality for systems of root vector functions of the Dirac operator. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss. 3, pp. 336–342. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266112030044>, EDN: [PMYUQR](#)
15. Kurbanov V. M., Ismailova A. I. Two-sided estimates for root vector functions of the Dirac operator. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss. 4, pp. 494–505. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266112040040>, EDN: [XMEOQF](#)
16. Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient. *Operator and Matrices*, 2018, vol. 12, iss. 4, pp. 943–954. DOI: <https://doi.org/10.7153/oam-2018-12-57>
17. Besov O. V., Ilyin V. P., Nikolsky S. M. *Integral'noe predstavlenie funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral representation of functions and embedding theorems]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1996. 479 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.06.2024

Принята к публикации / Accepted 01.09.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 17–27

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 17–27
DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-17-27>

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-17-27>

EDN: <https://elibrary.ru/HGGRSF>

Научная статья

УДК 512.542

\mathfrak{F}^ω -инъекторы конечных групп

М. М. Сорокина[✉], Д. Г. Новикова

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д. 14

Сорокина Марина Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>, SPIN: 3565-2217, AuthorID: 441219

Новикова Диана Геннадьевна, ассистент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, novikovadg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5935-5397>, SPIN: 1482-5618, AuthorID: 1132164

Аннотация. Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. \mathfrak{F} -инъекторы (Б. Фишер, В. Гашюц, Б. Хартли, 1967) и \mathfrak{F} -проекторы (В. Гашюц, 1969), где \mathfrak{F} — некоторый класс групп, относятся к хорошо известным подгруппам в группах, обобщающим свойства силовских и холловых подгрупп. Для непустого множества ω простых чисел было введено в рассмотрение понятие \mathfrak{F}^ω -проектора группы, обобщающее понятие \mathfrak{F} -проектора (В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, 2016). Используя аналогичный подход, авторами данной статьи были определены \mathfrak{F}^ω -инъекторы в группах. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F}^ω -инъектором в G , если H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G и для каждой субнормальной ω -подгруппы K группы G пересечение $H \cap K$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K . В случае, когда ω совпадает с множеством всех простых чисел, понятие \mathfrak{F}^ω -инъектора совпадает с понятием \mathfrak{F} -инъектора группы. Целью настоящей работы является изучение свойств \mathfrak{F}^ω -инъекторов в разрешимых группах. В работе используются классические методы доказательств теории конечных групп, а также методы теории классов групп. Решены следующие задачи: установлены свойства существования и сопряженности \mathfrak{F}^ω -инъекторов в разрешимых группах (теорема 1); описаны необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа разрешимой группы является ее \mathfrak{F}^ω -инъектором (теоремы 2–4). Полученные результаты являются развитием известных теорем об \mathfrak{F} -инъекторах, они могут быть полезными в дальнейших исследованиях подгруппового строения конечных групп методами теории классов групп.

Ключевые слова: группа, конечная группа, разрешимая группа, \mathfrak{F}^ω -инъектор группы, класс групп, класс Фиттинга

Для цитирования: Сорокина М. М., Новикова Д. Г. \mathfrak{F}^ω -инъекторы конечных групп // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 17–27. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-17-27>, EDN: HGGRSF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

\mathfrak{F}^ω -injectors of finite groups

M. M. Sorokina[✉], D. G. Novikova

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia

Marina M. Sorokina, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>, SPIN: 3565-2217, AuthorID: 441219



Diana G. Novikova, novikovadg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5935-5397>, SPIN: 1482-5618, AuthorID: 1132164

Abstract. Only finite groups and classes of finite groups are considered. \mathfrak{F} -injectors (B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley, 1967) and \mathfrak{F} -projectors (W. Gaschutz, 1969), where \mathfrak{F} is a class of groups, are well-known subgroups in groups that generalize the properties of Sylow and Hall subgroups. For a non-empty set ω of primes the concept of \mathfrak{F}^ω -projector of a group (V. A. Vedernikov and M. M. Sorokina, 2016), which generalizes the concept of \mathfrak{F} -projector, was introduced. Using a similar approach, the authors of this article defined \mathfrak{F}^ω -injectors in groups. A subgroup H of G is called an \mathfrak{F}^ω -injector in G if H is an \mathfrak{F} -maximal subgroup in G and for every subnormal ω -subgroup K of G the intersection $H \cap K$ is an \mathfrak{F} -maximal subgroup in K . In the case where ω coincides with the set of all primes, the concept of an \mathfrak{F}^ω -injector coincides with the concept of an \mathfrak{F} -injector of a group. The goal of this paper is to study the properties of \mathfrak{F}^ω -injectors in soluble groups. The paper uses classical methods of proofs of the theory of finite groups, as well as methods of the theory of classes of groups. The following tasks are solved: the existence and conjugacy of \mathfrak{F}^ω -injectors in solvable groups are established (Theorem 1); necessary and sufficient conditions under which a subgroup of a solvable group is its \mathfrak{F}^ω -injector are described (Theorems 2–4). Obtained results develop known theorems on \mathfrak{F} -injectors; they can be useful in further research of the subgroup structure of finite groups using methods of the theory of classes of groups.

Keywords: group, finite group, solvable group, \mathfrak{F}^ω -injector, class of groups, Fitting class

For citation: Sorokina M. M., Novikova D. G. \mathfrak{F}^ω -injectors of finite groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 17–27 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-17-27>, EDN: HGGRSF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Рассматриваются только конечные группы. При исследовании подгруппового строения конечных групп средствами теории классов групп важную роль играют подгруппы в группах, определяемые посредством фиксированных классов. К таким подгруппам относятся \mathfrak{F} -инъекторы в группах, введенные в рассмотрение в совместной работе Б. Фишера, В. Гашюца, Б. Хартли [1]. \mathfrak{F} -инъектор группы G , где \mathfrak{F} — непустой класс групп, представляет собой такую ее подгруппу, пересечение которой с любой субнормальной подгруппой K группы G является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K .

Понятие \mathfrak{F} -инъектора является естественным обобщением понятия силовой (холловой) подгруппы группы, а именно силовая p -подгруппа (холлова π -подгруппа) группы G — это в точности \mathfrak{N}_p -инъектор (\mathfrak{G}_π -инъектор) в G (см., например, [2, p. 68]), где \mathfrak{N}_p и \mathfrak{G}_π — классы всех p -групп и всех π -групп соответственно (p — простое число, π — непустое множество простых чисел). Ключевые свойства \mathfrak{F} -инъекторов групп для произвольного класса Фиттинга \mathfrak{F} изложены в [3, Ch. IX] и [4, Ch. 7]. Исследованию \mathfrak{F} -инъекторов в группах для различных классов групп \mathfrak{F} посвящены работы Б. Хартли, Дж. Косси, П. Ферстера, Л. А. Шеметкова, Н. Т. Воробьева, В. Го и многих других алгебраистов (например, [5–7]).

Понятие \mathfrak{F} -инъектора является двойственным к понятию \mathfrak{F} -проектора группы, введенному в рассмотрение В. Гашюцем в 1969 г. [8]. Данное понятие также является обобщением понятий силовой и холловой подгрупп, но наследует другое их свойство. \mathfrak{F} -проектор группы G представляет такую \mathfrak{F} -подгруппу H из G , что фактор-группа HN/N является \mathfrak{F} -максимальной в G/N для любой нормальной подгруппы N из G . Многие важные свойства \mathfrak{F} -проекторов в группах были установлены для случая, когда класс \mathfrak{F} является локальной формацией (см., например, [9, гл. IV]). Обобщением понятия локальной формации является введенное в рассмотрение в [10] понятие ω -локальной формации, где ω — непустое множество простых чисел.

В работе [11] в качестве естественного обобщения понятия \mathfrak{F} -проектора были определены



\mathfrak{F}^ω -проекторы групп и установлены их свойства (существование, сопряженность, вложение в другие подгруппы) для случая, когда \mathfrak{F} является ω -локальной формацией. Следуя подходу к определению \mathfrak{F}^ω -проектора из работы [11], в [12] было введено в рассмотрение понятие \mathfrak{F}^ω -инъектора группы и установлены некоторые простейшие свойства таких подгрупп. Настоящая работа посвящена исследованию свойств \mathfrak{F}^ω -инъекторов в разрешимых группах.

Развивая фундаментальные теоремы Силова и Холла (см., например, [3, Ch. A, Eq. (6.2); Ch. I, Eq. (3.3)]), в [1] было доказано существование и сопряженность \mathfrak{F} -инъекторов в разрешимых группах для класса Фиттинга \mathfrak{F} , содержащегося в универсуме всех разрешимых групп (см. также [3, Ch. IX, Eq. (1.4)]). В дальнейшем Л. А. Шеметков и, независимо, В. Го для произвольного класса Фиттинга \mathfrak{F} доказали существование и сопряженность \mathfrak{F} -инъекторов в группе G с π -разрешимой фактор-группой $G/G_{\mathfrak{F}}$ [13, 14] (здесь $G_{\mathfrak{F}}$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая классу \mathfrak{F} , π — совокупность всех простых делителей порядков всех групп из \mathfrak{F}). Исследованию вопросов существования и сопряженности \mathfrak{F} -инъекторов в неразрешимых группах посвящен ряд статей Н. Т. Воробьева и других авторов (например, [15, 16]).

В настоящей работе для класса Фиттинга \mathfrak{F} и произвольного непустого множества ω простых чисел установлены условия существования и сопряженности \mathfrak{F}^ω -инъекторов в разрешимых группах (теорема 1) и получены критерии \mathfrak{F}^ω -инъектора разрешимой группы (теоремы 2–4). В случае, когда ω совпадает с множеством всех простых чисел, из данных теорем в качестве следствий вытекают известные результаты о \mathfrak{F} -инъекторах разрешимых групп.

1. Предварительные сведения

Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [3, 17]). Приведем лишь некоторые из них. В дальнейшем, символ $:=$ означает равенство по определению. Запись $H \leq G$ ($H < G$, $H \triangleleft G$, $H \triangleleft\triangleleft G$) означает, что H — подгруппа (соответственно собственная, нормальная, субнормальная подгруппы) группы G ; $H \times K$ — прямое произведение подгрупп H и K группы G ; $H \rtimes K$ — полупрямое произведение H и K , где $H \triangleleft G$, $K \leq G$; 1 — единичная подгруппа (группа); G' — коммутант группы G ; $d(G)$ — степень разрешимости группы G , т.е. наименьшее натуральное число n , для которого $G^{(n)} = 1$, где $G^{(n)}$ — n -й коммутант группы G ; C_n — циклическая группа порядка n , D_n — диэдральная группа порядка n , S_n — симметрическая группа степени n , $SL(n, q)$ — специальная линейная группа степени n над полем из q элементов.

Пусть \mathbb{P} — множество всех простых чисел, π — подмножество множества \mathbb{P} ; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G . Группа G называется π -группой (π' -группой, πd -группой), если $\pi(G) \subseteq \pi$ (соответственно $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$, $\pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$). Пусть \mathfrak{X} — непустое множество групп. Тогда $\pi(\mathfrak{X})$ — объединение множеств $\pi(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$ [9, с. 250].

Классом групп называется совокупность групп, содержащая с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через \mathfrak{G} обозначается класс всех конечных групп; \mathfrak{A} — класс всех конечных абелевых групп; \mathfrak{N} — класс всех конечных нильпотентных групп; \mathfrak{U} — класс всех конечных сверхразрешимых групп. *Характеристикой* класса групп \mathfrak{F} называется множество $\chi(\mathfrak{F}) = \{ p \in \mathbb{P} \mid \text{в } \mathfrak{F} \text{ существует неединичная } p\text{-группа} \}$ [17, с. 165]. Класс групп \mathfrak{F} называется *классом Фиттинга*, если выполняются следующие два условия: 1) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует, что $N \in \mathfrak{F}$ (т.е. \mathfrak{F} — нормально наследственный класс групп); 2) из $G = N_1 N_2$, $N_1 \triangleleft G$, $N_2 \triangleleft G$, $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ [9, с. 14].

Пусть \mathfrak{F} — класс групп. Подгруппа H группы G называется *\mathfrak{F} -максимальной подгруппой* в G , если $H \in \mathfrak{F}$ и из $H \leq K \leq G$ и $K \in \mathfrak{F}$ следует, что $H = K$. Подгруппа H группы G называется *\mathfrak{F} -инъектором* группы G , если для каждой субнормальной подгруппы K группы G пересечение $H \cap K$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K ([1, см. также [3, Ch. IX, Eq. (1.2)]).



В следующей лемме представлены используемые далее свойства \mathfrak{F} -максимальных подгрупп.

Лемма 1. 1. Пусть \mathfrak{F} — класс групп и α — автоморфизм группы G . Если V является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой группы G , то V^α является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в G [18, гл. 3, лемма 2.6 (б)].

2. Пусть \mathfrak{F} — класс Фиттинга, G — разрешимая группа, N — нормальная подгруппа группы G с абелевой фактор-группой G/N . Пусть W — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа из N и V_1, V_2 — \mathfrak{F} -максимальные подгруппы группы G , содержащие W . Тогда V_1 и V_2 сопряжены в G ([1], см. также [17, лемма 5.44]).

3. Пусть \mathfrak{F} — класс Фиттинга и G — нильпотентная группа. Подгруппа H группы G является \mathfrak{F} -максимальной в G тогда и только тогда, когда H — $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа в G [17, теорема 5.47].

2. Определение, примеры, простейшие свойства \mathfrak{F}^ω -инъекторов

Определение 1. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс групп, ω — непустое множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F}^ω -инъектором группы G , если H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G и для каждой субнормальной ω -подгруппы K группы G пересечение $H \cap K$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K .

Замечание 1. Из определения 1 непосредственно следует, что всякий \mathfrak{F} -инъектор группы является ее \mathfrak{F}^ω -инъектором для любого непустого множества ω ; обратное неверно. В случае, когда ω совпадает с множеством всех простых чисел, понятие \mathfrak{F}^ω -инъектора совпадает с понятием \mathfrak{F} -инъектора группы.

Пример 1. Пусть ω — непустое множество простых чисел, удовлетворяющее условию $2 \notin \omega$, $G = \mathbb{S}_4$ и $H \cong C_3$ — силовская 3-подгруппа группы G . Подгруппа H является \mathfrak{N} -максимальной в G , но пересечение H с субнормальной подгруппой $K \cong C_2 \times C_2$ группы G совпадает с единичной подгруппой, которая не является \mathfrak{N} -максимальной в K . Следовательно, H не является \mathfrak{N} -инъектором в G . Единственной субнормальной ω -подгруппой группы G является ее единичная подгруппа, поэтому H является \mathfrak{N}^ω -инъектором в группе G .

Пример 2. Пусть ω — множество простых чисел, удовлетворяющее условию $2 \in \omega$, $3 \notin \omega$, $G = \mathbb{S}_3 \times C_4$ (см. [19], $\text{IdGroup}(G) = [24, 5]$). В группе G имеется подгруппа $H \cong C_2 \times C_4$, являющаяся \mathfrak{N} -максимальной в G , причем пересечение H с субнормальной подгруппой $K \cong C_3$ совпадает с единичной подгруппой, которая не является \mathfrak{N} -максимальной в K . Следовательно, подгруппа H не является \mathfrak{N} -инъектором в G . Субнормальными ω -подгруппами группы G являются только следующие три подгруппы: $K_1 = 1$, $K_2 \cong C_2$ и $K_3 \cong C_4$. Поскольку $H \cap K_i = K_i$ — \mathfrak{N} -максимальная подгруппа в K_i , $i = 1, 2, 3$, то H является \mathfrak{N}^ω -инъектором в G .

Пример 3. Пусть ω — множество простых чисел, удовлетворяющее условию $\{2, 7\} \subseteq \omega$ и $3 \notin \omega$, $G = \mathbb{S}_3 \times D_{14}$ (см. [19], $\text{IdGroup}(G) = [84, 8]$), H — циклическая подгруппа группы G порядка 14. Тогда H \mathfrak{N} -максимальна в G , но не является \mathfrak{N} -инъектором в G . Действительно, пересечение H с субнормальной подгруппой $K \cong C_{21}$ из G есть циклическая подгруппа порядка 7, которая не является \mathfrak{N} -максимальной в K . Субнормальными ω -подгруппами в G являются только три подгруппы: $K_1 = 1$, $K_2 \cong C_7$, $K_3 \cong D_{14}$. Поскольку $H \cap K_1 = K_1$ — \mathfrak{N} -максимальная подгруппа в K_1 , $H \cap K_2 = K_2$ — \mathfrak{N} -максимальная подгруппа в K_2 и $H \cap K_3 = K_2$ — \mathfrak{N} -максимальная подгруппа в K_3 , то H является \mathfrak{N}^ω -инъектором в G .

Пример 4. Пусть ω — множество простых чисел, удовлетворяющее условию $\{3, 5\} \subseteq \omega$ и $2 \notin \omega$, $G = (LC_2) \times C_5$, где $L \cong SL(2, 3)$ (см. [19], $\text{IdGroup}(G) = [240, 102]$). В группе G имеется подгруппа $H \cong (C_3 \times C_4) \times C_5$, являющаяся \mathfrak{U} -максимальной в G , причем пересечение H



с субнормальной подгруппой $K \cong Q_8 \times C_5$ (Q_8 — группа кватернионов порядка 8) совпадает с подгруппой, изоморфной C_{10} , которая не является \mathfrak{U} -максимальной в K . Следовательно, подгруппа H не является \mathfrak{U} -инъектором в G . Субнормальными ω -подгруппами группы G являются только следующие две подгруппы: $K_1 = 1$ и $K_2 \cong C_5$. Поскольку $H \cap K_i = K_i$ — \mathfrak{U} -максимальная подгруппа в K_i , $i = 1, 2$, то H является \mathfrak{U}^ω -инъектором в G .

Пример 5. Пусть ω — произвольное непустое множество простых чисел, G — такая группа, что $\pi(G) \cap \omega = \emptyset$, \mathfrak{F} — произвольный непустой класс групп, H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G . Поскольку единственной субнормальной ω -подгруппой группы G является ее единичная подгруппа и $H \cap 1 = 1$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в единичной подгруппе, то H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G . Таким образом, для любого непустого класса групп \mathfrak{F} и любого непустого множества ω в каждой ω' -группе любая \mathfrak{F} -максимальная подгруппа является ее \mathfrak{F}^ω -инъектором.

Рассмотрим простейшие свойства \mathfrak{F}^ω -инъекторов, используемые в дальнейшем.

Лемма 2. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс групп, ω — непустое множество простых чисел, G — группа. Если H — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G , K — субнормальная ω -подгруппа группы G , то $H \cap K$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в K .

Доказательство. Пусть H — \mathfrak{F}^ω -инъектор в G , $K \triangleleft\triangleleft G$, $\pi(K) \subseteq \omega$, $H_1 := H \cap K$. Установим, что H_1 является \mathfrak{F}^ω -инъектором в K . Согласно определению 1 H_1 является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K .

Пусть N — субнормальная ω -подгруппа группы K . Покажем, что $H_1 \cap N$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в N . Так как $N \triangleleft\triangleleft K$ и $K \triangleleft\triangleleft G$, то $N \triangleleft\triangleleft G$ и по определению 1 $H \cap N$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в N . Ввиду равенств $H_1 \cap N = H \cap K \cap N = H \cap N$ это означает, что $H_1 \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в N . Следовательно, по определению 1 H_1 — \mathfrak{F}^ω -инъектор в K . \square

Лемма 3. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс групп, ω — непустое множество простых чисел, G — группа. Если L — нормальная подгруппа группы G и H — \mathfrak{F}^ω -инъектор в L , то H^g является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L для любого $g \in G$. В частности, если H — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G , то H^g является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G для любого $g \in G$.

Доказательство. Пусть $L \triangleleft G$, H — \mathfrak{F}^ω -инъектор в L и $g \in G$. Покажем, что H^g является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L .

Проверим, что H^g — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в L . Действительно, так как $H \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} — класс групп, то $H^g \in \mathfrak{F}$. Пусть $H^g \leq M \leq L$, где $M \in \mathfrak{F}$. Тогда $M^{g^{-1}} \in \mathfrak{F}$ и $H \leq M^{g^{-1}} \leq L^{g^{-1}} = L$. Поскольку H — \mathfrak{F}^ω -инъектор в L , то по определению 1 H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в L и поэтому $H = M^{g^{-1}}$. Следовательно, $H^g = M$. Тем самым доказано, что H^g является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в L .

Пусть K — субнормальная ω -подгруппа группы L . Покажем, что пересечение $H^g \cap K$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K . Пусть $H^g \cap K \leq R \leq K$, где $R \in \mathfrak{F}$. Установим, что $H^g \cap K = R$. Пусть $K_1 := K^{g^{-1}}$ и $R_1 := R^{g^{-1}}$. Тогда

$$(H \cap K_1)^g = H^g \cap K_1^g = H^g \cap K \subseteq R = R_1^g \subseteq K_1^g.$$

Следовательно, $H \cap K_1 \subseteq R_1 \subseteq K_1$. Так как K_1 является субнормальной ω -подгруппой в L и H — \mathfrak{F}^ω -инъектор в L , то по определению 1 $H \cap K_1$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в K_1 . Тогда с учетом того, что $R_1 \in \mathfrak{F}$, получаем равенство $H \cap K_1 = R_1$. Поэтому $(H \cap K_1)^g = R_1^g$ и, значит, $H^g \cap K = R$. Следовательно, $H^g \cap K$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в K . Тем самым установлено, что H^g является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L для любого $g \in G$. \square

Лемма 4. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс групп, ω — непустое множество простых чисел, G — группа. Если H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G и $H \cap L$ — \mathfrak{F}^ω -инъектор в L для любой максимальной нормальной ωd -подгруппы L группы G , то H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G .

Доказательство. Пусть H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G и для любой максимальной нормальной ωd -подгруппы L группы G пересечение $H \cap L$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L . Установим, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G .

Пусть N — субнормальная ω -подгруппа группы G . Покажем, что подгруппа $H \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной в N . Если $N = G$, то по условию $H \cap N = H$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в N .

Пусть $N < G$. Тогда в G существует максимальная нормальная подгруппа L_1 , содержащая N . Это означает, что L_1 — ωd -подгруппа группы G . Согласно условию подгруппа $H_1 := H \cap L_1$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L_1 . Так как $N \triangleleft \triangleleft G$, то по свойству субнормальных подгрупп $N \cap L_1 = N$ — субнормальная ω -подгруппа в L_1 . Тогда по определению 1 $H_1 \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в N . С учетом равенства $H_1 \cap N = H \cap N$ заключаем, что $H \cap N$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в N . Отсюда согласно определению 1 следует, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G . \square

3. Существование и сопряженность \mathfrak{F}^ω -инъекторов

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, ω — непустое множество простых чисел. Тогда в каждой разрешимой группе G , удовлетворяющей условию $\pi(G') \subseteq \omega$, существует по крайней мере один \mathfrak{F}^ω -инъектор и любые два \mathfrak{F}^ω -инъектора группы G сопряжены в G .

Доказательство. Пусть G — разрешимая группа и $\pi(G') \subseteq \omega$. Докажем теорему индукцией по порядку группы G . Если $G = 1$, то G является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G , и утверждение верно. Пусть $G \neq 1$. Тогда по свойству разрешимых групп группа G отлична от своего коммутанта G' . Покажем, что G' удовлетворяет условию теоремы. Действительно, из разрешимости группы G следует разрешимость G' . Поскольку $(G')' \leq G'$, то $(G')'$ является ω -группой. Так как $|G'| < |G|$, то по индукции для G' утверждение верно, т.е.

$$\begin{aligned} & \text{в } G' \text{ существует по крайней мере один } \mathfrak{F}^\omega\text{-инъектор,} \\ & \text{и любые два } \mathfrak{F}^\omega\text{-инъектора из } G' \text{ сопряжены в } G'. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть K — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G' . Тогда согласно определению 1 K — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G' . В частности, $K \in \mathfrak{F}$, и поэтому в G существует \mathfrak{F} -максимальная подгруппа H , содержащая K . Установим, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G .

Пусть L — произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G . Докажем, что $H \cap L$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L . Так как $L' \leq G'$, то $\pi(L') \subseteq \omega$ и, следовательно, по индукции для L утверждение верно.

Пусть R — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы L . Так как G/L — абелева группа, то $G' \subseteq L$ и согласно лемме 2 $R \cap G'$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G' . Ввиду (1) подгруппы $R \cap G'$ и K сопряжены в G' , т.е. существует такой элемент $x \in G'$, что $(R \cap G')^x = K$. Так как $R \in \mathfrak{F}$, то $R^x \in \mathfrak{F}$, и поэтому в группе G существует \mathfrak{F} -максимальная подгруппа T такая, что $R^x \subseteq T$. Из $K = R^x \cap G' \subseteq R^x$ получаем, что $K \subseteq T$.

Поскольку H и T — \mathfrak{F} -максимальные подгруппы в G , содержащие K , и K — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G' , то согласно п. 2 леммы 1 H и T сопряжены в G , т.е. $H = T^y$ для некоторого элемента $y \in G$.

Так как R — \mathfrak{F}^ω -инъектор в L , то по лемме 3 R^x является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L . Следовательно, R^x — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в L . Поскольку $T \cap L \triangleleft T$, $T \in \mathfrak{F}$ и класс \mathfrak{F} нормально наследственен, то $T \cap L \in \mathfrak{F}$. Тогда из $R^x \subseteq T \cap L \subseteq L$ следует, что $R^x = T \cap L$ и, значит, $(R^x)^y = (T \cap L)^y = T^y \cap L = H \cap L$. По лемме 3 $(R^x)^y$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L . Тем самым доказано, что $H \cap L$ — \mathfrak{F}^ω -инъектор в L .

Итак, H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G , и нами установлено, что для любой максимальной нормальной подгруппы L группы G пересечение $H \cap L$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в L . Тогда по лемме 4 H является \mathfrak{F}^ω -инъектором группы G .



Покажем, что любые два \mathfrak{F}^ω -инъектора группы G сопряжены в G . Пусть H_1 и H_2 — \mathfrak{F}^ω -инъекторы группы G . По лемме 2 $H_1 \cap G'$ и $H_2 \cap G'$ являются \mathfrak{F}^ω -инъекторами в G' . В силу (1) подгруппы K и $H_1 \cap G'$ сопряжены в G' , т.е. $K = (H_1 \cap G')^{g_1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G'$. Поэтому $K \subseteq H_1^{g_1}$. Аналогично $K \subseteq H_2^{g_2}$ для некоторого элемента $g_2 \in G'$. Ввиду п. 1 леммы 1 $H_1^{g_1}$ и $H_2^{g_2}$ — \mathfrak{F} -максимальные подгруппы в G . Тогда согласно п. 2 леммы 1 $H_1^{g_1}$ и $H_2^{g_2}$ сопряжены в G и, следовательно, H_1 и H_2 сопряжены в G . \square

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 1 вытекает следующий известный результат.

Следствие 1 ([1], см. также [17, теорема 5.45]). *Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга. Тогда в каждой разрешимой группе G существует по крайней мере один \mathfrak{F} -инъектор и любые два \mathfrak{F} -инъектора группы G сопряжены в G .*

Замечание 2. Для произвольного класса Фиттинга \mathfrak{F} , ввиду замечания 1, из факта существования \mathfrak{F} -инъекторов в разрешимых группах формально следует существование \mathfrak{F}^ω -инъекторов в разрешимых группах (поскольку всякий \mathfrak{F} -инъектор группы является ее \mathfrak{F}^ω -инъектором для любого множества ω). В этой связи ценность теоремы 1 заключается, прежде всего, в установлении факта сопряженности \mathfrak{F}^ω -инъекторов в разрешимых группах.

4. Критерии \mathfrak{F}^ω -инъектора разрешимой группы

Используя теорему 1, для непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} установим необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа H разрешимой группы G является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G .

Теорема 2. *Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, ω — непустое множество простых чисел, G — разрешимая группа, удовлетворяющая условию $\pi(G') \subseteq \omega$. Подгруппа H группы G является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G тогда и только тогда, когда H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G и $H \cap G' — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в G' .*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G и $H_1 := H \cap G' — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в G' . Докажем, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G . Так как G — разрешимая группа и $\pi(G') \subseteq \omega$, то по теореме 1 в G существует по крайней мере один \mathfrak{F}^ω -инъектор. Пусть $K — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы G . Тогда по лемме 2 $K_1 := K \cap G'$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G' . Поскольку $\pi((G')') \subseteq \omega$, то по теореме 1 подгруппы H_1 и K_1 сопряжены в G' , т.е. существует элемент $g \in G'$ такой, что $H_1 = (K_1)^g = K^g \cap G'$. Таким образом, $H_1 \subseteq H$ и $H_1 \subseteq K^g$.

Согласно определению 1 подгруппа H_1 является \mathfrak{F} -максимальной в G' . Аналогично $K — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в G и п. 1 леммы 1 подгруппа K^g также является \mathfrak{F} -максимальной в G . Тогда в силу п. 2 леммы 1 H и K^g сопряжены в G , т.е. $H = (K^g)^x$ для некоторого элемента $x \in G$. Так как $K — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор в G , то с учетом леммы 3 подгруппа H также является \mathfrak{F}^ω -инъектором группы G .

Необходимость. Пусть $H — \mathfrak{F}^\omega$ -инъектор группы G . Тогда по определению 1 $H — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в G . Так как $G' —$ субнормальная ω -подгруппа в G , то по лемме 2 пересечение $H \cap G'$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G' . \square

Следствие 2 ([17, теорема 5.46]). *Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, G — разрешимая группа. Подгруппа H группы G является \mathfrak{F} -инъектором в G тогда и только тогда, когда $H — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы G и $H \cap G' — \mathfrak{F}$ -инъектор в G' .*

Теорема 3. *Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, ω — непустое множество простых чисел, $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$ — ряд группы G с абелевыми факторами и $\pi(G_1) \subseteq \omega$. Подгруппа H группы G является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G тогда и только тогда, когда $H \cap G_i — \mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в G_i для всех $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.*



Доказательство. *Достаточность.* Пусть $H \cap G_i$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G_i для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Тогда $H \cap G_0 = H$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G . Индукцией по порядку группы G докажем, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором группы G . Если $G = 1$, то $H = G$ — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G . Пусть $G \neq 1$. Можем считать, что $G_i \neq G_{i-1}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Покажем, что подгруппа G_1 удовлетворяет условию теоремы. Действительно, $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1$ — ряд группы G_1 с абелевыми факторами. Из $\pi(G_1) \subseteq \omega$ следует, что $\pi(G_2) \subseteq \omega$. Пусть $H_1 := H \cap G_1$. Покажем, что $H_1 \cap G_i$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G_i для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $1 \leq i \leq n$. Тогда $H_1 \cap G_i = H \cap G_1 \cap G_i = H \cap G_i$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G_i по условию. Таким образом, группа G_1 удовлетворяет условию теоремы. Следовательно, по индукции H_1 является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G_1 .

Так как G/G_1 — абелева группа, то $G' \subseteq G_1$. Тогда G' — субнормальная ω -подгруппа в G_1 и по лемме 2 $H_1 \cap G'$ — \mathfrak{F}^ω -инъектор в G' . Отсюда с учетом равенства $H_1 \cap G' = H \cap G'$ по теореме 2 получаем, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором группы G .

Необходимость. Пусть H — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G . Тогда согласно определению 1 $H = H \cap G_0$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G_0 . Пусть $1 \leq i \leq n$. Так как G_i — субнормальная ω -подгруппа группы G , то по определению 1 $H \cap G_i$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в G_i . \square

Следствие 3 ([17, следствие 1 теоремы 5.46]). Пусть \mathfrak{F} — класс Фиттинга и $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$ — ряд группы G с абелевыми факторами G_i/G_{i+1} . Подгруппа H является \mathfrak{F} -инъектором группы G тогда и только тогда, когда $H \cap G_i$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G_i для всех i .

Следствие 4. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, ω — непустое множество простых чисел, G — разрешимая группа, удовлетворяющая условию $\pi(G') \subseteq \omega$. Если H — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G и $H \leq K \leq G$, то H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в подгруппе K .

Доказательство. Пусть H — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G и $H \leq K \leq G$. Установим, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в K . Пусть $d(G) = n$, $G_0 = G$ и $G_i := G^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$ — ряд группы G с абелевыми факторами. Пусть $K_i := K \cap G_i$, $i = \overline{0, n}$. Тогда $K_i \triangleleft K_{i-1}$ и

$$K_{i-1}/K_i = (K \cap G_{i-1})/(K \cap G_i) \cong (K \cap G_{i-1})G_i/G_i \leq G_{i-1}/G_i$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому $1 = K_n \triangleleft K_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft K_1 \triangleleft K_0 = K$ — ряд группы K с абелевыми факторами. Так как $K_1 \leq G_1 = G'$, то $\pi(K_1) \subseteq \omega$.

Покажем, что $H \cap K_i$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в K_i для всех $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Поскольку H — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G , то H является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в G . Отсюда с учетом условия $H \leq K \leq G$ следует, что $H = H \cap K_0$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в $K = K_0$.

Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$ и $H \cap K_i \leq M_i \leq K_i$, где $M_i \in \mathfrak{F}$. Так как G_i — субнормальная ω -подгруппа группы G , то по определению 1 $H \cap K_i = H \cap K \cap G_i = H \cap G_i$ — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G_i . Из $H \cap K_i \leq M_i \leq G_i$ получаем, что $H \cap K_i = M_i$. Следовательно, $H \cap K_i$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в K_i . Тогда по теореме 3 H является \mathfrak{F}^ω -инъектором группы K . \square

Следствие 5 ([17, следствие 3 теоремы 5.46]). Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, G — разрешимая группа. Если H — \mathfrak{F} -инъектор группы G и $H \leq K \leq G$, то H является \mathfrak{F} -инъектором в подгруппе K .

Теорема 4. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, ω — непустое множество простых чисел, G — группа с нильпотентным коммутантом G' , удовлетворяющая условию $\pi(G') \subseteq \omega$. Подгруппа H группы G является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G тогда и только тогда, когда H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G , которая содержит $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из G' .



Доказательство. Необходимость. Пусть H — \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G . Тогда согласно определению 1 H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G .

Покажем, что H содержит $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из G' . Так как $\pi(G') \subseteq \omega$, то по лемме 2 подгруппа $H_1 := H \cap G'$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G' и, значит, H_1 — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G' . Поскольку $G' \in \mathfrak{N}$, то согласно п. 3 леммы 1 H_1 — $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа в G' . Таким образом, H содержит $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из G' .

Достаточность. Пусть H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G , которая содержит $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу группы G' . Покажем, что H является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G .

Так как G — разрешимая группа и $\pi(G') \subseteq \omega$, то по теореме 1 G обладает \mathfrak{F}^ω -инъектором K . Согласно лемме 2 $K_1 := K \cap G'$ является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G' и, значит, K_1 — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G' . Тогда в силу п. 3 леммы 1 K_1 — $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа группы G' . Так как $G' \in \mathfrak{N}$, то K_1 — единственная $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа в G' и по условию $K_1 \subseteq H$.

Так как H и K — \mathfrak{F} -максимальные подгруппы в G , содержащие K_1 , то согласно п. 2 леммы 1 подгруппы H и K сопряжены в G , т.е. $H = K^g$ для некоторого элемента $g \in G$. По лемме 3 подгруппа K^g является \mathfrak{F}^ω -инъектором в G и, значит, H — \mathfrak{F}^ω -инъектор в G . \square

Следствие 6 ([17, теорема 5.48]). Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, G — группа с нильпотентным коммутантом G' . Подгруппа H группы G является \mathfrak{F} -инъектором в G тогда и только тогда, когда H — \mathfrak{F} -максимальная подгруппа группы G , которая содержит $\chi(\mathfrak{F})$ -холлову подгруппу из G' .

Из теоремы 4 и следствия 6 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 7. Пусть \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, ω — непустое множество простых чисел, G — разрешимая группа, удовлетворяющая условию $\pi(G') \subseteq \omega$. Если $G' \in \mathfrak{N}$, то всякий \mathfrak{F}^ω -инъектор группы G является ее \mathfrak{F} -инъектором.

Условие $\pi(G') \subseteq \omega$ в следствии 7 является существенным, его нельзя опустить. Действительно, в примерах 2 и 3 класс групп $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ есть класс Фиттинга, рассматриваемые группы являются разрешимыми и коммутант каждой из них нильпотентен, но не является ω -группой (в примере 2 $G' \cong C_3$; в примере 3 $G' \cong C_{21}$). При этом в каждой из рассматриваемых групп имеется \mathfrak{N}^ω -инъектор, не являющийся \mathfrak{N} -инъектором.

Заключение

В работе решены следующие задачи:

1) для произвольного непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} и произвольного непустого множества ω простых чисел доказано, что в любой конечной разрешимой группе, коммутант которой является ω -группой, существуют \mathfrak{F}^ω -инъекторы и любые два из них являются сопряженными в группе (теорема 1);

2) для произвольного непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} и произвольного непустого множества ω простых чисел установлены необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа разрешимой группы является ее \mathfrak{F}^ω -инъектором (теоремы 2–4).

Теорема 1 развивает основной результат работы [1]. Приведенные следствия теорем 2–4 представляют известные результаты о \mathfrak{F} -инъекторах групп (см., например, [17, гл. 5]). Полученные результаты могут быть полезными в дальнейших исследованиях подгруппового строения конечных групп методами теории классов групп.

Список литературы

1. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1967. Bd. 102. S. 337–339. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01111070>
2. Guo W. The theory of classes of groups. Beijing ; New York : Science Press, 2000. 259 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4054-6>



3. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. 890 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of finite groups. Netherlands : Springer, 2006. 386 p. (Mathematics and Its Applications. Vol. 584). DOI: <https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3>
5. Förster P. Nilpotent injectors in finite groups // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1985. Vol. 32, iss. 2. P. 293–297. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700009965>
6. Шеметков Л. А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 1999. № 1 (15). С. 5–13.
7. Guo W., Vorob'ev N. T. On injectors of finite soluble groups // Communications in Algebra. 2008. Vol. 36, iss. 9. P. 3200–3208. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927870802103560>, EDN: XLZDTD
8. Gaschütz W. Selected topics in the theory of soluble groups. Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society. Canberra, 1969. 98 p.
9. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. Москва : Наука, 1978. 272 с.
10. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
11. Ведерников В. А., Сорокина М. М. \mathfrak{F} -проекторы и \mathfrak{F} -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.603>, EDN: XBEDHB
12. Новикова Д. Г., Сорокина М. М. Об одном свойстве \mathfrak{F}^ω -инъекторов конечных групп // Теоретические и прикладные аспекты естественно-научного образования в эпоху цифровизации : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Брянск, 11–12 апреля 2024 г. Брянск : РИСО БГУ, 2024. С. 148–150. EDN: FXIKPC
13. Шеметков Л. А. О подгруппах π -разрешимых групп // Конечные группы: Труды Гомельского семинара / под ред. Л. А. Шеметкова. Минск : Наука и техника, 1975. С. 207–212.
14. Guo W. Injectors of Finite Groups // Chinese Annals of Mathematics, Series A. 1997. Vol. 18, iss. 2. P. 145–148.
15. Инь С., Ян Н., Воробьев Н. Т. О проблеме существования и сопряженности инъекторов частично π -разрешимых групп // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 3. С. 535–543. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.305>, EDN: IUBQRG
16. Воробьев Н. Т., Волкова Е. Д. Инъекторы конечных σ -разрешимых групп // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 1 (54). С. 75–84. DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75, EDN: RSKBWR
17. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск : Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
18. Ведерников В. А. Элементы теории классов групп. Смоленск : СГПИ, 1988. 96 с.
19. GAP. The GAP Small Groups Library. Version 4.12.2. URL: www.gap-system.org (дата обращения: 20.07.2025).

References

1. Fischer B., Gaschutz W., Hartley B. Injectors of finite solvable groups. *Mathematische Zeitschrift*, 1967, vol. 102, pp. 337–339 (in German). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01111070>
2. Guo W. *The theory of classes of groups*. Beijing, New York, Science Press, 2000. 259 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4054-6>
3. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 890 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of finite groups*. Mathematics and Its Applications, vol. 584. Netherlands, Springer, 2006. 386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3>
5. Förster P. Nilpotent injectors in finite groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1985, vol. 32, iss. 2, pp. 293–297. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700009965>
6. Shemetkov L. A. Some properties of injectors in finite groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny. Voprosy algebr* [Proceedings of Francisk Skorina Gomel State University. Issues of Algebra], 1999, iss. 1 (15), pp. 5–13 (in Russian).
7. Guo W., Vorob'ev N. T. On injectors of finite soluble groups. *Communications in Algebra*, 2008, vol. 36, iss. 9, pp. 3200–3208. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927870802103560>, EDN: XLZDTD
8. Gaschütz W. *Selected topics in the theory of soluble groups*. Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Australian Mathematical Society. Canberra, 1969. 98 p.



9. Shemetkov L. A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).
10. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 2000, vol. 10, iss. 2, pp. 112–141.
11. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. \mathfrak{F} -projectors and \mathfrak{F} -covering subgroups of finite groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, iss. 6, pp. 957–968. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446616060033>, EDN: YUUVGZN
12. Novikova D. G., Sorokina M. M. On one property of \mathfrak{F}^ω -injectors of finite groups. *Teoreticheskie i prikladnye aspekty estestvenno-nauchnogo obrazovaniya v epokhu tsifrovizatsii* [Theoretical and Applied Aspects of Natural Science Education in the Era of Digitalization]: Materials of the III International science-pract. conf., Bryansk, April 11–12, 2024. Bryansk, RISO BSU, 2024, pp. 148–150 (in Russian). EDN: FXIKPC
13. Shemetkov L. A. On subgroups of π -soluble groups. In: *Konechnye gruppy: Trudy Gomel'skogo seminara* [Shemetkov L. A. (ed.) Finite groups. Proceedings of the Gomel seminar]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1975, pp. 207–212 (in Russian).
14. Guo W. Injectors of finite groups. *Chinese Annals of Mathematics, Series A*, 1997, vol. 18, iss. 2, pp. 145–148.
15. Yin X., Yang N., Vorobev N. T. On the problem of existence and conjugacy of injectors of partially π -soluble groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, iss. 3, pp. 420–426. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446618030059>, EDN: XZGGTB
16. Vorob'ev N. T., Volkova E. D. Injectors of finite σ -soluble groups. *Problems of Physics, Mathematics, and Engineering*, 2023, iss. 1 (54), pp. 75–84 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75, EDN: RSKBWR
17. Monakhov V. S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk, Vysheyshaya shkola, 2006. 207 p. (in Russian).
18. Vedernikov V. A. *Elementy teorii klassov grupp* [Elements of the theory of classes of groups]. Smolensk, SSPI Publ., 1988. 96 p. (in Russian).
19. GAP. The GAP Small Groups Library. Version 4.12.2. Available at: www.gap-system.org (accessed July 20, 2025).

Поступила в редакцию / Received 20.07.2025

Принята к публикации / Accepted 17.10.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 28–34

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 28–34

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-28-34>

EDN: <https://elibrary.ru/KKHVIQ>

Научная статья

УДК 517.51

О существовании совершенного множества единственности кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы для сходимости по кубам

И. С. Юрченко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Юрченко Ирина Сергеевна, ассистент кафедры математической теории упругости и биомеханики, hamsterchik@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2390-1736>, SPIN: 2372-6954, AuthorID: 808963

Аннотация. В данной работе рассматриваются кратные ряды по системе характеров на произвольной нуль-мерной группе. Обсуждается проблема единственности кратного ряда в смысле сходимости по кубам. Известно, что существуют непустые множества единственности для кратных рядов по системе Уолша на двоичной группе в смысле сходимости по кубам. В работе строится пример непустого совершенного множества единственности для кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам.

Ключевые слова: компактная нуль-мерная группа, характеры группы, множество единственности, совершенное множество

Для цитирования: Юрченко И. С. О существовании совершенного множества единственности кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы для сходимости по кубам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 28–34. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-28-34>, EDN: KKHVIQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Existence of a perfect U -set of multiple series over a system of characters of a zero-dimensional group convergent on cubes

I. S. Yurchenko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Irina S. Yurchenko, hamsterchik@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2390-1736>, SPIN: 2372-6954, AuthorID: 808963

Abstract. In this work, we consider multiple series in a character system on a zero-dimensional group. We discuss the problem of uniqueness of a multiple series with convergence on cubes. It is known that there exist non-empty perfect sets of uniqueness for multiple series in the Walsh system on a binary group with convergence on cubes. In this paper, we construct an example of a perfect set of uniqueness for multiple series in a character system of a zero-dimensional group convergent on cubes.

Keywords: compact zero-dimensional group, characters of a group, set of uniqueness, perfect set

For citation: Yurchenko I. S. Existence of a perfect U -set of multiple series over a system of characters of a zero-dimensional group convergent on cubes. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics.*



Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 28–34 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-28-34>, EDN: KKHVIQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работах [1, 2] было доказано, что счетное множество является множеством единственности для кратного ряда Уолша в случае сходимости по прямоугольникам. Более общий класс множеств единственности для функций Уолша для случая сходимости по прямоугольникам найден в работах [3, 4]. В работе [5] получен класс множеств единственности для кратных рядов по смешанной системе функций, расширяющий известные классы множеств единственности.

Пример множества единственности для сходимости по прямоугольникам, но которое не является множеством единственности для сходимости по кубам, описан в [6].

В работе [7] доказано, что пустое множество есть множество единственности для системы Уолша в случае сходимости по кубам. В [8] доказано, что любое конечное множество является множеством единственности, и построены примеры счетных множеств единственности для системы Уолша в случае сходимости по кубам.

М. Г. Плотников [8], рассматривая функции Уолша на двоичной группе, показал, что существует совершенное множество единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по кубам. Мы покажем, что данный результат справедлив для кратных рядов по системе характеров на произвольной нуль-мерной группе.

1. Основные понятия и обозначения

Пусть (G, \oplus) — компактная нуль-мерная группа. Топология на группе G определяется с помощью цепочки вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots, \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$ (где 0 — нулевой элемент группы G).

Обозначим $p_k = (G_k/G_{k+1})^\sharp$. Будем считать, что $\{p_k\}$ — последовательность простых чисел. В случае, если это не так, то по теореме Силова [9] мы можем уплотнить систему подгрупп $\{G_n\}$ таким образом, чтобы последовательность $\{p_k\}$ содержала только простые числа.

По последовательности $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ построим последовательность $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: $m_0 = 1, m_{k+1} = p_k m_k$.

Элементы $g_n = G_n \setminus G_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ образуют базисную систему в G , т.е. любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде ряда $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n, a_n = \overline{0, p_n - 1}$.

Аннуляторы группы G образуют возрастающую последовательность $G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots$. Характеры $r_k(z) \in G_{k+1}^\perp \setminus G_k^\perp$ назовем функциями Радемахера. Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k m_{k+1} \in \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon_k = \overline{0, p_k - 1},$$

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k g_k \in G, \quad z_k = \overline{0, p_k - 1}.$$

Положим по определению $\chi_n(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(z))^{\varepsilon_k}$ [10].

Очевидно, что данное произведение содержит конечное число сомножителей. Такую нумерацию характеров называют нумерацией Пэли.

Функции Радемахера обладают следующими свойствами [11]:

- 1) $r_n(z) = \text{const}$ на смежном классе $G_{n+1} \oplus g = G_{n+1} \oplus a_n g_n \oplus a_{n-1} g_{n-1} \oplus \dots \oplus a_0 g_0$;
- 2) $r_n(G_{n+1}) = 1, n \in \mathbb{N}$;
- 3) $\chi_{m_n}(z) = r_n(z) = \text{const}$ на смежном классе $G_{n+1} \oplus g$;
- 4) $r_n(G_{n+1} \oplus a_n g_n), a_n = 0, p_n - 1$ принимает значение корней из 1 степени p_n ;
- 5) $1 + r_n(z) + r_n^2(z) + \dots + r_n^{p_n-1}(z) = \begin{cases} p_n, & z \in G_{n+1}, \\ 0, & z \in G_n \setminus G_{n+1}. \end{cases}$

Если $p_n g_n = 0$, группа G является группой Виленкина, если $p_n g_n = g_{n+1}$, то в этом случае G называется группой p -адических чисел [12].

Обозначим через $\mathfrak{G} = G^N$ N -мерную группу с топологией произведения групп. В этом случае база топологии состоит из произведений сдвигов

$$G_j \oplus \mathbf{h} = (G_{j_1} \oplus h^{(1)}) \times \dots \times (G_{j_N} \oplus h^{(N)}),$$

где $h^{(l)} = a_{j_l-1}^{(l)} g_{j_l-1} \oplus a_{j_l-2}^{(l)} g_{j_l-2} \oplus \dots \oplus a_0^{(l)} g_0, l = \overline{1, N}$. Так как $G_j \oplus \mathbf{h}$ есть объединение дизъюнктивных кубов вида

$$(G_j \oplus h^{(1)}) \times \dots \times (G_j \oplus h^{(N)}), \quad j = \max(j_1, \dots, j_N), \quad (1)$$

то совокупность таких кубов также образует базу топологии в G^N .

Обозначая для удобства $\mathfrak{G}_j := G_j^N$, куб (1) можно записать в виде

$$\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{gA},$$

где $\mathfrak{g}_{1 \times j} = (g_{j-1} \dots g_0), \mathfrak{A}_{j \times N} = \begin{pmatrix} a_{j-1}^{(1)} & \dots & a_{j-1}^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_0^{(1)} & \dots & a_0^{(N)} \end{pmatrix}, a_l^{(\nu)} = \overline{0, p_l - 1}, l = \overline{0, j-1}$.

Размерность матриц зависит от ранга куба \mathfrak{G}_j . Обозначим ν -й столбец матрицы \mathfrak{A} через $\mathfrak{A}^{(\nu)}$, а ν -ю строку — через $\hat{\mathfrak{A}}^{(\nu)}$.

Положим по определению

$$\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \chi_{n_1}(z_1) \dots \chi_{n_N}(z_N), \quad \mathbf{z} \in \mathfrak{G}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N).$$

Если $\mathbf{m}_j = (m_j, \dots, m_j)$ — вектор длины N с одинаковыми компонентами, то $\chi_{\mathbf{m}_j}(\mathbf{z}) = r_j(z) = \text{const}$ на $\mathfrak{G}_{j+1} \oplus \mathfrak{gA}$.

Рассмотрим кратный ряд

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_N} \chi_{n_1}(z_1) \dots \chi_{n_N}(z_N). \quad (2)$$

Кубические частичные суммы ряда (2) будем обозначать как

$$S_{\mathbf{M}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{M}-1} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\mathbf{M}-1} \dots \sum_{n_N=0}^{\mathbf{M}-1} c_{n_1 \dots n_N} \chi_{n_1}(z_1) \dots \chi_{n_N}(z_N),$$

а ядро Дирихле —

$$D_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{k}-1} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\mathbf{k}-1} \dots \sum_{n_N=0}^{\mathbf{k}-1} \chi_{n_1}(z_1) \dots \chi_{n_N}(z_N).$$

Пусть $\mu = \mu G$ определяет меру Хаара и $\mu G = 1$, тогда $\mu(G_n \oplus g) = 1/m_n$. По мере μ строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_G f d\mu$, инвариантный относительно сдвига.



Для ряда (2) определим функцию множества

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}). \quad (3)$$

В [13] было показано, что ее можно представить в виде

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = \mu(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) S_{\mathbf{m}_j}(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A},$$

а для коэффициентов $c_{\mathbf{n}}$ ряда (2) справедливо следующее выражение через функцию Ψ :

$$c_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathcal{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}), \quad (4)$$

причем $c_{\mathbf{n}}$ не зависит от \mathbf{k} , лишь бы $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}_{\mathbf{k}} - 1$.

В [13] были доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть A — M -множество ряда (2) в смысле сходимости по кубам, т. е. ряд (2) не равен нулю тождественно и сходится к нулю вне A . Тогда $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}) = 0$ для всех $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} : \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A} \cap A = \emptyset$.

Определение 1. Если точка \mathbf{z} принадлежит подгруппе \mathfrak{G}_{l_0} , но не принадлежит подгруппе \mathfrak{G}_{l_0+1} , то будем говорить, что порядок точки \mathbf{z} равен l_0 .

Лемма 2. При $l > l_0$ значение выражения $D_{m_l+m_{l_0}}(t) = m_{l_0} r_l(t), t \in G$, если порядок точки t равен l_0 , и $D_{m_l+m_{l_0}}(t) = 0$, если порядок точки t меньше l_0 .

2. Основные результаты

Теорема 1. Существуют непустые совершенные множества единственности в $\mathfrak{G} = G^N$ в смысле сходимости по кубам.

Доказательство. Зафиксируем образующую последовательность $\{p_n\}$, где p_n — простые нечетные числа. Индукцией по k построим последовательность непустых замкнутых множеств $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Положим $B_0 = \mathfrak{G}$. Затем множество B_0 разобьем на смежные классы ранга p_0 и возьмем их через одного. Полученное множество обозначим B_1 . Оно состоит из $\left(\frac{p_0+1}{2}\right)^N$ смежных классов ранга $p_0 = m_1$:

$$B_1 = \bigcup_{\substack{a_0^s \equiv 0 \pmod{2} \\ s=1, N}} (G_1 \oplus a_0^1 g_0) \times \dots \times (G_1 \oplus a_0^N g_0).$$

На следующем шаге каждый смежный класс множества B_1 разобьем на смежные классы ранга p_1 и возьмем их через одного. Полученное множество обозначим B_2 . Оно состоит из $\left(\frac{p_0+1}{2} \frac{p_1+1}{2}\right)^N$ смежных классов ранга $p_0 p_1 = m_2$:

$$B_2 = \bigcup_{\substack{a_0^s \equiv 0 \pmod{2} \\ a_1^s \equiv 0 \pmod{2} \\ s=1, N}} (G_2 \oplus a_1^1 g_1 \oplus a_0^1 g_0) \times \dots \times (G_2 \oplus a_1^N g_1 \oplus a_0^N g_0).$$

На l шаге каждый смежный класс множества B_{l-1} разобьем на смежные классы ранга p_{l-1} и возьмем их через одного. Полученное множество обозначим B_l . Оно состоит из $\left(\frac{p_0+1}{2} \dots \frac{p_{l-1}+1}{2}\right)^N$ смежных классов ранга $p_0 \dots p_{l-1} = m_l$:

$$B_l = \bigcup_{\substack{a_k^s \equiv 0 \pmod{2} \\ s=1, N, k=0, l-1}} (G_l \oplus a_{l-1}^1 g_{l-1} \oplus \dots \oplus a_0^1 g_0) \times \dots \times (G_l \oplus a_{l-1}^N g_{l-1} \oplus \dots \oplus a_0^N g_0)$$

и т. д.



Пусть $B = \bigcap_{l=0}^{\infty} B_l$. Множество B не пусто, состоит из предельных точек, следовательно, не содержит изолированных точек. Кроме этого, оно замкнуто как пересечение компактных множеств. Таким образом, множество B является совершенным множеством. Покажем, что оно является множеством единственности.

Допустим противное, пусть существует ряд (2)

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_N} \chi_{n_1}(z_1) \dots \chi_{n_N}(z_N),$$

не все коэффициенты которого равны нулю, сходящийся к нулю вне B .

Пусть $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{gA})$ – аддитивная функция, построенная для данного ряда (2) по формуле (3). По лемме 1 функция множества $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{gA}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{gA}$, не содержащего точек множества B . При этом $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{gA}) \not\equiv 0$, так как в этом случае в силу формулы (4) все коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ будут равны нулю. Значит, существует такой смежный класс $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{gA}$, что $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{gA}) \neq 0$.

Выберем достаточно большой номер j_0 , такой, чтобы $\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{gA}^0 \cap B_{j_0+1} \neq \emptyset$, $\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{gA}^0) = b \neq 0$, и точку $\mathbf{z} \in \mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{gA}^1 \subset \mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{gA}^0$. Точку \mathbf{y} выберем из смежного класса $\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{gA}^2$ (не содержащего точку \mathbf{z}). Значение $\mathcal{A}^{(2)}$ подбирается так, чтобы точка \mathbf{y} лежала в том же смежном классе ранга j_0 , что и \mathbf{z} .

Покажем что последовательность кубических частичных сумм $S_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y}) \not\rightarrow 0$ при $n_s \rightarrow \infty$, $\mathbf{n}_s = (n_s, \dots, n_s)$ имеет вид

$$S_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{v}=0}^{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0} - 1} c_{\mathbf{v}} \chi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) \stackrel{(4)}{=} \sum_{\mathbf{v}=0}^{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0} - 1} \left[\sum_{\mathcal{A}} \overline{\chi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA}) \right] \chi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}).$$

Суммирование во внутренней сумме идет по всем смежным классам ранга k $\mathbf{t}_k \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA}$, номер k выбирается так, чтобы $\mathbf{v} \leq \mathbf{m}_k - 1$:

$$S_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathcal{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA}) \sum_{\mathbf{v}=0}^{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0} - 1} \chi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{t}_k) = \sum_{\mathcal{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA}) D_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{t}_k).$$

Так как $m_k - 1 \geq m_{n_s} + m_{j_0} - 1 > m_{j_0}$, то смежный класс $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA}$ меньше $\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{gA}^0$. Поэтому возможны следующие три случая.

1. Точка $\mathbf{t}_k \notin B$, т. е. $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA} \cap B = \emptyset$, тогда по лемме 1 функция $\Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA}) = 0$.
2. Если $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{gA} \cap B \neq \emptyset$ и порядок точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{t}_k$ меньше j_0 , то по лемме 2

$$D_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{t}_k) = 0.$$

3. Остается случай, когда порядок точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{t}_k$ не меньше j_0 , тогда $\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{gA}^0) = b \neq 0$, а $D_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{t}_k) = m_{j_0}^N r_{n_s}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{t}_k)$ по лемме 2.

Следовательно,

$$S_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y}) = \Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{gA}^0) D_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}) = b \cdot m_{j_0}^N \cdot r_{n_s}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}).$$

Так как $|r_{n_s}(y^{(\nu)} \ominus z^{(\nu)})| = 1$, то $S_{\mathbf{m}_{n_s} + \mathbf{m}_{j_0}}(\mathbf{y}) \not\rightarrow 0$ при $n_s \rightarrow \infty$. □

Заключение

В статье доказано существование непустых совершенных множеств единственности для кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам.



Список литературы

1. Мовсисян Х. О. О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Известия АН Армянской ССР. Серия: Математика. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.
2. Скворцов В. А. О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1973. Т. 28, № 6. С. 77–79.
3. Лукомский С. Ф. О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Математический сборник. 1989. Т. 180, вып. 7. С. 937–945.
4. Тетунашвили Ш. Т. О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму // Математический сборник. 1991. Т. 182, вып. 8. С. 1158–1176.
5. Жеребьева Т. А. Об одном классе множеств единственности для двойных рядов Уолша // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2007. № 5. С. 13–18. EDN: **IBQCWF**
6. Лукомский С. Ф. Представление функций рядами Уолша и коэффициентами сходящихся рядов Уолша : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1997. 228 с. EDN: **ZJQNUV**
7. Lukomskii S. F. On a U-set for multiple Walsh series // Analysis Mathematica. 1992. Vol. 18. P. 127–138. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01904554>
8. Плотников М. Г. О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Известия РАН. Серия математическая. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 61–78. DOI: <https://doi.org/10.4213/im739>, EDN: **HYVFB**
9. Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. Fundamentals of the theory of groups. New York ; Berlin : Springer-Verlag, 1979. 203 p. (Graduate Texts in Mathematics. Vol. 62).
10. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 385, iss. 2. P. 1162–1178. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.07.043>, EDN: **PDGGXV**
11. Lukomskii S. F. Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian group // East Journal on Approximations. 2009. Vol. 15, iss. 2. P. 219–231.
12. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функции и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : ЭИМ, 1981. 180 с.
13. Юрченко И. С. О множествах единственности кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 35–43. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-1-35-43>, EDN: **SJJAXF**

References

1. Movsisyan Kh. O. On the uniqueness of double series in the Haar and Walsh systems. *Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Seriya: Matematika*, 1974, vol. 9, iss. 1, pp. 40–61 (in Russian).
2. Skvortsov V. A. On the coefficients of convergent Haar and Walsh multiple series. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 1973, vol. 28, iss. 6, pp. 77–79 (in Russian).
3. Lukomskii S. F. On certain classes of sets of uniqueness of multiple Walsh series. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1990, vol. 67, iss. 2, pp. 393–401. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1990v067n02ABEH001191>, EDN: **XLVIF**
4. Tetunashvili Sh. T. On some multiple function series and solution of the uniqueness problem for Pringsheim convergence of multiple trigonometric series. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 73, iss. 2, pp. 517–534. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1992v073n02ABEH002560>, EDN: **XMPKTF**
5. Zhreb'eva T. A. A class of sets of uniqueness for multiple Walsh series. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, iss. 2, pp. 55–61. DOI: <https://doi.org/10.3103/S00271322090203X>, EDN: **PFZIBF**
6. Lukomskii S. F. *Representation of functions by Walsh series and coefficients of convergent Walsh series*. Diss. Dr. Sci. (Phis. and Math.). Ekaterinburg, 1997. 228 p. (in Russian). EDN: **ZJQNUV**
7. Lukomskii S. F. On a U-set for multiple Walsh series. *Analysis Mathematica*, 1992, vol. 18, pp. 127–138. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01904554>
8. Plotnikov M. G. On multiple Walsh series convergent over cubes. *Izvestiya. Mathematics*, 2007, vol. 71, iss 1, pp. 57–73. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2007v071n01ABEH002350>, EDN: **LKINJN**
9. Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Fundamentals of the theory of groups*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 62. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1979. 203 p.



10. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 385, iss. 2, pp. 1162–1178. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.07.043>, EDN: PDGGXV
11. Lukomskii S. F. Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian group. *East Journal on Approximations*, 2009, vol. 15, iss. 2, pp. 219–231.
12. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsiy i garmonicheskiy analiz na nul'mernykh gruppakh* [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. Baku, ELM, 1981. 180 p. (in Russian).
13. Yurchenko I. S. A U-set for system of character of the zero-dimensional group under convergent over cubes. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 1, pp. 35–43 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-1-35-43>, EDN: SJJAXF

Поступила в редакцию / Received 19.06.2025

Принята к публикации / Accepted 24.10.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 35–45

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 35–45

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-35-45>

EDN: <https://elibrary.ru/KZGDYX>

Научная статья

УДК 539.3

Определение постоянной материала при индентировании круговой высокоэластичной мембраны с учётом трения

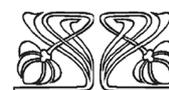
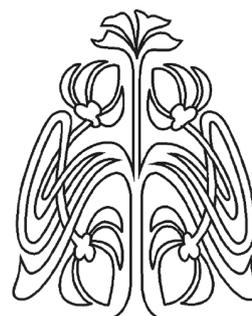
В. М. Анесян, А. М. Колесников[✉]

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Анесян Валерий Мхитарович, студент

Колесников Алексей Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости, amkolesnikov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7020-1092>, SPIN: 7684-5591, AuthorID: 177832

Аннотация. В работе предлагается метод определения механических свойств высокоэластичного материала методом индентирования тонкой круглой пластинки. Новизной предлагаемого метода является учёт влияния трения в области контакта индентора и образца. Математическая модель основана на теории нелинейно-упругих мембран и модели трения Кулона. Мембрана изготовлена из изотропного несжимаемого материала. Процесс индентирования считается квазистатическим, а деформация мембраны осесимметричной. Задача сводится к краевой задаче для двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром (неизвестной границей контакта штампа и мембраны). Краевая задача решается методом пристрелки. Численный анализ проведён для неогуксовской модели материала. На основе численных данных кривая «сила вдавливания — перемещение индентора» аппроксимирована полиномиальным выражением. Определение постоянной материала основано на минимизации разницы между экспериментальной кривой «сила — перемещение» и аппроксимирующим выражением. Метод апробирован на экспериментальных данных индентирования тонкой резиновой ленты при различных условиях контакта (без смазки и со смазкой). Для этого проведены эксперименты: по определению коэффициента трения, по индентированию, одноосному и равномерному двухосному растяжению. Значение восстановленной постоянной материала, определённой из опыта по индентированию,



Научный
отдел





близко к результатам классических методов. В случае, если при моделировании трение не учитывать, то значение постоянной материала будет существенно завышенным.

Ключевые слова: высокоэластичная мембрана, индентирование, контактная задача, трение, неогумовый материал, обратная задача, постоянная материала

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00125).

Для цитирования: *Анесян В. М., Колесников А. М.* Определение постоянной материала при индентировании круговой высокоэластичной мембраны с учётом трения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 35–45. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-35-45>, EDN: KZGDYX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Determination of a material constant in indentation of a circular hyperelastic membrane accounting for friction

V. M. Anesyan, A. M. Kolesnikov[✉]

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Valeriy M. Anesyan

Alexey M. Kolesnikov, amkolesnikov@sdefu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7020-1092>, SPIN: 7684-5591, AuthorID: 177832

Abstract. The paper proposes a method for determining the mechanical properties of a highly elastic material by indenting a thin round plate. The novelty of the proposed method is to take into account the influence of friction in the contact area of the indenter and the specimen. The mathematical model is based on the theory of nonlinear-elastic membranes and the Coulomb friction model. The membrane is made of an isotropic incompressible material. The indentation process is considered quasi-static and the membrane deformation is axisymmetric. The problem is reduced to a boundary value problem for two systems of ordinary differential equations with a parameter (unknown contact boundary of the indenter and membrane). The boundary value problem is solved by the shooting method. Numerical analyses are carried out for the neo-Hookean model of the material. Based on the numerical results, the “indentation force — indenter displacement” curve is approximated by a polynomial expression. The determining of the material constant is based on minimising the difference between the experimental “force — displacement” curve and the approximating expression. The method is validated on experimental data of indentation of a thin rubber band under different contact conditions (without lubrication and with lubrication). For this purpose, experiments were carried out: on determination of the friction coefficient, on indentation, uniaxial and uniform biaxial stretching. The value of the restored material constant determined from the indentation experiment is close to the results of classical methods. In the case when friction is not taken into account during modeling, the value of the material constant will be significantly overestimated.

Keywords: hyperelastic membrane, indentation, contact problem, friction, neo-Hookean material, inverse problem, material constant

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00125).

For citation: Anesyan V. M., Kolesnikov A. M. Determination of a material constant in indentation of a circular hyperelastic membrane accounting for friction. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 35–45 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-35-45>, EDN: KZGDYX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Высокоэластичные мембраны активно исследуются со второй половины XX в. Их отличительными особенностями являются гибкость, растяжимость и пренебрежимо малое сопротивление изгибу. Они востребованы в области инженерии, в медицине, являются частью искусственных и природных конструкций. Для того чтобы эффективно использовать высокоэластичные мембраны, необходимо знать их механические свойства. Для определения механических свойств мембран существуют различные виды испытаний. Одним из методов исследования является вдавливание (индентирование).

Первой работой по исследованию вдавливания сферического штампа в нелинейно-упругую мембрану при больших деформациях является работа [1]. В ней с использованием нелинейной теории безмоментных оболочек рассматривается осесимметричная деформация мембраны. Контакт моделируется как идеальный без учёта трения.

В большинстве исследований для определения механических свойств высокоэластичных мембран из опыта по индентированию основными экспериментальными данными являются сила вдавливания и перемещение индентора [2–5]. В работе [6] предложен метод для определения механических свойств тонких высокоэластичных плёнок по форме деформированной мембраны под действием постоянной нагрузки. В работе [7] для определения механических характеристик материала мембраны предлагаются два подхода, основанные на данных кривой «сила – прогиб» и данных метода трёхмерной корреляции цифровых изображений (3D-DIC).

При моделировании процесса индентирования важным вопросом является описание контактного взаимодействия массивного твёрдого штампа с упругой мембраной. В большинстве исследований это воздействие штампа описывают как распределённое нормальное давление, т.е. пренебрегают влиянием трения [3–7]. В работах [8–10] проведены экспериментальные и теоретические исследования индентирования круговой мембраны с учётом трения в области контакта. Показано, что трение играет существенную роль при индентировании, за исключением малых прогибов и деформаций мембраны в начале процесса индентирования.

В данной работе предлагается метод определения механических свойств тонких высокоэластичных мембран на основе эксперимента по индентированию сферическим штампом с учётом трения.

1. Математическая постановка

Рассматривается круговая мембрана толщины $h \ll r_B$, где r_B — радиус мембраны. В недеформированном состоянии положение точек мембраны можно задать с помощью цилиндрической системы координат $\{r \in [0, r_B], \varphi \in [0, 2\pi], z = 0\}$.

Для осесимметричной деформации положение точек срединной поверхности деформированной мембраны можно записать в той же цилиндрической системе координат $\{R(r), \psi, Z(r)\}$. Главные кратности удлинений λ_i и кривизны κ_i поверхности деформированной мембраны выражаются следующим образом:

$$\lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{R}{r},$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{d\psi}{dr}, \quad \kappa_2 = \frac{\sin \psi}{r\lambda_2}, \quad \tan \psi = \frac{dZ}{dr} \left(\frac{dR}{dr}\right)^{-1}.$$

Здесь $\psi(r)$ — угол наклона касательной к поверхности деформированной мембраны в плоскости RZ .

Уравнения равновесия при осесимметричной деформации имеют вид [10, 11]

$$\frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{R} \frac{dR}{dr} + \lambda_1 q_1 = 0, \quad \sigma_1 \kappa_1 + \sigma_2 \kappa_2 + q = 0. \quad (1)$$

Здесь $q_1 = q_1(r)$ и $q = q(r)$ — касательная и нормальная составляющие поверхностной нагрузки, σ_1 и σ_2 — главные усилия в мембране, определяемые для высокоэластичного несжимаемого материала с помощью функции удельной потенциальной энергии $W(\lambda_1, \lambda_2)$ следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{hW_1}{\lambda_2}, \quad \sigma_2 = \frac{hW_2}{\lambda_1}, \quad W_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}.$$

Отметим, что несжимаемость материала учитывается через изменение толщины мембраны.

1.1. Область контакта

В области контакта мембрана плотно прилегает к индентору радиуса R_0 и повторяет его форму (рис. 1). Тогда её поверхность можно описать следующим образом:

$$R(\psi) = R_0 \sin(\psi), \quad Z(\psi) = R_0(1 - \cos(\psi)), \quad \psi \in [0, \psi_C]. \quad (2)$$

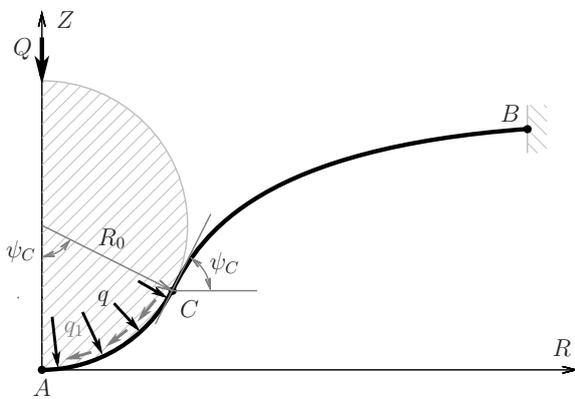


Рис. 1. Сечение мембраны при индентировании
Fig. 1. Membrane cross-section under indentation

Здесь ψ_C — значение параметра ψ в заранее неизвестной точке C , в которой прекращается контакт мембраны и индентора.

В области контакта принимаем, что для касательной компоненты поверхностной нагрузки выполняется закон Кулона в предельном случае сразу во всей области, т. е. $|q_1| = f|q|$. Учитывая направление возможного движения и выражения (2), уравнения равновесия (1) сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка для $\psi(r)$ и выражению для нормальной составляющей давления $q(r)$:

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} W_{11} R_0 r + \frac{d\psi}{dr} (W_{12} R_0 \cos \psi - W_1 r f) - W_{12} \frac{R_0}{r} \sin \psi + W_1 - W_2 (\cos \psi + f \sin \psi) = 0,$$

$$q = -\frac{h}{R_0^2} \left(\frac{r}{\sin \psi} W_1 + W_2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \right).$$

1.2. Область вне контакта

Уравнения равновесия (1) для области мембраны вне контакта с индентором сводятся к системе дифференциальных уравнений [11]:

$$\frac{d\lambda_1}{dr} = -\frac{1}{rW_{11}} \left[(\lambda_1 \cos \psi - \lambda_2) W_{12} - W_2 \cos \psi + W_1 \right], \quad \frac{d\psi}{dr} = -\frac{W_2 \sin \psi}{rW_1},$$

$$\frac{d\lambda_2}{dr} = \frac{1}{r} (\lambda_1 \cos \psi - \lambda_2), \quad \frac{dR}{dr} = \lambda_1 \cos \psi, \quad \frac{dZ}{dr} = \lambda_1 \sin \psi.$$

1.3. Краевая задача

В центре пластины (точка A) на функцию $\psi(r)$ накладываются следующие граничные условия:

$$\psi(0) = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=0} = \gamma.$$



Здесь γ — неизвестная заранее величина, которая характеризует деформацию в точке A . В нулевой точке существует особенность, поэтому в качестве начальной точки берётся малое отступление от нуля ε :

$$\psi(\varepsilon) = \frac{\gamma \cdot \varepsilon}{R_0}, \quad \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=\varepsilon} = \frac{\gamma}{R_0}.$$

Данное приближение соответствует состоянию равномерного двухосного растяжения, возникающему в центре мембраны.

В точке B мембрана закреплена:

$$R(r_B) = \alpha r_B, \quad \lambda_2(r_B) = \alpha.$$

Здесь $\alpha \geq 1$ — кратность предварительного натяжения мембраны.

Решения на конце участка AC являются начальными условиями для участка CB :

$$\begin{aligned} R^{CB}(r_C) &= R^{AC}(r_C), & Z^{CB}(r_C) &= Z^{AC}(r_C), \\ \psi^{CB}(r_C) &= \psi^{AC}(r_C), & \lambda_1^{CB}(r_C) &= \lambda_1^{AC}(r_C), & \lambda_2^{CB}(r_C) &= \lambda_2^{AC}(r_C). \end{aligned}$$

При этом граница r_C заранее не известна.

Для системы, состоящей из шарового индентора и участка мембраны AC , уравнение равновесия может быть записано в виде

$$Q = 2\pi R_0 (\sin \psi(r_C))^2 \sigma_1(r_C). \quad (3)$$

Здесь Q — сила вдавливания. Данное условие можно использовать как для определения границы r_C по заданной силе Q , так и для определения силы Q по заданной координате r_C .

Таким образом, поставлена краевая задача о нахождении такого значения параметра γ , при котором $\lambda_2(r_B) = \alpha$.

Для численного решения краевой задачи удобнее задавать границу контакта r_C , затем определять начальное значение γ методом пристрелки. После решения задачи сила вдавливания Q вычисляется из уравнения (3). Численный метод пристрелки реализован авторами на языке программирования *Python*.

2. Результаты моделирования

Теоретические расчёты проводились для неогуковской модели материала. Функция потенциальной энергии в этом случае имеет вид

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\mu}{2} \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - 3 \right). \quad (4)$$

Здесь μ — постоянная материала.

Для демонстрации полученных результатов введём безразмерные параметры

$$Q^* = \frac{Q}{\mu h R_B}, \quad \Delta = \frac{Z(B)}{R_B}, \quad R_0^* = \frac{R_0}{R_B}.$$

Ограничимся рассмотрением прогибов до величины радиуса мембраны. Это соответствует максимальной относительной деформации примерно 100–150%.

На рис. 2 приведены графики зависимости силы Q^* от перемещения индентора Δ при $R_0^* = 0.4$ для предварительно не растянутой мембраны (сплошные линии — $\alpha = 1$) и предварительно растянутой мембраны (штриховые линии — $\alpha = 1.1$). Для начальной стадии индентирования трение оказывает малое влияние на зависимость «сила – прогиб». С ростом прогиба влияние трения увеличивается. При прогибе, равном радиусу мембраны, вдавливающая сила при коэффициенте трения $f = 1.1$ больше силы при $f = 0$ примерно в 1.5 раза.

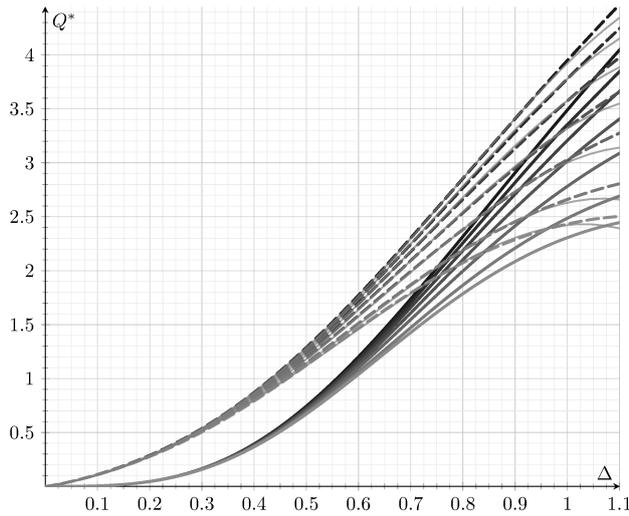


Рис. 2. Зависимость силы вдавливания от перемещения индентора. Сплошные тёмно-серые линии — $\alpha = 1$, штриховые линии — $\alpha = 1.1$, сплошные светло-серые тонкие линии — аппроксимирующая функция для $\alpha = 1.1$. Коэффициент $f = 0, 0.1, 0.3, \dots 1.1$, начиная с нижних кривых

Fig. 2. Dependence of indentation force on indenter displacement. Solid dark grey lines — $\alpha = 1$, dashed lines — $\alpha = 1.1$, solid light grey thin lines — approximation function for $\alpha = 1.1$. Coefficient $f = 0, 0.1, 0.3, \dots 1.1$, starting from the bottom lines

3. Эксперименты

3.1. Определение коэффициента трения

Коэффициент трения определяем по методу, предложенному в работах [11, 12]:

$$f = \frac{F_t}{mg} \frac{\sqrt{2R_b r_s + r_s^2}}{R_b + r_s}.$$

Здесь F_t — тянущая сила, m — масса образца, g — ускорение свободного падения, R_b — радиусы цилиндров основания, r_s — радиус цилиндра образца (рис. 3).

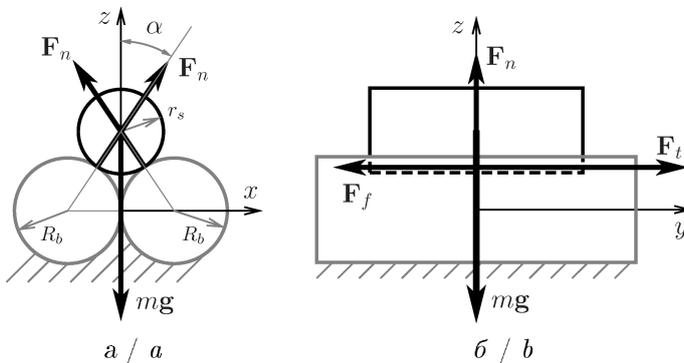


Рис. 3. Схема эксперимента по определению коэффициента трения: a — в плоскости xz ; b — в плоскости скольжения yz
Fig. 3. Scheme of the experiment for determining the coefficient of friction: a is in the plane xz ; b is in the sliding plane yz

На основе результатов численного решения задачи при $R_0 = 0.4R_B$ и $\alpha = 1.1$ зависимость безразмерной силы Q^* от относительного перемещения $\Delta \in [0, 1]$ аппроксимирована соотношением

$$Q_a^*(\Delta, f) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \Delta^j f^i. \quad (5)$$

Коэффициенты a_{ij} определялись методом наименьших квадратов при минимизации разницы между аппроксимирующим выражением (5) и результатами численного решения задачи. Они принимают значения

$$\begin{aligned} a_{01} &= 0.433, & a_{02} &= 5.252, & a_{03} &= -3.227, \\ a_{11} &= 0.027, & a_{12} &= -0.449, & a_{13} &= 2.607, \\ a_{21} &= 0.009, & a_{22} &= 0.089, & a_{23} &= -0.757. \end{aligned}$$

На рис. 2 светло-серыми тонкими линиями показана аппроксимирующая функция (5). Погрешность аппроксимации для $\Delta \in [0; 1]$ и $f \in [0; 1.1]$ составляет менее 2.5%.

Эксперименты проводились на испытательной машине Shimadzu AGS-X со специальной оснасткой. Цилиндры основания и подвижный цилиндр изготовлены методом 3D-печати из фотополимерной смолы Anycubic Eco Clear (Shenzhen Anycubic Technology, Ltd, Китай). Резиновая лента (GZKBAND, Китай) оборачивалась вокруг подвижного цилиндра с небольшим натяжением. Эксперименты проводились для случая сухого контакта (поверхности образца и основания обезжиривались изопропиловым спир-



том) и для случая смазки силиконовым маслом ПМС-200 (ИП Чайников А. Н., г. Нижний Новгород, Россия). В каждом случае проводилось 20 экспериментов продолжительностью 50 секунд. Параметры эксперимента имеют следующие значения:

$$m = 0.299 \text{ кг}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad R_b = 36 \text{ мм}, \quad r_s = 36 \text{ мм}.$$

Данными эксперимента является зависимость тянущей силы F_t от времени при постоянной скорости перемещения траверсы 1 мм/с. Выборка трёх экспериментов для каждого случая показана чёрными и серыми кривыми на рис. 4.

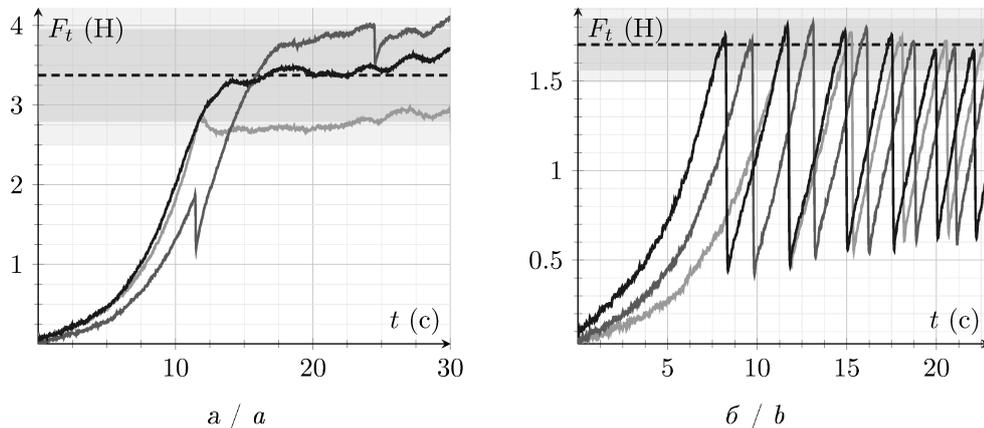


Рис. 4. Зависимость тянущей силы от времени: *a* — при сухом контакте; *b* — со смазкой силиконовым маслом

Fig. 4. Dependence of pulling force on time: *a* is with dry contact; *b* is with silicone oil lubrication

Для сухого контакта определялась средняя сила по всем экспериментам на некотором промежутке времени (от первого «пика» силы в течение 10 с после него). Для контакта со смазкой средняя сила определялась по значению пиковых величин силы (от первого «пика» в течение 10 с). На рис. 4 средние значения сил по всем экспериментам показаны чёрной штриховой линией, а доверительные интервалы, определяемые по правилу 2σ и 3σ , — серой и светло-серой областями соответственно. Итого получаем значения коэффициента трения с вероятностью 95% (доверительный интервал 2σ):

$$f_{dry} = 1.00 \pm 0.17, \quad \varepsilon = 17\%, \\ f_{so} = 0.50 \pm 0.04, \quad \varepsilon = 8\%.$$

3.2. Одноосное и двухосное растяжение

Для дальнейшей проверки результатов экспериментов по индентированию механические свойства материала определялись из классических опытов по одноосному и равномерному двухосному растяжению. Образцы были изготовлены из резиновой ленты толщиной 0.6 мм. Для одноосного растяжения образцы имели ширину 50 мм, длину 230 мм, рабочую область 150 мм, для равномерного двухосного растяжения — круговую форму радиусом 35 мм.

Эксперименты проводились на испытательной машине Shimadzu AGS-X. Для определения продольной и поперечной деформации использовалась видеосъёмка образцов со специальными контрастными метками с последующей обработкой данных. Растяжение проводилось циклически (пять циклов) до кратности удлинения 2.4 для одноосного и 1.8 для двухосного растяжения. Обработку данных проводили для пятого цикла нагружения. Результаты испытания представлены на рис. 5, 6.

Свойства материала будем описывать неогуксовской несжимаемой моделью (4). Из данных о поперечной деформации при одноосном растяжении (рис. 5) видно, что материал близок к несжимаемому, хотя с ростом деформации сильнее отходит от этой модели.

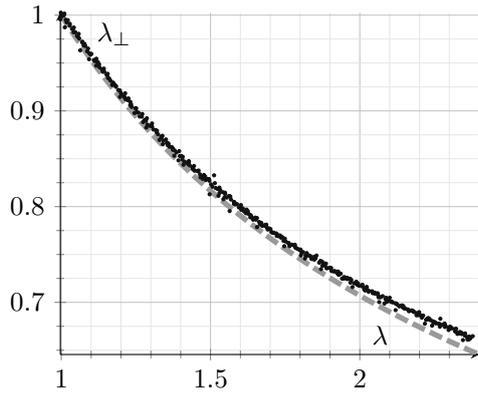


Рис. 5. Зависимость поперечной кратности удлинения от продольной при одноосном растяжении. Чёрные точки — экспериментальные данные, серая штриховая линия — неогукковская несжимаемая модель материала, для которой справедливо $\lambda_{\perp} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$

Fig. 5. Dependence of transverse stretch ratio on longitudinal stretch ratio for uniaxial tension. Black dots — experimental data, grey lines — neo-Hookean incompressible material model for which $\lambda_{\perp} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$

На основе экспериментальных данных по одноосному и равномерному двухосному растяжению определена постоянная материала μ в трёх вариантах. Обозначим через μ_A значение, полученное на основе данных только одноосного растяжения, μ_B — на основе только равномерного двухосного растяжения, μ_0 — на основе двух экспериментов. Минимизируя разницу между теоретическими и экспериментальными значениями, методом наименьших квадратов получены следующие величины:

$$\mu_A = 0.457, \quad \mu_B = 0.635, \quad \mu_0 = 0.533 \text{ (МПа)}.$$

Теоретическая зависимость напряжений от кратности удлинения показана на рис. 6 серыми линиями. Сплошные линии построены для значения μ_0 , штриховые — μ_A , точечные — μ_B . Как видно из графиков, неогукковская модель несжимаемого материала достаточно хорошо описывает качественные и количественные результаты экспериментов по отдельности. Результаты для двух экспериментов вместе моделью неплохо описываются качественно, но количественная оценка напряжений даёт погрешность до 20%.

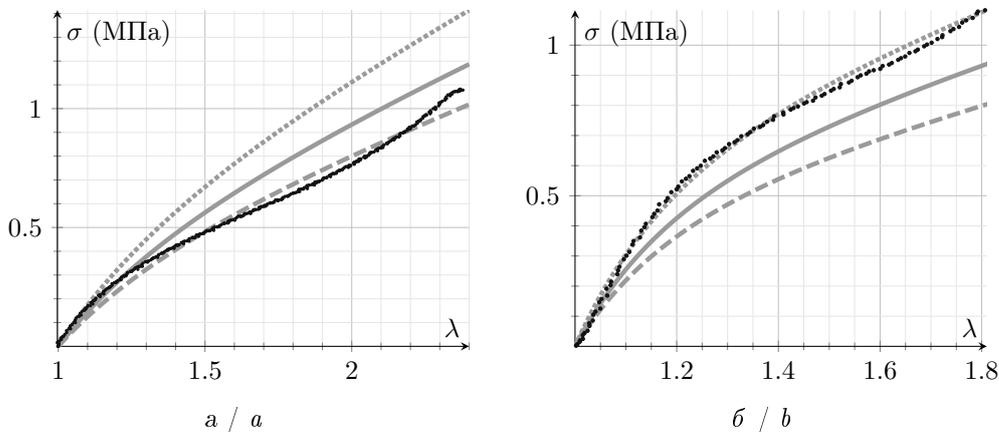


Рис. 6. Диаграмма «напряжение — кратность удлинения»: a — для одноосного растяжения; b — для двухосного растяжения. Чёрные точки — экспериментальные данные, серые линии — неогукковская модель (сплошная линия — μ_0 , штриховая линия — μ_A , точечная линия — μ_B)

Fig. 6. Diagram “stress — stretch ratio”: a is for uniaxial tension; b is for uniform biaxial tension. Black dots — experimental data, grey lines — neo-Hookean model (solid line — μ_0 , dashed line — μ_A , dotted line — μ_B)

3.3. Индентирование

Образцы для индентирования были изготовлены из резиновой ленты. Толщина образца $h = 0.6$ мм, радиус фиксации $R_B = 25$ мм (радиус образца 60 мм). Индентор имеет шарообразную форму радиусом $R_0 = 10$ мм, изготовлен методом 3D-печати из фотополимерной



смолы Anycubic Eco Clear. Испытания проводились при сухом контакте (поверхности образца и индентора обезжиривались изопропиловым спиртом) и при использовании смазки силиконовым маслом ПМС-200.

Эксперименты проводились на испытательной машине Shimadzu AGS-X со специальной оснасткой, позволяющей осуществлять предварительное натяжение образца (рис. 7). Круговая мембрана радиуса $R_D = 60$ мм (толстая серая штриховая линия на рис. 7) зажимается между кольцами 1 и 2. Затем подвижный зажим 3 смещается на заданную величину $d = 10$ мм, прижимая мембрану к основанию 1 и создавая в мембране предварительное растяжение ($\alpha = 1.1 \pm 0.01$) (толстая чёрная сплошная линия на рис. 7).

После этого индентор 4, соединённый с силовой ячейкой и траверсой испытательной машины, опускается вниз с постоянной скоростью 1 мм/с. При испытании фиксируются сила вдавливания Q и перемещение индентора δ .

Эксперименты проводились с пятью мембранами для каждого условия контакта, вдавливание осуществлялось до прогиба, равного радиусу зафиксированного образца, по пять циклов нагрузки и разгрузки в каждом эксперименте. На рис. 8 показан этап нагружения для пятого цикла испытания для пяти экспериментов без смазки (чёрные линии) и со смазкой (серые линии).

4. Определение постоянной материала

Постоянную материала μ будем находить методом наименьших квадратов, минимизируя разность между экспериментальной зависимостью «сила вдавливания — перемещение индентора», представленной массивом точек $\{\delta_i^e, Q_i^e\}$ ($i = 1, \dots, N$, N — количество экспериментальных данных), и аппроксимацией (5) на интервале $\Delta \in [0, 1]$.

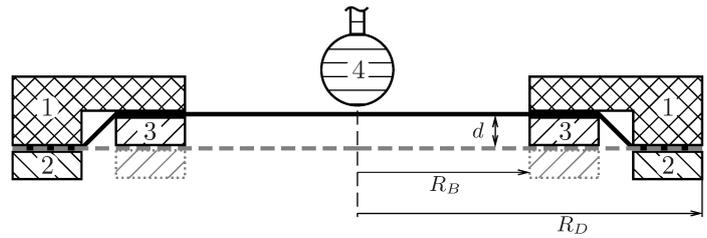


Рис. 7. Схема установки для индентирования
Fig. 7. Device scheme for indentation

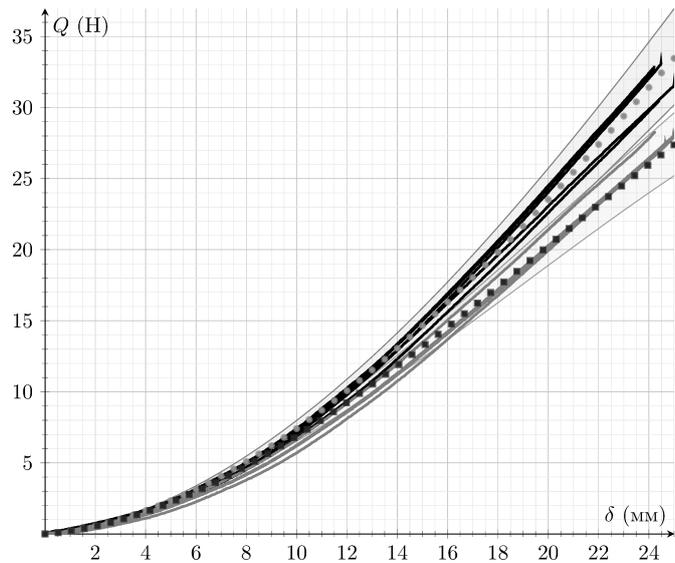


Рис. 8. Зависимость приведённой силы от относительно перемещения индентора. Чёрные линии — сухой контакт, серые линии — контакт со смазкой силиконовым маслом. Серыми кружками обозначена восстановленная теоретическая кривая при $f = 1$. Тёмно-серыми квадратами — восстановленная теоретическая кривая при $f = 0.5$. Светло-серые области — погрешности восстановления

Fig. 8. Dependence of the reduced force on the relative displacement of the indenter. Black lines — dry contact, grey lines — contact with silicone oil lubrication. Grey circles indicate the restored theoretical curve at $f = 1$. Dark grey squares — restored theoretical curve at $f = 0.5$. Light grey areas — restoration errors



Получаем формулу для определения μ :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i^e Q_a^*(\Delta_i^e, f)}{hR_B \sum_{i=1}^N (Q_a^*(\Delta_i^e, f))^2} \left(\Delta_i^e = \frac{\delta_i^e}{R_B} \right).$$

В таблице представлены значения постоянной материала μ , восстановленные по результатам эксперимента на индентирование из предыдущего раздела, и их оценка.

Значения постоянной материала μ (МПа) из опыта по индентированию
Table. Reconstructed values of the material constant μ (MPa) from the indentation experiment

Тип контакта	Сухой контакт	Силиконовое масло
μ , МПа	0.533, 0.568, 0.544, 0.580, 0.576	0.536, 0.536, 0.532, 0.564, 0.526
С учетом трения		
Среднее [min, max]	0.560 [0.527; 0.598]	0.539 [0.513; 0.566]
Без учета трения ($f = 0$)		
Среднее [min, max]	0.758 [0.733; 0.782]	0.656 [0.640; 0.671]

На рис. 8 маркерами показаны кривые «сила вдавливания — перемещение индентора» для средних значений μ (см. таблицу). Серые кружки соответствуют коэффициенту трения $f = 1$, тёмно-серые квадраты — $f = 0.5$. Светло-серые области отмечают возможное положение кривых $Q - \delta$, соответствующее значениям постоянной материала из доверительного интервала.

Заключение

Предложен метод определения постоянной неогукковского материала на основе эксперимента по индентированию с учётом трения. Экспериментально и теоретически показано существенное влияние трения на процесс индентирования. Причём использование смазки снижает трение, но не убирает его полностью.

Метод опробован на экспериментальных данных с резиновой лентой. Экспериментально определён коэффициент трения и проведено индентирование кругового образца без смазки и со смазкой силиконовым маслом. На основе полученных данных определена постоянная неогукковского материала. Значения, полученные при разных условиях контакта, близки.

Постоянная материала, полученная из опыта по индентированию при различных условиях контакта, близка к постоянной, определённой из двух классических опытов. Отметим, что если не учитывать трение, то вычисленные материальные постоянные будут существенно отличаться для разных условий контакта друг относительно друга и от значения, полученного классическими методами.

Список литературы / References

1. Yang W. H., Hsu K. H. Indentation of a circular membrane. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, vol. 38, pp. 227–230. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3408747>
2. Scott O. N., Begley M. R., Komaragiri U., Mackin T. J. Indentation of freestanding circular elastomer films using spherical indenters. *Acta Materialia* 2004, vol. 52, iss. 16, pp. 4877–4885. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.06.043>
3. Aernouts J., Couckuyt I., Crombecq K., Dirckx J. J. J. Elastic characterization of membranes with a complex shape using point indentation measurements and inverse modelling. *International Journal of Engineering Science*, 2010, vol. 48, iss. 6, pp. 599–611. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.02.001>



4. Cloonan A. J., O'Donnell M. R., Lee W. T., Walsh M. T., De Barra E., McGloughlin T. M. Spherical indentation of free-standing acellular extracellular matrix membranes. *Acta Biomaterialia*, 2012, vol. 8, iss. 1, pp. 262–273. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2011.08.003>
5. Elkut F., Bradley G. R., Krywonos J., Fenwick J., Ren X. J. Numerical study of the mechanics of indentation bending tests of thin membranes and inverse materials parameters prediction. *Computational Materials Science*, 2012, vol. 52, iss. 1, pp. 123–127. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.03.025>
6. Liu K. K., Ju B. F. A novel technique for mechanical characterization of thin elastomeric membrane. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2001, vol. 34, iss. 15, pp. 91–94. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/34/15/102>
7. Garnica-Palafox I. M., Alvarez-Camacho M., Sánchez-Arévalo F. M. Macro- and micromechanical responses of an elastomeric membrane undergoing biaxial tension by indentation. *Journal of Materials Science*, 2019, vol. 54, pp. 14255–14274. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10853-019-03887-w>
8. Selvadurai A. P. S., Yu Q. On the indentation of a polymeric membrane. *Proceedings of the Royal Society A*, 2006, vol. 462, pp. 189–209. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2005.1572>
9. Jiang Z., Liu Z., Li Y., Kang G. Indentation and puncture of double-network tough hydrogel membranes. *Polymer Testing*, 2022, vol. 116, art. 107782. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.polymer-testing.2022.107782>
10. Liu J., Zhong D., Yin T., Chen Z., Liu B., Wang P., Qu S., Kang G. Indentation of elastomeric membranes by sphere-tipped indenters: Snap-through instability, shrinkage, and puncture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2022, vol. 167, art. 104973. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.104973>
11. Kolesnikov A. M., Shatvorov N. M. Indentation of a circular hyperelastic membrane by a rigid cylinder. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, vol. 138, art. 103836. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103836>
12. Stimpson B. A suggested technique for determining the basic friction angle of rock surfaces using core. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1981, vol. 18, iss. 1, pp. 63–65. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(81\)90266-7](https://doi.org/10.1016/0148-9062(81)90266-7)

Поступила в редакцию / Received 14.06.2025

Принята к публикации / Accepted 05.11.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 46–55

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 46–55

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55>

EDN: <https://elibrary.ru/MCSEEH>

Научная статья

УДК 539.3

О прикладной теории сжатия цилиндра

А. О. Ватульян, М. Н. Узлов 

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, SPIN: 3865-2040, AuthorID: 3469

Узлов Марк Николаевич, студент, uzlov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0009-0002-4789-2643>

Аннотация. В работе рассматривается задача о сжатии упругих цилиндрических образцов под действием торцевых нагрузок. Представлены способы построения приближенных моделей деформирования различного порядка для вытянутых образцов путём введения гипотез о представлении поля перемещений в виде разложения по радиальным полиномам различного порядка с неизвестными коэффициентами-функциями. Приближённые модели построены с помощью использования вариационного принципа Лагранжа. Сформирован упрощённый функционал энергии путём интегрирования по радиальной координате. С помощью вариационного принципа на базе метода Канторовича задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями, причём для однородных тел эти системы дифференциальных уравнений имеют постоянные коэффициенты, зависящие от коэффициента Пуассона. Построены решения для упрощённых моделей, показано наличие стержневых и погранслойных решений. Проведена верификация полученных моделей на основе МКЭ при постоянных и переменных значениях параметров Ляме, а также осуществлена серия вычислительных экспериментов, которая показала возможность использования предлагаемых моделей в случае вытянутых образцов, что позволяет оценить их точность и использовать при решении прикладных задач различного типа.

Ключевые слова: вариационный принцип Лагранжа, метод Канторовича, погранслойные решения, неоднородный цилиндр, сжатие цилиндра

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) в Южном федеральном университете.

Для цитирования: Ватульян А. О., Узлов М. Н. О прикладной теории сжатия цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 46–55. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55>, EDN: MCSEEH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the applied theory of compression of an elastic cylinder

A. O. Vatulyan, M. N. Uzlov 

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, SPIN: 3865-2040, AuthorID: 3469

Mark N. Uzlov, uzlov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0009-0002-4789-2643>



Abstract. The paper addresses the problem of the compression of elastic cylindrical specimens under axial end loads. Approximate deformation models of various orders are developed for slender specimens by postulating that the displacement field admits an expansion in radial polynomials of different orders whose coefficients are unknown functions of the axial coordinate. The approximate models are derived from Lagrange's variational principle. A reduced energy functional is obtained by integrating the three-dimensional elastic energy over the radial coordinate. Applying the Kantorovich variational method, the problem is then reduced to systems of ordinary differential equations with corresponding boundary conditions; for homogeneous bodies these systems exhibit constant coefficients that depend on Poisson's ratio. Closed-form solutions are constructed for the simplified models, and both rod-like (axial) and boundary-layer solution modes are identified. The proposed models are verified against finite-element simulations for both constant and spatially heterogeneous Lamé parameters, and a series of computational experiments demonstrates that the models may be used for slender specimens to estimate their accuracy and to support the solution of diverse applied problems.

Keywords: variational principle of Lagrange, Kantorovich method, boundary-layer solutions, heterogeneous cylinder, compression of a cylinder

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265-II, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) in Southern Federal University.

For citation: Vatulyan A. O., Uzlov M. N. On the applied theory of compression of an elastic cylinder. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 46–55 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-46-55>, EDN: MCCEEH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задачам о равновесии изотропного упругого цилиндра посвящено множество работ. Исследование задач для однородного конечного упругого цилиндра берёт своё начало от работы Файлона [1] и за более чем 100-летнюю историю продолжает интересовать специалистов. При этом отметим, что в последние годы интерес к этим задачам заметно вырос, что связано с ростом числа приложений к задачам для призматических образцов, часто используемых для оценки упругих свойств (модуля Юнга и коэффициента Пуассона), задачам биомеханики, задачам идентификации свойств новых материалов.

Отметим, что наиболее важными являются задачи о нагружении торцов цилиндра. Среди них выделим задачу о действии нормальной нагрузки на торце, когда основание жёстко зашпечлено. Для задач такого вида со свободной боковой поверхностью особую роль приобретают решения для бесконечного цилиндра или однородные решения [2]. Эти решения зависят от корней некоторого трансцендентного уравнения, при удовлетворении граничных условий на торцах их линейные комбинации приводят к бесконечным алгебраическим системам относительно коэффициентов разложений. В ряде исследований показано, что они являются квази-регулярными или квази-вполне регулярными, и их решение можно строить методом редукции.

Альтернативой такому подходу является использование КЭ-технологий. Отметим, что при интерпретации данных экспериментов и оценке модуля Юнга весьма часто используется стержневая модель [3], которую рекомендуется использовать, когда $\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1$ (a — радиус цилиндра, h — его высота).

Вместе с тем для ряда материалов (например, костная ткань) весьма сложно изготовить длинные образцы и подвергать их сжатию. Поэтому важной проблемой является построение промежуточных моделей, эффективных для значений ($\varepsilon = 0.1 \div 0.5$), для которых можно найти аналитические или полуаналитические решения. Именно этой проблеме и посвящена настоящая работа, где приближенная модель строится на основе использования вариационного принципа Лагранжа [4] в рамках метода Канторовича [5].

1. Постановка задачи

Пусть однородный изотропный цилиндр со свободной боковой поверхностью радиуса a и высоты h подвергается сжатию с помощью приложения к торцу $z = h$ нормальной нагрузки $p(r)$, касательные напряжения на этом торце равны 0 (рис. 1). Будем считать, что торец $z = 0$ жёстко закреплён. Задачу будем рассматривать в осесимметричной постановке.

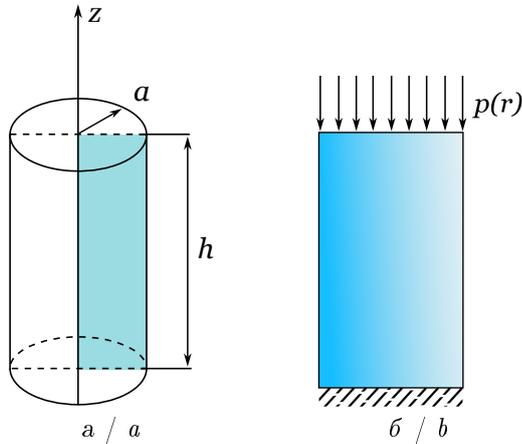


Рис. 1. Однородный изотропный цилиндр со свободной боковой поверхностью: a — геометрические параметры образца; b — схема нагружения

Fig. 1. Homogeneous isotropic cylinder with a free lateral surface: a is the geometric parameters of the sample; b is the loading scheme

где W — удельная потенциальная энергия деформации, A — работа поверхностных сил на торце:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} (\sigma_{rr}\epsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\epsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\sigma_{rz}\epsilon_{rz}), \\
 A &= \int_S p(r)u_z(r, h) dS, \quad S = [0, a] \times [0, 2\pi], \\
 A &= 2\pi (P_0u_0|_{z=h} + P_2u_2|_{z=h}), \\
 P_0 &= \int_0^a p(r)r dr \quad P_2 = \int_0^a p(r)r^2 dr.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Рассмотрим несколько упрощённых моделей, в частности второго порядка, в которой неизвестными являются три функции осевой координаты z :

$$\begin{cases} u_r(r, z) = ru_1(z), \\ u_z(r, z) = u_0(z) + ru_2(z). \end{cases}
 \tag{2}$$

Переход к модели первого порядка осуществляется за счёт равенства нулю функции u_2 :

$$\begin{cases} u_r(r, z) = ru_1(z), \\ u_z(r, z) = u_0(z). \end{cases}
 \tag{3}$$

В рамках (2) найдем компоненты тензоров деформаций и напряжений:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = u_1, \quad \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = u_1, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = u'_0 + ru'_2,$$

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат имеют вид [6]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу о сжатии цилиндра при закреплении нижнего торца:

$$\begin{cases} u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad r \in [0, a], \quad z = 0, \\ \sigma_{zz} = -p(r), \quad \sigma_{zr} = 0, \quad r \in [0, a], \quad z = h, \\ \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r = a, \quad z \in [0, h]. \end{cases}$$

Построение прикладной теории осуществим, базирясь на вариационном принципе Лагранжа. В рамках общей постановки задачи введём следующий функционал полной потенциальной энергии:

$$\Pi = \int_V W dV - A,$$



$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \cdot (ru'_1 + u_2),$$

$$\sigma_{rr} = \Theta\lambda + 2\mu u_1, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \Theta\lambda + 2\mu u_1, \quad \sigma_{zz} = \Theta\lambda + 2\mu(u'_0 + ru'_2), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu(ru'_1 + u_2),$$

где $\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = 2u_1 + u'_0 + ru'_2$, λ, μ — параметры Ламе, которые могут зависеть от осевой координаты.

Тогда удельная потенциальная энергия (1) примет вид

$$W = \frac{1}{2} \cdot [\Theta^2\lambda + 4\mu u_1^2 + 2\mu(u'_0 + ru'_2)^2 + \mu(ru'_1 + u_2)^2].$$

Рассмотрим функционал полной потенциальной энергии:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^a W r dr dz d\varphi - A = \Pi_0 - A.$$

Проинтегрировав в представлении Π_0 по радиальной и угловой координатам, получим её упрощённое представление:

$$\begin{aligned} \Pi_0 = \pi \int_0^h \left[\frac{a^4}{4} \left((\lambda + 2\mu)(u'_2)^2 + \mu(u'_1)^2 \right) + \frac{a^3}{3} \left((2\lambda + 4\mu)u'_0 u'_2 + 4\lambda u_1 u'_2 + 2\mu u'_1 u_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{2} \left((4\lambda + 4\mu)u_1^2 + (\lambda + 2\mu)(u'_0)^2 + 4\lambda u_1 u'_0 + \mu u_2^2 \right) \right] dz. \end{aligned}$$

Используя вариационный принцип Лагранжа, варьируя функционал Π_0 , приравнявая к нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta u_0, \delta u_1, \delta u_2$ и считая материальные характеристики постоянными величинами, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{a}{3}(2\kappa + 4)u''_2 + (\kappa + 2)u''_0 + 2\kappa u'_1 = 0, \\ 2\kappa u'_0 + (4\kappa + 4)u_1 + \frac{a}{3}(4\kappa - 2)u'_2 - \frac{a^2}{2}u''_1 = 0, \\ \frac{a^2}{2}(\kappa + 2)u''_2 + \frac{a}{3}(4\kappa - 2)u'_1 + \frac{a}{3}(2\kappa + 4)u''_0 - u_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{2a}{3}(\kappa + 2)u'_2|_{z=h} + (\kappa + 2)u'_0|_{z=h} + 2\kappa u_1|_{z=h} = \frac{2P_0}{a^2\mu}, \\ \frac{3a}{4}u'_1|_h + u_2|_h = 0, \\ \frac{3a}{4}(\kappa + 2)u'_2|_{z=h} + (\kappa + 2)u'_0|_{z=h} + 2\kappa u_1|_{z=h} = \frac{3P_2}{a^3\mu}, \\ u_i|_{z=0} = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\kappa = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$, ν — коэффициент Пуассона.

При постоянных характеристиках возможно построить общее решение краевой задачи (4), (5).

2. Общий вид решения краевой задачи

Решение системы (4) будем искать в виде

$$u_i = A_i e^{az}, \quad i = \overline{0, 2},$$

что приводит к линейной системе относительно A_i :

$$\begin{cases} (\varkappa + 2)q^2 A_0 + 2\varkappa q A_1 + \frac{a}{3}(2\varkappa + 4)q^2 A_2 = 0, \\ 2\varkappa q A_0 + \left((4\varkappa + 4) - \frac{a^2}{2}q^2 \right) A_1 + \frac{a}{3}(4\varkappa - 2)q A_2 = 0, \\ \frac{a}{3}(2\varkappa + 4)q^2 A_0 + \frac{a}{3}(4\varkappa - 2)q A_1 + \left(\frac{a^2}{2}(\varkappa + 2)q^2 - 1 \right) A_2 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что нетривиальное её решение существует, когда определитель системы равен нулю, откуда получим бикубическое уравнение следующего вида:

$$q^2 \left((\varkappa^2 + 4\varkappa + 4)a^4 q^4 - (24\varkappa^2 + 66\varkappa + 36)a^2 q^2 + 432\varkappa + 288 \right) = 0. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что (6) имеет кратный нулевой корень $q_{1,2} = 0$ и две пары корней $q_{3,4} = \pm\tau_1$, $q_{5,6} = \pm\tau_2$, где

$$\tau_1 = \frac{(3d_3(d_2 + d_1^{1/2}))^{1/2}}{d_3 a}, \quad \tau_2 = \frac{(3d_3(d_2 - d_1^{1/2}))^{1/2}}{d_3 a},$$

$$d_1 = 16\varkappa^2 - 24\varkappa - 23, \quad d_2 = 4\varkappa + 3, \quad d_3 = \varkappa + 2.$$

Отметим, что эти корни могут быть как вещественными при $d_1 > 0$, так и комплексными при $d_1 < 0$, что определяется параметром \varkappa .

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + \alpha_0 C_2 z + \alpha_1 (C_3 e^{-\tau_1 z} - C_4 e^{\tau_1 z}) + \alpha_2 (C_5 e^{-\tau_2 z} - C_6 e^{\tau_2 z}), \\ u_1 = C_2 + C_3 e^{-\tau_1 z} + C_4 e^{\tau_1 z} + C_5 e^{-\tau_2 z} + C_6 e^{\tau_2 z}, \\ u_2 = \beta_1 (C_3 e^{-\tau_1 z} - C_4 e^{\tau_1 z}) + \beta_2 (C_5 e^{-\tau_2 z} - C_6 e^{\tau_2 z}), \end{cases}$$

где используются обозначения

$$\alpha_0 = -\frac{2(\varkappa + 1)}{\varkappa}, \quad (7)$$

$$\alpha_i = -\frac{(a^2 \tau_i^2 (\varkappa + 2) - 28\varkappa - 16)}{2\tau_i (\varkappa + 2)}, \quad \beta_i = \frac{3(a^2 \tau_i^2 (\varkappa + 2) - 24\varkappa - 16)}{4a\tau_i (\varkappa + 2)}, \quad i = 1, 2.$$

Постоянные C_j определяются из удовлетворения граничным условиям (5), здесь не приводятся в силу громоздкости.

3. Аналитическое решение для модели первого порядка

Отметим, что дальнейшее исследование полученных аналитических зависимостей может быть осуществлено лишь численно, поэтому обратимся к более простой модели первого порядка (3). Перейдём к безразмерным координатам $\xi = \frac{z}{h} : \xi \in [0, 1]$ и $\eta = \frac{r}{h} : \eta \in [0, \varepsilon]$. Обезразмерим нагрузку, введя $p(r) = p_0 \tilde{p}(\eta)$.

Введём обозначение погранслошной функции

$$\zeta(z) = \exp(-\gamma \xi), \quad \gamma = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(\varkappa + 2)(3\varkappa + 2)}}{\varepsilon(\varkappa + 2)}.$$

Тогда решение соответствующей краевой задачи можно представить в виде

$$\begin{cases} \tilde{u}_0 = C_1 + \alpha_0 C_2 \xi + \alpha_1 (C_3 \zeta(\xi) - C_4 \zeta(-\xi)), \\ \tilde{u}_1 = C_2 + C_3 \zeta(\xi) + C_4 \zeta(-\xi). \end{cases}$$



Отметим, что α_0 определяется формулой (7), а $\alpha_1 = \frac{2\pi}{\gamma(\pi+2)}$.

Выражения для коэффициентов C_j имеют вид

$$C_1 = -\frac{4k\nu^2\tilde{P}_0(\zeta(1) - \zeta(-1))}{\varepsilon^2\gamma(\nu - 1)(\zeta(1) + \zeta(-1))}, \quad C_2 = -\frac{2k\tilde{P}_0\nu}{\varepsilon^2}, \quad C_3 = \frac{2k\zeta(-1)\tilde{P}_0\nu}{\varepsilon^2(\zeta(1) + \zeta(-1))},$$

$$C_4 = \frac{2k\zeta(1)\tilde{P}_0\nu}{\varepsilon^2(\zeta(1) + \zeta(-1))}, \quad k = \frac{p_0}{E}.$$

4. Переменные параметры Ламе

Рассмотрим исходную задачу, предварительно обезразмерив её, считая параметры Ламе функциями осевой координаты: $\lambda(z) = E_0\tilde{\lambda}(\xi)$, $\mu(z) = E_0\tilde{\mu}(\xi)$.

Осуществив операцию варьирования и приравняв к нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta\tilde{u}_0$, $\delta\tilde{u}_1$, $\delta\tilde{u}_2$, уравнения, аналогичные (4), (5), имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{2\varepsilon}{3}((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2)' + ((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0)' + 2(\tilde{\lambda}\tilde{u}'_1)' = 0, \\ -\frac{\varepsilon^2}{2}(\tilde{\mu}\tilde{u}'_1)' + \frac{2\varepsilon}{3}(2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_2 - (\tilde{\mu}\tilde{u}'_2)') + 4(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\tilde{u}_1 + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_0 = 0, \\ \frac{\varepsilon^2}{2}((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2)' + \frac{2\varepsilon}{3}(2(\tilde{\lambda}\tilde{u}'_1)' - \tilde{\mu}\tilde{u}'_1 + ((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0)') - \tilde{\mu}\tilde{u}_2 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{2\varepsilon}{3}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2|_{\xi=1} + (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0|_{\xi=1} + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_1|_{\xi=1} = \frac{2\tilde{P}_0k}{\varepsilon^2}, \\ \frac{3\varepsilon}{4}\tilde{\mu}\tilde{u}'_1|_{\xi=1} + \tilde{\mu}\tilde{u}_2|_{\xi=1} = 0, \\ \frac{3\varepsilon}{4}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_2|_{\xi=1} + (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0|_{\xi=1} + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_1|_{\xi=1} = \frac{3\tilde{P}_2k}{\varepsilon^3}, \\ \tilde{u}_i(0) = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \end{cases} \quad (9)$$

5. Анализ

Для сравнения полученных результатов приведём графическую иллюстрацию решений краевых задач (4), (5) и (8), (9), а также сравним их с результатами, полученными посредством КЭ пакета FlexPDE.

Особое внимание уделено перемещению $u_r = \eta h \cdot \tilde{u}_1$ на боковой границе образца $\eta = \varepsilon$ с целью изучения погранслоя вблизи торцевой заделки. Проведена серия вычислительных экспериментов по расчёту полей смещений на боковой поверхности цилиндра для различных законов изменения $\lambda = E_0\tilde{\lambda}(\xi)$ и $\mu = E_0\tilde{\mu}(\xi)$.

В качестве примера на рис. 2 представлены смещения для различных моделей.

Из них видно, что модель второго порядка даёт лучшее приближение по отношению к конечноэлементной модели, чем модель первого порядка.

Также нетрудно заметить, что для описания перемещений при постоянных значениях параметров Ламе на участке $\xi \in [0.4, 1]$ можно использовать известную стержневую модель.

Для использования стержневой модели нормативная документация рекомендует выдерживать соотношение $\varepsilon \leq \frac{1}{5}$ ¹. С целью оценки области применения предложенных моделей были проведены расчёты для случая $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Результаты показали, что с ростом параметра ε зона влияния погранслоя увеличивается, но несмотря на это, модели первого и второго порядков достаточно точно отражают структуру перемещений и могут быть использованы при анализе обратной задачи, реконструкции физических характеристик материала цилиндра.

¹ГОСТ 1497-84. Металлы. Методы испытания на растяжение. Введен 1986-01-01. Москва : Стандартинформ, 2005. 35 с.

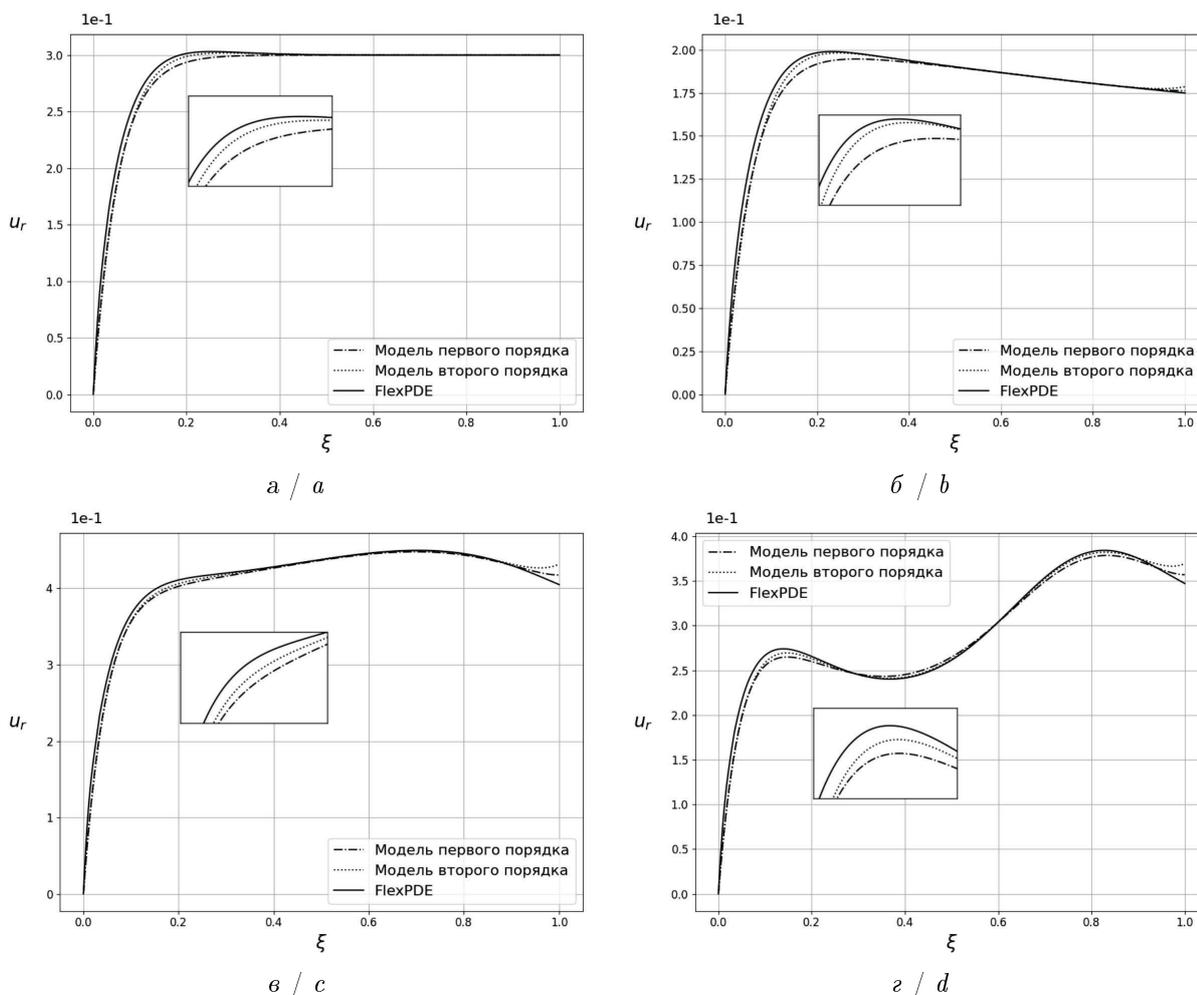


Рис. 2. Перемещения $u_r|_{\eta=\varepsilon}$ при $\varepsilon = \frac{1}{5}$: $a - \tilde{E}(\xi) = 1, \tilde{\nu}(\xi) = 0.3$; $b - \tilde{E}(\xi) = 1 + \xi^2, \tilde{\nu}(\xi) = 0.2 + 0.15\xi^2$;
 $v - \tilde{E}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}, \tilde{\nu}(\xi) = 0.4 - 0.2\xi^2$; $z - \tilde{E}(\xi) = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi), \tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$
 Fig. 2. Displacements $u_r|_{\eta=\varepsilon}$ for $\varepsilon = \frac{1}{5}$: $a - \tilde{E}(\xi) = 1, \tilde{\nu}(\xi) = 0.3$; $b - \tilde{E}(\xi) = 1 + \xi^2, \tilde{\nu}(\xi) = 0.2 + 0.15\xi^2$;
 $c - \tilde{E}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}, \tilde{\nu}(\xi) = 0.4 - 0.2\xi^2$; $d - \tilde{E}(\xi) = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi), \tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$

6. Обратная задача

Пусть известны значения перемещений $u_r(\xi), u_z(\xi)$ для набора точек на боковой поверхности образца. Для восстановления упругих свойств материала обратимся к модели первого порядка, для которой система дифференциальных уравнений с граничными условиями примет следующий вид:

$$\begin{cases} \left((\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0 \right)' + 2(\tilde{\lambda}\tilde{u}_1)' = 0, \\ -\frac{\varepsilon^2}{2}(\tilde{\mu}\tilde{u}'_1)' + 4(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\tilde{u}_1 + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}'_0 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\tilde{u}'_0|_{\xi=1} + 2\tilde{\lambda}\tilde{u}_1|_{\xi=1} = \frac{2\tilde{P}_0 k}{\varepsilon^2}, \\ \tilde{\mu}\tilde{u}'_1|_{\xi=1} = 0, \\ \tilde{u}_i(0) = 0, \quad i = 0, 1. \end{cases} \quad (11)$$

Анализ задачи (10), (11) свидетельствует о том, что перемещения пропорциональны \tilde{P}_0 ,



поэтому положим в дальнейших расчётах $\tilde{P}_0 = 1$. Из краевой задачи (10), (11) получим следующие соотношения, связывающие искомые параметры Ламе:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(\xi) &= \alpha_1(\xi)\tilde{\mu}(\xi) + \beta_1(\xi), \\ \tilde{\mu}'(\xi) &= \alpha_2(\xi)\tilde{\mu}(\xi) + \beta_2(\xi),\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{2\tilde{u}'_0}{\tilde{u}'_0 + 2\tilde{u}_1}, \quad \beta_1 = \frac{2k}{\varepsilon^2(\tilde{u}'_0 + 2\tilde{u}_1)}, \\ \alpha_2 &= \frac{-\varepsilon^2\tilde{u}''_1 + 8\tilde{u}_1(\alpha_1 + 1) + 4\alpha_1\tilde{u}'_0}{\varepsilon^2\tilde{u}'_1}, \quad \beta_2 = \frac{4\beta_1(2\tilde{u}_1 + \tilde{u}'_0)}{\varepsilon^2\tilde{u}'_1}.\end{aligned}$$

Ввиду отсутствия граничного условия для μ исходная задача восстановления является некорректно поставленной [7]. Для преодоления некорректности будем отыскивать μ в параметрической форме [8, 9]:

$$\tilde{\mu}(\xi) = \exp(\Phi(\xi)\mathbf{c}),\tag{13}$$

$\Phi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_N(\xi))^T$ — вектор линейно независимых функций, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$ — вектор неизвестных коэффициентов.

Введём равномерную сетку $\{\xi_j\}_{j=1}^M$ и потребуем выполнения (13) в узлах ξ_j , что приводит к нелинейной системе относительно \mathbf{c} ($M > N$). При численной реализации система составляется в дискретных узлах ξ_j , выражения невязки $r_j(\mathbf{c})$ для которых примут следующий вид:

$$r_j(\mathbf{c}) = \exp(\Phi(\xi_j)\mathbf{c})(\Phi'(\xi_j)\mathbf{c} - \alpha_2(\xi_j)) - \beta_2(\xi_j), \quad j = \overline{1, M},\tag{14}$$

$\Phi'(\xi) = (\varphi'_1(\xi), \dots, \varphi'_N(\xi))^T$ — вектор производных базисных функций. Для предотвращения численного переполнения при экспоненциальной аппроксимации базисные функции и их производные нормируются.

Для построения решения (12) воспользуемся методом регуляризации А. Н. Тихонова [10], который базируется на минимизации функционала, с добавлением корректирующих слагаемых [11]:

$$\min_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}), \quad J(\mathbf{c}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{c})\|_2^2 + \gamma_{reg}\|L\mathbf{c}\|_2^2 + \gamma_{diag}\|\mathbf{c}\|_2^2,\tag{15}$$

$\mathbf{r}(\mathbf{c}) = (r_1(\mathbf{c}), \dots, r_M(\mathbf{c}))^T$ — вектор невязок, γ_{reg} — параметр регуляризации, определяемый с помощью метода L -кривой [12–14], γ_{diag} — коэффициент стабилизации, отвечающий за предотвращение вырождения системы и подавление слишком больших значений c_i , L — регуляризатор второго порядка. Нормальные уравнения для (15) были получены с использованием итеративного метода Гаусса–Ньютона:

$$(J_r^T J_r + \gamma_{reg}L^T L + \gamma_{diag}I)\Delta\mathbf{c} = -J_r^T \mathbf{r}(\mathbf{c}) - \gamma_{reg}L^T L\mathbf{c} - \gamma_{diag}I\mathbf{c},$$

где

$$(J_r)_{jk} = \tilde{\mu}(\xi_j)\varphi'_k(\xi_j) + \tilde{\mu}(\xi_j)(\Phi'(\xi_j)\mathbf{c} - \alpha_2(\xi_j))\varphi_k(\xi_j),$$

I — единичная матрица. Добавление диагонального члена $\gamma_{diag}I$ эквивалентно регуляризации нулевого порядка и обеспечивает численную устойчивость решения.

Для оценки качества реконструкции был проведён ряд численных испытаний для функционально-градиентных материалов при различном M . В качестве базисных функций были выбраны шляпные функции, B -сплайны и полиномы Лежандра. Из анализа данных рис. 3 следует, что при приближении к защемлённой границе наблюдается рост погрешности восстановленных параметров. Отметим, что B -сплайны с P -сплайн штрафом второго порядка позволяют получить хорошие результаты реконструкции.

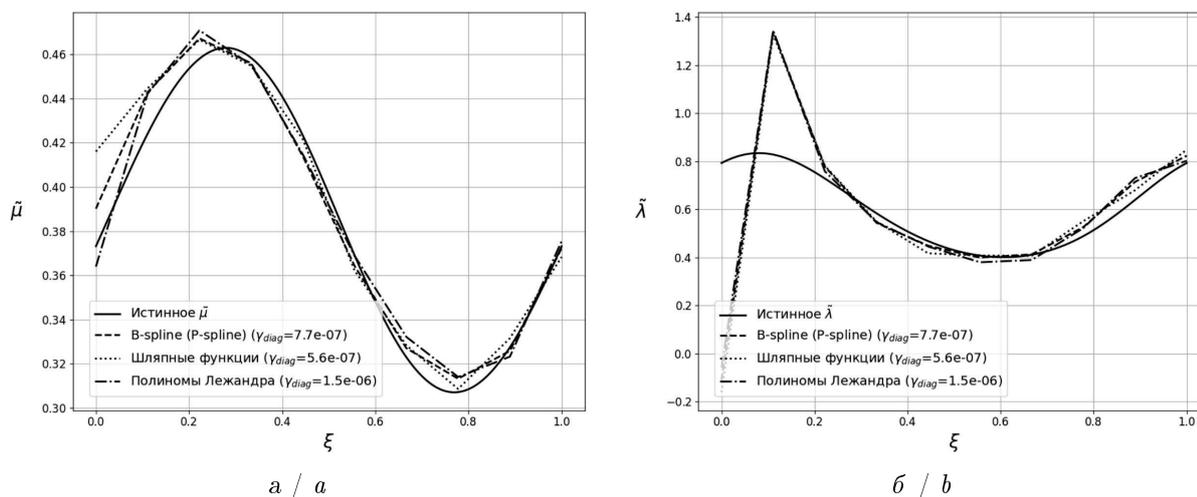


Рис. 3. Реконструкция безразмерных параметров Ламе для случая $\tilde{E} = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi)$, $\tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$ при $M = 10$: a — параметр $\tilde{\mu}$; b — параметр $\tilde{\lambda}$

Fig. 3. Reconstruction of the dimensionless Lamé parameters for the case $\tilde{E} = 1 + 0.2 \sin(2\pi\xi)$, $\tilde{\nu}(\xi) = 0.3 + 0.04 \cos(2\pi\xi)$ at $M = 10$: a is parameter $\tilde{\mu}$; b is parameter $\tilde{\lambda}$

Заключение

Рассмотрена задача о сжатии цилиндра с торцевым защемлением, где параметры Ламе либо постоянные, либо являются гладкими функциями осевой координаты. На основе гипотез относительно полей перемещений построены две приближённые модели: первого и второго порядка. Оценена их эффективность на основе сравнения с КЭ-расчётами. Представлена схема решения обратной задачи. Проведены вычислительные эксперименты.

Список литературы

1. *Filon L. N. G.* On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. Vol. 198. P. 147–233. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1902.0005>
2. *Джанелидзе Г. Ю., Прокопов В. К.* Метод однородных решений в математической теории упругости // Труды IV Всесоюзного математического съезда. Ленинград : Наука, 1964. Т. 2. С. 551–557.
3. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Н.* Теория упругости. Москва : Наука, 1975. 576 с.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближённые методы высшего анализа. Москва : ГИТТЛ, 1949. 696 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. Москва : Мир, 1975. 872 с.
7. *Морозов В. А.* Методы регуляризации неустойчивых задач. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1987. 216 с.
8. *Hyvönen N., Mustonen L.* Generalized linearization techniques in electrical impedance tomography // Numerische Mathematik. 2018. Vol. 140, iss. 1. P. 95–120. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0959-1>
9. *Jin B., Maass P.* An analysis of electrical impedance tomography with applications to Tikhonov regularization // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2012. Vol. 18, iss. 4. P. 1027–1048. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv/2011193>
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1979. 288 с.
11. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996. 321 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8>
12. *Hansen P. C.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // SIAM Review. 1992. Vol. 34, iss. 4. P. 561–580. DOI: <https://doi.org/10.1137/1034115>



13. Hansen P. C., O’Leary D. P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 1993. Vol. 14, iss. 6. P. 1487–1503. DOI: <https://doi.org/10.1137/0914086>
14. Hansen P. C. *Discrete inverse problems: Insight and algorithms*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 213 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718836>

References

1. Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1902, vol. 198, pp. 147–233. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1902.0005>
2. Dzhanelidze G. Yu., Prokopov V. K. The method of homogeneous solutions in mathematical theory of elasticity. In: *Trudy IV Vsesoyuznogo matematicheskogo s’ezda* [Proceedings of the 4th All-Union Mathematical Congress]. Leningrad, Nauka, 1964, vol. 2, pp. 551–557 (in Russian).
3. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1975. 576 p. (in Russian).
4. Mikhlín S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1970. 512 p. (in Russian).
5. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Moscow, GITTL, 1949. 696 p. (in Russian).
6. Novatskii V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
7. Morozov V. A. *Metody regulyaryzatsii neustoychivyykh zadach* [Methods for regularizing unstable problems]. Moscow, Moscow University Press, 1987. 216 p. (in Russian).
8. Hyvönen N., Mustonen L. Generalized linearization techniques in electrical impedance tomography. *Numerische Mathematik*, 2018, vol. 140, iss. 1, pp. 95–120. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0959-1>
9. Jin B., Maass P. An analysis of electrical impedance tomography with applications to Tikhonov regularization. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2012, vol. 18, iss. 4, pp. 1027–1048. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv/2011193>
10. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnyykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1979. 288 p. (in Russian).
11. Engl H. W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996. 321 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8>
12. Hansen P. C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, 1992, vol. 34, iss. 4, pp. 561–580. DOI: <https://doi.org/10.1137/1034115>
13. Hansen P. C., O’Leary D. P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1993, vol. 14, iss. 6, pp. 1487–1503. DOI: <https://doi.org/10.1137/0914086>
14. Hansen P. C. *Discrete inverse problems: Insight and algorithms*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 213 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718836>

Поступила в редакцию / Received 25.11.2025

Принята к публикации / Accepted 18.12.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 56–67

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 56–67

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-56-67>

EDN: <https://elibrary.ru/MLCWLX>

Научная статья

УДК 617.713:539.3-004.942

Особенности использования алгоритмов оптимизации для персонализации геометрических и биомеханических параметров модели роговицы

Лэ Ван Хоанг

Волгоградский государственный технический университет, Россия, 400005, г. Волгоград, пр. Ленина, д. 28

Лэ Ван Хоанг, аспирант кафедры сопротивления материалов, hoangle.vol@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>, SPIN: 7569-2232, AuthorID: 1194083

Аннотация. Рассмотрены особенности персонификации конечно-элементной модели роговицы для диагностики ее биомеханических свойств при кератоконусе и прогнозирования результатов лечения. Ключевая проблема существующих моделей — использование усредненных параметров, не учитывающих индивидуальные особенности пациента и сложную структуру зон сниженной жесткости при кератоконусе. На основе клинических данных 256 глаз, полученных с помощью топографа Pentacam AXL и тонометра Corvis ST, разработана методика построения персонализированных 3D-моделей в COMSOL Multiphysics. Для описания поведения роговицы использована гиперупругая модель материала Yeoh, показавшая наименьшую погрешность при моделировании. При решении различных задач применены специализированные алгоритмы оптимизации: метод внутренней точки (ИРОРТ) — для определения корректной недеформированной конфигурации роговицы под внутриглазным давлением; алгоритм Левенберга–Марквардта — для идентификации параметров материала здоровой ткани по данным динамической пневмотонометрии; алгоритм Нелдера–Мида — для определения характеристик локальных областей сниженной жесткости, моделирующих кератоконус, по данным кератотопографии. Разработанная модель обеспечивает высокую точность персонализации биомеханических свойств и перспективна для планирования индивидуализированного лечения кератоконуса: среднеквадратичное отклонение геометрических параметров менее 0.1%, коэффициент корреляции расчетных и экспериментальных параметров деформации 0.94.

Ключевые слова: кератоконус, роговица, пациент-ориентированная модель, метод конечных элементов, гиперупругость, алгоритмы оптимизации, метод внутренней точки, алгоритм Левенберга–Марквардта, алгоритм Нелдера–Мида

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

Для цитирования: Лэ Ван Хоанг. Особенности использования алгоритмов оптимизации для персонализации геометрических и биомеханических параметров модели роговицы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 56–67. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-56-67>, EDN: MLCWLX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Features of using optimization algorithms for personalizing the geometric and biomechanical parameters of the cornea model

Le Van Hoang

Volgograd State Technical University, 28 Lenin Ave., Volgograd 400005, Russia

Le Van Hoang, hoangle.vol@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>, SPIN: 7569-2232, AuthorID: 1194083

Abstract. This study explores the personalization of a 3D finite element model of the cornea for diagnosing its biomechanical properties in keratoconus and predicting treatment outcomes. A key limitation of existing models is their reliance on averaged parameters, which fail to account for individual patient variations and the presence/distribution of areas of reduced stiffness in keratoconus. Using clinical data from 256 eyes obtained with Pentacam AXL and Corvis ST, a methodology for building personalized 3D models in COMSOL Multiphysics was developed. The hyperelastic Yeoh material model, demonstrating the lowest error, was used. Specialized optimization algorithms were applied for different tasks. The Interior Point Optimizer (IPOPT) determined the undeformed configuration under intraocular pressure. The Levenberg-Marquardt algorithm identified the material parameters of healthy tissue based on Corvis ST dynamic tonometry data. Finally, the Nelder-Mead algorithm characterized local areas of reduced stiffness using corneal topography data. The model provides high accuracy, with root mean square deviation between modeled and measured geometric parameters below 0.1% and a correlation coefficient of 0.94 between modeled and measured deformation parameters.

Keywords: keratoconus, cornea, patient-specific model, finite element method (FEM), hyperelasticity, optimization algorithms, Interior Point Optimizer, Levenberg-Marquardt algorithm, Nelder-Mead algorithm

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

For citation: Le Van Hoang. Features of using optimization algorithms for personalizing the geometric and biomechanical parameters of the cornea model. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 56–67 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-56-67>, EDN: MLCWLX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Кератоконус — прогрессирующее невоспалительное заболевание роговицы, характеризующееся нарушением структуры коллагеновых фибрилл, локальным истончением и коническим выпячиванием роговицы. Оно преимущественно поражает молодых и людей среднего возраста, вызывая ухудшение зрения из-за неправильного астигматизма и высокой близорукости [1–3].

Точная диагностика биомеханических свойств роговицы при кератоконусе является критически важной задачей для понимания патогенеза заболевания и оценки его прогрессирования. Современные методы диагностики, включающие топографию роговицы с помощью Шаймпфлюг-анализаторов и бесконтактную тонометрию, обеспечивают высокоточные данные о геометрии роговицы и ее деформационных характеристиках [4, 5].

Применение компьютерного моделирования позволяет количественно оценивать биомеханические параметры роговицы на основе клинических данных. Исследования в области биомеханического моделирования роговицы делятся на несколько направлений, где роговица представляется как гиперупругая изотропная или анизотропная оболочка с зонами различной жесткости [6–9]. Например, в работах А. Пандольфи [9] анизотропные свойства роговицы описаны с использованием модифицированной модели Хольцапфеля, а Бао и др. [7]



использовали модель Огдена для описания механического поведения стромы роговицы и склеры, рассматривая их как гиперэластичный, изотропный и практически несжимаемый материал с различными характеристиками.

Однако существующие модели [1–9] имеют ряд ограничений для клинического применения. Для повышения диагностической ценности моделей важно более точно учитывать индивидуальные вариации биомеханических свойств роговицы, особенно локальное снижение жесткости ткани на различных стадиях кератоконуса. Это позволит улучшить точность расчетной диагностики и прогнозирования послеоперационных результатов.

Цель работы заключается в разработке алгоритмов персонализации 3D-конечно-элементной модели роговицы для цифровой диагностики индивидуальных биомеханических свойств при кератоконусе и прогнозирования эффективности лечения на основе данных клинического обследования пациента.

1. Экспериментальные данные и задачи исследования

Экспериментальные данные исследования включали результаты комплексного клинического обследования 256 глаз, разделенных на четыре группы в зависимости от стадии заболевания. Контрольную группу составили 174 глаза здоровых пациентов с нормальной роговицей различной рефракции, группы с кератоконусом включали: I стадия — 16 глаз, II стадия — 20 глаз, III стадия — 46 глаз.

Для получения топографических и томографических данных использовался Шаймпфлюг-анализатор Pentacam AXL (OCULUS Optikgerate GmbH, Германия), сканирующий роговицу с разрешением свыше 19 000 точек, с регистрацией карт высот, пахиметрии, кривизны и элевации задней поверхности. Биомеханические параметры определялись тонометром Corvis ST, измеряющим деформацию роговицы под воздушным импульсом. Верификация моделей осуществлялась с помощью оптической когерентной томографии роговицы высокого разрешения. Для оценки точности модели было проведено исследование локальной адаптации сетки, включающее постепенное уточнение сетки в местах с наибольшими ошибками. Критерием достижения сеточной сходимости служила амплитуда перемещения роговицы менее чем на 1% при дальнейшем увеличении плотности сетки.

Для определения биомеханических и геометрических параметров роговицы при кератоконусе исследование разделено на два этапа: 1) создание персонализированной 3D-модели роговицы с учетом внутриглазного давления и воздушного импульса на бесконтактном тонометре для определения недеформированной конфигурации и граничных условий; 2) идентификация свойств материала роговицы, включая параметры гиперупругой модели для интактных участков и зон пониженной жесткости при кератоконусе. На каждом этапе разработаны алгоритмы многопараметрической оптимизации для минимизации отклонений между расчетными и экспериментальными кератотопографическими и биомеханическими данными.

2. Основные уравнения и граничные условия

Геометрическая модель роговицы формируется на основе топографических и томографических данных кератотопографа Pentacam AXL. Исходные данные включают координаты точек передней и задней поверхностей роговицы в виде двумерных массивов (примерно 9300 и 7300 точек соответственно) [10, 11]. Трехмерная модель создается в COMSOL Multiphysics с использованием линейной интерполяции экспериментальных данных, где граничные поверхности аппроксимируются по заданным высотным координатам. Для решения задач задаются уравнения квазистатического равновесия

$$\nabla \cdot (FS)^T + f_V = 0,$$

где ∇ — оператор набла; T — символ транспонирования; f_V — вектор объемных сил; S — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа; F — градиент деформации.



Материал роговицы считается гиперупругим, его закон деформирования задается соотношением функции плотности энергии упругой деформации W_s и второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа S [12]:

$$S = S_{\text{ext}} + \frac{\partial W_s}{\partial E}, \quad (1)$$

где S_{ext} — тензор внешних (дополнительных) напряжений; E — тензор деформации Грина – Лагранжа.

Функция W_s может учитывать соотношения, соответствующие различным механизмам деформирования материала, [13]:

$$W_s = W_{\text{iso}} + W_{\text{vol}}, \quad (2)$$

где W_s — плотность энергии упругой деформации; W_{iso} — изотропная часть удельной энергии упругой деформации; W_{vol} — энергия объемной упругой деформации.

Общая постановка рассматриваемых задач задается системой уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций в виде, приведенном в [10, 11], физическими соотношениями (1), (2), а также граничными условиями, заданными на соответствующих поверхностях Γ роговицы (рис. 1).

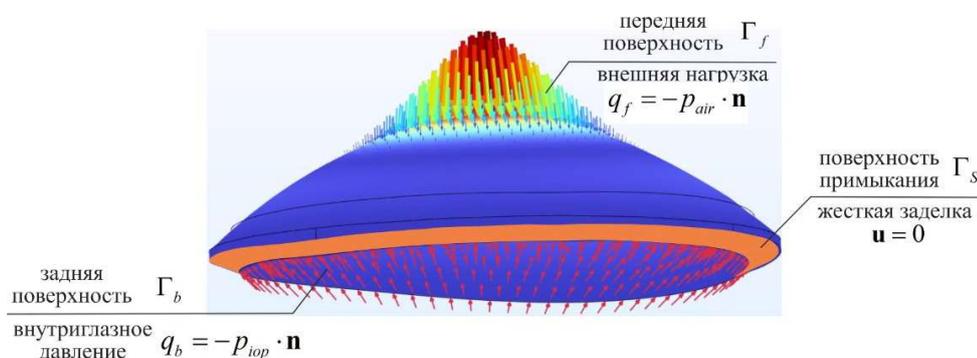


Рис. 1. Общий вид сечения геометрической модели роговицы, схема нагружения и закрепления граничных поверхностей при обследовании на приборе CORVIS (цвет онлайн)

Fig. 1. General view of the cross-section of the corneal geometric model, loading and boundary surface fixation scheme during examination with the CORVIS (color online)

1. Отсутствие перемещений на поверхностях Γ_s , примыкающей к склере:

$$u = 0, \quad \Gamma \in \Gamma_s. \quad (3)$$

2. Действие на задней поверхности роговицы поверхностно распределенной нагрузки интенсивностью q_b (вдоль составляющих вектора нормали n):

$$S \cdot n = q_b, \quad \Gamma \in \Gamma_b. \quad (4)$$

3. Действие на передней поверхности роговицы поверхностно распределенной нагрузки интенсивностью q_f

$$S \cdot n = q_f, \quad \Gamma \in \Gamma_f. \quad (5)$$

3. Алгоритмы и методы решения задачи

3.1. Алгоритм построения начальной конфигурации модели роговицы

Экспериментальная геометрия роговицы, полученная на топографе Pentacam in vivo, отражает ее деформированное состояние под воздействием внутриглазного давления (ВГД).

Прямое использование такой конфигурации некорректно, поскольку приложение ВГД вызовет смещение точек от экспериментальных позиций. Исключение ВГД для сохранения экспериментальной геометрии устраняет соответствующие напряжения, снижая точность анализа.

В программном комплексе COMSOL Multiphysics для решения задачи используется модуль оптимизации геометрии передней и задней поверхностей роговицы. Критерий оптимизации заключается в соответствии поверхностей роговицы при воздействии ВГД экспериментальным данным координат с прибора топографии Pentacam. Тестовые расчеты показали, что наименьшая погрешность для различных алгоритмов оптимизации трехмерной модели [14] достигается при использовании метода внутренней точки (IPOPT – Interior Point Optimizer).

Согласно алгоритму исходная геометрия, полученная из данных кератотопографии пациента, итерационно корректируется в недеформированном состоянии, чтобы при воздействии ВГД деформированная конфигурация роговицы соответствовала экспериментальным данным с заданной точностью ε . Целевая функция при этом определяется следующим образом:

$$F_x(y, z) = \int_{\Gamma_b} |X_s(y, z) - X_p(y, z)| dS + \int_{\Gamma_f} |X_s(y, z) - X_p(y, z)| dS \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $X_s(y, z)$ – экспериментальные высоты поверхности роговицы при топографии Pentacam; $X_p(y, z)$ – соответствующие расчетные высоты поверхности роговицы.

Процедура идентификации начального состояния роговицы представлена на рис. 2.

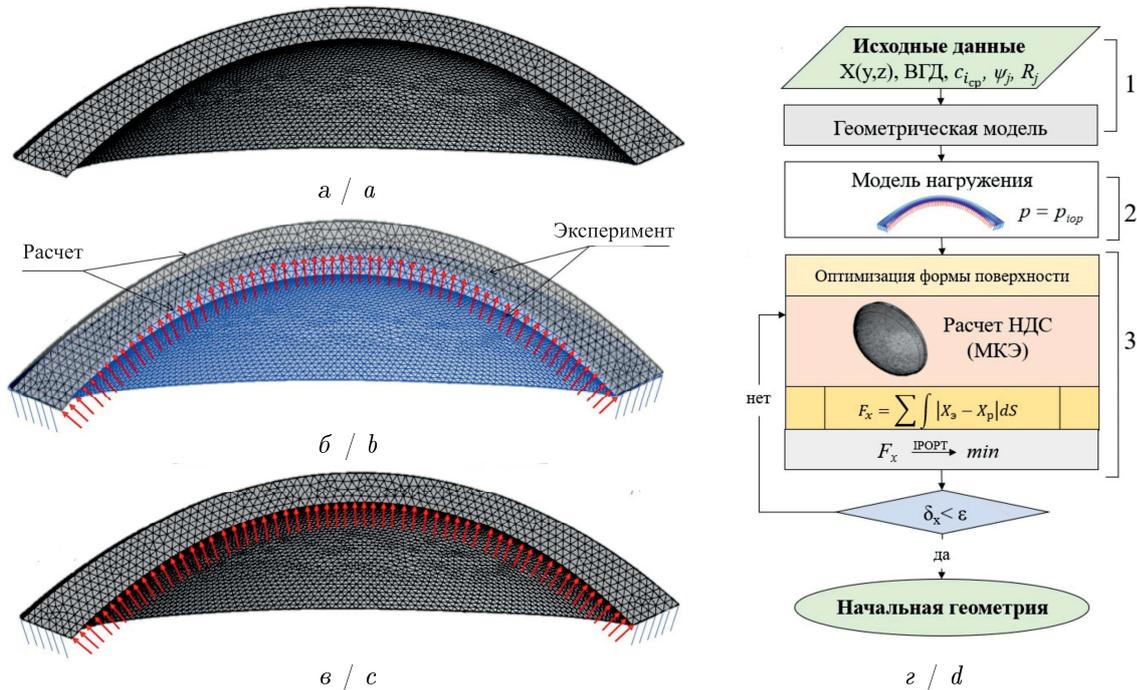


Рис. 2. Нахождение исходной формы роговицы: *a* – модель роговицы без давления; *b* – модель роговицы под действием ВГД с погрешностью $\delta > 0.1\%$; *в* – модель роговицы под действием ВГД с погрешностью $\delta < 0.1\%$; *г* – схема определения начального состояния роговицы (цвет онлайн)

Fig. 2. Determination of the initial corneal shape: *a* is the cornea model without pressure; *b* is the cornea model under the influence of IOP with an error $\delta > 0.1\%$; *c* is the cornea model under the influence of IOP with an error $\delta < 0.1\%$; *d* is the scheme for determining the initial state of the cornea (color online)



Она включает следующие шаги:

1) на основе данных кератотопографии (Pentacam AXL) создается индивидуальная 3D-модель роговицы (рис. 2, а) с заданием геометрических параметров (шаг 1, рис. 2, з): $c_i = c_{i_{cp}}, \psi_j = R_j = 0$;

2) задается воздействие ВГД на заднюю поверхность Γ_b роговицы по (4), определяя форму под ВГД (шаг 2, рис. 2, д), которая может не совпадать с экспериментальными данными (рис. 2, б);

3) проводится оптимизация формы (шаг 3, рис. 2, з) методом внутренней точки по (7) с ограничениями $D_{\max} = 0.2$ мм, $R_{\min} = 0.02$ мм.

Начальная геометрия считается найденной, когда суммарное отклонение (6) расчетных и экспериментальных координат достигает $\delta_x < \varepsilon = 0.1\%$ (рис. 2, в). Напряжения обнуляются, модель нагружается ВГД для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и обновления конфигурации поверхностей роговицы.

3.2. Алгоритм определения биомеханических свойств материала роговицы

Выбор модели гиперупругости (2) производится по результатам сопоставления расчетной амплитуды перемещения роговицы под действием пневматического импульса и экспериментальных данных обследования пациентов на пневмотонометре.

По результатам исследования в качестве базовой принята модель Yeoh, в рамках которой составляющие функции W_s в (2) могут быть записаны в виде

$$W_s = (1 - \psi_{kc}) \cdot [c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3] + \frac{1}{2}\kappa(J_{el} - 1)^2, \quad (7)$$

где c_1, c_2, c_3 — эмпирические параметры модели; \bar{I}_1 — первый инвариант (след) тензора \bar{C} ; \bar{C} — изохорный упругий правый тензор деформации Коши–Грина; J_{el} — упругая объемная деформация; κ — модуль объемной упругости; ψ_{kc} — суммарное снижение жесткости в зоне кератоконуса.

Персонализация параметров (c_i) модели материала (7) проводится на основе согласования расчетных данных о деформациях роговицы и клинических данных обследования пациента на пневмотонометре типа Corvis ST. Решается задача минимизации методом наименьших квадратов целевой функции, представляющей собой сумму квадратов отклонений расчетных значений от экспериментальных для амплитуды и скорости смещения в апексе:

$$F_{x_A}(c_i) = \sum [DA_s(t) - DA_p(t, c_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

где DA — перемещения точек роговицы при бесконтактной тонометрии во времени.

Минимизация выполняется при помощи алгоритма Левенберга–Марквардта для всех временных шагов путем поиска коэффициентов, обеспечивающих наилучшее соответствие расчетных кривых экспериментальным данным.

Для моделирования кератоконуса используется система локальных областей, для которых в выражении (7) задаются коэффициенты снижения жесткости материала (рис. 3) [11]:

$$\psi_{kc} = \sum \psi_j \cdot \exp \left[\theta_{j_x} x^2 / a_{j_x}^2 + \theta_{j_y} y^2 / a_{j_y}^2 + \theta_{j_z} z^2 / a_{j_z}^2 \right], \quad (9)$$

где x_j, y_j, z_j — локальная система координат, связанная с центром j -й зоны пониженной жесткости — точкой S_j ; ψ_j — максимальное относительное снижение жесткости в точке S_j ; a_j, b_j, c_j — параметры, устанавливающие градиент изменения свойств по рассматриваемой области вдоль соответствующей оси.

Приняты следующие значения коэффициентов в (9): $\theta_{j_x} = \theta_{j_y} = \theta_{j_z} = -0.693$; $a_{j_x} = a_{j_y} = a_{j_z} = R_j$, что соответствует 50%-му снижению значений функции ψ_j на расстоянии R_j от точки S_j .



Центры областей пониженной жесткости располагаются в пяти опорных точках: апексе (A_{pex}), минимальной пахиметрии (P_{min}), наибольшей задней элевации (e_{max}), максимальной интенсивности деформаций (ε_{max}), максимальной кривизны передней поверхности (K_{max}), а также в 14 промежуточных — равноудаленных от опорных (всего 19 точек S_j). За счет этого создается реалистичное распределение свойств в патологически измененной роговице (рис. 3, в).

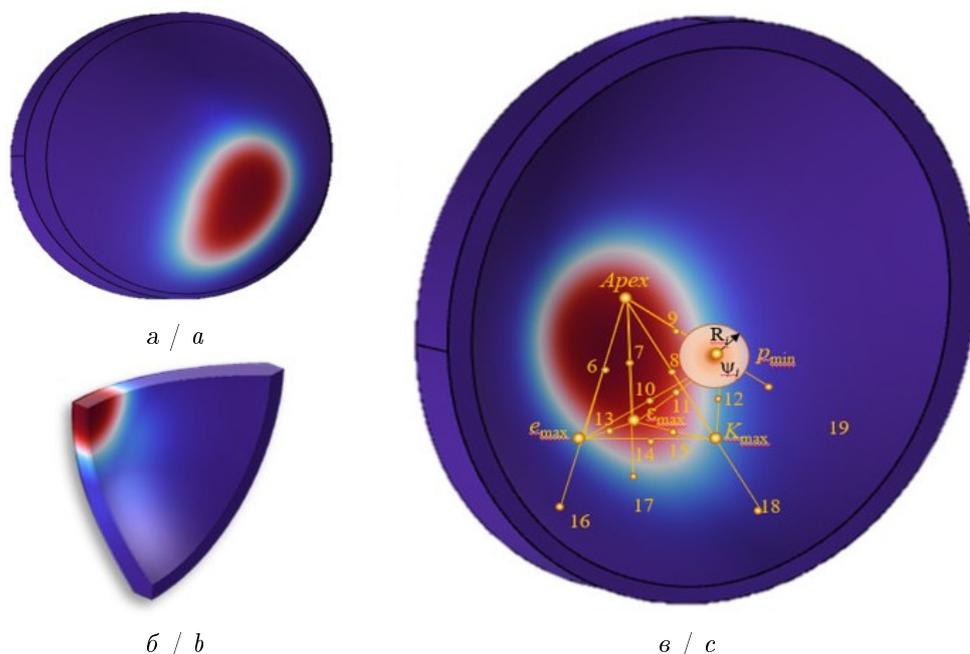


Рис. 3. Многоочаговая модель зоны пониженной жесткости в области кератоконуса в объеме роговицы по ее передней (а), задней (в) поверхностям и в сечениях по толщине (б) (цвет онлайн)

Fig. 3. The multifocal model of the zone of reduced stiffness in the area of keratoconus in the volume of the cornea along its anterior (a), posterior (c) surfaces and in the sections along the thickness (b) (color online)

Для определения параметров зоны кератоконуса (максимальное снижение жесткости и эффективный радиус R_j) на основе данных тангенциальной кривизны передней поверхности роговицы был выбран алгоритм Нелдера – Мида. Это решение основано на сравнительном анализе (таблица), показавшем, что данный метод обеспечивает наименьшую погрешность в определении для условно здоровых роговиц (0.021 ± 0.026) и роговиц с кератоконусом (I стадия — 0.077 ± 0.028 ; II стадия — 0.186 ± 0.047 ; III стадия — 0.394 ± 0.01) по сравнению с альтернативными алгоритмами оптимизации (COBYLA, BOBYQA, ММА и IPOPT).

Погрешность алгоритмов оптимизации параметров зоны пониженной жесткости
Table. The error of the algorithms for optimizing the parameters of the reduced stiffness zone

Пац.	COBYLA		BOBYQA		Нелдер-Мид	
	$\psi_{max}^{cp} \pm \Delta\psi$	$R_k^{cp} \pm \Delta R_k$	$\psi_{max}^{cp} \pm \Delta\psi$	$R_k^{cp} \pm \Delta R_k$	$\psi_{max}^{cp} \pm \Delta\psi$	$R_k^{cp} \pm \Delta R_k$
Здор.	0.147 ± 0.075	3.31 ± 0.46	0.106 ± 0.072	2.72 ± 1.03	0.021 ± 0.026	2.62 ± 0.53
I ст.	0.112 ± 0.071	2.44 ± 0.46	0.124 ± 0.063	2.29 ± 0.83	0.077 ± 0.028	1.94 ± 0.80
II ст.	0.347 ± 0.147	2.52 ± 1.52	0.231 ± 0.031	2.80 ± 1.20	0.186 ± 0.047	1.75 ± 0.69
III ст.	0.450 ± 0.150	1.94 ± 0.94	0.408 ± 0.108	3.00 ± 0.59	0.394 ± 0.01	1.77 ± 1.06

При решении задачи выделяются ключевые этапы: определение области максимальной кривизны на топографической карте роговицы; задание начальных параметров зоны кератоконуса для моделирования его влияния на деформации роговицы; определение значений



ψ_j и R_j методом Нелдера – Мида путем минимизации целевой функции, отражающей отклонение расчетной тангенциальной кривизны передней поверхности роговицы от данных кератотопографа Pentacam AXL:

$$F_K(\psi_j, R_j) = \sum [K_{t_s}(y, z) - K_{t_p}(y, z, \psi_j, R_j)]^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где K_t — кривизна передней поверхности роговицы в зависимости от максимального относительного снижения жесткости ψ_j и радиуса R_j .

Полученный результат валидируется из сопоставления с объективными клиническими показателями — максимальное снижение упругих коэффициентов ψ_{\max} , максимальный эффективный радиус R_k .

На основе методов оптимизации, реализованных в COMSOL Multiphysics, разработан алгоритм расчета биомеханических параметров роговицы по формуле (7). Алгоритм состоит из двух модулей: определение параметров интактной ткани (рис. 4, блок А) и идентификация характеристик зон пониженной жесткости при кератоконусе (рис. 4, блок Б). Эта схема (рис. 4) учитывает нелинейную гиперупругость материала и индивидуальную геометрию роговицы.

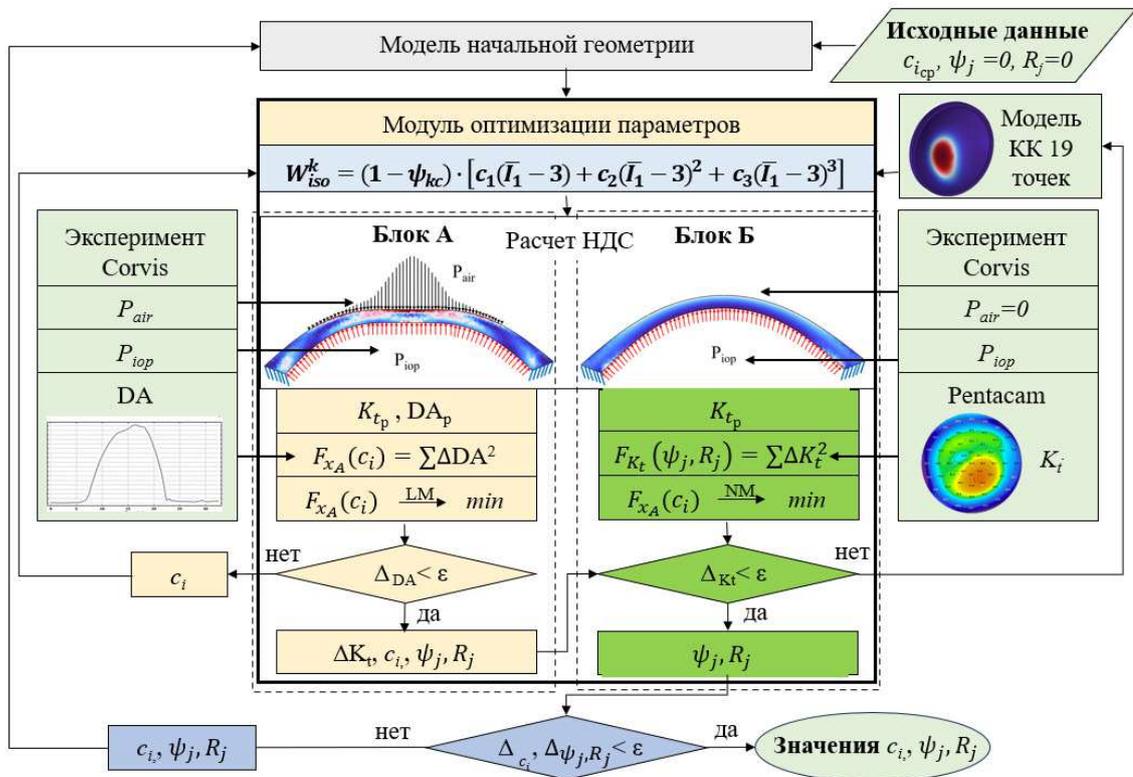


Рис. 4. Процедура определения биомеханических параметров роговицы
 Fig. 4. Procedure for determining the biomechanical parameters of the cornea

В первом приближении механические характеристики материала назначаются по результатам серии предварительных расчетов как средние для здоровых роговиц ($c_1 = 0.225$ МПа; $c_2 = -28.3$ МПа; $c_3 = 2460$ МПа, $\psi_{kc} = 0$). Устанавливается начальное недеформированное состояние роговицы (см. рис. 3), производится ее нагружение ВГД и определяется начальное НДС материала.

3.3. Определение биомеханических параметров роговицы в здоровой части

На основе установленной конфигурации и начального напряженно-деформированного состояния роговицы решается обратная задача (3)–(5) о деформациях под воздействием воз-



душного импульса при тонометрии на приборе Corvis ST. Для минимизации целевой функции (8) с использованием параметров c_i применяется алгоритм Левенберга – Марквардта, при этом для здоровой роговицы параметры ψ_j, R_j принимаются равными нулю. На следующем этапе параметры здоровой ткани (c_i) и предварительные характеристики зон кератоконуса (ψ_j, R_j), полученные в блоке А (см. рис. 4), используются в блоке Б для обеспечения согласованности расчетов. Значения ψ_j, R_j задаются на основе клинических данных, учитывающих интенсивность деформаций, стадию кератоконуса и размер зоны минимальной толщины роговицы [13].

3.4. Поиск параметров в зоне пониженной жесткости кератоконуса

В блоке Б алгоритма (см. рис. 4) уточняются параметры ψ_j и R_j в формуле (7) с использованием многоочаговой модели кератоконуса (см. рис. 3), где радиус и степень снижения жесткости определяются для 19 локальных областей вокруг 5 ключевых точек роговицы (38 параметров). Обратная задача решается методом Нелдера – Мида путем минимизации целевой функции (10), отражающей отклонение расчетной тангенциальной кривизны от клинических данных. Затем коэффициенты модели Yeoh (c_1, c_2, c_3) рекалибруются в блоке А с помощью алгоритма Левенберга – Марквардта. Окончательная верификация модели проводится путем сравнения расчетных и экспериментальных данных тонометра Corvis ST: максимальной амплитуды деформации, времени ее достижения, скорости деформации и распределения деформаций по роговице. Разработанный итерационный процесс (Блок А → Блок Б → Рекалибровка → Верификация) обеспечивает точное определение биомеханических параметров роговицы, учитывая индивидуальные особенности, и позволяет прогнозировать эффективность лечения кератоконуса.

4. Полученные результаты и их обсуждение

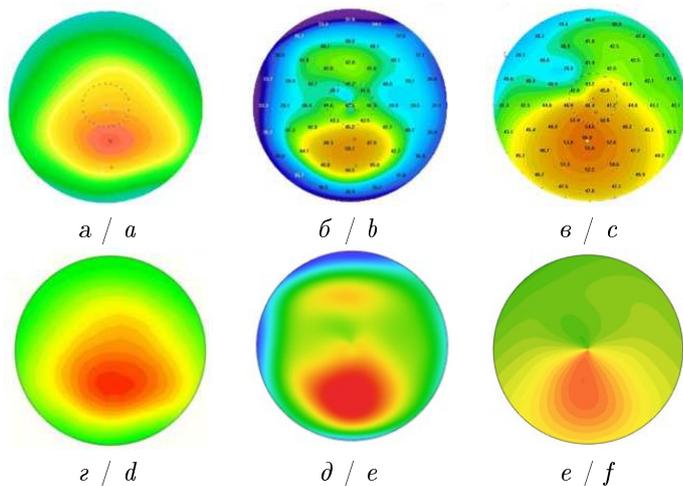


Рис. 5. Сопоставление экспериментальных (верхний ряд) и расчетных (нижний ряд) карт для передней поверхности роговицы: a, d — карты толщины; b, d — карты тангенциальной кривизны; c, e — карты сагиттальной кривизны (цвет онлайн)

Fig. 5. Comparison of experimental maps with calculated maps for the anterior corneal surface: a, d are the maps of thickness; b, e are maps tangential curvature; c, f are the sagittal curvature maps (color online)

Разработанная методика построения пациент-специфической трехмерной МКЭ-модели роговицы была верифицирована путем сравнения расчетных данных с клиническими измерениями для группы пациентов (различные стадии кератоконуса и здоровые роговицы). Анализ показал высокую точность соответствия геометрических параметров. Оптимизация недеформированной конфигурации алгоритмом IPOPT (радиус фильтра 0.02 мм, ограничение на максимальное перемещение 0.2 мм) требовала 48–56 итераций.

На рис. 5 приводятся экспериментальные и расчетные карты толщины, тангенциальной и сагиттальной кривизны передней поверхности роговицы левого глаза пациента Д. с кератоконусом II стадии.



При сравнении смоделированной геометрии передней поверхности роговицы с данными топографии Pentacam AXL (рис. 6) среднеквадратичное отклонение составило менее 0.1%, с максимальными отклонениями до 2 мкм в периферических зонах, что соответствует точности оборудования.

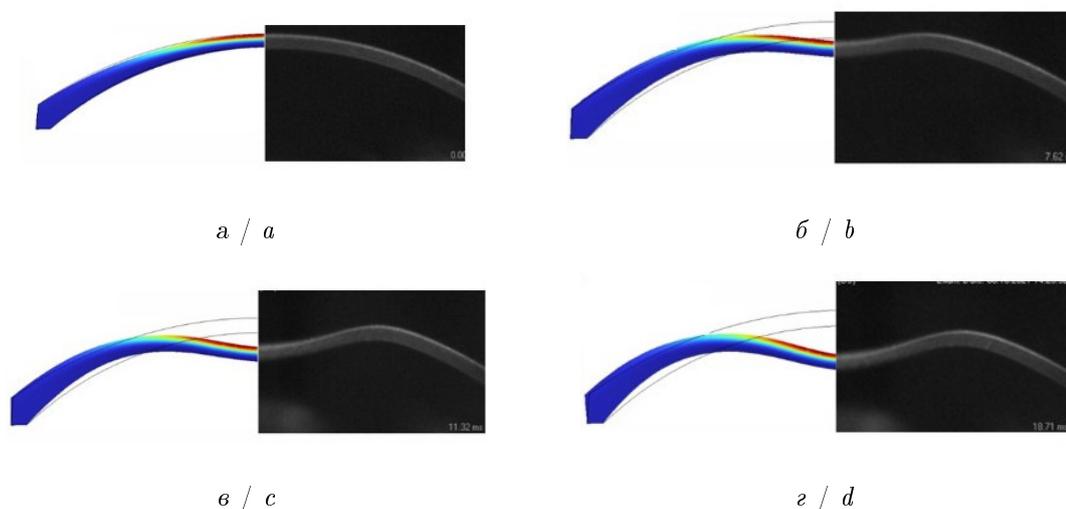


Рис. 6. Картины деформаций в сечении роговицы при: a — 0 мс; b — 7.62 мс; c — 11.3 мс; d — 18.7 мс (цвет онлайн)

Fig. 6. Deformation patterns in the section of the cornea at: a is for 0 ms; b is for 7.62 ms; c is for 11.3 ms; d is for 18.7 ms (color online)

Для задней поверхности отклонение составило менее 0.15%. Модель точно воспроизводит временные характеристики деформации роговицы, включая время, амплитуду и скорость восстановления формы, с коэффициентами корреляции 0.94 для здоровых роговиц и 0.91 для роговиц с кератоконусом, а максимальные отклонения не превышали 8.0%. Сравнение профилей роговицы с данными тонометра Corvis ST показало, что квазистатическая модель, игнорирующая колебания, обеспечивает точность амплитуды деформации в апексе до 1.0% благодаря оптимизационным алгоритмам, что делает ее эффективной для определения биомеханических свойств роговицы. Предложенная модель роговицы с использованием алгоритмов оптимизации ее параметров по общей точности соответствует известным решениям [1–9, 13], а по ряду параметров, таких как точность реконструкции координат поверхности и толщины роговицы (до 2 мкм), а также амплитуды ее перемещения при нагружении (с погрешностью до 3.0%), показывает статистически значимое улучшение.

Выводы

Разработанная методика персонализации конечно-элементной 3D-модели роговицы при кератоконусе базируется на комплексном алгоритме численного анализа клинических данных (топографии Pentacam AXL и тонометра Corvis ST) пациента с помощью поэтапной итерационной процедуры. Последовательное определение параметров, начиная с недеформированной геометрии роговицы, затем свойств здоровой ткани и наконец параметров патологической области, позволяет корректно разделить влияние каждого фактора, избежать неопределенности в результатах и использовать для каждого из этапов наиболее эффективные методы оптимизации.

Выбор алгоритма оптимизации для персонализации модели роговицы напрямую зависит от специфики решаемой подзадачи. Для построения персонализированной модели роговицы на этапе определения недеформированной конфигурации, когда требуется оптимизация тысяч параметров при жестких ограничениях, наибольшую эффективность показал алгоритм внутренней точки IPOPT. Алгоритм Левенберга – Марквардта оптимально подходит



для идентификации параметров здоровой ткани на основе данных динамического отклика, чему соответствует небольшое количество искомых коэффициентов и минимизация гладкой функции. В то же время алгоритм Нелдера – Мида продемонстрировал наибольшую точность для параметризации зон кератоконуса (38 параметров по ψ_j и R_j), где требуется работа с зашумленными топографическими данными. Финальная рекалибровка выполняется повторно методом Левенберга – Марквардта для согласования глобальных параметров модели.

Список литературы

1. Flecha-Lescún J., Calvo B., Zurita J., Ariza-Gracia M. Á. Template-based methodology for the simulation of intracorneal segment ring implantation in human corneas // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2018. Vol. 17, iss. 4. P. 923–938. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-018-1013-z>
2. Cavas-Martínez F., Fernández-Pacheco D. G., De la Cruz-Sánchez E., Nieto Martínez J., Fernández Cañavate F. J., Vega-Estrada A., Plaza-Puche A. B., Alió J. L. Geometrical custom modeling of human cornea *in vivo* and its use for the diagnosis of corneal ectasia // *PLoS ONE*. 2014. Vol. 9, iss. 10. Art. e110249. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0110249>
3. Elsheikh A., Whitford C., Hamarashid R., Kassem W., Joda A., Buehler P. Stress free conguration of the human eye // *Medical Engineering & Physics*. 2013. Vol. 35, iss. 2. P. 211–216. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2012.09.006>
4. Ariza-Gracia M. Á., Zurita J., Piñero D. P., Calvo B., Rodríguez-Matas J. F. Automatized patient-specific methodology for numerical determination of biomechanical corneal response // *Annals of Biomedical Engineering*. 2016. Vol. 44, iss. 5. P. 1753–1772. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10439-015-1426-0>
5. Eliasy A., Chen K. J., Vinciguerra R., Lopes B. T., Abass A., Vinciguerra P., Ambrósio R. Jr., Roberts C. J., Elsheikh A. Determination of corneal biomechanical behavior in-vivo for healthy eyes using CorVis ST tonometry: Stress-strain index // *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. 2019. Vol. 7. Art. 105. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbioe.2019.00105>
6. Nambiar M. H., Liechti L., Studer H., Roy A. S., Seiler T. G., Buehler P. Patient-specific finite element analysis of human corneal lenticules: An experimental and numerical study // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2023. Vol. 147. Art. 106141. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2023.106141>
7. Bao F., Wang J., Cao S., Liao N., Shu B., Zhao Y., Li Y., Zheng X., Huang J., Chen S., Wang Q., Elsheikh A. Development and clinical verification of numerical simulation for laser in situ keratomileusis // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2018. Vol. 83. P. 126–134. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.04.016>
8. Ebrahimian A., Mosaddegh P., Bagheri N. M., Pirhadi S. A simple numerical approach to mimic MyoRing surgery in keratoconus corneas based on optical coherence tomography // *EC Ophthalmology*. 2019. Vol. 10, iss. 5. P. 345–356.
9. Pandolfi A., Simonini I., Annaidh A. Ni. Numerical estimation of stress and refractive power maps in healthy and keratoconus eyes // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2022. Vol. 131. Art. 105252. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2022.105252>
10. Solodkova E. G., Maliugin B. E., Zaharov I. N., Le V. H., Fokin V. P., Balalin S. V., Lobanov E. V. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior // *Russian Journal of Biomechanics*. 2023. Vol. 27, iss. 3. P. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2023.3.05>
11. Солодкова Е. Г., Малюгин Б. Э., Захаров И. Н., Багмутов В. П., Фокин В. П., Балалин С. В., Лобанов Е. В., Лэ В. Х. Разработка комплекса математических моделей биомеханических параметров роговицы с диагностированным кератоконусом до и после лечения кросслинкингом роговичного коллагена // *Российский журнал биомеханики*. 2022. Т. 26, № 3. С. 10–28. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomech/2022.3.01>, EDN: [HCQFDP](https://www.edn.ru/HCQFDP)
12. Holzapfel G. A. *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester [etc.], John Wiley & Sons, 2000. 455 p.
13. Pandolfi A., Holzapfel G. A. Three-dimensional modeling and computational analysis of the human cornea considering distributed collagen fibril orientations // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2008. Vol. 130, iss. 6. Art. 061006. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2982251>
14. Ермакова Е. В., Рыжковская М. И. Влияние радиуса фильтра на оптимизацию формы обо-



лочки в COMSOL MULTIPHYSICS // Вестник гражданских инженеров. 2024. № 4. С. 23–34.
DOI: <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2024-21-4-23-34>, EDN: JKNEYK

References

1. Flecha-Lescún J., Calvo B., Zurita J., Ariza-Gracia M. Á. Template-based methodology for the simulation of intracorneal segment ring implantation in human corneas. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2018, vol. 17, iss. 4, art. 923–938. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-018-1013-z>
2. Cavas-Martínez F., Fernández-Pacheco D. G., De la Cruz-Sánchez E., Nieto Martínez J., Fernández Cañavate F. J., Vega-Estrada A., Plaza-Puche A. B., Alió J. L. Geometrical custom modeling of human cornea *in vivo* and its use for the diagnosis of corneal ectasia. *PLoS ONE*, 2014, vol. 9, iss. 10, art. e110249. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0110249>
3. Elsheikh A., Whitford C., Hamarashid R., Kassem W., Joda A., Büchler P. Stress free conguration of the human eye. *Medical Engineering & Physics*, 2013, vol. 35, iss. 2, pp. 211–216. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2012.09.006>
4. Ariza-Gracia M. Á., Zurita J., Piñero D. P., Calvo B., Rodríguez-Matas J. F. Automatized patient-specific methodology for numerical determination of biomechanical corneal response. *Annals of Biomedical Engineering*, 2016, vol. 44, iss. 5, pp. 1753–1772. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10439-015-1426-0>
5. Eliasy A., Chen K. J., Vinciguerra R., Lopes B. T., Abass A., Vinciguerra P., Ambrósio R. Jr., Roberts C. J., Elsheikh A. Determination of corneal biomechanical behavior *in-vivo* for healthy eyes using CorVis ST tonometry: Stress-strain index. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology* 2019, vol. 7, art. 105. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbioe.2019.00105>
6. Nambiar M. H., Liechti L., Studer H., Roy A. S., Seiler T. G., Büchler P. Patient-specific finite element analysis of human corneal lenticules: An experimental and numerical study. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2023, vol. 147, art. 106141. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2023.106141>
7. Bao F., Wang J., Cao S., Liao N., Shu B., Zhao Y., Li Y., Zheng X., Huang J., Chen S., Wang Q., Elsheikh A. Development and clinical verification of numerical simulation for laser *in situ* keratomileusis. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2018, vol. 83, pp. 126–134. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.04.016>
8. Ebrahimian A., Mosaddegh P., Bagheri N. M., Pirhadi S. A simple numerical approach to mimic MyoRing surgery in keratoconus corneas based on optical coherence tomography. *EC Ophthalmology*, 2019, vol. 10, iss. 5, pp. 345–356.
9. Pandolfi A., Simonini I., Annaidh A. Ni. Numerical estimation of stress and refractive power maps in healthy and keratoconus eyes. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2022, vol. 131, art. 105252. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2022.105252>
10. Solodkova E. G., Maliugin B. E., Zaharov I. N., Le V. H., Fokin V. P., Balalin S. V., Lobanov E. V. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior. *Russian Journal of Biomechanics*, 2023, vol. 27, iss. 3, pp. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2023.3.05>
11. Solodkova E. G., Malyugin B. E., Zakharov I. N., Bagmutov V. P., Fokin V. P., Balalin S. V., Lobanov E. V., Le V. H. Development of a set of mathematical models of corneal biomechanical parameters with diagnosed keratoconus before and after treatment with corneal collagen cross-linking. *Russian Journal of Biomechanics*, 2022, vol. 26, iss. 3, pp. 6–22. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2022.3.01>
12. Holzapfel G. A. *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester [etc.], John Wiley & Sons, 2000. 455 p.
13. Pandolfi A., Holzapfel G. A. Three-dimensional modeling and computational analysis of the human cornea considering distributed collagen fibril orientations. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2008, vol. 130, iss. 6, art. 061006. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2982251>
14. Ermakova E. V., Rynkovskaya M. I. The effect of the filter radius on the shape optimization of a shell in COMSOL MULTIPHYSICS. *Bulletin of Civil Engineers*, 2024, iss. 4, pp. 23–34 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2024-21-4-23-34>, EDN: JKNEYK

Поступила в редакцию / Received 02.09.2025

Принята к публикации / Accepted 05.11.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 68–80

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 68–80

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-68-80>

EDN: <https://elibrary.ru/MLDMKY>

Научная статья

УДК 519.634

Некоторые особенности начального этапа кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости

М. В. Норкин

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Норкин Михаил Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, norkinmi@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9508-5996>, SPIN: 1638-4892, AuthorID: 110093

Аннотация. Рассматривается задача о начальном этапе вертикального и кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Изучается динамика образующейся присоединенной каверны на малых временах с учетом пограничных решений в точках отрыва. Данная задача считается корректно поставленной, если в точках отрыва выполняется условие Кутты–Жуковского, а давление в жидкости является положительной величиной. В общем случае задача рассматривается с учетом искусственной кавитации. При этом важную роль играет динамика точек отрыва, для учета которой делается специальная замена переменных, фиксирующая их положение. Исследуется вопрос о возможности представления решения преобразованной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Показывается, что искомое разложение, содержащее первые два члена асимптотики, существует только для определенных физических ситуаций. В случае самого простого закона искусственной кавитации, когда давление в каверне является постоянной величиной, эти ситуации характеризуются вполне определенным числом Фруда, которое равно единице. В общем случае степенную структуру решения преобразованной задачи на малых временах можно сохранить, если во втором асимптотическом приближении провести сглаживание соответствующей граничной функции. В работе уделяется большое внимание поведению внутренней свободной границы жидкости (границы каверны) вблизи точки отрыва. Показывается, что в главном приближении по времени эта граница подходит к точке отрыва под прямым углом (возникает корень квадратный из разности соответствующих угловых координат). Уточнение этого главного приближения для более умеренных времен приводит к различным картинам течения жидкости вблизи точки отрыва. В одних случаях сглаживающая квадратный корень кривая выходит из точки отрыва и располагается от нее только по одну сторону. В других случаях кривая вблизи точки отрыва расположена по разные стороны от нее.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, присоединенная каверна, точки отрыва, малые времена, асимптотика, пограничные решения, число Фруда, давление в каверне

Для цитирования: Норкин М. В. Некоторые особенности начального этапа кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 68–80. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-68-80>, EDN: MLDMKY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Some features of the initial stage of cavitation motion of a circular cylinder under the free surface of a heavy liquid

M. V. Norkin

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Mikhail V. Norkin, norkinmi@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9508-5996>, SPIN: 1638-4892, AuthorID: 110093

Abstract. The problem of the initial stage of vertical and cavitation motion of a circular cylinder under the free surface of an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. The dynamics of the attached cavity at short times is studied taking into account the boundary layer solutions at the separation points. The problem is considered to be correctly stated if the Kutta–Zhukovsky condition is satisfied at the separation points and the pressure in the liquid is a positive value. In the general case, the problem is considered taking into account artificial cavitation. In this case, an important role is played by the dynamics of the separation points, for which a special change of variables is made, fixing their position. The question of the possibility of representing the solution of the transformed problem as an asymptotic expansion in integer powers of short time is investigated. It is shown that the desired expansion containing the first two terms of the asymptotics exists only for certain physical situations. In the case of the simplest law of artificial cavitation, when the pressure in the cavity is a constant, these situations are characterized by a well-defined Froude number, which is equal to unity. In the general case, the power structure of the solution of the transformed problem at small times can be preserved if the corresponding boundary function is smoothed in the second asymptotic approximation. In this paper, much attention is paid to the behavior of the internal free boundary of the fluid (the boundary of the cavity) near the separation point. It is shown that in the leading approximation in time, this boundary approaches the separation point at a right angle (the square root of the difference of the corresponding angular coordinates arises). Refinement of this leading approximation for more moderate times leads to different patterns of fluid flow near the separation point. In some cases, the curve smoothing the square root comes out of the separation point and is located only on one side of it. In other cases, the curve near the separation point is located on different sides of it.

Keywords: ideal incompressible fluid, attached cavity, separation points, small times, asymptotics, boundary layer solutions, Froude number, cavity pressure

For citation: Norkin M. V. Some features of the initial stage of cavitation motion of a circular cylinder under the free surface of a heavy liquid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 68–80 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-68-80>, EDN: MLDMKY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Исследование начальной стадии движения твердого тела в жидкости, имеющей свободные границы, проводится в основном аналитическими методами, среди которых важную роль играет асимптотический анализ на малых временах. Большинство работ в этом направлении посвящено проблеме генерации волн движущимся в жидкости телом (подробная библиография приводится в [1, 2]). При этом считается, что явление кавитации представляет собой отдельную задачу и поэтому при анализе волновой картины не учитывается. Первые исследования по динамике кавитационного отрыва жидкости от тела на малых временах были проведены в статье [3], где рассматривалась задача о горизонтальном ударе кругового цилиндра, полупогруженного в жидкость. В ней положение точки отрыва после



удара определялось из условия Кутты – Жуковского, а давление в жидкости не должно было опускаться ниже некоторой маленькой положительной величины p_d , где p_d — давление насыщенных паров жидкости или газа. В дальнейшем этот результат был перенесен на задачу о горизонтальном разгоне кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости [4]. В главном асимптотическом приближении при малых временах была сформулирована задача с односторонними ограничениями, обобщающая классическую модель удара с отрывом, поставленную в [5], на случай больших ускорений цилиндра (удару соответствуют бесконечно большие ускорения). Учет второго асимптотического приближения позволил определить формы присоединенных каверн в широком временном диапазоне.

В настоящей работе результаты статьи [4] обобщаются на случай вертикального движения кругового цилиндра в жидкости. В отличие от предыдущих работ автора, при рассмотрении конкретных примеров условие Кутты – Жуковского в точках отрыва обеспечивается не за счет выбора их положения в каждый момент времени, а за счет специального закона движения цилиндра. При этом динамика точек отрыва на малых временах задается произвольным образом. Осуществляется переход к преобразованной задаче, в которой положения точек отрыва являются фиксированными. Для этой задачи изучается вопрос о возможности представления ее решения в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Поскольку решение этого вопроса существенно зависит от выполнения условия Кутты – Жуковского в точках отрыва, то можно говорить о поиске таких физических ситуаций, при которых строго выполняется данное условие.

Такой вопрос изучался в статье [6] при дополнительном упрощающем предположении о неподвижности точек отрыва (в этом случае техническая работа сильно упрощается). Интересно отметить, что сформулированное с учетом динамики точек отрыва условие регулярности, обеспечивающее выполнение условия Кутты – Жуковского, совпадает с аналогичным условием работы [6]. При нарушении условия регулярности структуру решения задачи также можно сохранить, если во втором асимптотическом приближении провести сглаживание соответствующей граничной функции в маленьких окрестностях точек отрыва. Кроме этого, изучается поведение внутренней свободной границы жидкости (границы каверны) вблизи точки отрыва. Объясняется случай, когда свободная граница вблизи точки отрыва находится от нее по разные стороны. В задачах удара и разгона этот случай не рассматривался.

Среди близких работ, в которых важную роль играет явление кавитации, отметим следующие задачи: проникания тел в жидкость с учетом отрыва частиц жидкости от их поверхностей [7]; подводного старта ракет кавитационным способом [8]; экспериментальное изучение кавитации при ударном взаимодействии твердых тел с жидкостью [9, 10]. Общие принципы кавитационных течений при взаимодействии твердых тел с жидкостью изложены в [11, 12].

1. Постановка задачи

Исследуется плоская задача о начальном этапе движения кругового цилиндра под свободной поверхностью идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Предполагается, что движение цилиндра происходит из состояния покоя вдоль вектора силы тяжести по полиномиальному закону. При определенных условиях сразу после начала движения наблюдается отрыв частиц жидкости от поверхности тела и образуется присоединенная каверна. Существенное влияние на отрыв оказывают два фактора — начальное ускорение цилиндра и искусственная кавитация. Предполагается, что непосредственно перед началом движения на границе цилиндра (в предполагаемой зоне отрыва) создается определенное давление газа, поступающего со стороны тела. В случае больших значений давления газа кавитация может начинаться даже при небольшом начальном ускорении цилиндра. Требуется изучить



динамику каверны на малых временах с учетом погранслоинных решений в точках отрыва. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1, 2):

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y, \quad R \in S_{11}(t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y + h(t) - H) - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \dot{h}(t)\sin\theta = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\dot{\theta}(t) + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t), \tag{4}$$

$$\dot{\theta}(t) = r^{-2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - r^{-1}\dot{h}(t)\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x, t) = 0, \quad R \in S_2(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t), \tag{6}$$

$$\nabla\Phi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \tag{7}$$

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \eta(\theta, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \tag{8}$$

$$h(t) = -0.5t^2 - 0.25pt^4. \tag{9}$$

Задача (1)–(9) содержит следующие характерные физические величины:

$$Fr = \sqrt{\frac{w}{g}}, \quad \chi = 2\frac{p_a - p_c}{\rho wa}.$$

где Fr — число Фруда, связанное с начальным ускорением цилиндра w ; g — ускорение силы тяжести; χ — безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне; ρ — плотность жидкости; p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне (допускается зависимость p_c от времени и угловой координаты); a — радиус цилиндра.

Безразмерные переменные вводятся с помощью равенств (штрихами помечаются размерные величины):

$$t' = \sqrt{\frac{a}{w}}t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \\ \Phi' = a\sqrt{wa}\Phi, \quad p' = \rho wap.$$

Связь неподвижных координат X, Y с подвижными x, y устанавливается при помощи соотношений: $X = x, Y = y + h(t)$, где $h(t)$ — закон движения цилиндра. Картина течения жидкости является симметричной относительно оси y , которая направлена против вектора силы тяжести. Начало подвижной системы координат находится в центре цилиндра.

В работе также используются следующие обозначения: $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра, на которой происходит безотрывное обтекание; $S_{12}(t)$ — внутренняя свободная граница жидкости; $S_2(t)$ — внешняя свободная поверхность

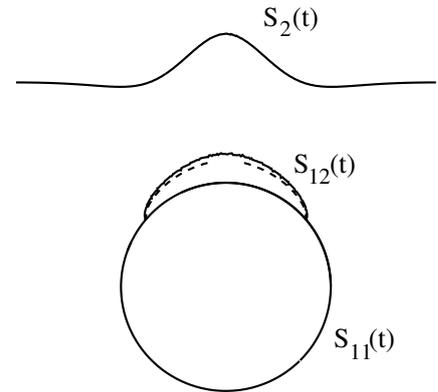


Рис. 1. Согласование погранслоинных решений (пунктирные линии) с внешним разложением при $t = 0.4$. Случай, когда кривая расположена только по одну сторону от точки отрыва. Условие регулярности выполнено

Fig. 1. Agreement of boundary layer solutions (dashed lines) with the outer expansion at $t = 0.4$. The case when the curve is located only on one side of the separation point. The regularity condition is satisfied

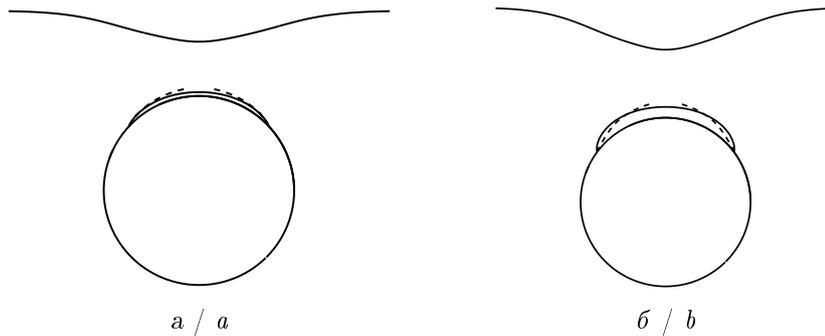


Рис. 2. Согласование погранслойных решений с внешним разложением: а — при $t = 0.4$; б — при $t = 0.6$. Случай, когда кривая расположена только по одну сторону от точки отрыва. Условие регулярности нарушено

Fig. 2. Agreement of boundary layer solutions with the outer expansion: а is at $t = 0.4$; б is at $t = 0.6$. The case when the curve is located only on one side of the separation point. The regularity condition is violated

($y = H$ — ее невозмущенный уровень); $\theta_s(t)$, $\pi - \theta_s(t)$ — угловые координаты симметричных точек отрыва; r, θ — полярные координаты ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$); $R = (x, y)$.

Формы внутренней и внешней свободных границ жидкости определяются с помощью равенств:

$$r = 1 + \eta(\theta, t), \quad y = H + \xi(x, t) - h(t).$$

Объясним смысл параметра p в законе движения цилиндра. При $p > 0$ цилиндр движется быстрее, чем при чистом разгоне ($p = 0$). Благодаря этому становятся интересными и физически оправданными случаи, когда точки отрыва движутся в разные стороны (для движения точек отрыва в разные стороны при $p = 0$ необходимо искусственно создать большое давление в каверне, которое уменьшается с увеличением p). Однако при заданном p и фиксированных остальных параметрах задачи закон движения точек отрыва на малых временах не является произвольным. Положение точек отрыва в каждый момент времени выбирается таким образом, чтобы в них выполнялось условие Кутты–Жуковского. Последнее равносильно специальному выбору начального ускорения точки отрыва $2c_1$. Таким образом, по заданному p определяется величина c_1 . Можно поставить и обратную задачу, в которой по известному c_1 находится p . Как будет показано ниже, величины p и c_1 связаны простым линейным соотношением, и, следовательно, перейти от одной постановки задачи к другой весьма просто. Отметим, что при рассмотрении конкретных примеров заданной считается величина c_1 . По ней однозначно определяется p из условия Кутты–Жуковского. Для остальных p корректного с физической точки зрения решения задачи не существует, так как нарушается условие Кутты–Жуковского. Таким образом, при произвольном законе движения цилиндра (в случае заданной динамики точек отрыва) решения не существует.

2. Асимптотический анализ на малых временах

Поскольку отрыв жидкости происходит сразу по конечному участку поверхности тела, то можно считать, что в начальный момент времени уже имеются две симметричные точки отрыва с угловыми координатами $\theta_s = \theta_s(0)$, $\pi - \theta_s$. Чтобы учесть динамику точек отрыва при $t > 0$, предлагается сделать замену переменной по угловой координате, фиксирующую их положение:

$$\alpha = \frac{\pi - 2\theta_s}{\pi - 2\theta_s(t)} [\theta - \theta_s(t)] + \theta_s.$$

При такой замене точки отрыва с угловыми координатами $\theta_s(t)$, $\pi - \theta_s(t)$ перейдут в точки с угловыми координатами θ_s , $\pi - \theta_s$, соответствующие их начальному положению.



Решение преобразованной задачи будем искать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\varphi(\alpha, r, t) = t\varphi_0(\alpha, r) + t^3\varphi_1(\alpha, r) + \dots, \quad (10)$$

$$\zeta(\alpha, t) = t^2\zeta_0(\alpha) + t^4\zeta_1(\alpha) + \dots, \quad (11)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + t^4\xi_1(x) + \dots, \quad (12)$$

$$\theta_s(t) = \theta_s + c_1t^2 + \dots, \quad (13)$$

где введены новые обозначения:

$$\varphi(\alpha, r, t) = \Phi(r \cos \theta(\alpha, t), r \sin \theta(\alpha, t), t), \quad \zeta(\alpha, t) = \eta(\theta(\alpha, t), t).$$

В дальнейшем считаем, что величина χ имеет следующее представление:

$$\chi = \chi_0 + t^2\chi_1 + t^2\chi_2f(\theta).$$

Поскольку на малых временах $\theta \sim \alpha$, то в рассматриваемом асимптотическом приближении $f(\theta)$ можно заменить на $f(\alpha)$. В качестве $f(\alpha)$ можно взять любую четную относительно $\alpha = 0.5\pi$ функцию, производная которой имеет корневые особенности в точках отрыва. Дальнейшие рассуждения удобно провести для конкретной функции $f(\alpha) = \zeta_0(\alpha) \sin \alpha$.

Подставляя (10)–(13) в преобразованную задачу, осуществляя стандартную процедуру переноса краевых условий с возмущенных участков границы области на их первоначально невозмущенный уровень и приравнивая величины при одинаковых степенях t , приходим для определения функций φ_0 и φ_1 к смешанным краевым задачам в области $\Omega(0)$ (во всех математических постановках на бесконечности ставится условие затухания). Задача для φ_0 дополняется граничными условиями типа неравенств, которые не являются прямым следствием проведенных рассуждений:

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \varphi_0 = 0, \quad y = H, \quad (14)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = -\sin \alpha, \quad 0.5\chi_0 + Fr^{-2}(H - \sin \alpha) - \varphi_0 \geq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad (15)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} \geq -\sin \alpha, \quad 0.5\chi_0 + Fr^{-2}(H - \sin \alpha) - \varphi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0). \quad (16)$$

Неравенство в (15) означает, что в главном приближении по времени давление в зоне контакта не может опускаться ниже давления в каверне (получается на основании интеграла Коши – Лагранжа). Неравенство в (16) является следствием того факта, что внутренняя свободная граница жидкости не может входить внутрь твердого тела. Для получения последнего неравенства нужно в соотношение $\zeta(\alpha, t) \geq 0$ подставить разложение (11), затем разделить обе части на t^2 и устремить t к нулю. В результате приходим к соотношению $\zeta_0(\alpha) \geq 0$, которое равносильно неравенству в (16). Явное выражение для функции $\zeta_0(\alpha)$ получается на основании асимптотического анализа кинематического уравнения внутренней свободной границы жидкости. На основе решения задачи (14)–(16) определяются первоначальная зона отрыва частиц жидкости $S_{12}(0)$ и угловые координаты симметричных точек отрыва: θ_s и $\pi - \theta_s$. Важной особенностью задачи с односторонними ограничениями является регулярность ее решения в точках отрыва. Отсюда следует выполнение условия Кутты – Жуковского в главном асимптотическом приближении по времени. Заметим, что на основании неравенства в (15) условие положительности давления также будет выполнено. Таким образом, в главном приближении важные физические условия выполняются.

Для функции φ_1 возникает уравнение Пуассона, которое сводится к уравнению Лапласа при помощи замены, предложенной при исследовании задачи о вертикальном ударе плавающего кругового цилиндра [13]:

$$\varphi_1 = c \frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha}(\alpha - 0.5\pi) + u, \quad c = -\frac{2c_1}{\pi - 2\theta_s},$$

где функция u определяется решением следующей задачи:

$$\Delta u = 0, \quad R \in \Omega(0), \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -p \sin \alpha, \quad R \in S_{11}(0), \quad (18)$$

$$3u = k_1 \zeta_0(\alpha) \sin \alpha - 4\zeta_0^2(\alpha) - 0.5(1 - Fr^{-2})^2 \cos^2 \alpha + k_2, \quad R \in S_{12}(0), \quad (19)$$

$$k_1 = 1 - Fr^{-2} + 0.5\chi_2, \quad k_2 = 0.5(1 + Fr^{-2}) + 0.5\chi_1,$$

$$3u = -c \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} x (\alpha - 0.5\pi) - 0.5 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} (\xi_0(x) + 1.5) - Fr^{-2} \xi_0(x), \quad y = H. \quad (20)$$

Для коэффициентов асимптотических разложений (11)–(12) справедливы равенства, которые выполняются при $r = 1$ и $y = H$ соответственно:

$$2\zeta_0(\alpha) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \sin \alpha,$$

$$4\zeta_1(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial r} + p \sin \alpha + 4c(\alpha - 0.5\pi)\zeta_0'(\alpha) - 2\zeta_0^2(\alpha) - (1 - Fr^{-2})(\zeta_0(\alpha) \cos \alpha)',$$

$$2\xi_0(x) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad 4\xi_1(x) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} c(\alpha - 0.5\pi)H.$$

Дальнейшие рассуждения основаны на предположении о том, что производная функция φ_1 по α со стороны зоны контакта (так же, как и нормальная производная этой функции со стороны зоны отрыва) имеет корневые особенности в точке отрыва. Используя представление функции u в виде

$$u = pv + w + cq,$$

выберем параметр $p = p(c_1)$ в законе движения цилиндра так, чтобы коэффициент при указанном растущем члене обратился в ноль. В результате дело сводится к вычислению пределов:

$$p = -a_2^{-1} (c[(\theta_s - 0.5\pi)a_1 + a_4] + a_3),$$

$$a_1 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2} \sqrt{\theta_s - \alpha}, \quad a_2 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_s - \alpha},$$

$$a_3 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_s - \alpha}, \quad a_4 = \lim_{\alpha \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_s - \alpha}.$$

Отметим, что для справедливости проведенных рассуждений необходимо потребовать, чтобы граничная функция в (19) была непрерывно дифференцируемой в точках отрыва. Анализ этой функции показывает, что сама она является непрерывной в этих точках, а ее первая производная имеет в них корневые особенности. Эти особенности содержатся только в первом слагаемом этой функции. Таким образом, если потребовать, чтобы коэффициент k_1 обратился в ноль, то рассматриваемая граничная функция будет непрерывно дифференцируемой в точках отрыва. В результате приходим к условию регулярности

$$1 - Fr^{-2} + 0.5\chi_2 = 0.$$

Это условие оправдывает степенной характер вторых членов асимптотических разложений (10)–(13). В случае самого простого закона искусственной кавитации, когда $\chi_1 = 0$ и $\chi_2 = 0$, условие регулярности принимает вид $Fr = 1$. Отметим, что в этом случае давление в каверне является постоянной величиной и χ можно интерпретировать как число кавитации.

Здесь интересно провести сравнение с горизонтальным разгоном цилиндра. Используя результаты статьи [4], можно убедиться в том, что при горизонтальном разгоне цилиндра



не удастся получить условие регулярности в простой физической форме, потому что одного числа Фруда не хватает, чтобы обеспечить регулярность соответствующей граничной функции сразу в двух несимметричных точках отрыва. Это можно сделать только при очень специальном законе искусственной кавитации.

При нарушении условия регулярности степенной характер вторых членов разложений (10)–(13) также можно сохранить, если сгладить граничную функцию (19) в маленьких окрестностях точек отрыва. Наконец заметим, что при численной реализации используется слабая вариационная постановка задачи в интегральной форме, которая сама по себе осуществляет сглаживание. Таким образом, при численной реализации можно даже не менять вид функции (19). Последнее подтверждается хорошей работой численных алгоритмов для различных примеров. Обратим внимание на то, что аналогичные рассуждения справедливы и при горизонтальном разгоне цилиндра [4].

3. Решения типа пограничного слоя

В этом параграфе будут использоваться следующие асимптотические формулы ($\alpha \rightarrow \theta_s + 0$):

$$\zeta_0(\alpha) \sim \beta\sqrt{\alpha - \theta_s}, \quad \zeta'_0(\alpha) \sim \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha - \theta_s}}, \quad 4\zeta_1(\alpha) \sim \frac{\beta \cdot \beta_1}{\sqrt{\alpha - \theta_s}}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + t \sin \alpha \sim t \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \sin \alpha \right) \sim 2\beta t \sqrt{\alpha - \theta_s}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \sim -Fr^{-2} \cos \theta_s, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \sim 2c_1 t, \quad (22)$$

где производные функций φ и φ_0 берутся при $r = 1$, коэффициент β находится численно на основе первой формулы (21), а коэффициент β_1 имеет вид

$$\beta_1 = c_1 - 0.5(1 - Fr^{-2}) \cos \theta_s.$$

Рассмотрим преобразованное кинематическое уравнение внутренней свободной границы жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \dot{h}(t) \sin \theta(\alpha, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} \dot{\theta}(t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ \dot{\theta}(t) &= [1 + \zeta(\alpha, t)]^{-2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} - \dot{h}(t) (1 + \zeta(\alpha, t)) \cos \theta(\alpha, t) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая (21)–(22), приведем последнее уравнение к виду

$$2\beta t \sqrt{\alpha - \theta_s} = -2t\beta_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (23)$$

Решение уравнения (23), содержащего только одну неизвестную функцию $\zeta(\alpha, t)$, будем искать в форме

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^3 H(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{\alpha - \theta_s}{t^2}. \quad (24)$$

Подставляя этот проект решения в (23), переходя всюду к погранслошной переменной τ и приравнивая величины при одинаковых степенях t (при t^2), приходим в главном асимптотическом приближении к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с нулевым начальным условием и условием срачивания с внешним разложением на бесконечности:

$$(\tau + \beta_1)H'(\tau) - 1.5H(\tau) = -\sqrt{\tau}, \quad H(0) = 0, \quad H(\tau) \sim \sqrt{\tau} + \frac{\beta_1}{4\sqrt{\tau}} + \dots, \tau \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем важную роль играет знак параметра β_1 . При $\beta_1 < 0$ решение последней задачи имеет вид

$$H(\tau) = \frac{2}{3|\beta_1|} \tau^{1.5}, 0 < \tau < |\beta_1|; \quad H(\tau) = \frac{2}{3|\beta_1|} [\tau^{1.5} - (\tau - |\beta_1|)^{1.5}], \quad |\beta_1| < \tau < \infty. \quad (25)$$

Решения типа пограничного слоя (24)–(25) встречаются во многих работах автора [3, 4, 6, 13]. Они очень хорошо согласуются с внешним разложением в широком диапазоне изменения угловой координаты, а также в широком временном диапазоне. Таким образом, случай $\beta_1 < 0$ никаких сомнений не вызывает, поэтому основное внимание нужно сосредоточить на случае $\beta_1 > 0$. Сразу отметим, что здесь решение обыкновенного дифференциального уравнения для функции $H(\tau)$, удовлетворяющее нулевому начальному условию, не может рассматриваться в качестве погранслоя, так как соответствующая кривая оказывается внутри круга. При этом другое решение этого уравнения, удовлетворяющее условию срачивания, существует и очень хорошо согласуется с внешним разложением (11):

$$H(\tau) = \frac{2}{3\beta_1} [(\tau + \beta_1)^{1.5} - \tau^{1.5}]. \quad (26)$$

При $\alpha = \theta_s$ между последним решением и границей тела возникает зазор, который означает, что внутренняя свободная граница жидкости продолжается за точку отрыва. Решение типа пограничного слоя при $\alpha < \theta_s$ может быть получено с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые проводились при $\alpha > \theta_s$ ($\beta_1 < 0$). Отличие состоит в том, что вместо первой асимптотической формулы в (22) нужно использовать граничное условие в зоне контакта (15) (в главном приближении точки, принадлежащие свободной границе, сносят-ся вдоль радиуса в зону контакта на границе тела). В результате возникает уравнение (23), левая часть которого равна нулю. Его решение будем искать в форме (24), где в выражении для погранслоя переменной τ нужно поставить знак минус. В качестве дополнительного условия формулируется условие гладкой стыковки (класса C^1) с решением (24), (26) при $\alpha = \theta_s$. Искомое решение имеет вид

$$\zeta(\alpha, t) = \frac{2\beta}{3\beta_1} t^3 (\beta_1 - \tau_1)^{1.5}, \quad \tau_1 = \frac{\theta_s - \alpha}{t^2}. \quad (27)$$

Заметим, что кривая, определяемая решением (27), касается границы тела в точке с угловой координатой $\alpha = \theta_s - \beta_1 t^2$ (здесь также имеет место стыковка класса C^1). Таким образом, функция (27) является естественным продолжением решения (24), (26) в область $\alpha < \theta_s$. Обратим внимание на то, что в этом случае точка отрыва оказывается внутри каверны. Однако рассуждения, основанные на выполнении условия Кутты–Жуковского, здесь сохраняются, так как в главном приближении кривая подходит к точке отрыва под прямым углом, без поворота свободной границы (возникает корень квадратный из разности соответствующих угловых координат). Построенные выше погранслоя решения подправляют это главное приближение для более умеренных времен. Остановимся на этом вопросе более подробно. Переходя в решении (24), (26) от переменной τ к переменной t и используя формулу Тейлора при малых t , придем к разложению

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^2 \sqrt{\alpha - \theta_s} + \frac{\beta\beta_1}{4} t^4 (\alpha - \theta_s)^{-0.5} + \dots$$

Видно, что функция $\zeta(\alpha, t)$ хорошо согласуется (срачивается) с первым членом этого разложения при достаточно малых t во внешности некоторой окрестности точки отрыва. При этом указанная окрестность может быть сделана сколь угодно малой за счет малости t . Аналогичным образом ведет себя решение (24), (25) при достаточно малых t . Можно провести другие рассуждения, показывающие, что интересующая нас функция (корень



квадратный) может быть получена как решение дифференциального уравнения внутренней свободной границы жидкости, но при рассмотрении более низких порядков по времени (что неудивительно, так как речь идет о самом главном приближении). Функцию $\zeta(\alpha, t)$ будем искать в виде

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^\gamma H(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{\alpha - \theta_s}{t^\delta}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (23), переходя к погранслошной переменной τ и ограничиваясь только главным приближением, получим равенство, в которое входят слагаемые, имеющие следующие порядки малости по t : $t^{0.5\delta+1}$, $t^{\gamma+1-\delta}$, $t^{\gamma-1}$. В самой хорошей ситуации, когда все показатели равны, приходим к случаям, рассмотренным выше. Далее рассмотрим случаи, когда среди указанных показателей совпадают только два из них, а слагаемое, отвечающее третьему показателю, имеет более высокий порядок малости по t . Из трех возможных случаев подходящим оказывается только один, который с учетом условия срачивания приводит к решению вида ($0.5\delta + 1 = \gamma - 1$, $\gamma + 1 - \delta > \gamma - 1$):

$$\zeta(\alpha, t) = \beta t^2 \sqrt{\alpha - \theta_s}. \quad (29)$$

Таким образом, есть все основания считать, что функция (29) является главным асимптотическим приближением для формы внутренней свободной границы жидкости при любом β_1 . В следующем приближении по времени картина течения жидкости вблизи точки отрыва существенно зависит от параметра β_1 . При $\beta_1 < 0$ кривая подходит к точке отрыва по касательной, находясь от нее только по одну сторону. В случае $\beta_1 > 0$ кривая продолжается за точку отрыва и подходит к границе тела также по касательной (в этом случае точка отрыва оказывается внутри каверны).

Вкратце остановимся на численной реализации. Для численного решения задачи с односторонними ограничениями (14)–(16) применяется специальный итерационный метод последовательного уточнения неизвестных заранее зон отрыва и контакта частиц жидкости. Ранее такой подход был применен для решения классических задач об отрывном ударе твердых тел, плавающих на поверхности жидкости [14]. В качестве начального приближения в этом итерационном процессе выбирается решение смешанной задачи (14)–(16), без учета неравенств, с такой маленькой зоной $S_{12}(0)$, в окрестности которой нарушается динамическое условие в виде неравенства (14). Как показывают численные расчеты, при плавном удалении от точки раздела краевых условий левая часть этого неравенства убывает, достигает отрицательного минимума, а затем возрастает до положительных значений. Точки, в которых рассматриваемая функция принимает отрицательные минимумы, выбираются за следующие приближения к точкам отрыва. Далее этот процесс повторяется. При этом каждый следующий шаг итерационного процесса приводит к уменьшению зоны отрицательных значений данной функции. Процесс заканчивается, когда эта зона полностью исчезает. После этого проверяется справедливость кинематического условия в виде неравенства в (15). Описанный итерационный метод сходится очень быстро. Для определения угловых координат точек отрыва с двумя верными знаками после запятой требуется не более 15–20 итераций. Отметим, что полученные на каждом шаге итерационного процесса линейные задачи (с фиксированными точками раздела краевых условий) решаются численно методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++ [15]. Линейная задача (17)–(20) также решается методом конечных элементов. Более подробно этот подход изложен в статьях [3, 4].

При численной реализации вводятся в рассмотрение дно и боковые стенки, удаленные от тела на большие расстояния (в пять раз больше радиуса цилиндра).

На рис. 1 показано хорошее согласование погранслошных решений (24), (25) с внешним разложением в случае, когда выполнено условие регулярности: $Fr = 1$, $\chi_0 = -1$, $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$, $H = 1.2$, $t = 0.4$, $c_1 = -0.5$ (точки отрыва движутся в разные стороны, $\beta_1 = c_1$). Здесь $\theta_s = 0.766$, $\beta = 1.596$, $p = 9.202$.



На рис. 2 представлены случаи, когда условие регулярности нарушено: $Fr = 3$, $\chi_0 = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$ (остальные параметры не меняются). Для этих случаев $\theta_s = 0.813$, $\beta = 0.700$, $\beta_1 = -0.805$, $p = 1.953$.

Регулярный случай представлен на рис. 3, 4: $Fr = 1$, $\chi_0 = -1$, $t = 0.4$, $c_1 = 0.5$ (точки отрыва сближаются, остальные параметры не меняются). Здесь $\beta_1 = c_1 > 0$.

На рис. 3 показано согласование внешнего разложения (11) и двух погранслойных решений (24), (26) и (27). Первое погранслойное решение практически не отличается от внешнего разложения.

На рис. 4 показано согласование всех трех погранслойных решений: (24), (26); (27); (29). Отметим, что при $t = 0.4$ кривая, определяемая функцией (27), весьма незначительно отклоняется от главного приближения, имеющего вид квадратного корня. Это говорит о том, что во многих случаях (для $\beta_1 > 0$) при определении формы каверны вблизи точек отрыва можно ограничиться только главным приближением. При этом форма каверны в целом практически не изменится.

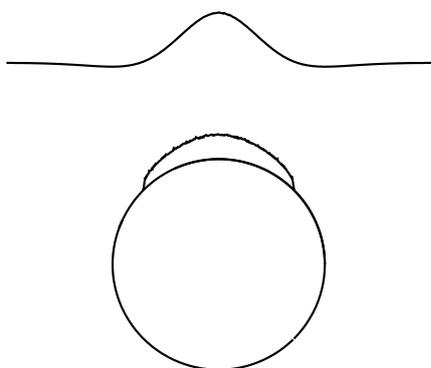


Рис. 3. Согласование двух погранслойных решений и внешнего разложения при $t = 0.4$. Случай, когда кривая расположена по разные стороны от точки отрыва. Условие регулярности выполнено

Fig. 3. Agreement of two boundary layer solutions and the outer expansion at $t = 0.4$. The case when the curve is located on different sides of the separation point. The regularity condition is satisfied

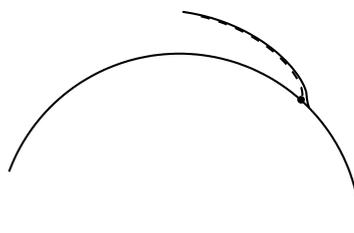


Рис. 4. Согласование главного приближения типа квадратного корня (пунктирная линия) и двух погранслойных решений при $t = 0.4$

Fig. 4. Agreement between the leading approximation of the square root type (dashed line) and two boundary layer solutions at $t = 0.4$

Заключение

Изучена задача о начальном этапе кавитационного движения кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Показано, что для определенных физических ситуаций, которые характеризуются условием регулярности, решение преобразованной задачи представимо в виде степенного асимптотического разложения по малому времени. При нарушении условия регулярности степенной характер асимптотики также можно сохранить, если во втором асимптотическом приближении провести сглаживание соответствующей граничной функции. Изучено поведение внутренней свободной границы жидкости вблизи точки отрыва. Установлено, что в главном приближении кривая подходит к точке отрыва под прямым углом. Более эффективные погранслойные решения сглаживают этот угол. При этом в одних случаях кривая выходит из точки отрыва и располагается от нее только по одну сторону. В других случаях кривая продолжается за точку отрыва и располагается от нее по разные стороны.



Список литературы

1. Tyvand P. A., Kostikov V. K. Impulsive acceleration of a circular cylinder under free surface // *Journal of Fluid Mechanics*. 2023. Vol. 969. Art. 12. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.557>, EDN: NXDRZJ
2. Голиков А. Е., Макаренко Н. И. Свободное движение цилиндра под поверхностью тяжелой жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 2024. Т. 65, № 5. С. 76–84. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415502>, EDN: XOPAIQ
3. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // *Journal of Engineering Mathematics*. 2011. Vol. 70. P. 239–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6>, EDN: OHRKVP
4. Норкин М. В. Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // *Прикладная механика и техническая физика*. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82. <https://www.mathnet.ru/rus/pmtf1384>, EDN: PDUFJR
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Москва : Наука, 1966. 448 с.
6. Норкин М. В. Образование каверны с неподвижными точками отрыва при вертикальном разгоне плавающего кругового цилиндра // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2024. № 91. С. 99–112. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/91/9>, EDN: GIQIYZ
7. Reinhard M., Korobkin A. A., Cooker M. J. Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration // *Journal of Engineering Mathematics*. 2016. Vol. 96, iss. 1. P. 155–174. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8>, EDN: WNRBNX
8. Пегов В. И., Мошкин И. Ю. Расчет гидродинамики кавитационного способа старта ракет // *Челябинский физико-математический журнал*. 2018. Т. 3, № 4. С. 476–485. DOI: <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13408>, EDN: YLLQPB
9. Аганин А. А., Ильгамов М. А., Мустафин И. Н. Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2020. Т. 162, № 1. С. 27–37. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.27-37>, EDN: NWMBXF
10. Ищенко А. Н., Буркин В. В., Дьячковский А. С., Чупашев А. В. Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 82. С. 97–107. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/82/8>, EDN: OTPNOV
11. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Москва : Наука, 1979. 536 с.
12. Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Ленинград : Судостроение, 1980. 240 с.
13. Норкин М. В. Динамика внутренней свободной границы жидкости на малых временах при вертикальном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2015. № 1. С. 30–35. EDN: TPOXJJ
14. Дворак А. В., Теселкин Д. А. Численное решение двумерных задач об импульсивном движении плавающих тел // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1986. Т. 26, № 1. С. 144–150.
15. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2008. 256 с. EDN: XMVZDP

References

1. Tyvand P. A., Kostikov V. K. Impulsive acceleration of a circular cylinder under free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, vol. 969, art. 12. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.557>, EDN: NXDRZJ
2. Golikov A. E., Makarenko N. I. Free motion of a cylinder under the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024, vol. 65, iss. 5, pp. 858–865. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894424050067>
3. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, vol. 70, pp. 239–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6>, EDN: OHRKVP



4. Norkin M. V. Formation of a cavity in the initial stage of motion of a circular cylinder in a fluid with a constant acceleration. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, iss. 4, pp. 532–539. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894412040074>, EDN: PFZHKZ
5. Sedov L. I. *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*. New York, Interscience Publications, 1965. 427 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1966. 448 p.).
6. Norkin M. V. Cavity formation with fixed separation points during vertical acceleration of a floating circular cylinder. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2024, iss. 91, pp. 99–112 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/91/9>, EDN: GIQIYZ
7. Reinhard M., Korobkin A. A., Cooker M. J. Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *Journal of Engineering Mathematics*, 2016, vol. 96, iss. 1. pp. 155–174. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8>, EDN: WNRBNX
8. Pegov V. I., Moshkin I. Yu. Computation of the rockets launch hydrodynamics. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, iss. 4, pp. 476–485 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13408>, EDN: YLLQPB
9. Aganin A. A., Ilgamov M. A., Mustafin I. N. Impact-induced cavitation in a cylindrical container with liquid. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, iss. 1, pp. 27–37 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.27-37>, EDN: NWMBXF
10. Ishchenko A. N., Burkin V. V., D'yachkovskiy A. S., Chupashev A. V. Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup. *Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*, 2023, vol. 82. pp. 97–107 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/82/8>, EDN: OTPNOV
11. Gurevich M. I. *Teoriya struy ideal'noi zhidkosti* [Theory of jets of an ideal fluid]. Moscow, Nauka, 1979. 536 p. (in Russian).
12. Ivanov A. N. *Gidrodinamika razvitykh kavitatsionnykh techeniy* [Hydrodynamics of developed cavitation flows]. Leningrad, Sudostroenie, 1980. 240 p. (in Russian).
13. Norkin M. V. Dynamics of the internal free boundary of a liquid at short times during a vertical impact of a circular cylinder completely immersed in a liquid. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki*, 2015, iss. 1, pp. 30–35 (in Russian). EDN: TPOXJJ
14. Dvorak A. V., Teselkin D. A. Numerical solution of two-dimensional problems of the pulse motion of floating bodies. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, vol. 26, iss. 1, pp. 91–95. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(86\)90188-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(86)90188-6)
15. Zhukov M. Yu., Shiryayeva E. V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the finite element package FreeFem++ for hydrodynamics problems, electrophoresis and biology]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2008. 256 p. (in Russian). EDN: XMVZDP

Поступила в редакцию / Received 21.04.2025

Принята к публикации / Accepted 24.09.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 81–90

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 81–90
<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-81-90>

EDN: <https://elibrary.ru/ONOUJV>

Article

Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 2. Microgeometrical properties

E. V. Sadyrin[✉], A. L. Nikolaev, I. Yu. Zabayaka, S. S. Volkov

Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don 344003, Russia

Evgeniy V. Sadyrin, esadyrin@donstu.ru, <https://orcid.org/0009-0000-2227-1299>, SPIN: 7472-7963, AuthorID: 770513

Andrey L. Nikolaev, andreynicolaev@eurosites.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3491-4575>, SPIN: 8183-3370, AuthorID: 968623

Igor Yu. Zabayaka, zabayakaigor@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6759-549X>, SPIN: 8599-3508, AuthorID: 922738

Sergei S. Volkov, fenix_rsu@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7252-4522>, SPIN: 6349-1960, AuthorID: 740654

Abstract. Today, dental materials face a number of requirements related to the need to withstand to withstand high masticatory loads, while forming, while forming a strong interface with the surrounding biological tissues. The study of the microgeometrical properties of modern materials used to treat caries allows us to draw a conclusion about their efficacy in imitating the tooth tissues and and forming an interface devoid of various microdefects. In the present work, for this purpose, an *ex vivo* study of the surfaces of composite and glass ionomer cement filling sections, as well as enamel after polymer infiltration and tissues in their vicinity, was carried out using atomic force and scanning electron microscopy. The obtained roughness parameter values for areas after dental treatment were compared with those of sound tissues; one-way analysis of variance was used to assess statistically significant differences between the mean values of the studied characteristics. The results of the measurements allow us to conclude that the polymer infiltration into the tooth tissue was successful, and in the case of clinical need for filling, the composite material is preferable to glass ionomer cement.

Keywords: enamel, dentine, composite material, glass ionomer cement, polymer infiltrant, atomic force microscopy, microstructure, roughness

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-29-00829, <https://rscf.ru/en/project/25-29-00829/>). The authors thank S. Yu. Maksyukov for assistance in performing *ex vivo* sealing of the samples. Atomic force and scanning electron microscopy were carried out using the equipment of the Resource Center for Collective Use of the Scientific and Educational Center for Functional Gradient Materials of Don State Technical University (RCCP DSTU).

For citation: Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Zabayaka I. Yu., Volkov S. S. Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 2. Microgeometrical properties. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-81-90>, EDN: ONOUJV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья
УДК 531.7

Характеризация свойств современных стоматологических материалов и тканей в их окрестности.

Часть 2. Микрогеометрические свойства

Е. В. Садырин[✉], А. Л. Николаев, И. Ю. Забияка, С. С. Волков

Донской государственный технический университет, Россия, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

Садырин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики биосовместимых материалов, доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика», esadyrin@donst.u.ru, <https://orcid.org/0009-0000-2227-1299>, SPIN: 7472-7963, AuthorID: 770513

Николаев Андрей Леонидович, заведующий лабораторией механики биосовместимых материалов, andreynicolaev@eurosites.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3491-4575>, SPIN: 8183-3370, AuthorID: 968623

Забияка Игорь Юрьевич, младший научный сотрудник лаборатории электронной и оптической микроскопии, zabiyaikaigor@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6759-549X>, SPIN: 8599-3508, AuthorID: 922738

Волков Сергей Сергеевич, ведущий научный сотрудник лаборатории функционально-градиентных и композиционных материалов, fenix_rsu@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7252-4522>, SPIN: 6349-1960, AuthorID: 740654

Аннотация. На сегодняшний день к стоматологическим материалам выдвигается ряд требований, связанных с необходимостью выдерживать высокую нагрузку при пережевывании пищи, при этом формируя прочную границу раздела с окружающей биологической тканью. Исследование микрогеометрических свойств современных материалов, используемых для лечения кариеса, позволяет сделать вывод о том, насколько они способны эффективно имитировать ткань зуба и формировать интерфейс, лишённый разного рода микродефектов. В настоящей работе для данной цели проведено *ex vivo* исследование поверхностей шлифов пломб из композитного материала и стеклоиономерного цемента, а также эмали после полимерной инфильтрации и тканей в их окрестности с использованием атомно-силовой и сканирующей электронной микроскопии. Полученные значения параметров шероховатости для областей после стоматологического вмешательства сравнивались со значениями для здоровых тканей, для оценки статистически значимых различий между средними значениями изучаемых характеристик использовался однофакторный дисперсионный анализ. Результаты измерений позволили сделать вывод об успешности проникновения полимерного инфильтранта в ткани зуба, при этом в случае клинической необходимости пломбирования композитный материал оказался предпочтительнее, чем стеклоиономерный цемент.

Ключевые слова: эмаль, дентин, композитный материал, стеклоиономерный цемент, полимерный инфильтрант, атомно-силовая микроскопия, микроструктура, шероховатость

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00829, <https://rscf.ru/project/25-29-00829/>). Авторы благодарят С. Ю. Максуюкова за помощь в проведении *ex vivo* установки пломб на образцах. Атомно-силовая и сканирующая электронная микроскопия выполнены на оборудовании Ресурсного центра коллективного пользования НОЦ «Материалы» Донского государственного технического университета (РЦКП ДГТУ).

Для цитирования: Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Zabiyaika I. Yu., Volkov S. S. Characterization of properties for modern dental materials and bordering tissues. Part 2. Microgeometrical properties [Садырин Е. В., Николаев А. Л., Забияка И. Ю., Волков С. С. Характеризация свойств современных стоматологических материалов и тканей в их окрестности. Часть 2. Микрогеометрические свойства] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-81-90>, EDN: ONOUJY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Continuation. See the beginning: *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 555–565. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-4-555-565>, EDN: SRTEFP



Introduction

The total annual national expenditure on outpatient dental care (public and private) in Russia is estimated at 892 million US dollars (as of 2019, according to [1]). The most common disease of the oral cavity is caries, the mechanisms of which are associated with the progressive loss of the mineral component of hard tissues under the influence of acidogenic bacteria in the dental biofilm. This is expressed in a decrease in mineral density, mechanical properties, and other alterations [2]. Teeth are usually in a dynamic equilibrium of alternating demineralization and remineralization, where the former is a partial dissolution of hydroxyapatite crystallites in the presence of acid, and the latter is a reprecipitation and crystallization of minerals in the tissues [3, 4]. Caries occurs in the case of prolonged demineralization, while its early manifestations (white spot stage, WSP), as a rule, occur without the formation of significant enamel defects.

Long-term demineralization of dental tissues is reflected in changes in their microstructure and microgeometrical parameters. A number of researchers [5] used optical coherence tomography to describe changes in the microstructure of biological dental tissues affected by WSLs for early diagnosis of the patient. Kiesow et al. [6] visualized changes in the microstructure and chemical composition of human enamel during treatment and remineralization of artificially created carious lesions. Besnard et al. [7] performed nano/macro-histological characterization of the hierarchical structure of human carious enamel using various techniques, including light microscopy, scanning electron microscopy (SEM), focused ion beam, and X-ray tomography. In [8], the structure and mechanical properties of pathologically altered enamel and dentine were studied using both optical microscopy and nanoindentation, and in [9], a correlation was studied between the mechanical properties and mineral density of dentine damaged by caries at the stage of brown spot lesion. Zuluaga – Morales et al. [10] assessed the effect of the *pH* cycling procedure on the mineral composition and microstructure of dentine using SEM and backscattering spectroscopy. Atomic force microscopy (AFM) is a common tool for assessing microgeometrical parameters and local microstructural features of areas susceptible to caries [11].

AFM and SEM techniques allow for the qualitative and quantitative characterization of microgeometrical parameters not only of pathologically altered tissues but also of biocompatible materials that are intended to replace or modify these tissues. Kakaboura et al. [12] conducted an *in vitro* study aimed at comparing different methods for measuring surface roughness and topography in several types of dental composite materials. Guler and Unal [13] evaluated the surface roughness parameters and color changes of five dental restorative materials after aging in liquids at different *pH* values. In [14], the morphological and structural changes in enamel after processing with an Er:YAG laser using AFM, SEM, and energy-dispersive X-ray spectroscopy were evaluated.

In the present work, an *ex vivo* study of the microgeometrical properties of composite and GIC fillings, the enamel surrounding these fillings, the dentine in their vicinity (i.e., located as close as possible to the dentine-enamel junction close to the filling, DEJ), and sound dentine and enamel on the opposite side of the tooth was performed using AFM. A similar scheme was used to study the mechanical and microgeometrical properties of enamel modified with an infiltrant and the dentine in its vicinity, as well as sound tissues. This approach ensured not only a quantitative assessment of the values of microgeometrical characteristics in areas that are key for a dental clinician, but also a visual comparison of the results of dental intervention. For a more detailed interpretation of the obtained experimental data, SEM images of the areas of interest were obtained.

1. Materials and methods

The study included four human molars extracted for orthodontic reasons in the Dental Department of the Rostov State Medical University Clinic, Rostov-on-Don, Russia. The local independent ethics committee of the university approved the study protocol (extract 14/21 dated September 23, 2021), and the patients provided informed consent. The dental materials



used in the samples included Vitremer glass ionomer cement (GIC) (3M ESPE, St. Paul, USA), Estelite Flow Quick composite (Tokuyama Dental, Tokyo, Japan), and Icon infiltrant (DMG Chemisch-Pharmazeutische, Berlin, Germany). To form thin sections of the surface of the samples containing the areas under study, their sample preparation was performed in longitudinal section using an Isomet 4000 precision saw (Buehler, Lake Bluff, USA), then grinding (with SiC-based sandpaper of P800, P1200, P2000, P2500 grain size) and polishing the surface (diamond particles with a diameter of 6 and 1 μm , final polishing was performed using a sol-gel suspension containing aluminum oxide particles with a diameter of 0.05 μm) on a glass substrate.

The study of the microgeometrical characteristics of the sample surface was carried out on an AFM Nanoeducator (NT-MDT, Zelenograd, Russia) equipped with a tungsten probe. Scanning was performed in a semi-contact mode at a speed of 10.05 $\mu\text{m/s}$ at a resolution of 256 x 256 pixels. The probe was positioned using an optical USB microscope installed above the force interaction sensor of the device. Gwyddion software (Czech Metrology Institute, Brno, Czech Republic) was used for image processing. The microgeometrical characteristics (average surface roughness R_a and average maximum profile height R_z) were measured in three directions: horizontal, vertical, and diagonal ones. Five profiles were constructed for each of these directions, and each profile was considered as an average of 10 adjacent profiles. Thus, the average value of 150 profiles with a standard deviation was then obtained. The maximum roughness height R_t was measured for the entire image.

Visualization of the filling surfaces and the interfaces between the filling and the surrounding enamel was performed using a Crossbeam 340 SEM (Carl Zeiss Microcracy GmbH, Oberkochen, Germany). Before the examination, the tooth samples were successively kept in baths with acetone solutions (pure for analysis) of 25, 50 and 70% (by volume) for 5 min each, then 80, 90, 95 and 100% (by volume) for 15 min each and, finally, were successively immersed twice in 100% (by volume) acetone for 30 min, and finally in 100% (by volume) acetone for 48 hours at 4 °C. The samples were then kept in a vacuum chamber for 1 hour at a pressure of 6×10^{-2} mbar, then 1 hour at a pressure of 5×10^{-2} mbar, then 24 hours at a pressure of 2×10^{-2} mbar until the pressure reached 6×10^{-1} mbar. SEM studies were performed using an Everhart–Thornley secondary electron detector with an accelerating voltage of 1 kV. The aperture size was 30 μm .

The Shapiro–Wilk test was used to test whether the sets of microgeometrical characteristics were normally distributed. The test statistic (D) provided a measure of how much the data set distribution deviated from the normal distribution. The p value quantified this probability. One-way analysis of variance (ANOVA) was used to identify statistically significant differences between the means of the two study groups of R_a (before and after dental treatment) for each sample. In particular, the null hypothesis was tested: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, where μ is the group mean, and k is the number of groups. The F -coefficient at a significance level of $\alpha = 0.05$ was used in the calculations.

2. Results and discussion

Figures 1, 2 show AFM images demonstrating characteristic micro- and nanoscale structural features for each region of interest of the sample over a scanning field of $8 \times 8 \mu\text{m}$. The microgeometrical roughness parameters calculated from these images are given in the Table.

Figure 3 shows the surface profiles of the pores of the composite material from Fig. 1, *a* (averaging over 20 adjacent profiles) and the GIC particle (averaging over 40 adjacent profiles) from Fig. 1c, indicated by the dotted line. The roughness parameter values according to the profilograms for the pores of the composite material were 23.6, 106.8, 130.2 nm; for a typical glass particle — 103.7, 323.3, 396.0 nm for R_a , R_z , R_t , respectively.

To assess statistically significant differences in the results of microgeometrical measurements, two sets of R_a values were selected (sample size — 15 measurements for each): composite filling and sound enamel; GIC filling and sound enamel; infiltrated enamel and sound enamel (for two cases). In all cases, we obtained from the sample information that the test statistic F is not in



the 95% acceptance region, based on which a conclusion was made to reject the null hypothesis (at a p value < 0.05), thus, at least two group mean values for each material were statistically significantly different from each other.

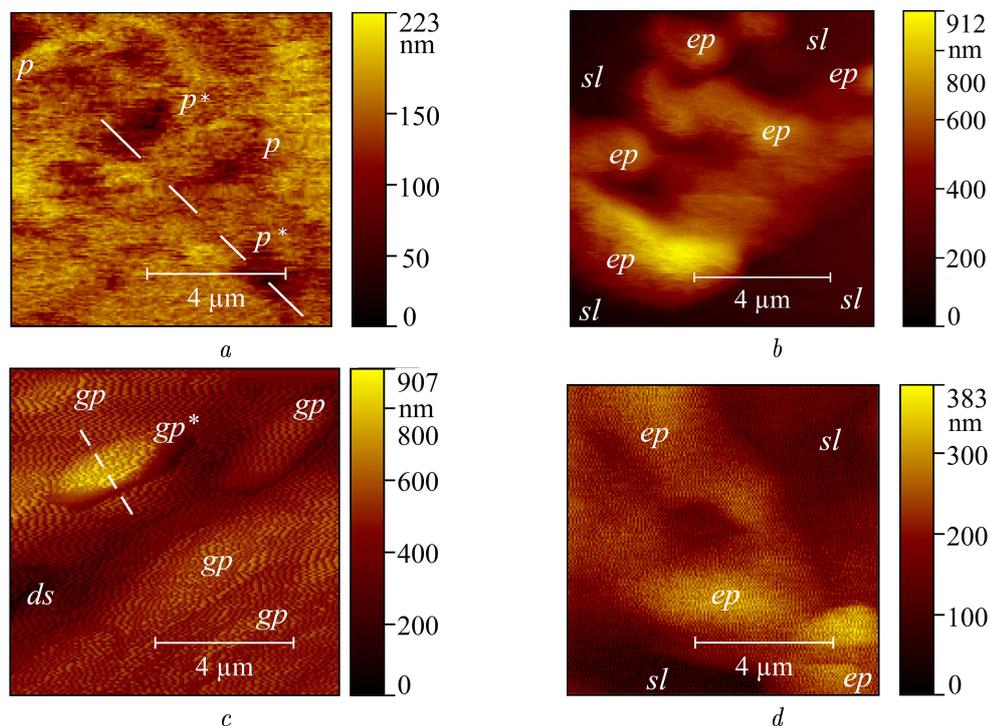


Fig. 1. Typical AFM determined topography of the surface areas: *a, b* shows composite filling and sound enamel; *c, d* shows GIC filling and sound enamel; *ep* stands for enamel prism, *p* stands for pore, *sl* stands for smear layer, *gp* stands for glass particle, *ds* stands for debonding surface; the symbol * denotes relief elements for which separate surface profilograms were constructed (color online)

Table. Microgeometrical properties of the samples studied

Treatment type	Goup	R_a , nm	\pm	R_z , nm	\pm	R_t , nm
Composite filling	Filling	18.0	3.2	72.1	18.1	223
	Sound enamel	92.8	33.6	345.5	117.9	912
GIC filling	Filling	68.2	24.9	242.6	90.0	907
	Sound enamel	39.5	10.4	132.4	45.2	383
Infiltrant (first case)	Infiltrated enamel	51.0	14.6	178.7	56.6	486
	Sound enamel	19.0	11.8	65.6	36.7	796
Infiltrant (second case)	Infiltrated enamel	53.2	20.4	203.3	82.5	619
	Sound enamel	31.8	7.6	109.5	26.5	355

Figures 4, *a, c* show the SEM images of the surfaces of composite and glass ionomer cement fillings, respectively, and Fig. 4, *b, d* show the interfaces of the above-mentioned fillings with the surrounding enamel.

The results of microgeometrical measurements of filling materials showed a fundamental difference in the nature of the roughness parameters in the pairs “filling – sound enamel” for the composite material and GIC. Thus, in the case of GIC, each value of the roughness parameter was higher than that recorded for the sound enamel: R_a by 72.7%, R_z by 83.2%, R_t by 2.1 times. This is explained by the presence of large ellipsoidal glass particles on the filling surface [15] (designated as *gp* in Fig. 1, *c* and Fig. 3), which alternate with delamination surfaces [16] (designated as *ds* in Fig. 1, *c*), forming a loose surface structure. The characteristic dimensions of the microscale



glass particles in the AFM image were: length $3.23 \pm 0.85 \mu\text{m}$, width $1.17 \pm 0.27 \mu\text{m}$. In the case of the composite material, on the contrary, the values of all the studied mechanical properties were lower for the filling compared to the sound enamel: R_a by 80.6%, R_z by 79.1%, R_t by 75.6%. This filling on the section showed the least developed relief among all the studied areas within the framework of this AFM study.

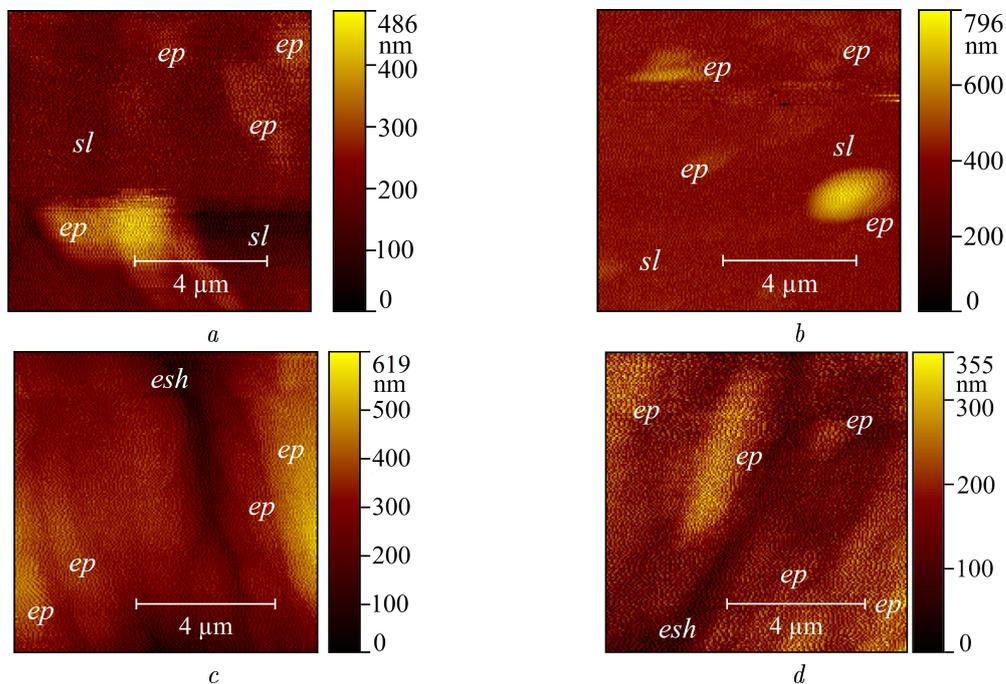


Fig. 2. Typical AFM determined topography of the surface areas: *a, b* shows infiltrated enamel (first case) — sound enamel; *c, d* shows infiltrated enamel (second case) — sound enamel; *ep* stands for enamel prism, *sl* stands for smear layer, *gp* stands for glass particle, *ds* stands for debonding surface, *esh* stands for enamel sheath (color online)

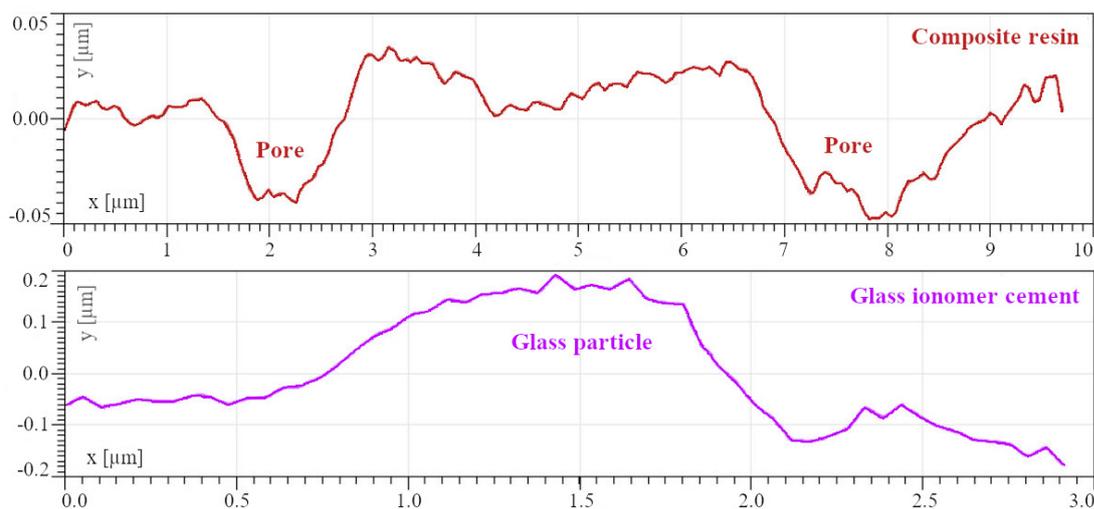


Fig. 3. Surface profiles of pores of composite material and glass particle of GIC

However, the microstructure of the composite filling has one important feature — micropores (marked as *p* in Fig. 1, *a*), typical diameters of which are $0.86 \pm 0.25 \mu\text{m}$. At the same time, SEM observations reveal the smallest cracks between the enamel prisms (Fig. 4, *b*), as well as in the vicinity of the GIC pores (Fig. 4, *c*). We note large-scale damage to the GIC-biological



tissue interface, clearly visible in SEM images (Fig. 4, *d*) with a width of more than $50\ \mu\text{m}$, presumably caused by increased stress concentration due to the excessive difference in the mechanical characteristics of the filling and the surrounding tissue (which can be further studied using the approaches [17–19]).

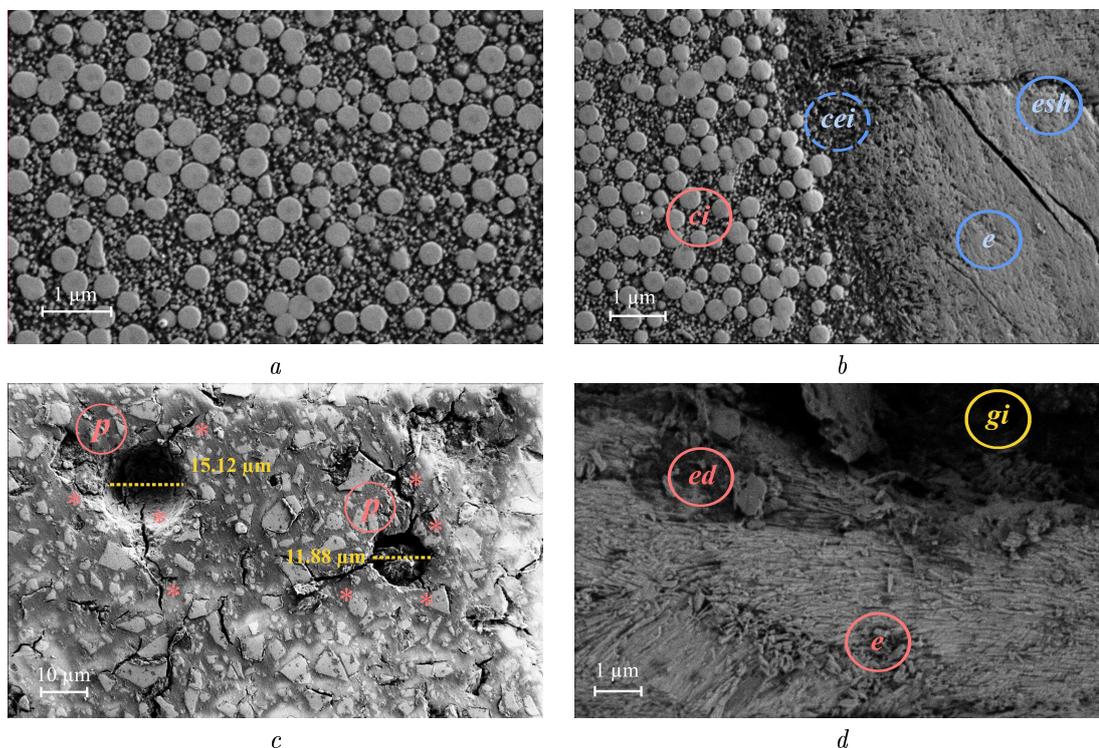


Fig. 4. Microstructure of surfaces obtained using SEM: *a* shows composite filling; *b* shows interface of the composite filling with surrounding enamel; *c* shows GIC filling; *d* shows tissue on the interface with the GIC filling; *e* stands for enamel, *ed* stands for damaged enamel, *ci* stands for inner layer of the filling, *gi* stands for interface between GIC and tissue, *cei* stands for interface between the filling and enamel, *esh* stands for enamel sheath, *p* stands for pore, symbol * marks the cracks in the vicinity of the pores in GIC (color online)

The results of microgeometrical measurements of the infiltrant showed a generally similar picture for both samples: in both cases, an increase in the parameters R_a and R_z was recorded. For the first sample treated with the infiltrant, these roughness parameters were 2.7 times higher than in sound enamel. For the second sample, these parameters were 67.3% and 85.7% higher than in the sound enamel for R_a and R_z , respectively. Note the closeness of the absolute values of R_a and R_z for both samples after infiltration. Note also that the analysis of the parameter R_t taken over the scanning field as a whole, although providing useful information about the microrelief of the material, requires a significantly larger number of AFM images in different areas of interest to collect statistical information and form reliable conclusions about peak heights and other features of the elevated surface of the sample surface.

Changes in the microgeometrical characteristics of the samples after infiltration indicate successful penetration of the polymer infiltrant into the tissue, which is consistent with the results of Sadyrin et al. [20], while a visual similarity of the microrelief of the tissue surface before and after treatment was noted. This observation indicates that, by modifying the enamel, the infiltrant generally preserves the enamel structure relatively intact and close to natural tissue, although the mechanical properties of the tissue cannot be fully restored due to the difference in the properties of the polymer and natural hydroxyapatite.



Conclusion

In the present work, an *ex vivo* study of the microgeometrical properties of composite and GIC fillings, as well as of infiltrated enamel and tissues in their vicinity, was performed, followed by a comparison of the results with the corresponding properties of the sound tissues. In the case of GIC, an increase in each roughness parameter value was recorded compared to the sound enamel, which is explained by the presence of large ellipsoid glass particles on the filling surface, alternating with exfoliation surfaces. In the case of the composite material, on the contrary, the values of all the studied microgeometrical properties were significantly lower for the filling compared to sound enamel, while micropores were found on its surface. The obtained experimental data allow us to conclude that in case of clinical need for filling, it is preferable to use a composite material due to a smaller number of internal structure artifacts and a smaller size of such artifacts (in addition to the proximity of the mechanical parameters of this biocompatible material to the surrounding biological tissue).

Calculations of the roughness parameters demonstrated that, although none of the materials examined restored the microgeometric characteristics to natural values, the infiltrant generally preserves the enamel microstructure. The results of the study, together with the previously made conclusions about the mineral density of enamel modified by the infiltrant [21], are encouraging in terms of the clinical use of minimally invasive dental materials; some features of the interaction of such materials and tooth tissues are still not fully understood. In particular, how does the thickness of the enamel (and proximity to the DEJ) affect the process of infiltrant penetration (e.g., which areas of the tooth are preferable for this type of treatment, and which areas should be avoided).

Despite the statistically significant difference in the mean R_a roughness values across the set of measurements in the single sample studies, in future studies, we plan to collect statistical data on the depth of infiltrate penetration into different areas of the tooth, including the DEJ, using a larger number of samples. Such further studies will provide an opportunity to develop guidelines for practicing dental clinicians on the treatment of early caries with maximum benefit for the patient, thereby expanding on existing recommendations [22–25].

References

1. Jevdjevic M., Listl S. Economic impacts of oral diseases in 2019-data for 194 countries. *Database, Heidelberg Open Research Data* (heiDATA)[accessed 2025 May 6], 2022. DOI: <https://doi.org/10.11588/data/JGJKK0>
2. Sadyrin E., Swain M., Mitrin B., Rzhepakovsky I., Nikolaev A., Irkha V., Yogina D., Lyanguzov N., Maksyukov S., Aizikovich S. Characterization of enamel and dentine about a white spot lesion: Mechanical properties, mineral density, microstructure and molecular composition. *Nanomaterials*, 2020, vol. 10, iss. 9, art. 1889. DOI: <https://doi.org/10.3390/nano10091889>
3. Xue J., Li W., Swain M. V. *In vitro* demineralization of human enamel natural and abraded surfaces: A micromechanical and SEM investigation. *Journal of Dentistry*, 2009, vol. 37, iss. 4, pp. 264–272. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2008.11.020>
4. Zavgorodniy A. V., Rohanizadeh R., Swain M. V. Ultrastructure of dentine carious lesions. *Archives of Oral Biology*, 2008, vol. 53, iss. 2, pp. 124–132. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.archoralbio.2007.08.007>
5. Shi B., Niu J., Zhou X., Dong X. Quantitative assessment methods of early enamel caries with optical coherence tomography: A review. *Applied Sciences*, 2022, vol. 12, iss. 17, art. 8780. DOI: <https://doi.org/10.3390/app12178780>
6. Kiesow A., Morawietz M., Gruner J., Gierth S., Berthold L., Schneiderman E., St John S. High-resolution characterization of enamel remineralization using time-of-flight secondary ion mass spectrometry and electron microscopy. *Caries Research*, 2024, vol. 58, iss. 4, pp. 407–420. DOI: <https://doi.org/10.1159/000535979>
7. Besnard C., Marie A., Buček P., Sasidharan S., Harper R. A., Marathe S., Wanelik K., Landini G., Shelton R. M., Korsunsky A. M. Hierarchical 2D to 3D micro/nano-histology of human dental caries



- lesions using light, X-ray and electron microscopy. *Materials & Design*, 2022, vol. 220, art. 110829. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.110829>
8. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Vasiliev A. S., Aizikovitch S. M. Evaluation of the influence of white spot lesion on the mechanical properties of human tooth enamel and dentine. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 346–359 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-346-359>, EDN: ZTLZZQ
 9. Sadyrin E. V. Correlating the mechanical properties to the mineral density of brown spot lesion in dentine using nanoindentation and X-ray micro-tomography. In: Altenbach H., Eremeyev V. A., Galybin A., Vasiliev A. (eds.) *Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications*. Advanced Structured Materials, vol. 155. Cham, Springer, 2022, pp. 389–398. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3_21
 10. Zuluaga-Morales J. S., Bolaños-Carmona M. V., Cifuentes-Jiménez C. C., Álvarez-Lloret P. Chemical, microstructural and morphological characterisation of dentine caries simulation by pH-cycling. *Minerals*, 2021, vol. 12, iss. 1, art. 5. DOI: <https://doi.org/10.3390/min12010005>
 11. Coradin T., Porporatti A. L., Bosco J. Assessing *in vitro* remineralization of primary artificial caries: A systematic review of multi-techniques characterization approaches. *Dentistry Review*, 2023, vol. 3, iss. 4, art. 100073. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dentre.2023.100073>
 12. Kakaboura A., Fragouli M., Rahiotis C., Silikas N. Evaluation of surface characteristics of dental composites using profilometry, scanning electron, atomic force microscopy and gloss-meter. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, 2007, vol. 18, iss. 1, pp. 155–163. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10856-006-0675-8>
 13. Guler S., Unal M. The evaluation of color and surface roughness changes in resin based restorative materials with different contents after waiting in various liquids: An SEM and AFM study. *Microscopy Research and Technique*, 2018, vol. 81, iss. 12, pp. 1422–1433. DOI: <https://doi.org/10.1002/jemt.23104>
 14. Rodríguez-Vilchis L. E., Contreras-Bulnes R., Olea-Mejía O. F., Sánchez-Flores I., Centeno-Pedraza C. Morphological and structural changes on human dental enamel after Er: YAG laser irradiation: AFM, SEM, and EDS evaluation. *Photobiomodulation, Photomedicine, and Laser Surgery*, 2011, vol. 29, iss. 7, pp. 493–500. DOI: <https://doi.org/10.1089/pho.2010.2925>
 15. Xie D., Brantley W. A., Culbertson B. M., Wang G. Mechanical properties and microstructures of glass-ionomer cements. *Dental Materials*, 2000, vol. 16, iss. 2, pp. 129–138. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0109-5641\(99\)00093-7](https://doi.org/10.1016/s0109-5641(99)00093-7)
 16. Kheur M., Kantharia N., Iakha T., Kheur S., Husain N. A. H., Özcan M. Evaluation of mechanical and adhesion properties of glass ionomer cement incorporating nano-sized hydroxyapatite particles. *Odontology*, 2020, vol. 108, iss. 1, pp. 66–73. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10266-019-00427-5>
 17. Shahmoradi M., Wan B., Zhang Z., Swain M., Li Q. Mechanical failure of posterior teeth due to caries and occlusal wear-A modelling study. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2022, vol. 125, art. 104942. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2021.104942>
 18. Yilmaz E. D., Schneider G. A., Swain M. V. Influence of structural hierarchy on the fracture behaviour of tooth enamel. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2015, vol. 373, iss. 2038, art. 20140130. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0130>
 19. Li Y., Shao B., Liu Z. Adhesive damage of class V restorations under shrinkage stress and occlusal forces using cohesive zone modeling. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2025, vol. 163, art. 106880. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2024.106880>
 20. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Swain M. V., Maksyukov S. Yu., Vasiliev A. S. Efficacy of dental materials in terms of apparent mineral density restoration: Composite resin, glass ionomer cement and infiltrant. *Composites Part C: Open Access*, 2021, vol. 6, art. 100192. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2021.100192>
 21. Sadyrin E. V. Influence of a polymeric infiltrant on the density of enamel white spot lesions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 83–94 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-83-94>, EDN: MMVQYM
 22. De Caluwé T., Vercruyse C. W. J., Fraeyman S., Verbeeck R. M. H. The influence of particle size and fluorine content of aluminosilicate glass on the glass ionomer cement properties. *Dental Materials*, 2014, vol. 30, iss. 9, pp. 1029–1038. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dental.2014.003>
 23. Moheet I. A., Luddin N., Ab Rahman I., Kannan T. P., Abd Ghani N. R. N., Masudi S. M.



- Modifications of glass ionomer cement powder by addition of recently fabricated nano-fillers and their effect on the properties: A review. *European Journal of Dentistry*, 2019, vol. 13, iss. 3, pp. 470–477. DOI: <https://doi.org/10.1055/s-0039-1693524>
24. Al-Halabi M., Salami A., Alnuaimi E., Kowash M., Hussein I. Assessment of paediatric dental guidelines and caries management alternatives in the post COVID-19 period. A critical review and clinical recommendations. *European Archives of Paediatric Dentistry*, 2020, vol. 21, pp. 543–556. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40368-020-00547-5>
25. Slayton R. L., Urquhart O., Araujo M. W. B., Fontana M., Guzmán-Armstrong S., Nascimento M. M., Novy B. B., Tinanoff N., Weyant R. J., Wolff M. S., Young D. A., Zero D. T., Tampi M. P., Pilcher L., Banfield L., Carrasco-Labra A. Evidence-based clinical practice guideline on nonrestorative treatments for carious lesions: A report from the American Dental Association. *The Journal of the American Dental Association*, 2018, vol. 149, iss. 10, pp. 837–849. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.adaj.2018.07.002>

Поступила в редакцию / Received 19.02.2025

Принята к публикации / Accepted 18.06.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Научная статья

УДК 004.932

Разработка и валидация программно-аппаратного комплекса для количественной оценки осанки с использованием цифровых видеоданных

В. В. Смирнова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Смирнова Виктория Владимировна, научный сотрудник НИИ математики и механики имени Н. Г. Чеботарева, yaikovavic_toriya@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1107-2152>, SPIN: 8101-3211, AuthorID: 1175356

Аннотация. В статье представлено исследование, направленное на верификацию точности разработанного программно-аппаратного комплекса для анализа осанки человека с использованием цифровой видеокамеры. Цель работы заключалась в сравнении результатов, полученных с помощью разработанного комплекса, с данными системы захвата движения Vicon Nexus. Исследование включало разработку методики обработки видеоизображений для определения параметров осанки, создание программного обеспечения для автоматического анализа видео и расчета метрик, а также проведение экспериментального исследования с участием 14 испытуемых (7 мужчин и 7 женщин). Съемка осуществлялась одновременно с использованием цифровой видеокамеры (разрешение 4К, частота 30 fps) и системы Vicon Nexus с инфракрасными камерами и светоотражающими маркерами. Для анализа данных применялись методы компьютерного зрения, включая использование предобученной нейронной модели SAM для сегментации изображений и вычисление угловых характеристик осанки. Статистический анализ показал высокую степень согласованности между двумя системами (коэффициент кросс-корреляции $r = 0.81$), при этом процент расхождения результатов составил 4–5%. Основные факторы, влияющие на точность, включают технические ограничения видеокамеры, погрешности математических моделей и дисторсию оптической системы. Полученные результаты подтверждают возможность применения разработанного комплекса для оценки осанки в клинических условиях, что открывает перспективы для его использования в спортивной медицине, реабилитации и биомеханике.

Ключевые слова: видеоанализ, биомеханика, осанка, система Vicon Nexus, компьютерное зрение, нейронные сети, сегментация изображений, угловые характеристики, клиническая применимость

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому федеральному университету по государственному заданию в сфере научной деятельности (проект № FZSM-2023-0009).

Для цитирования: Смирнова В. В. Разработка и валидация программно-аппаратного комплекса для количественной оценки осанки с использованием цифровых видеоданных // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 91–100. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-91-100>, EDN: PDPEPN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Development and validation of a hardware-software system for quantitative assessment of posture using digital video data

V. V. Smirnova

Kazan (Volga Region) Federal University, 18 Kremlevskaya St., Kazan 420008, Russia

Victoriya V. Smirnova, yaikovavictoriya@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1107-2152>, SPIN: 8101-3211, AuthorID: 1175356

Abstract. The study aims to verify the accuracy of a developed hardware-software system for analyzing human posture using a digital video camera. The objective of the work was to compare the results obtained with the developed system to the data from the Vicon Nexus motion capture system. The research included the development of a methodology for processing video images to determine posture parameters, the creation of software for automatic video analysis and metric calculation, and the conduct of an experimental study involving 14 participants (7 men and 7 women). Simultaneous recording was performed using a digital video camera (4K resolution, 30 fps) and the Vicon Nexus system with infrared cameras and reflective markers. Data analysis employed computer vision techniques, including the use of the pre-trained neural model SAM for image segmentation and the computation of angular posture characteristics. Statistical analysis demonstrated a high degree of agreement between the two systems (cross-correlation coefficient $r = 0.81$), with a result discrepancy of 4–5%. Key factors affecting accuracy include technical limitations of the video camera, errors in mathematical models, and optical system distortion. The obtained results confirm the potential of using the developed system for posture assessment in clinical settings, opening up prospects for its application in sports medicine, rehabilitation, and biomechanics.

Keywords: video analysis, biomechanics, posture, Vicon Nexus system, computer vision, neural networks, image segmentation, angular characteristics, clinical applicability

Acknowledgements: The research was funded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities (project No. FZSM-2023-0009).

For citation: Smirnova V. V. Development and validation of a hardware-software system for quantitative assessment of posture using digital video data. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 91–100 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-91-100>, EDN: PDPEPN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Определение и анализ позы человека представляет собой одну из значимых задач в области компьютерного зрения, которая активно развивается на стыке технологий искусственного интеллекта, биомеханики и медицины. Основная цель этой задачи заключается в точном определении ключевых точек тела человека, таких как голова, плечи, руки, колени, запястья, локти, а также в соединении этих точек для создания скелетной модели, отражающей текущую позу [1].

В современном мире анализ человеческой позы играет важную роль в решении актуальных проблем. В медицине, например, оценка положения пациента может способствовать диагностике заболеваний опорно-двигательного аппарата, мониторингу процесса восстановления после травм или операций, а также разработке персонализированных программ реабилитации [2]. В спорте анализ техники выполнения упражнений с помощью систем оценки позы способствует оптимизации тренировочного процесса, снижению риска травм и улучшению результатов спортсменов [3].



В данном исследовании особый интерес представляет практическое применение систем видеозахвата в биомеханике и медицинских исследованиях. Они помогают врачам, физиотерапевтам и исследователям понимать механику движений, диагностировать заболевания, разрабатывать эффективные методы лечения и реабилитации. Системы, работающие на основе оптоэлектронного захвата движения, имеют несомненные преимущества. Они обеспечивают высокую точность в измерении движений, что позволяет делать более надежные выводы. Согласно данным производителя (Vicon), система обеспечивает точность до ± 0.25 мм при использовании камер (например, Vicon Vero или Vicon Vantage). В некоторых исследованиях была продемонстрирована точность порядка 0.3–0.5 мм при оптимальных условиях работы [4–6].

В статьях [7, 8] ведется рассуждение об ошибках, связанных с размещением светоотражающих маркеров и/или артефактов движения, которые могут привести к неправильному измерению углов и последующим неточностям. Авторы подчеркивают важность учета погрешностей измерений и влияния внешних факторов, таких как освещение и размещение камер.

Цифровые видеокамеры широко доступны и относительно недороги по сравнению с системами захвата движения. Многие современные смартфоны также имеют камеры высокого качества, которые можно использовать для анализа движения. Например, в [9] целью работы является демонстрация эффективности и возможностей мобильной системы захвата движения MO2CA, основанной на смартфоне и цветных маркерах, для количественного анализа как крупных, так и мелких движений человека (от движений пальцев до движений всего тела). Авторы определили рабочие параметры системы (операционный диапазон): дистанция обнаружения цели, разрешение и значимость целей, скорость движения объектов, интенсивность освещения, и показали ее потенциал для клинического применения.

В работе [10] авторы осуществили определение точности и надежности 2D-системы захвата движения в оценке адаптивной кинематики походки у субъектов с потерей центрального зрения, пожилых здоровых участников и молодых здоровых участников. Авторы показывают, может ли такая система быть достойной альтернативой стандартным дорогостоящим 3D-системам (Vicon), сохраняя высокую точность и надежность измерений. Определялись следующие кинематические параметры: вертикальная высота подъема большого пальца ноги и пятки при преодолении препятствия, горизонтальная скорость большого пальца ноги при преодолении препятствия, горизонтальное расстояние между большим пальцем ноги и препятствием, время односторонней опоры для каждой ноги.

На протяжении многих лет для решения задачи определения позы человека использовались два основных подхода: традиционные методы компьютерного зрения и методы глубокого обучения. Традиционные методы основаны на ручной разработке признаков и моделей, которые используют априорные знания о строении человеческого тела и пространственных отношениях между его частями [11]. Например, метод структурных изображений (pictorial structures) позволяет эффективно оценивать позы с относительно низкими вычислительными затратами [12].

С развитием технологий глубокого обучения начался новый этап в решении задач определения позы человека. Современные методы, основанные на сверточных нейронных сетях (CNN), автоматически извлекают характеристики человеческого тела из данных и достигают значительно более высокой точности по сравнению с традиционными подходами [13]. Эти методы используют различные техники, такие как многоступенчатые архитектуры и многоуровневые представления (глобальные и локальные признаки), что позволяет улучшить качество прогнозирования координат ключевых точек. Тем не менее, увеличение точности часто сопровождается ростом размера модели и ее вычислительной сложности.

Целью данного исследования является верификация точности разработанного комплекса с данными, полученными от системы захвата движения Vicon Nexus.



1. Материалы и методы

Для оценки точности разработанного комплекса в рамках исследования проводились измерения с помощью разработанного комплекса и системы захвата движения Vicon Nexus.

1.1. Проведение съемки на разработанной системе

Для проведения исследования испытуемый должен быть одет так, чтобы ничто не ограничивало его движения и обеспечивалось четкое визуальное определение контуров тела. Испытуемый размещается спиной к камере, при этом ноги должны находиться в удобном положении, пятки выстроены по линии. Взгляд испытуемого фокусируется на одной точке для обеспечения стабильности позы. Расстояние между испытуемым и фоном должно

составлять не менее 1.5 м.

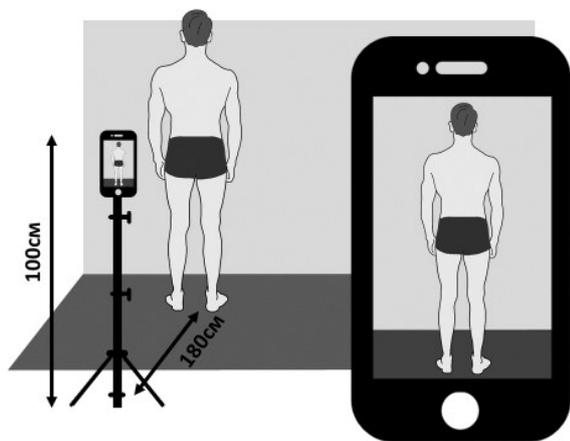


Рис. 1. Схематическое представление процесса съемки

Fig. 1. Schematic representation of the survey process

Камера устанавливается на штатив для предотвращения колебаний во время записи. Высота установки камеры зависит от роста испытуемого: для лиц с ростом от 150 до 170 см рекомендуется высота от 90 до 100 см, а для тех, чей рост составляет от 170 до 190 см, — от 100 до 110 см. Расстояние между камерой и испытуемым должно составлять около 180 см, что обеспечивает оптимальный угол обзора и масштабирование изображения. Испытуемый должен быть расположен точно посередине кадра, как показано на рис. 1. Характеристики цифровой камеры: 200/8/2/AF МПикс, разрешение видеосъемки 3840×2160 пикселей (4K), разрешение съемки 30 fps.

1.2. Детекция испытуемого на видеоданных

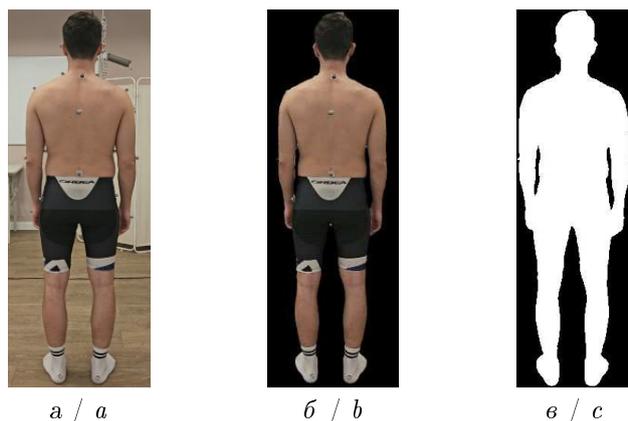


Рис. 2. Процесс сегментации изображения: а — исходное изображение; б — сегментированное изображение; в — бинаризованное изображение (цвет онлайн)

Fig. 2. Image segmentation process: a is original image; b is segmented image; c is binarized image (color online)

Обнаружение объектов на изображениях осуществляется с использованием предобученной нейронной модели SAM [14], предназначенной для сегментации изображений. Эта модель обеспечивает гибкую интерактивность и выводит маски сегментации в реальном времени при запросе пользователя. Модель была разработана для автоматического выделения объектов и фона, что значительно повышает эффективность обработки изображений. Она может быть адаптирована для различных задач, таких как обработка медицинских изображений и компьютерное зрение [15]. Пример изначального изображения и полученной с помощью SAM маски приведен на рис. 2.



1.3. Обработка бинаризованных данных

Определим некоторые опорные линии и точки, которые необходимы для расчета вышеперечисленных параметров.

В результате сегментирования нейросетью получаем маску, представляющую собой бинарный массив:

$$L = \{L_{ij}\}, \quad L_{ij} \in \{0, 1\},$$

здесь 1 соответствует пикселю области интереса, 0 — пикселю вне этой области.

Определим одну из опорных линий — горизонтальную линию на шее, которая условно отделяет голову и тело. Данная линия представляет собой линию минимальной ширины. С этой целью необходимо определить соответствующую координату (номер строки), которая вычисляется по следующей формуле:

$$i_{\text{neck}} = \min_i \left(\sum_{j=1}^n L_{ij} \right) \Big|_{i=1, \dots, m}.$$

Рассмотрим область массива, которая находится выше этой линии, т. е. голову, поиск центра масс головы осуществляется по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\text{neck}}} \sum_{j=1}^n j L_{ij}}{\sum_{i=1}^{i_{\text{neck}}} \sum_{j=1}^n L_{ij}}, \quad (1)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\text{neck}}} \sum_{j=1}^n i L_{ij}}{\sum_{i=1}^{i_{\text{neck}}} \sum_{j=1}^n L_{ij}}. \quad (2)$$

На рис. 3, а точкой F обозначен центр масс головы, а зеленым пунктиром — линия, отделяющая тело и голову. Центр масс тела M_1 находится аналогичным образом по формулам (1), (2).

Определим векторы, задающие линии плеч (рис. 3, б). Точки A и B находятся как точки, в которых акромиально-шейные линии, выделенные голубым и зеленым цветом, имеют наибольшую кривизну. Точки C и D определяются как точки, в которых акромиальные линии имеют наибольшую кривизну. Пусть $f_3(x)$ и $f_4(x)$ — функции контура акромиально-шейных линий. Тогда наибольшая кривизна вычисляется по формуле

$$k = \max_i \left(\frac{|f_3''(x_i)|}{(1 + f_3^2(x_i))^2} \right) \Big|_{i=1, \dots, R},$$

где R — количество точек, составляющих плоскую кривую $f_3(x)$. Таким образом, точка A имеет координаты $(x_k, f_3(x_k))$, где x_k — точка, в которой достигается наибольшая кривизна. Координаты точки B, C, D определяются аналогично.

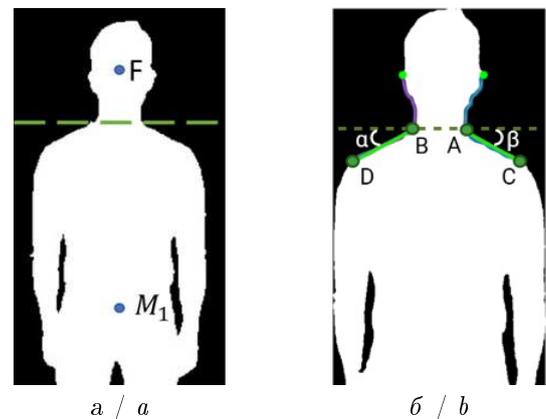


Рис. 3. Процесс сегментации изображения: а — бинаризованное изображение с центром масс головы F и центром масс туловища M_1 ; б — бинаризованное изображение, содержащее углы α (угол между линией плеч BD и горизонталью) и β (угол между линией плеч AC и горизонталью) (цвет онлайн)

Fig. 3. Image segmentation process: a shows a binarized image with head center of mass F and torso center of mass M_1 ; b shows a binarized image containing the angles α (the angle between the shoulder line BD and the horizontal) and β (the angle between the shoulder line AC and the horizontal) (color online)

Тогда векторы, задающие линии плеч, вычисляются как

$$\overrightarrow{BD} = \vec{D} - \vec{B}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A}.$$

Углы между линиями плеч и горизонтом рассчитываются по формулам

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{BD} \cdot \vec{x}}{|\overrightarrow{BD}|} \right), \quad (3)$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{x}}{|\overrightarrow{AC}|} \right). \quad (4)$$

Определим вертикальный вектор как $\vec{y} = (0, 1)$, горизонтальный вектор как $\vec{x} = (1, 0)$, а точки R и Q как максимальные точки акромиально-шейных линий. Тогда углы наклона головы во фронтальной плоскости вычисляются как

$$\omega = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BR}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} \right), \quad (5)$$

$$\rho = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AQ}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \right), \quad (6)$$

где $\overrightarrow{BR} = \vec{R} - \vec{B}$, $\overrightarrow{AQ} = \vec{Q} - \vec{A}$.

Вектор, соединяющий центр масс головы и центр масс тела, рассчитывается по формуле

$$\overrightarrow{M_1F} = \vec{F} - \vec{M}_1,$$

следовательно, угол отклонения тела от вертикали рассчитывается по формуле

$$\mu = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{M_1F} \cdot \vec{y}}{|\overrightarrow{M_1F}|} \right). \quad (7)$$

Угол между линией, соединяющей акромиально-ключичные суставы, и горизонталью рассчитывается по формуле

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{DC} \cdot \vec{x}}{|\overrightarrow{DC}|} \right), \quad (8)$$

где $\overrightarrow{DC} = \vec{C} - \vec{D}$.

1.4. Проведение съемки на системы видеозахвата Vicon Nexus

Система Vicon состоит из нескольких цифровых инфракрасных камер Vicon Vero 2.2 (Vicon Motion Systems, Oxford, UK) с регулируемыми объективами и фокусом, а также разработанного программного обеспечения для первичной обработки и визуализации данных Vicon Nexus 2.9.3. Схема установки камер, использованная в исследовании, представлена в статье [16]. Калибровка и синхронизация осуществлялись с помощью калибровочного маркера Active Wand (Vicon Motion Systems, Oxford, UK). Кинематические данные собирались с частотой дискретизации 100 Гц и передавались на персональный компьютер с помощью программного обеспечения Vicon Nexus 2.9.3.

В общей сложности 19 светоотражающих маркеров (сфера диаметром 14 мм) были размещены на следующих анатомических областях: верхняя часть ушной раковины — ладьевидная ямка (K_1, K_2), трапециевидная мышца (K_3, K_4), акромион (K_5, K_6), третий шейный позвонок (K_{11}), пятый грудной позвонок (K_{12}), третий поясничный позвонок (K_{13}), локтевой сустав (K_7, K_8), основание пястной кости (K_9, K_{10}). Также для полноты картины маркеры



крепилась на бедренный сустав, коленный сустав, пяточную кость, большой палец. Для оценки осанки в рассмотрение берутся только маркеры, представленные на рис. 4.

Исходные данные представлены в следующей структуре:

$$\{t_i, m_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}), \dots, m_{in}(x_{in}, y_{in}, z_{in})\}, \quad i = \overline{1, m},$$

где t_i — кадры, m_i — маркеры, x_i, y_i, z_i — координаты маркеров, m — количество кадров, n — количество маркеров.

Полученный массив трехмерных координат был спроецирован на плоскость, проходящую через точки акромионов и вектор перпендикулярный плоскости опоры (рис. 5)

Полученный массив трехмерных координат был спроецирован на плоскость, проходящую через точки акромионов и \vec{z} (см. рис. 5).

Пусть точки $C(x_1, y_1, z_1)$ и $D(x_2, y_2, z_2)$ — точки левого и правого акромиона (аналогично рис. 3, б), тогда вектор, соединяющий эти точки, вычисляется как

$$\vec{CD} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

В качестве вектора, лежащего в искомой плоскости, выступает вектор $\vec{z} = (0, 0, 1)$. Нормальный вектор \vec{n} к плоскости можно найти как векторное произведение \vec{CD} и \vec{z} :

$$\vec{n} = \vec{CD} \times \vec{z}.$$

Обозначим компоненты нормального вектора как $\vec{n} = (A^*, B^*, C^*)$.

Уравнение плоскости имеет вид

$$A^*(x - x_1) + B^*(y - y_1) + C^*(z - z_1) = 0,$$

где (x_1, y_1, z_1) — координаты одной из точек, через которые проходит плоскость (например, C).

Приведем уравнение к виду

$$\begin{aligned} A^*x + B^*y + C^*z + D^* &= 0, \\ D^* &= -(A^*x_1 + B^*y_1 + C^*z_1). \end{aligned}$$

Далее необходимо спроецировать все точки на данную плоскость. Для каждой точки $P(x_0, y_0, z_0)$ ее проекция на плоскость вычисляется как

$$P_{\text{proj}} = P - d \cdot \vec{n}^0,$$

где d — расстояние от точки до плоскости: $d = \frac{A^*x_0 + B^*y_0 + C^*z_0 + D^*}{\sqrt{A^{*2} + B^{*2} + C^{*2}}}$, \vec{n}^0 — нормированный вектор нормали: $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

После получения новых координат производится подсчет углов между линиями плеч и горизонтом, угла отклонения тела от вертикали, угла между линией плеч и горизонтом и углов наклона головы во фронтальной плоскости по формулам (3)–(8).

2. Результаты

На базе Института фундаментальной медицины и биологии Казанского (Приволжского) федерального университета было проведено данное исследование. Группа испытуемых

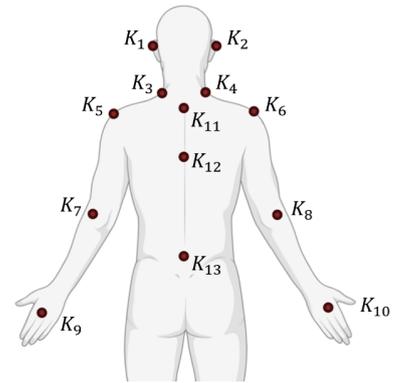


Рис. 4. Схема расположения маркеров на теле испытуемого (цвет онлайн)
Fig. 4. Schematic of marker placement on the subject's body (color online)

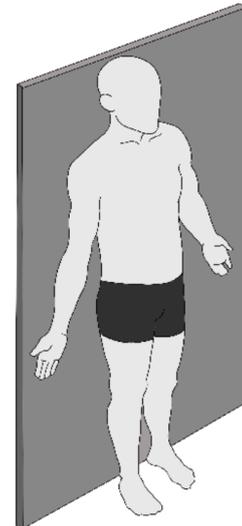


Рис. 5. Изображение плоскости для проецирования маркеров
Fig. 5. Image of the plane for marker projection



а / а б / б в / с

Рис. 6. Графическое представление результатов обработки видеозаписи: а — линии плеч; б — линия, соединяющая акромионы; в — линии, отражающие наклоны головы во фронтальной плоскости (цвет онлайн)

Fig. 6. Graphical representation of the results of video recording processing: a is shoulder lines; b is line connecting acromions; c is lines reflecting head inclinations in the frontal plane (color online)

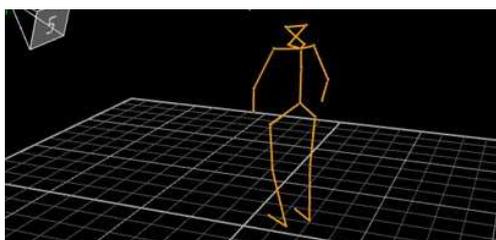


Рис. 7. Визуализация скелета в системе Vicon Nexus

Fig. 7. Skeletal visualization in the Vicon Nexus system

включала 7 мужчин в возрасте от 23 до 30 лет и 7 женщин в возрасте от 19 до 27 лет. Все участники подписали информированное согласие. Запуск съемки на систему видеозахвата Vicon Nexus и на цифровую видеокамеру проводился синхронно. Каждая съемка длилась 40 секунд.

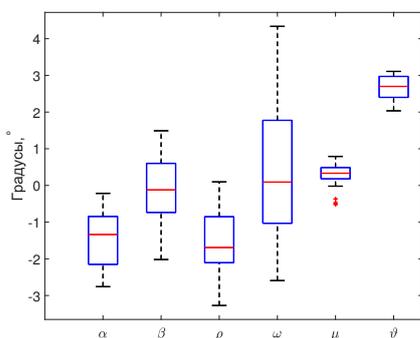
Полученные видеоданные с цифровой видеокамеры были обработаны методом, указанным выше. Выходными данными являются результаты измерения параметров в каждый момент времени, выгружаемые в текстовый файл, и набор графических изображений с опорными точками и линиями (рис. 6). По полученным параметрам производится подсчет статистики (средние значения, стандартное отклонение и т.д.).

Полученные цифровые данные с системы видеозахвата Vicon Nexus визуализировались в рабочем поле (рис. 7), размечались и выгружались для дальнейшего подсчета углов методом, указанным выше, и сбора статистики.

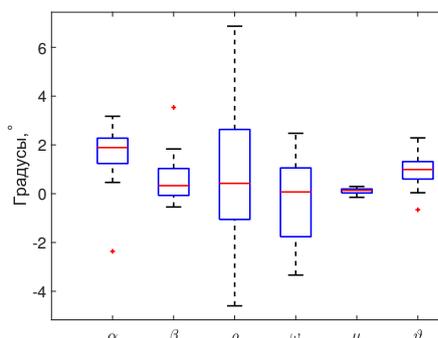
Примеры средних значений углов, подсчитанных на основе видеоданных, полученных с двух представленных систем — ПАК (программно-аппаратный комплекс) и Vicon Nexus, отражены в таблице.

Процент расхождения результатов для углов составляет 4–5%. Проведение аналогичного анализа для всех испытуемых показало результаты, представленные на рис. 8.

Коэффициент кросс-корреляции между результатами двух систем составил $r = 0.81$, что указывает на высокую степень согласованности.



а / а



б / б

Рис. 8. Разность значений углов, полученных с системы Vicon Nexus и программно-аппаратного комплекса: а — для мужчин; б — для женщин (цвет онлайн)

Fig. 8. Difference of angle values obtained from the Vicon Nexus system and the hardware-software complex: a for men; b for women (color online)



Результаты сходимости расчетной сетки
 Table. Convergence results of the calculated grid

Испытуемый	Метод	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$\rho, ^\circ$	$\omega, ^\circ$	$\mu, ^\circ$	$\vartheta, ^\circ$
M_1	Vicon	29.44	26.12	94.720	101.28	0.43	-2.68
	ПАК	28.01	26.29	95.914	96.17	0.52	-0.40
M_2	Vicon	29.46	30.69	98.260	104.12	0.15	0.93
	ПАК	31.17	31.25	99.990	103.92	0.27	0.05

3. Обсуждение

Расхождение в численных характеристиках между разработанным программно-аппаратным комплексом и системой Vicon Nexus (в пределах 4–5%) может быть обусловлено рядом факторов, которые связаны с различиями в методах работы систем, точностью обору́дования и особенностями обработки данных. Во-первых, это технические ограничения цифровой видеокамеры. Цифровая видеокамера может иметь более низкое разрешение по сравнению с камерами системы Vicon Nexus, что приводит к менее точному захвату положения точек на теле. Несмотря на то, что на большинстве смартфонов можно установить высокое качество съемки, это увеличивает размер видеозаписи, что ведет к более длительной обработке.

В системе Vicon Nexus используются активные или пассивные маркеры, которые точно фиксируются камерами, но многое зависит от правильного размещения маркеров. К сожалению, во время исследования было установлено, что, во-первых, крепление маркеров к коже достаточно неустойчивое, и они отсоединяются от кожи с течением времени. В случае разработанного комплекса ключевые точки определяются автоматически на основе анализа изображения, что может быть подвержено ошибкам из-за шума, освещения. Во-вторых, это возможные погрешности в математических моделях, в результате чего могут возникать ошибки, связанные с проекционными искажениями. В-третьих, это дисторсия — явление, при котором изображение, захваченное камерой, искажается из-за несовершенства оптической системы или особенностей проекции. Дисторсия может существенно влиять на точность анализа данных, особенно в задачах, связанных с количественной оценкой осанки человека, где важны точные координаты ключевых точек тела [17, 18].

Авторы планируют продолжить исследования по корректировке коэффициентов дисторсии.

Заключение

В данной работе предложен программно-аппаратный комплекс для количественной оценки осанки человека с использованием цифровой видеокамеры, что является более доступной альтернативой высокоточным системам. Разработанная методика обработки видеозображений и программное обеспечение позволяют автоматически анализировать параметры осанки и рассчитывать метрики с приемлемой точностью. Экспериментальное исследование показало, что результаты разработанного комплекса согласуются с данными системы Vicon Nexus с расхождением в пределах 4–5%, что подтверждает его потенциальную применимость в клинических условиях. Тем не менее, для дальнейшего повышения точности необходимо учитывать факторы, такие как дисторсия камеры, освещение и особенности размещения испытуемых. Таким образом, предложенный комплекс может стать эффективным инструментом для массового использования в медицинской практике и научных исследованиях, предоставляя надежные и доступные решения для анализа осанки.

Список литературы / References

1. Wei S. E., Ramakrishna V., Kanade T., Sheikh Y. Convolutional pose machines. *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Las Vegas, NV, USA, 2016, pp. 4724–4732. DOI: <https://doi.org/10.1109/cvpr.2016.511>
2. Baker R. Gait analysis methods in rehabilitation. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 2006, vol. 3, iss. 1, art. 4. DOI: <https://doi.org/10.1186/1743-0003-3-4>



3. Hensley C. P., Lenihan E. M., Pratt K., Shah A., O'Donnell E., Nee P.-C., Lee J., Yang A., Chang A. H. Patterns of video-based motion analysis use among sports physical therapists. *Physical Therapy in Sport*, 2021, vol. 50, pp. 159–165. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ptsp.2021.05.003>
4. Scataglini S., Abts E., Van Bocxlaer C., Van den Bussche M., Meletani S., Truijen S. Accuracy, validity, and reliability of markerless camera-based 3D motion capture systems versus marker-based 3D motion capture systems in gait analysis: A systematic review and meta-analysis. *Sensors*, 2024, vol. 24, iss. 11, art. 3686. DOI: <https://doi.org/10.3390/s24113686>
5. Das K., de Paula Oliveira T., Newell J. Comparison of markerless and marker-based motion capture systems using 95% functional limits of agreement in a linear mixed-effects modelling framework. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13, iss. 1, art. 22880. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-023-49360-2>
6. Ma Y., Mithraratne K., Wilson N. C., Wang X., Zhang Y. The validity and reliability of a kinect v2-based gait analysis system for children with cerebral palsy. *Sensors*, 2019, vol. 19, iss. 7, art. 1660. DOI: <https://doi.org/10.3390/s19071660>
7. Fiorentino N. M., Kutschke M. J., Atkins P. R., Foreman K. B., Kapron A. L., Anderson A. E. Accuracy of functional and predictive methods to calculate the hip joint center in young non-pathologic asymptomatic adults with dual fluoroscopy as a reference standard. *Annals of Biomedical Engineering*, 2015, vol. 44, iss. 7, pp. 2168–2180. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10439-015-1522-1>
8. Tao W., Liu T., Zheng R., Feng H. Gait analysis using wearable sensors. *Sensors*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 2255–2283. DOI: <https://doi.org/10.3390/s120202255>
9. Vincent A. C., Furman H., Slepian R. C., Ammann K. R., Di Maria C., Chien J. H., Siu K.-C., Slepian M. J. Smart phone-based motion capture and analysis: Importance of operating envelope definition and application to clinical use. *Applied Sciences*, 2022, vol. 12, iss. 12, art. 6173. DOI: <https://doi.org/10.3390/app12126173>
10. Zult T., Allsop J., Taberner J., Pardhan S. A low-cost 2-D video system can accurately and reliably assess adaptive gait kinematics in healthy and low vision subjects. *Scientific Reports*, 2019, vol. 9, iss. 1, art. 18385. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-019-54913-5>
11. Chou C.-J., Chien J.-T., Chen H.-T. Self adversarial training for human pose estimation. *2018 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC)*. Honolulu, HI, USA, 2018, pp. 17–30. DOI: <https://doi.org/10.23919/apsipa.2018.8659538>
12. Fan X., Zheng K., Lin Y., Wang S. Combining local appearance and holistic view: Dual-Source Deep Neural Networks for human pose estimation. *2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Boston, MA, 2015, pp. 1347–1355. DOI: <https://doi.org/10.1109/CVPR.2015.7298740>
13. Newell A., Yang K., Deng J. Stacked hourglass networks for human pose estimation. In: Leibe B., Matas J., Sebe N., Welling M. (eds.) *Computer Vision – ECCV 2016*. *ECCV 2016*. Lecture Notes in Computer Science, vol 9912. Cham, Springer, 2016, pp. 483–499. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-46484-8_29
14. Kirillov A., Mintun E., Ravi N., Mao H., Rolland C., Gustafson L., Xiao T., Whitehead S., Berg A., Lo W., Dollar P., Girshick R. Segment anything. *2023 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*. Paris, France, 2023, pp. 3992–4003. DOI: <https://doi.org/10.1109/iccv51070.2023.00371>
15. Li F., Zhang H., Sun P., Zou X., Liu S., Yang J., Li C., Zhang L., Gao J. Segment and recognize anything at any granularity. In: Leonardis A., Ricci E., Roth S., Russakovsky O., Sattler T., Varol G. (eds.) *Computer Vision – ECCV 2024*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 15106. Cham, Springer, 2025, pp. 467–484. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-73195-2_27
16. Smirnova V., Khamaturova R., Kharin N., Yaikova E., Baltina T., Sachenkov O. The automatization of the gait analysis by the Vicon video system: A pilot study. *Sensors*, 2022, vol. 22, iss. 19, art. 7178. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22197178>
17. Zhang Z. A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, vol. 22, iss. 11, pp. 1330–1334. DOI: <https://doi.org/10.1109/34.888718>
18. Devernay F., Faugeras O. Straight lines have to be straight. *Machine Vision and Applications*, 2001, vol. 13, iss. 1, pp. 14–24. DOI: <https://doi.org/10.1007/pl00013269>

Поступила в редакцию / Received 11.04.2025

Принята к публикации / Accepted 27.09.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Краткое сообщение

УДК 532.529:534.2

Динамика инкапсулированного пузырька газа около упругой стенки

Ю. В. Федоров

Институт механики и машиностроения — структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

Федоров Юрий Валентинович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды, kopperfildd@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7186-5173>, SPIN: 9325-8051, AuthorID: 850228

Аннотация. Работа посвящена изучению влияния анизотропии оболочки пузырька на его радиальные колебания около упругой стенки конечной толщины под действием внешнего акустического возмущения. Для этого получена система из двух уравнений, определяющих пульсации пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой конечной толщины. В случае, когда толщина оболочки пузырька достаточна мала, что соответствует большинству известных ультразвуковых контрастных агентов, система уравнений сведена к одному модифицированному уравнению Релея–Плессета. Представлено обобщение данного уравнения на случай колебаний инкапсулированного пузырька около упругой стенки. Проведено численное решение полученного уравнения. Проанализировано влияние анизотропии оболочки и наличия упругой стенки на радиальные колебания покрытого пузырька газа во внешнем акустическом поле. В частном случае дано сравнение теории с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

Ключевые слова: акустическое давление, пузырек газа, анизотропная оболочка, упругая стенка

Для цитирования: Федоров Ю. В. Динамика инкапсулированного пузырька газа около упругой стенки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 101–105. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-101-105>, EDN: [QWNQLX](https://elibrary.ru/QWNQLX)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Short communication

Dynamics of an encapsulated gas bubble near an elastic wall

Yu. V. Fedorov

Institute of Mechanics and Engineering, Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevsky St., Kazan 420111, Russia

Yuri V. Fedorov, kopperfildd@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7186-5173>, SPIN: 9325-8051, AuthorID: 850228

Abstract. The work is devoted to studying the influence of the bubble shell anisotropy on its radial oscillations near an elastic wall of finite thickness under the action of an external acoustic disturbance. For this purpose, a system of two equations that determine the pulsations of a gas bubble covered with an anisotropic shell of finite thickness is obtained. In the case when the thickness of the bubble shell is



sufficiently small, which corresponds to most known ultrasound contrast agents, the system of equations is reduced to a single modified Rayleigh–Plesset equation. A generalization of this equation for the case of oscillations of an encapsulated bubble near an elastic wall is presented. A numerical solution of the obtained equation is carried out. The influence of the shell anisotropy and the presence of an elastic wall on the radial oscillations of a covered gas bubble in an external acoustic field is analyzed. In a particular case, a comparison of the theory with experimental data available in literature is given.

Keywords: acoustic pressure, gas bubble, anisotropic shell, elastic wall

For citation: Fedorov Yu. V. Dynamics of an encapsulated gas bubble near an elastic wall. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 101–105 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-101-105>, EDN: QWNQLX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Известно, что микропузырьки газа применяются в ультразвуковой диагностике для построения и лучшего разрешения изображений тканей человека [1]. Для более длительного нахождения в жидкости и лучшей стабильности пузырьки покрывают тонкой оболочкой. В простейших случаях выведены уравнения радиальных колебаний включения по модели Кельвина–Фойгта [2] и Максвелла [3]. С другими моделями покрытий пузырьков можно ознакомиться в обзоре [4]. В работе [5] получено уравнение радиальных колебаний покрытого пузырька с учетом сжимаемости оболочки. Указано влияние сжимаемости покрытия на резонансную частоту пузырьков. В настоящей работе на основе идей [5] и [6] выведено уравнение радиальных колебаний пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой, как в безграничной жидкости, так и на некотором расстоянии от упругой стенки.

1. Постановка задачи

Пусть имеется в жидкости покрытый анизотропной оболочкой пузырек газа. Уравнение сохранения массы для жидкости (индекс f) в сферической системе координат и его решение имеют вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 v_f) = 0, \quad v_f(r, t) = \frac{R_2^2(t)}{r^2} U_2, \quad v_f(R_2, t) \equiv U_2, \quad (1)$$

где r — радиальная координата, v_f — радиальная скорость, R_2 — радиус пузырька вместе с оболочкой. Уравнение сохранения импульса в сферических координатах интегрируется от R_2 до ∞ с учетом (1):

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p_f}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \rho_f \left(R_2 \dot{U}_2 + \frac{3}{2} U_2^2 \right) = p_f(R_2, t) - p_\infty, \quad (2)$$

где ρ — плотность, p — давление. Записываются условия на границах включения при учете сил поверхностного натяжения:

$$-p_g(R_1, t) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \tau_{rr}^s(R_1, t), \quad p_f(R_2, t) + \frac{2\sigma_2}{R_2} = \tau_{rr}^f(R_2, t) - \tau_{rr}^s(R_2, t), \quad (3)$$

где индексы g и s относятся к газу и оболочке пузырька соответственно, σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1 — радиус пузырька газа, τ_{rr} — нормальное напряжение. Для жидкости τ_{rr} определяется следующим образом:

$$\tau_{rr}^f = 2\mu_f \frac{\partial v_f}{\partial r} = -4\mu_f \frac{R_2^2 U_2}{r^3}. \quad (4)$$

Здесь μ_f — вязкость жидкости. Для оболочки пузырька τ_{rr} примем в виде [5]

$$\tau_{rr}^s = \frac{(1 - \nu_{||}) E_r}{1 - \nu_{||} - 2E_{||} \nu_{\theta r}^2 / E_r} \varepsilon_{rr} + \frac{2\nu_{\theta r} E_{||}}{1 - \nu_{||} - 2E_{||} \nu_{\theta r}^2 / E_r} \varepsilon_{\theta\theta}, \quad (5)$$



где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, индекс r относится к радиальному направлению, индекс \parallel — к орторадиальному направлению, ε — компоненты тензора деформаций, которые определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u}{r},$$

где u — радиальная скорость оболочки вида [5]

$$u(r) = ar^{\beta_+} + br^{\beta_-}, \quad \beta_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8k}}{2}, \quad k = \frac{E_{\parallel}(1 - \nu_{\theta r})}{E_r(1 - \nu_{\parallel})}. \quad (6)$$

Здесь a и b — неизвестные коэффициенты, которые находятся из условий $u(R_1) = R_1 - R_{10}$ и $u(R_2) = R_2 - R_{20}$ (индекс 0 относится к начальному состоянию). Выражение (6) подставляется в (5), затем полученное выражение подставляется в граничные условия (3) с учетом (2) и (4). Таким образом, определяются два уравнения:

$$-p_g(R_1, t) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \frac{R_1^{\beta_-} R_1^{\beta_+ - 1} x_+ - R_1^{\beta_+} R_1^{\beta_- - 1} x_-}{R_1^{\beta_-} R_2^{\beta_+} - R_1^{\beta_+} R_2^{\beta_-}} (R_2 - R_{20}) + \frac{R_2^{\beta_+} R_1^{\beta_- - 1} x_- - R_2^{\beta_-} R_1^{\beta_+ - 1} x_+}{R_1^{\beta_-} R_2^{\beta_+} - R_1^{\beta_+} R_2^{\beta_-}} (R_1 - R_{10}), \quad x_{\pm} = \frac{(1 - \nu_{\parallel})E_r \beta_{\pm} + 2\nu_{\theta r} E_{\parallel}}{1 - \nu_{\parallel} - 2E_{\parallel} \nu_{\theta r}^2 / E_r}, \quad (7)$$

$$\rho_f \left(R_2 \dot{U}_2 + \frac{3}{2} U_2^2 \right) = -4\mu_f \frac{U_2}{R_2} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - p_{\infty} - aR_2^{\beta_+ - 1} x_+ - bR_2^{\beta_- - 1} x_-. \quad (8)$$

Выразив из уравнения (7) слагаемое $R_2 - R_{20}$ и подставив в (8), находится следующее уравнение:

$$\rho_f \left(R_2 \dot{U}_2 + \frac{3}{2} U_2^2 \right) = -4\mu_f \frac{U_2}{R_2} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - p_{\infty} + (R_1 - R_{10}) \frac{x_- x_+ (R_1^{-\beta_-} R_2^{\beta_-} - R_1^{-\beta_+} R_2^{\beta_+})}{R_2(x_- - x_+)} + \left(p_g - \frac{2\sigma_1}{R_1} \right) \frac{R_1^{\beta_-} R_2^{\beta_+ - 1} x_+ - R_1^{\beta_+} R_2^{\beta_-} x_-}{R_1^{\beta_-} R_1^{\beta_+ - 1} x_+ - R_1^{\beta_+} R_1^{\beta_- - 1} x_-}. \quad (9)$$

Таким образом, уравнения (7) и (9) описывают радиальную динамику пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой конечной толщины. В дальнейшем для простоты полагается, что толщина оболочки пузырька близка к нулю, т.е. $R_1 = R_2 - d$, $d \rightarrow 0$. В этом случае уравнение (7) выполняется тождественно, а уравнение (9), опустив у радиуса индекс 2, примет вид

$$\rho_f \left(R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = \left(p_g - \frac{2\sigma_1}{R - d} \right) \left(1 - \frac{\chi_1 d}{R} \right) - 4\mu_f \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma_2}{R} - p_f - \frac{\chi_2 d}{R} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right), \quad (10)$$

$$\chi_1 = \frac{x_+ - x_- + \beta_- x_- - \beta_+ x_+}{x_+ - x_-}, \quad \chi_2 = \frac{x_- (\beta_- - \beta_+) x_+}{x_+ - x_-}.$$

Рассмотрим радиальные колебания инкапсулированного пузырька, находящегося на некотором расстоянии l от упругой стенки конечной толщины h . Следуя процедуре работы [6], уравнение (10) легко обобщается до уравнения Келлера – Миксиса рассматриваемой среды и записывается в виде

$$R \ddot{R} \left(1 - \alpha - \frac{\dot{R}}{C_f} \right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{4\alpha}{3} - \frac{\dot{R}}{3C_f} \right) = \frac{1}{\rho_f} \left(1 + \frac{\dot{R}}{C_f} + \frac{R}{C_f} \frac{d}{dt} \right) P, \quad (11)$$

$$P = \left(p_g - \frac{2\sigma_1}{R - d} \right) \left(1 - \chi_1 \frac{d}{R} \right) - 4\mu_f \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma_2}{R} - p_f - \chi_2 \frac{d}{R} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right),$$

$$\alpha = \left(\frac{\rho_f - \beta}{\rho_f + \beta}\right) \frac{R}{2l} + \left(\frac{\beta - \rho_3}{\beta + \rho_3}\right) \frac{R}{2(l+h)} - \frac{(\rho_f - \beta)(\beta - \rho_3)}{(\rho_f + \beta)(\beta + \rho_3)} \frac{R}{2h}, \quad \beta = \rho_2 \frac{3K - 2\eta}{3K + 4\eta}.$$

Здесь ρ_2 — плотность стенки, K — модуль всестороннего сжатия, η — модуль сдвига упругой стенки, ρ_3 — плотность жидкости за стенкой, C_f — скорость звука.

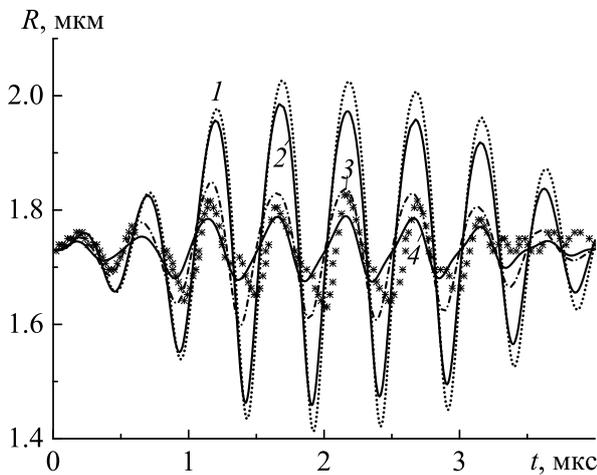
2. Результаты расчетов

Рассмотрим радиальные колебания пузырька газа, покрытого анизотропной оболочкой, около упругой стенки. Пузырек заполнен фторуглеродным газом. Для среды используются параметры [7]. Начальный радиус пузырька R_0 составляет $1.73 \cdot 10^{-6}$ м, вязкость жидкости $\mu_f = 0.025$ Па·с, плотность жидкости $\rho_f = 1000$ кг/м³, скорость звука $C_f = 1470$ м/с, давление $p_\infty = 10^5$ Па, показатель адиабаты $\gamma = 1.07$. Для оболочки пузырька используются следующие данные: $\nu_{\theta r} = \nu_{||} = 0.35$, $E_r = 88.8 \cdot 10^6$ Па, $\sigma_1 = 0.03$, $\sigma_2 = 0.005$. Толщина оболочки $d = 4 \cdot 10^{-9}$ м. Внешнее акустическое возмущение создается в виде $p_f = p_\infty - p_a \sin(2\pi f_a t) \exp[-((2f_a t - 2N)/N)^2]$, где амплитуда давления $p_a = 40000$ Па, частота $f_a = 2 \cdot 10^6$ Гц, $N = 8$. В качестве упругой стенки рассматривается пластиковая

стенка (OptiCell, BioCrystall, Inc.) со следующими параметрами: $\rho_2 = 1060$ кг/м³, $K = 3.75 \cdot 10^9$ Па, $\eta = 1.34 \cdot 10^9$ Па, $\rho_3 = \rho_f = 1000$ кг/м³, $l = 50 \cdot 10^{-6}$ м, $h = 75 \cdot 10^{-6}$ м. Проведено численное решение уравнения (11).

На рисунке представлено влияние упругой стенки и различия модуля Юнга $E_{||}$ на зависимости радиуса инкапсулированного пузырька от времени. Можно наблюдать, что наличие упругой стенки несколько сдерживает радиальные колебания включения.

Заметно уменьшение амплитуды осцилляций пузырька, что, в частности, не противоречит выводам работы [8], где экспериментально было показано, что непосредственная близость упругой стенки снижает амплитуду колебаний включения в среднем на 10%. Увеличение модуля Юнга $E_{||}$ оболочки пузырька, в свою очередь, также приводит к заметному уменьшению амплитуды его колебаний. Чем более упругая оболочка, тем



Зависимости радиуса пузырька от времени: 1 — покрытый пузырек в безграничной жидкости ($E_{||} = 0.5E_r$), 2 — покрытый пузырек около упругой стенки ($E_{||} = 0.5E_r$), 3 — ($E_{||} = E_r$), 4 — ($E_{||} = 2E_r$); маркеры — экспериментальные данные [7]

Figure. Dependencies of the bubble radius on time: 1 — covered bubble in an infinite liquid ($E_{||} = 0.5E_r$), 2 — covered bubble near an elastic wall ($E_{||} = 0.5E_r$), 3 — ($E_{||} = E_r$), 4 — ($E_{||} = 2E_r$); markers — experimental data [7]

меньше время сжатия пузырька. Видно, что при $E_{||} = 0.5E_r$ первое сжатие пузырька происходит при $t = 0.45$ мкс, а при $E_{||} = 2E_r$ первое сжатие наступает раньше, при $t = 0.34$ мкс. Для изотропной оболочки (кривая 3) показано удовлетворительное соответствие теоретической кривой радиуса пузырька с экспериментальными данными [7].

Замечание. По результатам проведенных расчетов показано, что увеличение модуля Юнга $E_{||}$ приводит к замедлению роста газового пузырька, а также к уменьшению амплитуды его колебаний как в безграничной жидкости, так и около препятствия. Чем более упругая оболочка, тем меньше время сжатия пузырька.



Список литературы / References

1. Sboros V. Response of contrast agents to ultrasound. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 2008, vol. 60, iss. 10, pp. 1117–1136. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addr.2008.03.011>
2. Hoff L., Sontum P. C., Hovem J. M. Oscillations of polymeric microbubbles: Effects of the encapsulating shell. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2000, vol. 107, iss. 4, pp. 2272–2280. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.428557>
3. Doinikov A. A., Dayton P. A. Maxwell rheological model for lipid-shelled ultrasound microbubble contrast agents. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, vol. 121, iss. 6, pp. 3331–3340. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2722233>, EDN: XKEZKH
4. Doinikov A. A., Bouakaz A. Review of shell models for contrast agent microbubbles. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2011, vol. 58, iss. 5, pp. 981–993. DOI: <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2011.1899>
5. Chabouh G., Dollet B., Quilliet C., Coupier G. Spherical oscillations of encapsulated microbubbles: Effect of shell compressibility and anisotropy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2021, vol. 149, iss. 2, pp. 1240–1257. DOI: <https://doi.org/10.1121/10.0003500>
6. Doinikov A. A., Aired L., Bouakaz A. Acoustic scattering from a contrast agent microbubble near an elastic wall of finite thickness. *Physics in Medicine and Biology*, 2011, vol. 56, iss. 2, pp. 6951–6967. DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-9155/56/21/012>
7. van der Meer S. M., Dollet B., Voormolen M. M., Chin C. T., Bouakaz A., de Jong N., Versluis M., Lohse D. Microbubble spectroscopy of ultrasound contrast agents. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, vol. 121, iss. 1, pp. 648–656. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2390673>
8. Garbin V., Cojoc D., Ferrari E., di Fabrizio E., Overvelde M. L. J., van der Meer S. M., de Jong N., Lohse D., Versluis M. Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging. *Applied Physics Letters*, 2007, vol. 90, iss. 11, art. 114103. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2713164>

Поступила в редакцию / Received 27.05.2025

Принята к публикации / Accepted 07.09.2025

Опубликована / Published 02.03.2026

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 106–131

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 106–131

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-106-131>

EDN: <https://elibrary.ru/RCZMNH>

Обзорная статья
УДК 550.834

Описание существующих подходов к автоматизации определения первых вступлений на сейсмических трассах

Г. Е. Бурцев^{1,2✉}, М. М. Немирович-Данченко¹

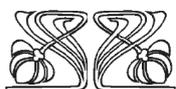
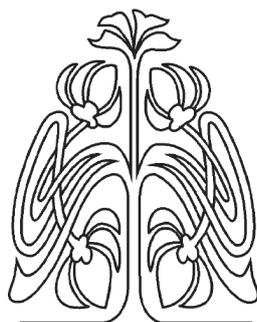
¹Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 40

²АО «ТомскНИПИнефть», Россия, 634027, г. Томск, просп. Мира, д. 72

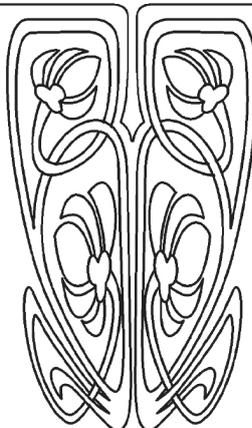
Бурцев Григорий Евгеньевич, ¹аспирант кафедры комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем; ²инженер отдела сейсморазведочных работ, Grigory.E.Burtsev@outlook.com, <https://orcid.org/0009-0004-7022-3215>, SPIN: 7734-5460, AuthorID: 1264748

Немирович-Данченко Михаил Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем, mmm@fb.tusur.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4510-8045>, SPIN: 6352-4670, AuthorID: 7498

Аннотация. Для обработки зарегистрированных исходных сейсмических сигналов требуется предварительно определить в них моменты времени первых вступлений полезной информации. В статье приводятся сведения обзорного вида о существующих подходах к автоматизации определения первых вступлений волн в сейсмических сигналах, разделяемых данными вступлениями на область шумов-микросейсм и на область полезных данных. Все описываемые подходы к пикированию вступлений в статье разделены на два вида: с использованием нейронных сетей и классические подходы без нейронных сетей, при этом нейронные сети могут включать в себя классические подходы. Также с течением времени по мере развития информационных технологий и вычислительной техники установлен рост количества публикаций по теме автоматического обнаружения первых вступлений, в которых используются машинное обучение и нейронные сети. К классическим подходам к пикированию отнесены пороговый алгоритм, *STA/LTA*-алгоритм оценки фрактальной размерности, расчет статистики более высокого порядка, авторегрессионный подход, пикирование с накопительным фильтром, корреляционный подход, алгоритм динами-



Научный
отдел





ческого искривления времени, нечеткая кластеризация. К нейросетевым подходам отнесены полно-связные нейронные сети, нейронные сети Кохонена, сверточные нейронные сети. Краткое описание каждого подхода приводится в тексте статьи с указанием ссылок-источников для получения более подробной информации о подходе при необходимости. В заключении статьи приводится обобщающая схема существующих подходов к автоматическому пикированию первых вступлений с таблицей полученных значений точности пикировок авторами исследований.

Ключевые слова: первые вступления сейсмических волн, автоматическое пикирование первых вступлений, микросейсмы, машинное обучение, нейронные сети

Для цитирования: Бурцев Г. Е., Немирович-Данченко М. М. Описание существующих подходов к автоматизации определения первых вступлений на сейсмических трассах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 106–131. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-106-131>, EDN: RCZMNH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Review

The description of approaches to seismic waves automatic first breaks picking

G. Ye. Burtsev^{1,2✉}, M. M. Nemirovich-Danchenko¹

¹Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, 40 prospect Lenina, Tomsk 634050, Russia

²JSC TomskNIPIneft, 72 Mira Ave., Tomsk 634027, Russia

Grigory Ye. Burtsev, Grigory.E.Burtsev@outlook.com, <https://orcid.org/0009-0004-7022-3215>, SPIN: 7734-5460, AuthorID: 1264748

Mikhail M. Nemirovich-Danchenko, nmm@fb.tusur.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4510-8045>, SPIN: 6352-4670, AuthorID: 7498

Abstract. It is necessary to determine seismic wave first breaks before the following processing of initial field seismic data is done. These first breaks separate seismic signals into two parts: microseismic noise and a useful information part. In the paper the authors present the overview information about the existing approaches aimed at automatic first breaks detection. All the described first break picking approaches are separated into two types: the one that uses neural networks and the other one that composes the classic approaches without using neural networks. Meanwhile, neural network-based approaches could include the classic ones in themselves. It was found out that nowadays the neural network-based approaches prevail with the dominating quantity of scientific publications on the topic. The authors classify the classic approaches into the threshold algorithm, the *STA/LTA* fractal dimension estimation algorithm, the higher-order statistics calculation algorithm, the autoregressive algorithm, the filter picker algorithm, the correlative approach, the dynamic time warping algorithm and the fuzzy clusterisation algorithm. The neural network approaches include fully connected dense networks, Kohonen networks and convolutional networks. The brief description of each approach is given in the paper, providing references for a reader to be able to get more information if needed. In conclusion, the authors provide a general scheme summarising considered automatic first break picking approaches. The accuracy table achieved by those methods is also provided.

Keywords: seismic wave first breaks, automatic first break picking, microseisms, machine learning, neural networks

For citation: Burtsev G. Ye., Nemirovich-Danchenko M. M. The description of approaches to seismic waves automatic first breaks picking. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 106–131 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-106-131>, EDN: RCZMNH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Обработка исходных данных наземной сейсморазведки методом общей глубинной точки требует введения статических поправок для учета неровностей рельефа и влияния низкоскоростной верхней части разреза (ВЧР) путем временного сдвига записанных сейсмических трасс к общему уровню приведения. Качество введения данной поправки зависит от точности определения времен первых вступлений сейсмических волн [1]. Отделение области шумов на регистрируемых сигналах от области полезной части сигнала представляет собой непростую задачу, для решения которой исследователями разработаны и применяются различные методы.

Пикирование первых вступлений вручную геофизиком является чрезвычайно трудоемкой задачей, особенно в случае обработки данных 3D сейсморазведки [2]. Предприятия нефтегазодобывающей отрасли стремятся снизить количество часов трудозатрат, требуемых для обработки сейсмических данных, по этой причине автоматизация пикирования первых вступлений сейсмических волн является крайне актуальной проблемой в этой сфере.

Цель данной статьи — ознакомить читателя с разработанными исследователями способами автоматического определения первых вступлений на исходных сейсмических данных.

Многие рассматриваемые здесь методы могут быть применены не только к сейсмическим данным, акцент делается именно на применении этих методов к сейсмическим сигналам. Описываемые способы автоматического пикирования имеют различную природу. Некоторые основаны исключительно на априорной информации о форме регистрируемого сигнала, иные требуют применения машинного обучения, в том числе построения нейронных сетей.

Алгоритмы, не применяющие нейронные сети, в статье названы классическими и рассматриваются отдельно в первой ее части. Вторая часть посвящена подходам к пикированию вступлений с применением нейронных сетей. При этом и в случае нейросетевого подхода классические алгоритмы не теряют своей значимости, так как могут быть включены в состав комплексных систем пикирования, совмещающих их с применением нейронных сетей. Анализ работ по автоматическому пикированию первых вступлений позволяет выделить следующие алгоритмы, методы и подходы, отнесенные к классическим: пороговый (п. 1.1), *STA/LTA*-алгоритм оценки фрактальной размерности (п. 1.2), расчет статистики более высокого порядка (п. 1.3), авторегрессионный подход (п. 1.4), алгоритм пикирования с накопительным фильтром (*Filter Picker*) (п. 1.5), корреляционный подход (п. 1.6), алгоритм динамического искривления времени (*DTW*) (п. 1.7), алгоритм нечеткой кластеризации методом *k*-средних (*FCM*) (п. 1.8). Подходы с применением нейронных сетей для решения задачи отделения шумов-микросейсмов от полезного сигнала в настоящем обзоре классифицированы по фундаментальному принципу их работы. Среди нейросетевых подходов выделены следующие: подход с применением полносвязных нейронных сетей (п. 2.1), применение нейронных сетей Кохонена (п. 2.2), сверточные нейронные сети (*CNN*) (п. 2.3).

1. Классические алгоритмы без применения нейронных сетей

1.1. Пороговый алгоритм

Алгоритм, именуемый пороговым, является наипростейшим [3]. Он отделяет полезную часть сигнала от шумовой части по простому принципу превышения сигналом некоторого заранее заданного порогового значения и хорошо себя показывает в случае низкозашумленных данных [4]. Схема работы алгоритма приведена на рис. 1.

Вместо простого порога в алгоритме может применяться среднееквадратичное значение, вычисленное в некотором коротком временном окне. Такой вариант алгоритма менее чувствителен к пиковидным помехам в исходном сигнале [3].



1.2. STA/LTA-алгоритм оценки фрактальной размерности

Данный алгоритм впервые был представлен Алленом в 1978 г. (см. [5]). В нем вместо порогового значения вычисляется отношение среднего короткопериодного характеристического значения амплитуд сигнала к длиннопериодному среднему значению (*STA/LTA*) [1]. Алгоритм непрерывно вычисляет средние характеризующие сейсмический сигнал значения в двух скользящих временных окнах. Короткое окно призвано реагировать на приход полезной сейсмической информации в сигнале, а длинное окно преимущественно содержит в себе информацию о регистрируемых приемником микросейсмах [3].

Согласно алгоритму требуется рассчитать характеристическую функцию *CF*, задаваемую выражением [6]:

$$CF_i = x_i^2 + C_i \times \dot{x}_i^2, \quad (1)$$

где \dot{x}_i — первая производная сигнала по времени, C_i — взвешивающая константа, определяемая уравнением

$$C_i = \frac{\sum_{j=i-W_{TA}+1}^i |x_j|}{\sum_{j=i-W_{TA}+1}^i |\dot{x}_j|},$$

где W_{TA} — длина временного окна, при этом $1 \leq W_{TA} \leq i$, $|x_j|$ — абсолютное значение первой дискретной производной сигнала по времени, определяемое выражением

$$|\dot{x}_j| = |x_j - x_{j-1}|.$$

Выражения для *STA* и *LTA* записываются соответственно как [7,8]

$$STA_i = \frac{1}{W_{STA}} \times \sum_{j=i-W_{STA}+1}^i CF_j,$$

$$LTA_i = \frac{1}{W_{LTA}} \times \sum_{j=i-W_{LTA}+1}^i CF_j,$$

где W_{STA} — длина короткого временного окна и W_{LTA} — длина длинного временного окна, при этом выполняются условия $1 \leq W_{STA} \leq i$ и $1 \leq W_{LTA} \leq i$. Данные окна схематично изображены на рис. 2.

По росту значений отношения λ_i , определяемого выражением $\lambda_i = \frac{STA_i}{LTA_i}$, можно отделить область шума от области полезного сигнала [7,9].

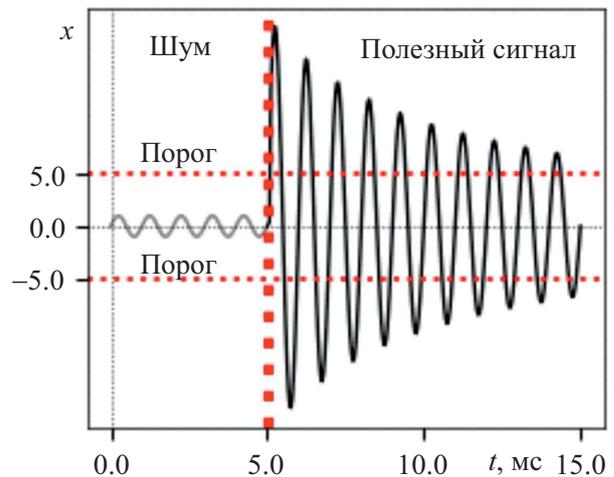


Рис. 1. Схема срабатывания порогового алгоритма при достижении абсолютной амплитудой x сигнала заранее заданного порогового значения (+5.0 и -5.0) в момент времени первых вступлений $t_0 = 5$ мс (цвет онлайн)

Fig. 1. The scheme of the threshold algorithm triggering with a signal amplitude x reaching the given threshold value (+5.0 and -5.0) when the first breaks are registered at time $t_0 = 5$ ms (color online)

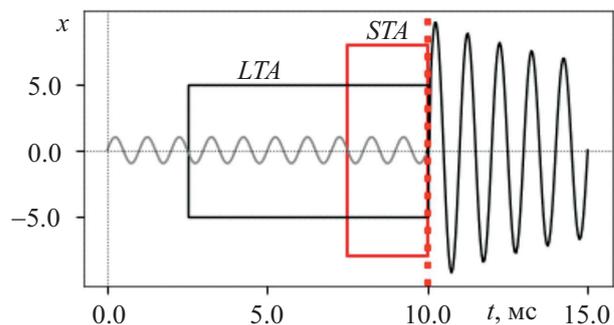


Рис. 2. Изображение короткого (*STA*) и длинного (*LTA*) временных окон с временем прихода первых вступлений $t_0 = 10$ мс (цвет онлайн)

Fig. 2. The scheme of the short (*STA*) and long (*LTA*) time windows with first breaks time $t_0 = 10$ ms (color online)

Для повышения чувствительности алгоритма к изменениям высокочастотных компонентов сигнала вместо исходного сигнала $x(t)$ можно использовать его первую и вторую производные по времени $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ [10]. Также вместо выражения (1) для определения характеристической функции CF разными авторами в работах [11, 12] были предложены иные варианты, задаваемые одним из уравнений:

$$\begin{aligned} CF_i &= |x_i|, \\ CF_i &= |x_i^2|, \\ CF_i &= \sqrt{x_i^2 + h^2(x_i)}, \end{aligned}$$

где $h(x_i)$ — значение преобразования Гильберта сигнала в момент времени i -го семпла.

Характеристическая функция, основанная на расчете среднего по k ближайшим семплам-соседям, представлена в работе [8]. Для каждого семпла находятся k его ближайших семплов-соседей по формуле

$$d_{i,j} = |x_i - x_j|, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $d_{i,j}$ — евклидово расстояние между двумя семплами i и j сигнала $x(t)$, n — общее число семплов данных в сигнале.

Затем вычисляется характеристическая функция CF по формуле

$$CF_i = \frac{1}{k} \sum_{q=1}^k d_{i,j}^{(q)},$$

где $d_{i,j}^{(q)}$ — q -е расстояние от i -го семпла до очередного ближайшего соседа, k — общее количество найденных для i -го семпла ближайших соседей.

Бэр и Крадольфер модифицировали алгоритм Аллена в 1987 г. (см. [6]). Ими было предложено охарактеризовать сигнал при помощи огибающей функции $E(i)$, которая вычисляется по формуле

$$E_i = x_i^2 + \dot{x}_i^2 \frac{\sum_{j=i_w}^i (x_j^2)}{\sum_{j=i_w}^i (\dot{x}_j^2)}, \quad (2)$$

где $i_w = i - W_{TA} + 1$, при этом $1 \leq W_{TA} \leq i$. Тогда характеристическая функция CF может быть найдена как

$$CF_i = \frac{E_i^2 - \overline{E_i^2}}{\sigma^2(E_i^2)}, \quad (3)$$

где $\overline{E_i^2}$ — среднее значение квадрата огибающей функции на временном окне заданной длины W_{TA} , $\sigma(E_i^2)$ — среднеквадратическое отклонение квадрата огибающей функции на том же временном окне [6].

1.3. Расчет статистики более высокого порядка

Данный подход похож на модифицированный Бэром и Крадольфером алгоритм STA/LTA , но вместо расчета характеристической функции CF по формулам (2) и (3) и отношения STA/LTA в нем во временном окне применяется расчет дисперсии и коэффициентов асимметрии и эксцесса [13, 14]. В этом алгоритме предполагается, что в области микросейсм-ов регистрируемый сигнал представляет собой гауссовый шум и подчиняется нормальному закону распределения [14]. При попадании момента времени регистрации первых вступлений t_0 в скользящее временное окно сейсмический сигнал в нем теряет вид нормально распределенного.

Центральный статистический момент m_k порядка k определяется выражением [6]

$$m_k = E[(X - E[X])^k], \quad k > 1,$$



где $E[X]$ — математическое ожидание вектора X , состоящего из семплов x_i сейсмического сигнала $x(t)$, которые попадают во временное окно заданной длины W_{TA} .

Коэффициент асимметрии S вычисляется по формуле [6]

$$S = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(E[(X - E[X])^2])^{3/2}} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \quad (4)$$

а коэффициент эксцесса K — по формуле [6]

$$K = \frac{E[(X - E[X])^4]}{(E[(X - E[X])^2])^2} = \frac{m_4}{m_2^2}. \quad (5)$$

Коэффициент S равен нулю в случае симметричной функции плотности распределения, например в случае нормального распределения. Данный коэффициент становится отрицательным, если функция плотности распределения более пологая слева, и положительным в противном случае [6]. Коэффициент эксцесса K равен нулю для случая нормального распределения. Сигнал именуется надгауссовым, если его значения с большей вероятностью располагаются в окрестности математического ожидания по сравнению с нормальным законом распределения при одних и тех же значениях математического ожидания и дисперсии. В противном случае, если значения, принимаемые сигналом, с большей вероятностью будут находиться на большем удалении от математического ожидания сигнала по сравнению с нормальным законом распределения, сигнал именуется подгауссовым [15]. Коэффициент эксцесса характеризует длину хвостов функции плотности распределения вправо и влево от ее математического ожидания. На рис. 3 представлен общий вид функций, характеризующих коэффициенты асимметрии (4) и эксцесса (5) некоторого синтетического сейсмического сигнала, которые были посчитаны во временном окне определенной длины W_{TA} .

Далее к этим значениям может быть применен простой пороговый алгоритм, описанный в п. 1.1 этой статьи. Длину временного окна и пороговое значение необходимо подбирать экспериментально.

1.4. Авторегрессионный подход

В данном подходе при помощи авторегрессионной модели, рассчитанной во временном окне W_{TA} , оценивается предполагаемое значение сигнала в будущий момент времени [16]. Значения сигнала $x(t)$ выражаются в виде авторегрессионной функции AR [6, 16]:

$$X_t = \sum_{m=1}^p b_m X_{t-m} + \varepsilon_t, \quad (6)$$

где X_t — вектор, состоящий из семплов сигнала $x(t)$; b_m — коэффициенты авторегрессии, определяемые методом наименьших квадратов; ε_t — ошибка предсказания истинного значения сигнала моделью, которая характеризует в данном подходе белый шум в области

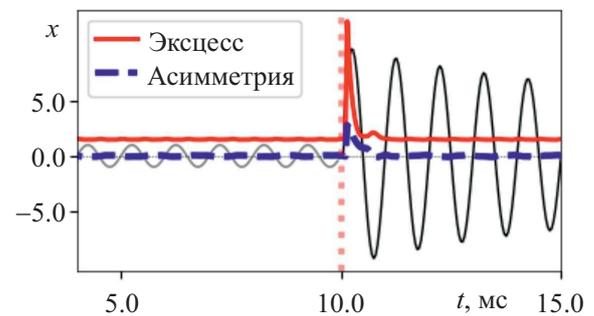


Рис. 3. Общий вид рассчитанных на определенном временном окне W_{TA} функций, характеризующих коэффициенты эксцесса K и асимметрии S некоторого сейсмического сигнала $x(t)$. Время $t_0 = 10$ мс — момент прихода первых вступлений (цвет онлайн)

Fig. 3. The general view of excess K and asymmetry S coefficients graphs within a time window W_{TA} of a seismic signal $x(t)$. $t_0 = 10$ ms is the time of a seismic signal first breaks (color online)

микросейсмиков [6]. Для адекватной работы функции авторегрессии AR требуется выполнить подбор подходящего значения порядка авторегрессии p [16]. В работе [16] применяется порядок $p = 4$. Характеристическая функция CF в таком случае трактуется как ошибка ε_t предсказания истинной волновой формы из выражения (6) [16]. По внезапному росту ошибки предсказания ε_t можно заключить, что сейсмический сигнал вышел из области белого шума и приемником был зарегистрирован полезный сейсмический сигнал.

Дальнейшее развитие идеи предсказания вступлений при помощи авторегрессионной модели AR привело к появлению модернизированной модели авторегрессии $AR-AIC$. Пусть сигнал до регистрации вступлений $x_n^{(1)}(t)$ описывается авторегрессионной моделью AR

$$x_n^{(1)} = \sum_{m=1}^M b_i^{(1)} x_{n-m} + \varepsilon_n^{(1)},$$

а после первых вступлений сигнал $x_n^{(2)}(t)$ описывается моделью AR , задаваемой уравнением [6, 17–19]

$$x_n^{(2)} = \sum_{m=1}^L b_i^{(2)} x_{n-m} + \varepsilon_n^{(2)},$$

где $b_i^{(1)}$ и $b_i^{(2)}$ — коэффициенты AR для двух областей сигнала до и после первых вступлений в момент t_0 , $\varepsilon_n^{(1)}$ и $\varepsilon_n^{(2)}$ — соответствующие ошибки предсказания сигналов $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ моделями AR . Значения M и L задают ширину окон расчета AR для сигналов $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ соответственно. В модели $AR-AIC$ применяется информационный критерий Акаике (AIC) [14, 20, 21]

$$AIC(k) = AIC_1 + AIC_2, \tag{7}$$

где AIC_1 и AIC_2 — два информационных критерия, каждый из которых соответствует своему сегменту сигнала. AIC_1 соответствует области до регистрации первых вступлений, т.е. белому шуму, а AIC_2 соответствует области сигнала после первых вступлений. Каждый из сегментов описывается при помощи авторегрессионной модели. Минимум функции $AIC(k)$ соответствует времени регистрации первых вступлений t_0 . Если точка k разделяет исходный

сигнал на два сегмента, то выражение (7) записывается в виде [6, 19]

$$AIC(k) = (k - M) \lg(\sigma_1^2(x_{M+1, \dots, k})) + (n - k - M) \lg(\sigma_2^2(x_{k+1, \dots, n-M})) + C_1, \tag{8}$$

где M — параметр, определяющий длину двух окон, характеризующих две области сигнала AIC_1 и AIC_2 , который требуется подобрать перед началом вычислений [22]. В выражении (8) длина этих двух окон принимается одинаковой. $\sigma_1(x_{M+1, \dots, k})$ и $\sigma_2(x_{k+1, \dots, n-M})$ — среднеквадратичные отклонения сигнала $x(t)$ в двух областях — AIC_1 и AIC_2 соответственно, C_1 — константа. В общем виде функция $AIC(k)$ из выражения (7) для некоторого синтетического сигнала представлена на рис. 4.

В работе [23] авторами с целью устранения ложного срабатывания данного алгоритма на пиковидные ошибки в записанном

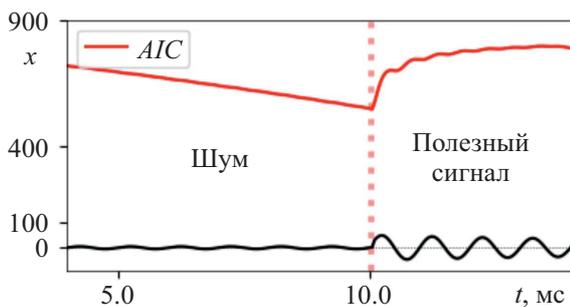


Рис. 4. Общий вид функции, представляющей информационный критерий Акаике AIC для некоторого сейсмического сигнала $x(t)$. Время $t_0 = 10$ мс — момент прихода первых вступлений, определяемый минимальным значением функции AIC (цвет онлайн)

Fig. 4. Akaike information criterion function AIC general view for some seismic signal $x(t)$. Time $t_0 = 10$ ms is the first break time moment determined by the minimum value of function AIC (color online)



исходном сигнале предлагается сигнал $x(t)$ предварительно пропускать через медианный фильтр для устранения шумов в нем, затем выполнять поиск минимума функции $AIC(k)$ с дополнительной проверкой отношения максимальной амплитуды всего сигнала $x(t)$ к амплитуде первого экстремума сигнала после найденного вступления. Если это значение не меньше, чем предварительно заданное число β , найденное вступление принимается за истинное. В противном случае срабатывание алгоритма принимается ложным.

1.5. Пикирование с накопительным фильтром (*FilterPicker*)

Данный алгоритм был специально разработан для работы в системах реального времени [5]. Сигнал $x(t)$, подаваемый на вход алгоритма, может быть представлен как в исходном виде, так и быть подвергнут некоторой предобработке. В основе работы алгоритма лежат простые логические и арифметические операции, без экспонент и логарифмов, что определяет его вычислительную эффективность [10].

Исходный дискретный сигнал $x(t)$ преобразуется в некоторый усредняющий вектор значений x_{long} [10]:

$$x_{long_i} = C_{long}x_{long_{i-1}} + (1 - C_{long})x_i,$$

где x_i — непосредственное значение i -го семпла сигнала; C_{long} — константа затухания, вычисляемая по формуле

$$C_{long} = 1 - \frac{\Delta T}{T_{long}},$$

где ΔT — временной интервал, определяющий затухание сигнала; T_{long} — временной интервал, определяющий участок осреднения сигнала.

В алгоритме вычисляется первая дискретная производная сигнала $x(t)$, определяемая по формуле

$$\dot{x}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t_{x_i}},$$

где x_0 инициализируется средним значением $x(t)$ в первом осредняющем интервале T_{long} ; Δt_{x_i} — разница во времени между временем семпла x_i и временем семпла x_{i-1} . Затем в алгоритме генерируется набор отфильтрованных сигналов $X_{n_i} = X_{n_i}^{(LP)}$, где LP означает фильтр низких частот. Для этого сперва формируются два сигнала, проходящие через фильтры высоких частот HP_1 и HP_2 :

$$\begin{aligned} X_{n_i}^{(HP_1)} &= C_n^{(HP)} \times [X_{n_{i-1}}^{(HP_1)} + \dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}], \\ X_{n_i}^{(HP_2)} &= C_n^{(HP)} \times [X_{n_{i-1}}^{(HP_2)} + X_{n_i}^{(HP_1)} - X_{n_{i-1}}^{(HP_1)}], \end{aligned}$$

и после формируется характеристическая функция $CF = X_n^{(LP)}$, определяемая фильтром низких частот:

$$X_{n_i}^{(LP)} = X_{n_{i-1}}^{(LP)} + C_n^{(LP)} \times [X_{n_i}^{(HP_2)} - X_{n_{i-1}}^{(HP_2)}],$$

где константа фильтра $C_n^{(HP)} = w_n / (w_n + \Delta T)$ и константа $C_n^{(LP)} = \Delta T / (w_n + \Delta T)$. Временная константа $w_n = T_n / 2\pi$. Период $T_n = 2^n \Delta T$. Количество требуемых низкочастотных фильтров N_{band} выбирается так, чтобы период $T_{N_{band}-1} = 2^{N_{band}-1} \Delta T$ был больше, чем преобладающий период в сигнале, фаза которого должна быть пропикирована. Номера формируемых характеристических функций CF меняются как $n = 0, \dots, N_{band} - 1$ [10].

На рис. 5 показан пример работы алгоритма пикирования первых вступлений сигнала для некоторого синтетического сейсмического сигнала при искусственно выбранном числе низкочастотных фильтров $N_{band} = 2$ при значениях $\Delta T = 4.0$ мс (рис. 5, а) и $\Delta T = 20.0$ мс (рис. 5, б) с формированием характеристической функции CF для каждого из значений этих ΔT . Анализировать алгоритмом предполагается итоговую суммарную характеристическую функцию CF (рис. 5, в), на которой вступления выражены ярче всего в виде резкого пиковидного скачка ее значений.

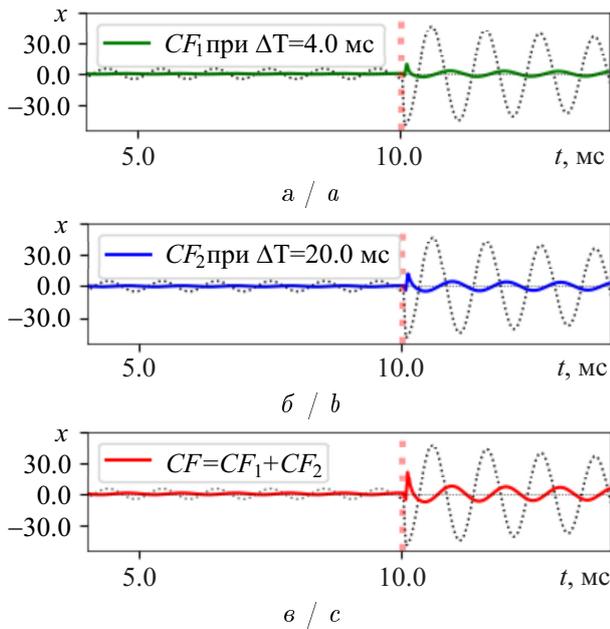


Рис. 5. Пример работы алгоритма с накопительным фильтром на искусственном сейсмическом сигнале, изображенном пунктиром. Первые вступления пришли в момент времени $t_0 = 10$ мс. Функции CF построены: a — для $\Delta T = 4.0$ мс; b — для $\Delta T = 20.0$ мс; c — суммарная CF

Fig. 5. An example of the Filter Picker algorithm work. The artificial seismic signal is pictured as the dotted line. The first breaks are registered at time $t_0 = 10$ ms. Characteristic functions CF are represented: a is for $\Delta T = 4.0$ ms; b is for $\Delta T = 20.0$ ms; c shows cumulative CF

корреляции Пирсона между двумя близко расположенными сейсмическими трассами. Две трассы, одна из которых находится чуть ближе к пункту возбуждения, а другая — чуть дальше, должны по своей форме повторять друг друга, но более дальняя трасса Y смещена по оси времени на количество отсчетов времени τ относительно трассы X . Коэффициент корреляции r лежит в пределах от -1 до $+1$, где $r = +1$ означает полную пропорциональную зависимость между двумя величинами, $r = -1$ означает полную обратно пропорциональную зависимость, $r = 0$ означает отсутствие взаимозависимости [26]. Коэффициент парной корреляции $r(\tau)$ вычисляется по формуле [27]

$$r(\tau) = \frac{n \sum_{i=0}^{i=n} x_i y_{i+\tau} - \sum_{i=0}^{i=n} x_i \sum_{i=0}^{i=1} y_{i+\tau}}{\sqrt{n \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 - (\sum_{i=0}^{i=n} x_i)^2} \times \sqrt{n \sum_{i=0}^{i=n} y_{i+\tau}^2 - (\sum_{i=0}^{i=n} y_{i+\tau})^2}}, \quad (9)$$

где τ — количество семплов по оси времени, на которое сдвинута трасса Y относительно трассы X ; x_i — семплы трассы X ; y_i — семплы трассы Y ; n — количество семплов во временном окне, определяющем участок на двух трассах, в котором вычисляется коэффициент парной корреляции. Значение сдвига τ подбирается экспериментально так, чтобы обеспечить максимум коэффициента корреляции $r(\tau)$ [27]. При этом первое вступление на одной из имеющихся в (9) двух трасс, X и Y , должно быть заранее определено вручную или одним из методов, рассмотренных в пп. 1.1–1.5. Тогда, выбрав оптимальное смещение τ , можно узнать время вступления на другой близко расположенной трассе [28].

Для иллюстрации на рис. 5 представлены только две построенные низкочастотными фильтрами характеристические функции CF с итоговой суммарной CF . В работе [10] демонстрируются примеры с пятью разными построенными CF для разных ΔT , не считая суммарной CF .

1.6. Корреляционный подход

Рассмотренные в пп. 1.1–1.5 методы автоматического и полуавтоматического пикирования работают с каждой записью сигнала отдельно без учета взаимного расположения регистрируемых сейсмических трасс. Корреляционный подход может применяться совместно с одним или несколькими из предыдущих методов и призван учитывать взаимную пространственную зависимость регистрируемых времен первых вступлений полезного сейсмического сигнала для улучшения качества пикирования и повышения точности введения статических поправок [24]. Корреляция может быть выполнена неверно в случае зашумленных данных, поэтому необходимо выполнить их предварительную обработку для ослабления шумов [25].

В основе данного подхода лежит расчет линейного коэффициента парной



В случае нескольких трасс итоговые сдвиги τ_i^* , $i = 1, \dots, m$, где m — количество трасс, в работе Ю, Хэ, Хоу и Тана [29] предлагается усреднять методом наименьших квадратов. Для этого решается система уравнений

$$R\tau^* = \Delta\tau, \quad (10)$$

где R — матрица парных коэффициентов корреляции, состоящая из элементов $r_{i,j}$, i, j — номера трасс, между которыми рассчитывается коэффициент парной корреляции; $\Delta\tau$ — вектор ранее определенных неусредненных сдвигов трассами, состоящий из элементов $\Delta\tau_{i,j}$ [30]. Тогда искомым вектор решений τ^* может быть найден через выражение

$$\tau^* = (R^T R)^{-1} R^T \Delta\tau. \quad (11)$$

Поскольку в случае большого количества трасс решение (11) может быть вычислительно сложным, на практике применяется небольшое число соседних трасс [30]. Пример системы (10) для случая пяти трасс, где из матрицы парных корреляций R убраны симметричные элементы, приведен в выражении [30]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^* \\ \tau_2^* \\ \tau_3^* \\ \tau_4^* \\ \tau_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\tau_{1,2} \\ \Delta\tau_{1,3} \\ \Delta\tau_{1,4} \\ \Delta\tau_{1,5} \\ \Delta\tau_{2,3} \\ \Delta\tau_{2,4} \\ \Delta\tau_{2,5} \\ \Delta\tau_{3,4} \\ \Delta\tau_{3,5} \\ \Delta\tau_{4,5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где, согласно работе Куммерова, исходные коэффициенты корреляции $r_{i,j}$ округлены до целых значений $+1$, 0 и -1 для учета только общей прямой зависимости, или обратной зависимости, или отсутствия зависимости регистрируемых фаз на ближайших трассах в соответствии с подобранными пороговыми значениями для $r_{i,j}$ [31]. Согласно Куммерову, такого округления достаточно на практике, и значение корреляции $r_{i,j} > 0.7$ говорит о похожести волновых форм трасс i и j [31].

1.7. Алгоритм динамического искривления времени (DTW)

В работе Сенина [32] применяется похожий на рассмотренный в п. 1.6 корреляционный подход, который именуется алгоритмом динамического искривления времени (DTW), но вместо матрицы парных корреляций в нем предлагается использовать рассчитанную стоимостную матрицу, оценивающую расстояние между двумя временными последовательностями, представленными сейсмическими трассами X и Y . Каждому семплу трассы X ставится в соответствие максимально похожий семпл из трассы Y [1]. Зная предварительно пропикированный вручную или автоматически семпл вступления на трассе X , можно найти соответствующий ему семпл на трассе Y . Матрица расстояний C , также именуемая локальной стоимостной матрицей, состоящая из элементов $c_{i,j}$, задается выражением

$$C = \|c_{i,j}\| = \|x_i - y_j\|,$$

где x_i — семплы трассы X , y_j — семплы трассы Y , $i = 0, \dots, N - 1$ и $j = 0, \dots, M - 1$, N — число семплов в трассе X , M — число семплов в трассе Y . После расчета матрицы C

выполняется расчет накопленной стоимостной матрицы D , элементы $d_{i,j}$ которой задаются согласно выражению [1]

$$D = \begin{cases} d_{0,j} = \sum_{j=0}^{M-1} c_{0,j} & \text{для первой строки,} \\ d_{i,0} = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i,0} & \text{для первого столбца,} \\ d_{i,j} = \min(d_{i-1,j-1}, d_{i-1,j}, d_{i,j-1}) + c_{i,j} & \text{для остальных элементов.} \end{cases}$$

В случае, если трассы X и Y полностью идентичны, оптимальное смещение для всех их семплов между ними будет нулевым, т.е. минимальные значения элементов $d_{i,j}$ матрицы D будут располагаться строго по ее главной диагонали. В противном случае выполняется поиск минимальных значений $d_{i,j}$ матрицы D , несколько смещенных относительно диагонали. Пример такой матрицы, взятой из работы [1], приведен в выражении

$$D = \begin{matrix} 4.7 & \langle \widehat{1.9} \rangle & 5.5 & 11 & 17 & 21 & 21 & 27 \\ 11 & 5 & \langle \widehat{2.3} \rangle & 5.2 & 7.9 & 8 & 12 & 20 \\ 18 & 9.7 & 3.5 & \langle \widehat{3.6} \rangle & \langle \widehat{4.7} \rangle & 6.1 & 12 & 22 \\ 25 & 13 & 3.6 & 5.9 & 5.9 & \langle \widehat{4.9} \rangle & 9.3 & 18 \\ 29 & 14 & 6.3 & 8.7 & 11 & 7.4 & \langle \widehat{6.6} \rangle & 13 \\ 30 & 15 & 11 & 14 & 16 & 12 & \langle \widehat{7.1} \rangle & 11 \\ 30 & 18 & 18 & 20 & 22 & 18 & \langle \widehat{9.2} \rangle & 9.5 \\ 32 & 23 & 26 & 29 & 31 & 26 & 13 & \langle \widehat{9.6} \rangle \end{matrix},$$

где элементы $\langle \widehat{d_{i,j}} \rangle$ отобраны среди всех элементов $d_{i,j}$ матрицы D алгоритмом так, чтобы сумма этих смещенных от главной диагонали значений стремилась к минимуму и формируемая ими ломаная линия, проходящая через матрицу по этим элементам, была непрерывна. Номера строк матрицы представляют собой номера семплов i трассы X , номера столбцов — семплы j трассы Y . По пересечению номеров строк i и столбцов j можно узнать, какому семплу трассы X поставлен в соответствие семпл трассы Y . Таким образом, имея пропикированное первое вступление на трассе X , можно узнать таковое и на сопоставляемой ей трассе Y . При этом одному семплу трассы X могут соответствовать несколько семплов трассы Y , что может привести к неоднозначности определения вступления. Алгоритмом в таком случае выбирается среднерасположенный семпл из такого множества неоднозначности с округлением итогового выбора вверх до целого числа. Особенно сильно проблема сопоставления семпла первого вступления встает в случае сильно зашумленных данных [1].

1.8. Нечеткая кластеризация методом k -средних (FCM)

В работе [33] предлагается использовать нечеткую кластеризацию методом k -средних для определения моментов времени первых вступлений сейсмических сигналов. Такая кластеризация расширяет традиционную кластеризацию методом k -средних введением дополнительных параметров нечеткости, в результате чего каждый элемент, вместо того чтобы принадлежать строго заданному кластеру с определенным центром, может одновременно принадлежать множеству кластеров с разными центрами. Включение параметров нечеткости позволяет лучше справляться с неоднозначностями при кластеризации зашумленных данных [34].

В отличие от традиционной кластеризации методом k -средних, которая приписывает каждому элементу кластеризуемого множества X значение принадлежности $\mu_{i,j} = 1$, если i -й элемент принадлежит кластеру j , и значение $\mu_{i,j} = 0$ в противном случае, нечеткая



кластеризация каждому кластеризуемому элементу задает значение принадлежности, лежащее в пределах интервала от 0 до 1 [35]. Пусть K — заранее определенное количество кластеров, на которое требуется разделить исходное множество X , имеющее n элементов x_i , тогда можно задать следующие ограничивающие условия на значения принадлежности $\mu_{i,j}$ [35]:

$$\sum_{j=1}^K \mu_{i,j} = 1, \quad \forall i \in [1, 2, \dots, n], \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_{i,j} > 0, \quad \forall j \in [1, 2, \dots, K]. \quad (13)$$

Выражение (12) означает, что сумма значений принадлежности $\mu_{i,j}$ элементов x_i в случае каждого кластера j равна 1. Кроме того, согласно (13) каждому кластеру принадлежит по крайней мере один из элементов x_i [35]. Здесь $\mu_{i,j} \in [0, 1]$.

Согласно авторам работы [33], для каждой исходной сейсмической трассы сперва определяется интервал определенной длины, в пределах которого затем уже выполняется поиск первых вступлений, с целью уменьшения размера входных данных для дальнейшей кластеризации. Определение такого интервала авторами выполняется в пределах плавающего вертикального окна, имеющего заданную длину. На основе измерения энергии трассы и поиска значительного ее резкого увеличения определяется предварительное время первого вступления, от которого вперед и назад по оси времени отстраивается интервал заданной общей длины l . После этого этапа применяется второе окно, но уже горизонтальное. Предполагается, что времена вступлений между двумя соседними трассами не могут отличаться слишком сильно, поэтому для устранения нежелательных отскоков времен вступлений авторами в горизонтальном окне применяется медианный фильтр, усредняющий первые вступления. После того, как предварительные времена первых вступлений вычислены, применяется метод роя частиц (*PSO*) [33].

Целевая функция J_α , определенная для случая разбиения множества X на K кластеров и подлежащая минимизации, задается выражением

$$J_\alpha = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n \mu_{i,j}^\alpha d_{j,i}^\beta,$$

где значение принадлежности $\mu_{i,j} \in [0, 1]$, α — гиперпараметр контроля того, насколько нечеткими будут получаемые кластеры. Большие значения α означают большую нечеткость. Расстояние между центром j -го кластера c_j и i -м элементом x_i определяется метрикой $d_{i,j} = \|x_i - c_j\|$. Обычно применяется евклидово расстояние, т. е. параметр $\beta = 2$.

Алгоритм *PSO* применяется для поиска начальных центров кластеров перед применением *FCM* из-за способности *PSO* к глобальной оптимизации [33], при этом он сходится быстро и может быть легко распараллелен [36]. Пусть есть M частиц со случайно заданными начальными скоростями и позициями, которые требуется оптимальным образом распределить [36]. Пусть $\hat{x}_i(t)$ — лучшее решение, которое было найдено для i -й частицы перед итерацией t , $x^*(t)$ — лучшее решение среди всех частиц до итерации t . Для поиска оптимального распределения каждая частица обновляет свою скорость $v_i(t)$ и положение $x_i(t)$ согласно соответственно уравнениям [33, 36]

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + \delta_1 rand_1 \times (\hat{x}_i(t) - x_i(t)) + \delta_2 rand_2 \times (x^*(t) - x_i(t)), \quad (14)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t) \times \Delta t_{t+1,t}(t), \quad (15)$$

где t — номер текущей итерации, $rand_1$ и $rand_2$ — случайные числа из интервала $[0, 1]$, δ_1 и δ_2 — две положительные константы ускорения $[1/(\text{итерация } t)]$, нужные для корректировки положения частицы с учетом лучшего глобального и лучшего локального решений, $\Delta t_{t+1,t}(t) = ((t+1) - t) = 1$, вес w применяется для балансировки глобального поиска.

Целевая функция алгоритма *PSO* задается уравнением

$$f(x_i) = \frac{\theta}{\pi + J_{FCM}},$$

где θ — параметр целевой функции, $\theta \leq \pi$, и обычно принимается $\theta = 2$. Скорость частицы по алгоритму *PSO* итеративно обновляется по формуле (14), а положение частицы — по формуле (15) [33]. J_{FCM} — целевая функция алгоритма применяемой нечеткой кластеризации методом k -средних:

$$J_{FCM} = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^K \mu_{i,j,k}^\alpha (d_k)_{i,j}^2,$$

где α — гиперпараметр контроля нечеткости, i — номер семпла на j -й трассе в ранее определенном окне, $(d_k)_{i,j} = \|x_{i,j} - c_k\|$ — расстояние между элементом $x_{i,j}$ и центром k -го кластера c_k , K — количество центров кластеризации, $\mu_{i,j,k}$ — значение принадлежности элемента $x_{i,j}$ к кластеру с номером k [33].

После первичного расчета оптимальных положений первых вступлений в определенном интервале применяется нечеткая кластеризация методом k -средних. Значение принадлежности $\mu_{i,j,k}$ итеративно обновляется в соответствии с выражением [33]

$$\mu_{i,j,k} = \frac{1}{\sum_{p=1}^P \left(\frac{(d_k)_{i,j}}{(d_p)_{i,j}}\right)^{2/(\alpha-1)}},$$

где $(d_p)_{i,j}$ — расстояние между элементом $x_{i,j}$ и положением p -й частицы из метода роя частиц, P — количество частиц.

Центр кластеризации c_k обновляется в соответствии с выражением [33]

$$c_k = \frac{\sum_{i,j} \mu_{i,j,k}^\alpha x_{i,j}}{\sum_{i,j} \mu_{i,j,k}^\alpha}.$$

Формируемый из значений принадлежности $\mu_{i,j,k}$ к K кластерам трехмерный тензор M имеет вид

$$\begin{pmatrix} [\mu_{1,1,1} \cdots \mu_{1,1,K}] & \cdots & [\mu_{1,N,1} \cdots \mu_{1,N,K}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mu_{l,1,1} \cdots \mu_{l,1,K}] & \cdots & [\mu_{l,N,1} \cdots \mu_{l,N,K}] \end{pmatrix},$$

где l — вертикальная длина окна, определяющая количество кластеризуемых семплов данных по одной трассе, N — количество трасс, задаваемое горизонтальным окном, K — количество кластеров.

После выполнения *FCM* завершается определение K центров кластеров. Всего в работе [33] решено разбить входные данные после ограничения их горизонтальным и вертикальным окнами на 10 кластеров. Один из этих кластеров соответствует найденным первым вступлениям сейсмических волн.

2. Алгоритмы, основанные на применении нейронных сетей

2.1. Полносвязные нейронные сети

Полносвязная нейронная сеть состоит из входного, одного или нескольких скрытых слоев и одного или нескольких выходных слоев, каждый из которых характеризуется своим набором весов [37]. В общем виде многоуровневая нейронная сеть, состоящая из множества узлов, представленных перцептронами, изображена на рис. 6.

Каждый перцептрон обучается согласно определенному правилу, изменяя веса модели в соответствии с определенной величиной ошибки, характеризуемой разницей между рассчитанным нейронной сетью значением и априорно заданным эталоном [38].

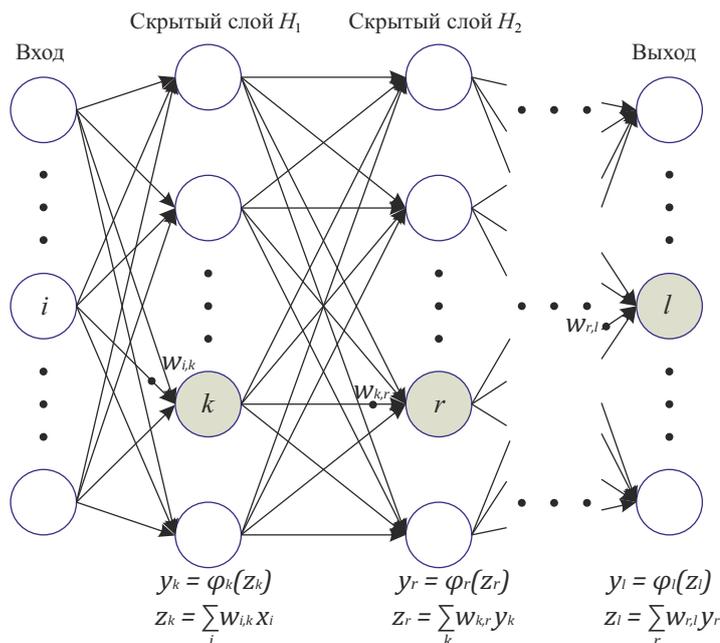


Рис. 6. Схема многоуровневой нейронной сети с несколькими скрытыми слоями. Три узла (перцептрона) k, r, l , принадлежащие разным слоям сети, закрашены цветом

Fig. 6. The multilayer neural network scheme with several hidden layers. Three colored nodes (perceptrons) k, r, l belong to different layers

На вход нейронной сети подается сигнал x , на выходе получается преобразованный сигнал y_p ; z_p — внутренние состояния сети, зависящие от выходных значений предыдущего слоя y_{p-1} и от весов $w_{p-1,p}$. При наличии достаточного количества промежуточных скрытых слоев в такой нейронной сети она становится способной улавливать и определять присутствие даже сложных нелинейных взаимосвязей входных сигналов с эталоном. Нахождение весов составной многоуровневой нейронной сети называется глубоким обучением [39]. Выход каждого слоя вычисляется по рассчитанным весам с помощью функции активации $\phi(z_i)$. Обычно применяются нелинейные функции активации, так как порой невозможно построить качественную линейную зависимость между входом и выходом. Если все слои нейронной сети имеют линейные функции активации, то вся цепочка промежуточных слоев может быть представлена в виде линейной зависимости выхода нейронной сети y_p от ее входа x [40, 41]. Ниже в общем виде представлены две известные и широко применяемые функции активации: сигмовидная (рис. 7, а)

$$\phi(z_i) = \frac{1}{(1 + e^{-z_i})^m},$$

где m — гиперпараметр, определяющий градиент функции $\phi(z_i)$; и ректифицированная (рис. 7, б) [40]

$$\phi(z_i) = \begin{cases} z_i & \text{при } z_i \geq 0, \\ \alpha_i z_i & \text{при } z_i < 0, \end{cases}$$

где α — малый по значению являющийся гиперпараметром коэффициент, принимаемый обычно ≈ 0.01 .

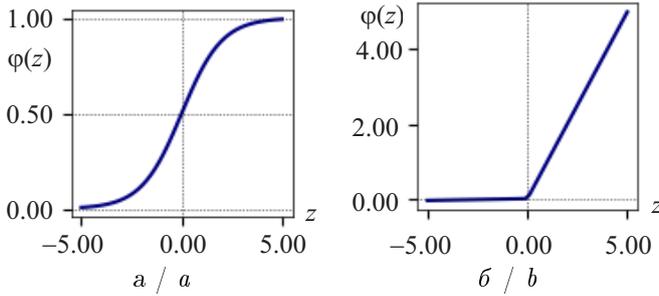


Рис. 7. Функции активации нейронных сетей: *a* — сигмовидная, $m = 1.0$; *b* — ректифицированная, $\alpha = 0.01$
 Fig. 7. The neural network activation functions: *a* is sigmoid, $m = 1.0$; *b* is rectified, $\alpha = 0.01$

Полносвязная нейронная сеть может быть применена и для определения первых вступлений на регистрируемых сейсмических сигналах. Выполнив обучение на отобранной подходящей обучающей выборке, сеть становится способной обобщить накопленную в ходе ее обучения информацию и на случаи, не включенные в состав обучающей выборки [42]. Обучающая выборка должна содержать качественные пропикированные первые вступления, отделяющие область

шумов от полезного сигнала, и каждой точке из этих областей присвоена своя метка: шум или полезный сигнал, для чего требуется контроль со стороны специалиста, который должен выбрать подходящий набор сейсмических данных и обеспечить правильность пикировок [43]. После обучения такой нейронной сети она может отделять полезный сигнал от шумов и на новых для нее данных.

Поскольку исходные данные могут иметь шумы, мешающие обучению и работе нейронной сети, имеет смысл выполнять предобработку входных сейсмических данных для подавления шумов [44]. Разумеется, не обязательно подавать на вход нейронной сети сигнал в его исходном виде непосредственно, он может быть преобразован в другой вид, для чего от входного сигнала рассчитывается некоторая характеристическая функция *CF*. Нейронные сети могут включать в себя рассмотренные ранее классические алгоритмы, что демонстрируется, например, в работе Джентили и Брагато, где с полносвязной нейронной сетью используется алгоритм *STA/LTA*, рассмотренный в п. 1.2 [44].

2.2. Нейронные сети Кохонена

Данный вид нейронных сетей широко применяется для решения задач кластеризации данных. Входной слой здесь имеет m входных наборов данных, а выходной слой — n наборов данных. Нейроны в выходном слое организованы в виде матрицы, и все выходные нейроны связаны друг с другом, в отличие от входных нейронов, которые не имеют никаких связей друг с другом, но все нейроны входного слоя имеют полную связь со всеми нейронами выходного слоя, и каждая такая связь имеет свой вес $w_{i,j}$ [45]. Связи между входным и выходным слоем являются возбуждающими, а внутренние связи выходного слоя — подавляющими. Количественная характеристика связи j -го возбуждающего вектора v_j с i -м нейроном выходного слоя может быть задана выражением [45]

$$I_i^{v_j} = w_i v_j = \sum_{k=1}^m w_{i,k} v_{k,j},$$

где $w_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,m})$ характеризует силу воздействия на i -й выходной нейрон от вектора воздействия v_j .

Нейроны выходного слоя соревнуются друг с другом — в результате обучения нейрон-победитель и его окружение объединяются [45]. Вектор весов нейрона-победителя лучше всего соответствует входному шаблону, для этого нейрона и его окружения происходит перерасчет их объединенных параметров [46]. Пусть $u_{i,j}$ — характеристика силы горизонтальной связи между i -м и k -м нейронами выходного слоя, находящимися в позициях r_i и r_k соответственно. Тогда количественная характеристика горизонтального воздей-



ствия на i -й нейрон выходного слоя среди горизонтального набора нейронов l записывается в виде [45]

$$I_i^{(l)} = \sum_{k \in N, k \neq i} u_{i,j} h(r_k - r_i) \phi_k,$$

где ϕ_k — выход функции активации k -го нейрона, h — вейвлет-функция «Мексиканская шляпа» [45]

$$h_{c,i}(t) = \alpha(t) \exp\left(-\frac{\|r_c - r_i\|^2}{2\sigma^2(t)}\right),$$

где t характеризует прошедшее время обучения модели, $\sigma(t)$ — среднее квадратичное отклонение гауссовой функции, характеризует радиус окружения нейрона-победителя, i — нейрон-сосед нейрона-победителя выходного слоя c , $\alpha(t)$ характеризует скорость обучения, $\|r_c - r_i\|$ — расстояние между позициями r_c и r_i нейронов c и k соответственно. В общем виде функция «Мексиканская шляпа» изображена на рис. 8, а схема нейронной сети Кохонена — на рис. 9.

Определение моментов времени первых вступлений на 3D данных сейсморазведки с использованием нейронной сети Кохонена описано в работе [47]. В ней авторы получают сперва приблизительную оценку положений первых вступлений, анализируя трассы в скользящих окнах, разделяя трассы на три части: зону микросейсм, зону первого срыва и зону максимальной амплитуды, следующую за первым срывом (рис. 10).

Затем, после получения приблизительных вступлений, авторы их фильтруют по критерию не превышения кажущейся скоростью сейсмических волн в тестируемой точке заданного порога [48]:

$$\left| V_2 - \frac{V_1 + V_3}{2} \right| > V_{thr},$$

где V_{thr} — заданный порог, V_2 — кажущаяся скорость в тестируемой точке, V_1 и V_3 — кажущиеся скорости в соседних точках. После фильтрации следует корректировка первых вступлений с помощью нейронной сети Кохонена [47]. На основе данного подхода создан программный комплекс автоматической пикировки «MPick» [49].

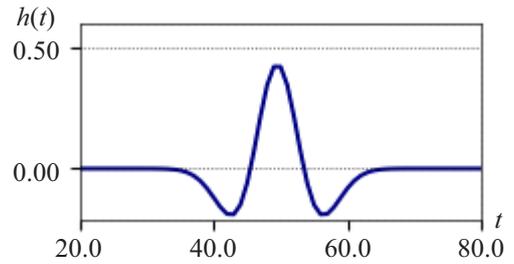


Рис. 8. Общий вид вейвлет-функции «Мексиканская шляпа» $h(t)$
Fig. 8. “Mexican Hat” wavelet function general view $h(t)$

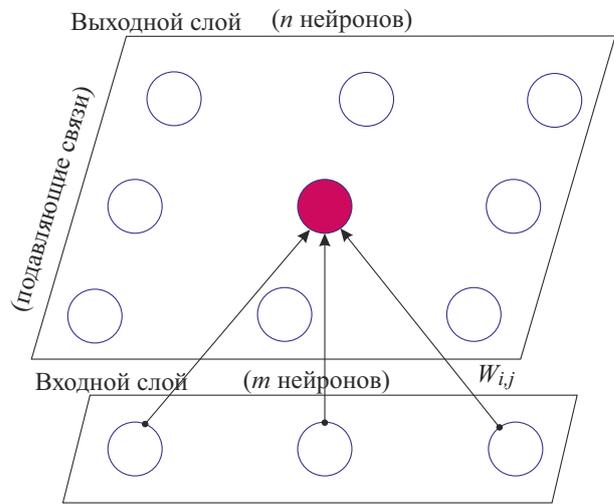


Рис. 9. Общий вид нейронных сетей Кохонена
Fig. 9. Kohonen neural network general view

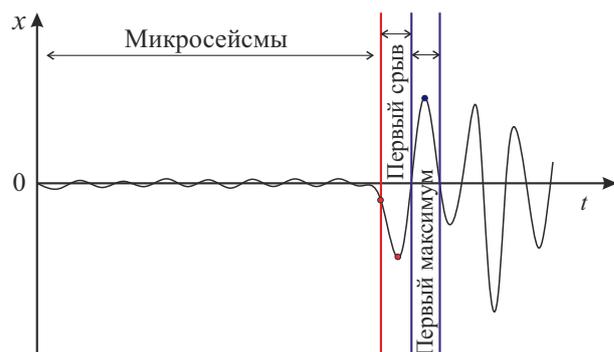


Рис. 10. Схематичное разделение сейсмической трассы на три участка: микросейсм, участок первого срыва и участок следующего за срывом максимума (цвет онлайн)

Fig. 10. The seismic trace schematic separation into three parts: The microseismic part, the first breaks part and the part of the maximum following the first break (color online)

2.3. Сверточные нейронные сети (CNN)

Нейронные сети, называемые сверточными, являются чрезвычайно популярным видом нейронных сетей, используемых в глубоком обучении. Данные сети широко используются в распознавании объектов на изображениях [50].

Глубокое обучение для автоматической пикировки вступлений — быстро развивающееся направление исследований в последнее время. В работе [51] проведен численный анализ шести конкретных реализаций нейронных сетей глубокого обучения для пикирования вступлений на сейсмических сигналах, и во всех них в том или ином виде их частью являются сверточные нейронные сети. Серьезным преимуществом CNN является то, что они предоставляют некоторую степень устойчивости своей работы к возможным сдвигам и искажениям во входных данных [52]. Маленькие простые CNN-основанные сети показывают большую устойчивость, чем другие простые нейронные сети [53], при этом они требуют меньше параметров для обучения [2].

Сверточные сети имеют в своем составе множество фильтров, применяющих операцию свертки к входным данным. В общем виде операция свертки задается выражением [54]

$$\mathbf{x}_j = \phi(\mathbf{o} * \mathbf{w}_j), \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

где \mathbf{x}_j — j -й вектор выходных значений, \mathbf{o} — входной вектор, \mathbf{w}_j — применяемый фильтр, представляющий собой вектор весов, соединяющих вход \mathbf{o} с выходом \mathbf{x}_j , J — общее количество фильтров, $*$ — оператор свертки, ϕ — функция активации.

В общем виде сверточная нейронная сеть для определения первых вступлений, содержащая сверточный, выборочный и полносвязный слои, представлена на рис. 11 [54]. Эти слои лежат в основе сверточных нейронных сетей [2].

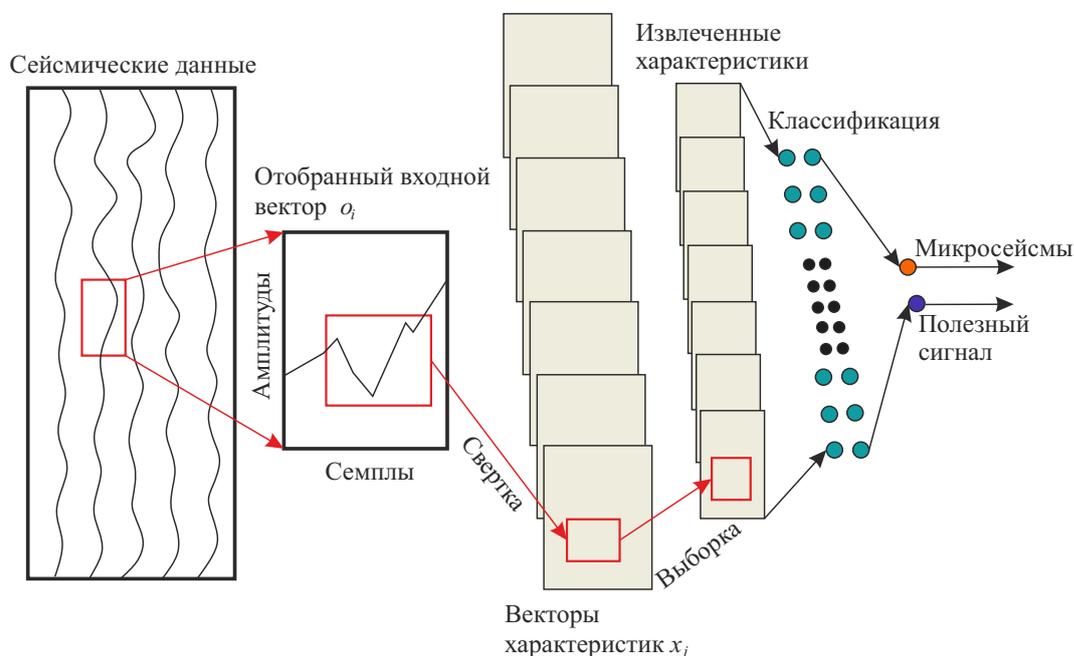


Рис. 11. Схема сверточной нейронной сети для классификации сейсмического сигнала по двум признакам: по области полезной части сигнала и по области микросейсмов
 Fig. 11. The scheme of a convolutional neural network for the seismic signal classification using two flags, marking whether a data sample belongs to microseismic noise or to the useful informational part



Сверточный слой является ключевым в *CNN*. Он имеет два задаваемых параметра — размер и глубину, веса же задаются случайно и оптимизируются автоматически. В общем виде сверточный слой задается формулой [2]

$$x_j^{(l)} = \phi(x_i^{(l-1)} * w_{i,j}^{(l)} + b_j^{(l)}),$$

где $x_i^{(l-1)}$ — выход i -го нейрона на слое $(l-1)$, $x_j^{(l)}$ — выход j -го нейрона слоя l , $w_{i,j}^{(l)}$ — сверточное ядро, $b_j^{(l)}$ — смещение.

Выборочный слой применяется для уменьшения размера нейронной сети с целью повышения вычислительной эффективности. Самые распространенные виды выборочного слоя: усредняющий слой, выбирающий среднее значение, и максимизирующий слой, выбирающий максимальное значение из локальных характеристик [2].

Полносвязный слой отвечает за распределение найденных ключевых характеристик, представляющих собой одномерный вектор, подаваемый на его вход. Этот вектор формируется после прохождения первых двух слоев — сверточного и выборочного. В полносвязном слое каждый нейрон на входе связан со всеми нейронами на выходе. Необходимое количество полносвязных слоев и нейронов в выходном слое выбирается исходя из решаемой задачи. Данный слой задается выражением [2]

$$x_j^{(l)} = \phi(w_{i,j}^{(l)} x_i^{(l-1)} + b_j^{(l)}),$$

где $x_i^{(l-1)}$ — выход i -го нейрона на слое $(l-1)$, $x_j^{(l)}$ — выход j -го нейрона слоя l после полносвязного слоя, $w_{i,j}^{(l)}$ — матрица весов, $b_j^{(l)}$ — смещение.

Для целей пикирования имеет смысл сперва примерно определить первые вступления, например, прокоррелировав их прямой линией, и задать определенной ширины интервал для дальнейшего уточнения вступлений. Обучающие входные данные необходимо промаркировать, присвоив -1 микросейсам и $+1$ области полезного сигнала [2]. После обучения *CNN* способна находить в новых подаваемых на вход дискретных сигналах похожие шаблоны из обучающей выборки и присваивать новым данным соответствующую метку, относя их к микросейсам или к полезной части сигнала.

Заключение

Рассмотренные подходы к автоматизации пикирования первых вступлений полезного сейсмического сигнала применяются в специальных программных комплексах, при этом каждая конкретная реализация таких программ имеет свой набор алгоритмов, состав которого определяется создателями программы. Для решения задачи определения вступлений могут быть применены как классические алгоритмы, не использующие нейронные сети, так и современные нейросетевые подходы, при этом последние могут включать в себя некоторую необходимую комбинацию классических алгоритмов. Одни подходы работают с каждым сигналом по отдельности, другие же учитывают пространственное взаиморасположение регистрируемых сейсмических трасс и основаны на предположении о том, что сигналы от одного и того же источника, зарегистрированные разными приемниками, должны быть схожими, с некоторым смещением по оси времени. В общем виде схема рассмотренных подходов к пикированию первых вступлений представлена на рис. 12.

Таблица с полученными значениями оценки точности пикировок авторами соответствующих исследований приведена ниже. Однако необходимо заметить, что прямо сравнивать между собой полученные оценки в таблице некорректно, поскольку исследования проведены на разных исходных данных.



Рис. 12. Схема рассмотренных подходов к автоматическому пикированию первых вступлений сейсмических волн (цвет онлайн)

Fig. 12. The scheme of the considered seismic first break picking approaches (color online)

Оценки точности подходов к пикированию первых вступлений

Table. First breaks picking approaches accuracy estimation

Подход	Источник	Тип данных	Метрика	Оценка
STA/LTA	[5]	Сейсмологические	<i>Precision</i>	В окне 0.473 с найдены 74% вступлений в широкополосных трассах и 87% вступлений на короткопериодных трассах, тест на специально отобранных трассах с заведомо ложными вступлениями дал 63% ложных срабатываний
FilterPicker	[5]	Сейсмологические	<i>Precision</i>	В окне 0.473 с найдены 90% вступлений в широкополосных и короткопериодных трассах, ложных срабатываний 20%, тест на специальных трассах с заведомо ложными вступлениями дал 20% ложных срабатываний
Статистика высокого порядка	[13]	Сейсмологические	<i>Accuracy</i>	В окне 1 с оценка 98.5%, ложных срабатываний 0.064%
Авторегрессионный подход	[16]	Сейсмологические	Ср. ошибка времени пикировки	0.55 с
Корреляционный подход	[27]	Сейморазведочные	Ошибка оценки скорости сейсмической волны	1.2%
Динамическое искривление времени (DTW)	-	Сейморазведочные	Нет данных	-



Окончание таблицы / Continuation of the Table

Подход	Источник	Тип данных	Метрика	Оценка
Нечеткая кластеризация (<i>FCM</i>)	[33]	Сейсмо-разведочные	<i>Accuracy</i>	При окне валидации 2 мс оценка 96.5% для данных с Синьцзянского нефтяного месторождения и 81.25% для данных с Сычуаньского нефтегазового бассейна
Полносвязные нейронные сети	[37]	Сейсмо-разведочные	Средне-квадратичное отклонение ошибок пикировок	8.1897 мс без доп. шума; 7.2740 мс с добавленным шумом при <i>SNR</i> (отношение сигнал / шум) = 4; 8.2929 мс при <i>SNR</i> = 8; 8.2757 мс при <i>SNR</i> = 13
Нейронные сети Кохонена	–	Сейсмо-разведочные	Нет данных	–
Сверточные нейронные сети (<i>CNN</i>)	[51]	Сейсмо-логические	Площадь под кривой (<i>AUC</i>)	Для нескольких протестированных моделей оценки следующие: BasicPhaseAE – 0.768; CRED – 0.952; DPP – 0.942; EQTransformer – 0.965; GPD-Orig – 0.928; GPD – 0.952; PhaseNet – 0.955

В таблице метрика *Precision* определяется как $Precision = TP / (TP + FP)$, а метрика *Accuracy* определяется как $Accuracy = (TP + TN) / (TP + TN + FP + FN)$, где *TP* – количество верноположительных, *TN* – количество верноотрицательных, *FP* – количество ложноположительных и *FN* – количество ложноотрицательных пикировок [55]. Если чувствительность *SE* определить как $SE = TP / (TP + FN)$, а специфичность *SP* – как $SP = TN / (FP + TN)$, то характеристическая функция *ROC* есть зависимость *SE* от $1 - SP$, тогда площадь под кривой $AUC = \int_0^1 ROC(t_{hr}) dt_{hr}$ [56], где t_{hr} – время регистрации очередного порога в сейсмической трассе, который может быть первым вступлением или ложным первым вступлением. $AUC = 1$ означает превосходный результат, а $AUC = 0.5$ означает неспособность модели анализировать данные и корректно определять вступления [51].

Данные в таблице приведены только для продольных волн.

Список литературы

1. Souza W. E., Cerqueira A. G., Porsani M. J. First-break prediction in 3-D land seismic data using the dynamic time warping algorithm // Geophysical Journal International. 2024. Vol. 237, iss. 1. P. 402–418. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggae048>
2. Yin Y., Han L., Zhang P., Lu Z., Shang X. First-break picking of large-offset seismic data based on CNNs with weighted data // Remote Sensing. 2023. Vol. 15, iss. 2. Art. 356. DOI: <https://doi.org/10.3390/rs15020356>
3. Trnkoczy A. Understanding and parameter setting of STA/LTA trigger algorithm // New Manual of Seismological Observatory Practice 2 (NMSOP-2) / ed. by P. Bormann. Potsdam : Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 2012. P. 1–20. DOI: https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2_IS_8.1
4. Sharma B. K., Kumar A., Murthy V. M. Evaluation of seismic events detection algorithms // Journal of the Geological Society of India. 2010. Vol. 75, iss. 3. P. 533–538. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12594-010-0042-8>
5. Vassallo M., Satriano C., Lomax A. Automatic picker developments and optimization: A strategy for improving the performances of automatic phase pickers // Seismological Research Letters. 2012. Vol. 83, iss. 3. P. 541–554. DOI: <https://doi.org/10.1785/gssrl.83.3.541>
6. Küperkoch L., Meier T., Diehl T. Automated event and phase identification // New Manual of



- Seismological Observatory Practice 2 (NMSOP-2) / ed. by P. Bormann. Potsdam : Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 2012. P. 1–52. DOI: https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2_ch16
7. *Li X., Shang X., Wang Z., Dong L., Weng L.* Identifying *P*-phase arrivals with noise: An improved kurtosis method based on DWT and STA/LTA // *Journal of Applied Geophysics*. 2016. Vol. 133. P. 50–61. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2016.07.022>
 8. *Akram J., Eaton D. W.* A review and appraisal of arrival-time picking methods for downhole microseismic data // *Geophysics*. 2016. Vol. 81, iss. 2. DOI: <https://doi.org/10.1190/geo2014-0500.1>, EDN: WUPDSV
 9. *Shen T., Tuo X., Li H., Liu Y., Rong W.* A first arrival picking method of microseismic data based on single time window with window length independent // *Journal of Seismology*. 2018. Vol. 22, iss. 6. P. 1613–1627. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10950-018-9789-y>
 10. *Lomax A., Satriano C., Vassallo M.* Automatic picker developments and optimization: FilterPicker-A robust, broadband picker for real-time seismic monitoring and earthquake early warning // *Seismological Research Letters*. 2012. Vol. 83, iss. 3. P. 531–540. DOI: <https://doi.org/10.1785/gssrl.83.3.531>
 11. *Vaezi Y., Van der Baan M.* Comparison of the STA/LTA and power spectral density methods for microseismic event detection // *Geophysical Journal International*. 2015. Vol. 203, iss. 3. P. 1896–1908. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggv419>
 12. *Souza W. E., Manenti R. R., Porsani M. J.* Automatic first-breaks picking using linear moveout correction and complex seismic traces // 15th International Congress of the Brazilian Geophysical Society. 2017. P. 1538–1543. DOI: <https://doi.org/10.1190/sbgf2017-300>
 13. *Nippress S. E., Rietbrock A., Heath A. E.* Optimized automatic pickers: Application to the ANCORP Data Set // *Geophysical Journal International*. 2010. Vol. 181, iss. 2. P. 911–925. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04531.x>
 14. *Kuperkoch L., Meier T., Lee J., Friederich W.* Automated determination of *P*-phase arrival times at regional and local distances using higher order statistics // *Geophysical Journal International*. 2010. Vol. 181, iss. 2. P. 1159–1170. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04570.x>
 15. *Liang Z., Wei J., Zhao J., Liu H., Li B., Shen J., Zheng C.* The statistical meaning of kurtosis and its new application to identification of persons based on seismic signals // *Sensors*. 2008. Vol. 8, iss. 8. P. 5106–5119. DOI: <https://doi.org/10.3390/s8085106>
 16. *Stampa J., Eckel F., Keers H., Lebedev S., Meier T.* Automated measurement of Teleseismic *P*-, *SH*- and *SV*-wave arrival times using autoregressive prediction and the instantaneous phase of multicomponent waveforms // *Geophysical Journal International*. 2024. Vol. 239, iss. 2. P. 936–949. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggae307>
 17. *Diehl T., Deichmann N., Kissling E., Husen S.* Automatic *S*-wave picker for local earthquake tomography // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2009. Vol. 99, iss. 3. P. 1906–1920. DOI: <https://doi.org/10.1785/0120080019>
 18. *Li H., Tuo X., Wang R., Courtois J.* A reliable strategy for improving automatic first-arrival picking of high-noise three-component microseismic data // *Seismological Research Letters*. 2019. Vol. 90, iss. 3. P. 1336–1345. DOI: <https://doi.org/10.1785/0220190038>
 19. *Irnaka T. M., Suryanto W., Wardhani P. W. K.* High accuracy automatic phase picking method in earthquake and microearthquake for earthquake early warning system (EEWS) and geothermal field in Indonesia // 3rd Jogja International Conference on Physics. 2012.
 20. *Ахметсафин Р. Д., Ахметсафина Р. З.* Статистические методы оценки времен первых вступлений по записям волнового акустического каротажа // *Каротажник*. 2014. Т. 18, вып. 4. С. 54–60. DOI: <https://doi.org/10.21455/gr2017.4-5>, EDN: SAXANF
 21. *Sedlak P., Hirose Y., Enoki M., Sikula J.* Arrival time detection in thin multilayer plates on the basis of Akaike information criterion // *Journal of Acoustic Emission*. 2008. Vol. 26. P. 182–188.
 22. *St-Onge A.* Akaike information criterion applied to detecting first arrival times on microseismic data // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. 2011. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.3627522>
 23. *Zhou Z., Cheng R., Rui Y., Zhou J., Wang H.* An improved automatic picking method for arrival time of acoustic emission signals // *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. P. 75568–75576. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2921650>
 24. *Judson R. D., Sherwood J. W.* Static corrections for seismic traces by cross-correlation method. United States Patent Appl. No.: US00134099A; filed: 1971-04-05; application granted: 1973-05-01; published: 1973-05-01.
 25. *Campillo M., Roux P., Shapiro N. M.* Seismic, ambient noise correlation // *Encyclopedia of Solid*



- Earth Geophysics. Encyclopedia of Earth Sciences Series / ed. by H. K. Gupta. Dordrecht : Springer, 2011. P. 1230–1236. DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-8702-7_218
26. *Asuero A. G., Sayago A., Gonzalez A. G.* The correlation coefficient: An overview // *Critical Reviews in Analytical Chemistry*. 2006. Vol. 36, iss. 1. P. 41–59. DOI: <https://doi.org/10.1080/10408340500526766>
 27. *Molyneux J. B., Schmitt D. R.* First-break timing; arrival onset times by direct correlation // *Geophysics*. 1999. Vol. 64, iss. 5. P. 1492–1501. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1444653>
 28. *Чернышов Г. С., Карпухин В. И.* Подход к автоматизации этапов обработки сейсморазведочных данных метода преломленных волн // *Геофизические технологии*. 2020. Вып. 1. С. 28–39. DOI: <https://doi.org/10.18303/2619-1563-2020-1-28>, EDN: ZOSFHO
 29. *Yu Z., He C., Hou G., Tan Y.* Arrival picking and refinement for microseismic events based on waveform cross-correlation // *International Geophysical Conference*. Beijing, China, 2018. P. 1354–1357. DOI: <https://doi.org/10.1190/IGC2018-332>
 30. *Tan Y., He C.* Improved methods for detection and arrival picking of microseismic events with low signal-to-noise ratios // *Geophysics*. 2016. Vol. 81, iss. 2. P. KS93–KS111. DOI: <https://doi.org/10.1190/geo2015-0213.1>
 31. *Kummerow J.* Joint arrival time optimization for microseismic events recorded by seismic borehole arrays // *75th EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC*. 2013. DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20130401>
 32. *Senin P.* Dynamic time warping algorithm review // *Information and Computer Science Department University of Hawaii at Manoa Honolulu*. 2008. P. 1–23.
 33. *Gao L., Jiang Z., Min F.* First-arrival travel times picking through sliding windows and fuzzy *C*-means // *Mathematics*. 2019. Vol. 7, iss. 3. Art. 221. DOI: <https://doi.org/10.3390/math7030221>
 34. *Bao Y., Lu H., Gao Q.* Fuzzy *K*-means clustering without cluster centroids. arXiv:2404.04940v2 [cs.LG] 7 Nov 2024. 9 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.04940>
 35. *Al-Augby S., Majewski S., Majewska A., Nermend K.* A comparison of *K*-means and fuzzy *C*-means clustering methods for a sample of Gulf Cooperation Council Stock Markets // *Folia Oeconomica Stetinensia*. 2014. Vol. 14, iss. 2. P. 19–36. DOI: <https://doi.org/10.1515/fofi-2015-0001>
 36. *Wang D., Tan D., Liu L.* Particle swarm optimization algorithm: An overview // *Soft Computing*. 2017. Vol. 22, iss. 2. P. 387–408. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-016-2474-6>
 37. *Kahrizi A., Hashemi H.* Neuron curve as a tool for performance evaluation of MLP and RBF Architecture in first break picking of seismic data // *Journal of Applied Geophysics*. 2014. Vol. 108. P. 159–166. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2014.06.012>
 38. *Basheer I. A., Hajmeer M.* Artificial neural networks: Fundamentals, computing, design, and application // *Journal of Microbiological Methods*. 2000. Vol. 43, iss. 1. P. 3–31. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-7012\(00\)00201-3](https://doi.org/10.1016/S0167-7012(00)00201-3)
 39. *LeCun Y., Bengio Y., Hinton G.* Deep learning // *Nature*. 2015. Vol. 521. P. 436–444. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature14539>
 40. *Dubey S. R., Singh S. K., Chaudhuri B. B.* Activation functions in deep learning: A comprehensive survey and benchmark. arXiv:2109.14545v3 [cs.LG] 28 Jun 2022. 18 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.14545>
 41. *Feng J., Lu S.* Performance analysis of various activation functions in artificial neural networks // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1237, iss. 2. Art. 022030. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1237/2/022030>
 42. *Лазаренко М. А., Герасименко О. А., Остапчук Н. Н.* Нейросетевая модель поля времен первых вступлений сейсмических волн в Украине // *Геофизический журнал*. 2016. Т. 38, вып. 1. С. 97–103. DOI: <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i1.2016.107726>, EDN: ZMIZMH
 43. *Pcea Fischetti A., Andrade A.* Automatic first break picking in seismic traces by neural network // *6th International Congress of the Brazilian Geophysical Society*. 1999. Art. cp-215-00370. DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609-pdb.215.sbgf068>
 44. *Gentili S., Bragato P.* A neural-tree-based system for automatic location of earthquakes in Northeastern Italy // *Journal of Seismology*. 2006. Vol. 10, iss. 1. P. 73–89. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10950-005-9001-z>
 45. *Shen Y.-J., Wang M.-S.* Apply neural schemes to deformation objects // *ICGST-GVIP Journal*. 2005. Vol. 5, iss. 4.
 46. *Kajan S., Sekaj I., Lajtman M.* Cluster analysis applications in Matlab using Kohonen network // *Institute of Control and Industrial Informatics*. 2011. URL: https://www2.humusoft.cz/www/papers/tcp11/060_kajan.pdf (дата обращения: 16.09.2025).



47. Приезжев И. И., Иванов П. Д., Гаврилов С. С., Мамаев Д. А., Калинин А. Ю., Стенина Ю. В. Автоматическая пикировка первых вступлений с использованием машинного обучения // *Геофизика*. 2022. Вып. 1. С. 90–96. DOI: <https://doi.org/10.34926/geo.2022.65.65.001>, EDN: TAUBKQ
48. Приезжев И. И., Мамаев Д. А., Стенина Ю. В., Иванов П. Д. Использование элементов машинного обучения для автоматической пикировки первых вступлений // *Геомодель 2021 : материалы 23-й конференции по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа*. Москва : ООО «ЕАГЕ Геомодель», 2021. Ст. 114. DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202157135>, EDN: HNWDZL
49. Силкин А. М., Багрова И. А., Ревяко А. В. Мрпкк и ИИ: новые возможности в автоматической пикировке первых вступлений // *Приборы и системы разведочной геофизики*. 2024. Вып. 3 (82). С. 7–11. EDN: SZGJMI
50. Wu H., Zhang B., Li F., Liu N. Semiautomatic first-arrival picking of microseismic events by using the pixel-wise convolutional image segmentation method // *Geophysics*. 2019. Vol. 84, iss. 3. DOI: <https://doi.org/10.1190/geo2018-0389.1>
51. Munchmeyer J., Woollam J., Rietbrock A., Tilmann F., Lange D., Bornstein T., Diehl T., Giunchi C., Haslinger F., Jozinovi D., Michelini A., Saul J., Soto H. Which picker fits my data? A quantitative evaluation of deep learning based seismic pickers // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2022. Vol. 127, iss. 1. DOI: <https://doi.org/10.1029/2021JB023499>
52. Johnson S. W., Chambers D. J., Boltz M. S., Koper K. D. Application of a convolutional neural network for seismic phase picking of mining-induced seismicity // *Geophysical Journal International*. 2020. Vol. 224, iss. 1. P. 230–240. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa449>
53. St-Charles P.-L., Rousseau B., Ghosn J., Nantel J.-P., Bellefleur G., Schetselaar E. A multi-survey dataset and benchmark for first break picking in hard rock seismic exploration // *Fourth Workshop on Machine Learning and the Physical Sciences (NeurIPS 2021)*. 2021. URL: https://ml4physicalsciences.github.io/2021/files/NeurIPS_ML4PS_2021_3.pdf (дата обращения: 16.09.2025).
54. Chen Y., Zhang G., Bai M., Zu S., Guan Z., Zhang M. Automatic waveform classification and arrival picking based on convolutional neural network // *Earth and Space Science*. 2019. Vol. 6, iss. 7. P. 1244–1261. DOI: <https://doi.org/10.1029/2018EA000466>
55. Rahman M. S. Understanding accuracy metrics in machine learning models // *Daffodil International University*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.16140.83841>
56. Cali C., Longobardi M. Some mathematical properties of the ROC curve and their applications // *Ricerche di Matematica*. 2015. Vol. 64, iss. 2. P. 391–402. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11587-015-0246-8>

References

1. Souza W. E., Cerqueira A. G., Porsani M. J. First-break prediction in 3-D land seismic data using the dynamic time warping algorithm. *Geophysical Journal International*, 2024, vol. 237, iss. 1, pp. 402–418. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggae048>
2. Yin Y., Han L., Zhang P., Lu Z., Shang X. First-break picking of large-offset seismic data based on cnns with weighted data. *Remote Sensing*, 2023, vol. 15, iss. 2, art. 356. DOI: <https://doi.org/10.3390/rs15020356>
3. Trnkoczy A. Understanding and parameter setting of STA/LTA trigger algorithm. In: Bormann P. (ed.) *New Manual of Seismological Observatory Practice 2 (NMSOP-2)*. Potsdam, Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 2012, pp. 1–20. DOI: https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2_IS_8.1
4. Sharma B. K., Kumar A., Murthy V. M. Evaluation of seismic events detection algorithms. *Journal of the Geological Society of India*, 2010, vol. 75, iss. 3, pp. 533–538. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12594-010-0042-8>
5. Vassallo M., Satriano C., Lomax A. Automatic picker developments and optimization: A Strategy for improving the performances of automatic phase pickers. *Seismological Research Letters*, 2012, vol. 83, iss. 3, pp. 541–554. DOI: <https://doi.org/10.1785/gssrl.83.3.541>
6. Kuperkoch L., Meier T., Diehl T. Automated event and phase identification. In: Bormann P. (ed.) *New Manual of Seismological Observatory Practice 2 (NMSOP-2)*. Potsdam, Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 2012, pp. 1–52. DOI: https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2_ch16
7. Li X., Shang X., Wang Z., Dong L., Weng L. Identifying P-phase arrivals with noise: An improved



- kurtosis method based on DWT and STA/LTA. *Journal of Applied Geophysics*, 2016, vol. 133, pp. 50–61. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2016.07.022>
8. Akram J., Eaton D. W. A review and appraisal of arrival-time picking methods for downhole microseismic data. *Geophysics*, 2016, vol. 81, iss. 2. DOI: <https://doi.org/10.1190/geo2014-0500.1>, EDN: WUPDSV
 9. Shen T., Tuo X., Li H., Liu Y., Rong W. A first arrival picking method of microseismic data based on single time window with window length independent. *Journal of Seismology*, 2018, vol. 22, iss. 6, pp. 1613–1627. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10950-018-9789-y>
 10. Lomax A., Satriano C., Vassallo M. Automatic picker developments and optimization: FilterPicker-A robust, broadband picker for real-time seismic monitoring and earthquake early warning. *Seismological Research Letters*, 2012, vol. 83, iss. 3, pp. 531–540. DOI: <https://doi.org/10.1785/gssrl.83.3.531>
 11. Vaezi Y., Van der Baan M. Comparison of the STA/LTA and power spectral density methods for microseismic event detection. *Geophysical Journal International*, 2015, vol. 203, iss. 3, pp. 1896–1908. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggv419>
 12. Souza W. E., Manenti R. R., Porsani M. J. Automatic first-breaks picking using linear moveout correction and complex seismic traces. *15th International Congress of the Brazilian Geophysical Society*, 2017, pp. 1538–1543. DOI: <https://doi.org/10.1190/sbgf2017-300>
 13. Nippres S. E., Rietbrock A., Heath A. E. Optimized automatic pickers: Application to the ANCORP Data Set. *Geophysical Journal International*, 2010, vol. 181, iss. 2, pp. 911–925. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04531.x>
 14. Kuperkoch L., Meier T., Lee J., Friederich W. Automated determination of *P*-phase arrival times at regional and local distances using higher order statistics. *Geophysical Journal International*, 2010, vol. 181, iss. 2, pp. 1159–1170. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04570.x>
 15. Liang Z., Wei J., Zhao J., Liu H., Li B., Shen J., Zheng C. The statistical meaning of kurtosis and its new application to identification of persons based on seismic signals. *Sensors*, 2008, vol. 8, iss. 8, pp. 5106–5119. DOI: <https://doi.org/10.3390/s8085106>
 16. Stampa J., Eckel F., Keers H., Lebedev S., Meier T. Automated measurement of Teleseismic *P*-, *SH*- and *SV*-wave arrival times using autoregressive prediction and the instantaneous phase of multicomponent waveforms. *Geophysical Journal International*, 2024, vol. 239, iss. 2, pp. 936–949. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggae307>
 17. Diehl T., Deichmann N., Kissling E., Husen S. Automatic *S*-wave picker for local earthquake tomography. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2009, vol. 99, iss. 3, pp. 1906–1920. DOI: <https://doi.org/10.1785/0120080019>
 18. Li H., Tuo X., Wang R., Courtois J. A reliable strategy for improving automatic first-arrival picking of high-noise three-component microseismic data. *Seismological Research Letters*, 2019, vol. 90, iss. 3, pp. 1336–1345. DOI: <https://doi.org/10.1785/0220190038>
 19. Irnaka T. M., Suryanto W., Wardhani P. W. K. High accuracy automatic phase picking method in earthquake and microearthquake for earthquake early warning system (EWS) and geothermal field in Indonesia. *3rd Jogja International Conference on Physics*, 2012.
 20. Akhmetsafin R. D., Akhmetsafina R. Z. Statistical techniques for first-arrival time evaluation from wave sonic logs. *Karotazhnik [Logger]*, 2014, vol. 18, iss. 4, pp. 54–60 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.21455/gr2017.4-5>, EDN: SAXANF
 21. Sedlak P., Hirose Y., Enoki M., Sikula J. Arrival time detection in thin multilayer plates on the basis of Akaike information criterion. *Journal of Acoustic Emission*, 2008, vol. 26, pp. 182–188.
 22. St-Onge A. Akaike information criterion applied to detecting first arrival times on microseismic data. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 2011. DOI: <http://doi.org/10.1190/1.3627522>
 23. Zhou Z., Cheng R., Rui Y., Zhou J., Wang H. An improved automatic picking method for arrival time of acoustic emission signals. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 75568–75576. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2921650>
 24. Judson R. D., Sherwood J. W. *Static corrections for seismic traces by cross-correlation method*. United States Patent Appl. No.: US00134099A, filed: 1971-04-05, application granted: 1973-05-01, published: 1973-05-01.
 25. Campillo M., Roux P., Shapiro N. M. Seismic, ambient noise correlation. In: Gupta H. K. (ed.) *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics. Encyclopedia of Earth Sciences Series*. Dordrecht, Springer, 2011, pp. 1230–1236. DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-8702-7_218



26. Asuero A. G., Sayago A., Gonzalez A. G. The correlation coefficient: An overview. *Critical Reviews in Analytical Chemistry*, 2006, vol. 36, iss. 1, pp. 41–59. DOI: <https://doi.org/10.1080/10408340500526766>
27. Molyneux J. B., Schmitt D. R. First-break timing; arrival onset times by direct correlation. *Geophysics*, 1999, vol. 64, iss. 5, pp. 1492–1501. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1444653>
28. Chernyshov G. S., Karpukhin V. I. The approach to automating the processing stages of refracted seismic data. *Russian Journal of Geophysical Technologies*, 2020, iss. 1, pp. 28–39 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18303/2619-1563-2020-1-28>, EDN: ZOSFHO
29. Yu Z., He C., Hou G., Tan Y. Arrival picking and refinement for microseismic events based on waveform cross-correlation. *International Geophysical Conference*. Beijing, China, 2018, pp. 1354–1357. DOI: <https://doi.org/10.1190/IGC2018-332>
30. Tan Y., He C. Improved methods for detection and arrival picking of microseismic events with low signal-to-noise ratios. *Geophysics*, 2016, vol. 81, iss. 2, pp. KS93–KS111. DOI: <https://doi.org/10.1190/geo2015-0213.1>
31. Kummerow J. Joint arrival time optimization for microseismic events recorded by seismic borehole arrays. *75th EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC*, 2013. DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20130401>
32. Senin P. Dynamic time warping algorithm review. *Information and Computer Science Department University of Hawaii at Manoa Honolulu*, 2008, pp. 1–23.
33. Gao L., Jiang Z., Min F. First-arrival travel times picking through sliding windows and fuzzy C-means. *Mathematics*, 2019, vol. 7, iss. 3, art. 221. DOI: <https://doi.org/10.3390/math7030221>
34. Bao Y., Lu H., Gao Q. *Fuzzy K-means clustering without cluster centroids*. arXiv:2404.04940v2 [cs.LG] 7 Nov 2024, 9 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.04940>
35. Al-Augby S., Majewski S., Majewska A., Nermend K. A comparison of K-means and fuzzy C-means clustering methods for a sample of Gulf Cooperation Council Stock Markets. *Folia Oeconomica Stetinensia*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 19–36. DOI: <https://doi.org/10.1515/fofi-2015-0001>
36. Wang D., Tan D., Liu L. Particle swarm optimization algorithm: An overview. *Soft Computing*, 2017, vol. 22, iss. 2, pp. 387–408. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-016-2474-6>
37. Kahrizi A., Hashemi H. Neuron curve as a tool for performance evaluation of MLP and RBF architecture in first break picking of seismic data. *Journal of Applied Geophysics*, 2014, vol. 108, pp. 159–166. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2014.06.012>
38. Basheer I. A., Hajmeer M. Artificial neural networks: Fundamentals, computing, design, and application. *Journal of Microbiological Methods*, 2000, vol. 43, iss. 1, pp. 3–31. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-7012\(00\)00201-3](https://doi.org/10.1016/S0167-7012(00)00201-3)
39. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning. *Nature*, 2015, vol. 521, pp. 436–444. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature14539>
40. Dubey S. R., Singh S. K., Chaudhuri B. B. *Activation functions in deep learning: A comprehensive survey and benchmark*. arXiv:2109.14545v3 [cs.LG] 28 Jun, 2022, 18 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.14545>
41. Feng J., Lu S. Performance analysis of various activation functions in artificial neural networks. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1237, iss. 2, art. 022030. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1237/2/022030>
42. Lazarenko M. A., Gerasimenko O. A., Ostapchuk N. N. Neural network model field of the first arrival of seismic waves in Ukraine. *Geophysical Journal*, 2016, vol. 38, iss. 1, pp. 97–103 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i1.2016.107726>, EDN: ZMIZMH
43. Ilcea Fischetti A., Andrade A. Automatic first break picking in seismic traces by neural network. *6th International Congress of the Brazilian Geophysical Society*, 1999, art. cp-215-00370. DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609-pdb.215.sbgf068>
44. Gentili S., Bragato P. A neural-tree-based system for automatic location of earthquakes in Northeastern Italy. *Journal of Seismology*, 2006, vol. 10, iss. 1, pp. 73–89. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10950-005-9001-z>
45. Shen Y.-J., Wang M.-S. Apply neural schemes to deformation objects. *ICGST-GVIP Journal*, 2005, vol. 5, iss. 4.
46. Kajan S., Sekaj I., Lajtman M. Cluster analysis applications in Matlab using Kohonen network. *Institute of Control and Industrial Informatics*, 2011. Available at: https://www2.humusoft.cz/www/papers/tcp11/060_kajan.pdf (accessed September 16, 2025).



47. Priezzhev I. I., Ivanov P. D., Gavrilov S. S., Mamaev D. A., Kalinin A. Yu., Stenina Yu. V. Automatic picking of the first breaks using machine learning. *Journal of Geophysics*, 2022, iss. 1, pp. 90–96 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.34926/geo.2022.65.65.001>, EDN: TAUBKQ
48. Priezzhev I. I., Mamaev D. A., Stenina Yu. V., Ivanov P. D. Using the elements of machine learning to automatically pick first breaks. *Geomodel' 2021* [Geomodel 2021. Proceedings of the 23rd conference on geological exploration and development of oil and gas fields]. Moscow, LLC "EAGE Geomodel", 2021, art. 114 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202157135>, EDN: HNWDZL
49. Silkin A. M., Bagrova I. A., Revyako A. V. Mpick and AI: New possibilities in automatic first breaks picking. *Pribory i sistemy razvedochnoy geofiziki* [Instruments and Systems for Exploration Geophysics], 2024, iss. 3 (82), pp. 7–11 (in Russian). EDN: SZGJMI
50. Wu H., Zhang B., Li F., Liu N. Semiautomatic first-arrival picking of microseismic events by using the pixel-wise convolutional image segmentation method. *Geophysics*, 2019, vol. 84, iss. 3. DOI: <https://doi.org/10.1190/geo2018-0389.1>
51. Munchmeyer J., Woollam J., Rietbrock A., Tilmann F., Lange D., Bornstein T., Diehl T., Giunchi C., Haslinger F., Jozinovi D., Michelini A., Saul J., Soto H. Which picker fits my data? A quantitative evaluation of deep learning based seismic pickers. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2022, vol. 127, iss. 1. DOI: <https://doi.org/10.1029/2021JB023499>
52. Johnson S. W., Chambers D. J., Boltz M. S., Koper K. D. Application of a convolutional neural network for seismic phase picking of mining-induced seismicity. *Geophysical Journal International*, 2020, vol. 224, iss. 1, pp. 230–240. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa449>
53. St-Charles P.-L., Rousseau B., Ghosn J., Nantel J.-P., Bellefleur G., Schetselaar E. A multi-survey dataset and benchmark for first break picking in hard rock seismic exploration. *Fourth Workshop on Machine Learning and the Physical Sciences (NeurIPS 2021)*, 2021. Available at: https://ml4physicalsciences.github.io/2021/files/NeurIPS_ML4PS_2021_3.pdf (accessed September 16, 2025).
54. Chen Y., Zhang G., Bai M., Zu S., Guan Z., Zhang M. Automatic waveform classification and arrival picking based on convolutional neural network. *Earth and Space Science*, 2019, vol. 6, iss. 7, pp. 1244–1261. DOI: <https://doi.org/10.1029/2018EA000466>
55. Rahman M. S. Understanding accuracy metrics in machine learning models. *Daffodil International University*, 2024. DOI: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.16140.83841>
56. Cali C., Longobardi M. Some mathematical properties of the ROC curve and their applications. *Ricerche di Matematica*, 2015, vol. 64, iss. 2, pp. 391–402. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11587-015-0246-8>

Поступила в редакцию / Received 16.09.2025

Принята к публикации / Accepted 19.12.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 132–138

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 132–138

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-132-138>

EDN: <https://elibrary.ru/WNIFEO>

Article

European option pricing on an incomplete market as an antagonistic game

O. V. Zverev, E. A. Shelemekh[✉]

Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences, 47 Nakhimovsky prospekt, Moscow 117418, Russia

Oleg V. Zverev, zv-oleg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8523-6343>, SPIN: 8389-3310, AuthorID: 904874

Elena A. Shelemekh, letis@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0004-1788-5164>, SPIN: 9932-3472, AuthorID: 800293

Abstract. We describe in detail the stochastic multi-step game corresponding to the European option pricing problem on an incomplete market with discrete time and a finite number of assets, without transaction costs and trading restrictions. Recurrent Bellman-type relations for the upper and lower guaranteed values of the game are given. The equivalence of the following statements is established: the market model is arbitrage-free; there are option seller's portfolios delivering minimum in the Bellman-type relations; there is a super-hedging portfolio for the European option. The game with an arbitrage-free market model results in an equilibrium. Based on this statement, we propose to construct a super-hedging portfolio via a seller's game strategy. Examples of analytical European option pricing on an incomplete market with a finite support and numerical pricing of an option for gold are given.

Keywords: European option, incomplete market, superhedging, antagonistic game, game equilibrium

For citation: Zverev O. V., Shelemekh E. A. European option pricing on an incomplete market as an antagonistic game. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 132–138. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-132-138>, EDN: WNIFEO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.86

Расчет европейского опциона на неполном рынке как антагонистическая игра

О. В. Зверев, Е. А. Шелемех[✉]

Центральный экономико-математический институт РАН, Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский просп., д. 47

Зверев Олег Владимирович, кандидат наук по прикладной математике НИУ ВШЭ, старший научный сотрудник, zv-oleg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8523-6343>, SPIN: 8389-3310, AuthorID: 904874

Шелемех Елена Александровна, кандидат наук по прикладной математике НИУ ВШЭ, научный сотрудник, letis@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0004-1788-5164>, SPIN: 9932-3472, AuthorID: 800293

Аннотация. В статье подробно описана стохастическая многошаговая игровая постановка задачи расчета европейского опциона на неполном рынке с дискретным временем и конечным числом активов, без транзакционных издержек и торговых ограничений. Приведены рекуррентные соотношения беллмановского типа для верхнего и нижнего гарантированных значений игры. Установлена



эквивалентность следующих утверждений: рынок безарбитражен; существуют портфели продавца опциона, доставляющие экстремум в уравнениях беллмановского типа; найдется суперхеджирующий портфель европейского опциона. Показано, что на безарбитражном рынке всегда имеет место игровое равновесие. Предложен способ построения суперхеджирующего портфеля как стратегии продавца из описанной игры. Приведены примеры аналитического расчета европейского опциона на неполном рынке с конечным носителем и числового расчета опциона на золото по данным биржи.

Ключевые слова: европейский опцион, неполный рынок, суперхеджирование, антагонистическая игра, игровое равновесие

Для цитирования: Zverev O. V., Shelemekh E. A. European option pricing on an incomplete market as an antagonistic game [Зверев О. В., Шелемех Е. А. Расчет европейского опциона на неполном рынке как антагонистическая игра] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 132–138. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-132-138>, EDN: WNIFEO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Superhedging is one of the most well-known methods to hedge obligations resulting from the sale of a contingent claim on an incomplete market. The idea of superhedging is to find a self-financing trading portfolio with minimal initial investment which a.s. covers any possible future obligations of the option seller [1, p. 394]. The existence conditions for such a portfolio in the case of discrete-time market models were first established with the use of the optional decomposition technique by H. Föllmer and Y. Kabanov [2]. Similar results for continuous-time market models are obtained in [3] (for the case of risky asset price dynamics defined by a diffusion process) and in [4] (for the general semimartingale setting). However, there remains an issue with the superhedging portfolios' construction.

In search of a construction method, S. N. Smirnov and V. M. Khametov independently proposed a game setting for the option pricing problem on an incomplete market ([5, 6], respectively). S. N. Smirnov calculates an option within the guaranteed deterministic framework developed by him. The main results are collected in [7].

Here, we develop the approach proposed by V. M. Khametov. The formulation and solution methods for the game were proposed by him. Implementation is ours. The essence is as follows. In a discrete-time incomplete market model with a finite number of assets, the European option pricing problem is formulated as a multi-step stochastic antagonistic game. The players are the option seller and the market. The market opts for a probability distribution of risky asset prices equivalent to the basic one. The option seller manages a self-financing portfolio formed initially due to the sale of the contract. By assumption, there are no transaction costs and no trade restrictions. The game implies two stochastic optimization problems: the minimax and the maximin ones. The minimax problem is a well-studied one [8, 9]. At the same time, the maximin problem has not yet been studied enough; one does not know if there is an equilibrium and a saddle point in the game. The article presents the existence conditions for the seller's minimax and maximin strategies and for a game equilibrium, and explains the relationship between the game and the superhedging problem. At the end of the article, examples of analytical calculation for an option with a convex payoff function on a market with a finite support and corresponding numerical results for a vanilla call for gold are given.

1. The game

Suppose there are:

- 1) a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where N is a positive integer (horizon), $\Omega = (\mathbb{R}^+)^{d(N+1)}$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_N := \mathcal{B}(\Omega)$, $N_0 := \{0, 1, 2, \dots, N\}$ and $N_1 = N_0 \setminus \{0\}$;
- 2) d -dimensional random variables $\{S_t\}_{t \in N_0}$ on it.



Let us define $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s, s \leq t)$, $t \in N_1$. To simplify the recording, we assume that $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$. Without loss of generality, let us consider filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ as a complete one. The introduced objects define a multistep stochastic model of a financial market with discrete time and finite horizon N , consisting of d risky assets with price evolution described by random variables $\{S_t\}_{t \in N_0}$ and one risk-free asset with constant price equal to 1 [1, Section 5.1]. Moments $t \in N_1$ are the moments of bidding. For brevity, we write $S_{u,v} := (S_u, \dots, S_v)$, $0 \leq u < v \leq N$.

Suppose there is also a European contingent claim f_N [1, Definition 5.20]. The latter means that f_N is an integrable a.s. nonnegative \mathcal{F}_N -measurable random variable. Throughout, we will assume f_N to be a.s. bounded from above with some constant $c_1 > 0$.

Let us define *the strategies set for the market* as the set \mathfrak{R} , consisting of \mathbb{P} and all probability measures \mathbb{Q} defined on (Ω, \mathcal{F}) and equivalent to \mathbb{P} . The option seller manages a self-financing portfolio [1, Definition 5.3] formed initially due to the sale of the contract. By assumption, there are no transaction costs and no trade restrictions. The number of asset units in a portfolio at the moment $t \in N_0$ is modeled by \mathcal{F}_{t-1} -measurable random variables: a one-dimensional β_t for the risk-free asset and a d -dimensional γ_t for the risky assets. We denote $\beta_{u,v} := \{\beta_t\}_{u \leq t \leq v}$ and $\gamma_{u,v} := \{\gamma_t\}_{u \leq t \leq v}$, $0 \leq u < v \leq N$. Portfolio is a pair $\pi_{0,N} = \{\beta_t, \gamma_t\}_{t \in N_0}$. It is well known [1, Remark 5.8], that a self-financing portfolio is fully specified by the number of units for all assets in it at the time moment $t = 0$ and the number of risky assets units in it at any $t \in N_1$. The total initial value of assets in the portfolio is determined by the value of the option premium. Due to the absence of transaction costs, one may distribute this value between assets in any possible way. Thus, it is sufficient to consider $\gamma_{1,N}$ as an *option seller's strategy*. By U we denote the set of all $\gamma_{1,N}$, consisting of d -dimensional a.s. finite \mathcal{F}_{t-1} -measurable random variables γ_t , $t \in N_1$. $U_{u,s}$ denotes narrowing of U for $\{u, \dots, v\}$, $1 \leq u < v \leq N$, $\gamma_{u,v} := \{\gamma_t\}_{u \leq t \leq v}$ are elements of $U_{u,s}$. If $u = s$, we write γ_s and U_s . The value of a self-financing portfolio π at the moment t is denoted by X_t^π , $t \in N_1$. One has $X_t^\pi = X_0^\pi + G_{1,t}^\gamma$ [1, Proposition 5.7], where $G_{u,t}^\gamma := \sum_{s=u}^t \sum_{i=1}^d \gamma_s^{(i)} \Delta S_s^{(i)}$, $1 \leq u \leq t \leq N$, and $\Delta S_t^{(i)} := S_t^{(i)} - S_{t-1}^{(i)}$. The random variable $G_{u,t}^\gamma$ is called the gains process for the investment period from u to t associated with a strategy $\gamma_{u,t}^N$ [1, Definition 5.6].

By the portfolio with consumption, we mean the pair (π, C) with a self-financing portfolio π and an adapted set of a.s. non-negative random variables $\{C_t\}_{t \in N_0}$ called consumption. The value of a portfolio with consumption (π, C) is defined by the formula $X_t^{(\pi,C)} := X_t^\pi - C_t$.

We will also assume that:

- 1) all information \mathcal{F}_t is available to both players at any given time moment $t \in N_0$;
- 2) players act independently of each other;
- 3) if the players have chosen strategies $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}$ and $\gamma_{1,N} \in U$, then *the option seller's risk* is determined by the formula

$$I_0^{\mathbb{Q}, \gamma} := I_0^{\mathbb{Q}, \gamma_{1,N}}(S_0) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ f_N - G_{1,N}^\gamma \right\} \right],$$

and *the gain of the market* is equal to $-I_0^{\mathbb{Q}, \gamma}$.

Thus, we consider the dynamic stochastic antagonistic game $\Gamma := (\mathfrak{R}, U, I_0^{\mathbb{Q}, \gamma})$. They say, there is an equilibrium in the game Γ if $\inf_{\gamma \in U} \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma} = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} \inf_{\gamma \in U} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma}$. So, we have to consider two problems: 1) the minimax one, i.e., to find $\inf_{\gamma \in U} \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma}$ and 2) the maximin one, i.e., to find $\sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} \inf_{\gamma \in U} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma}$. The problems are stated correctly. Indeed, by assumption, f_N is a.s. bounded, there is no restriction on the "do not invest in risky assets" strategy. So, one has the inequalities:

$$0 < \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} \inf_{\gamma \in U} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma} \leq \inf_{\gamma \in U} \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma} \leq \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\exp\{f_N\}] \leq e^{c_1}. \tag{1}$$



2. Key results

We will try a stochastic variant of the dynamic programming method to solve the problems. To justify our choice of method, let us obtain recurrent relations for the upper and lower guaranteed values of the game first. We will need the following designations, $t \in N_1$:

- 1) $I_{t-1}^{\mathbf{Q}, \gamma} = I_{t-1}^{\mathbf{Q}, \gamma, N}(S_{0,t-1}) := \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\exp \left\{ f_N - G_{t,N}^{\gamma} \right\} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right]$, $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}$, $\gamma_{t,N} \in U_{t,N}$;
- 2) upper (lower) guaranteed value

$$\hat{V}_{t-1} := \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in U_{t,N}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}} I_{t-1}^{\mathbf{Q}, \gamma}, \quad \left(\check{V}_{t-1} := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in U_{t,N}} I_{t-1}^{\mathbf{Q}, \gamma} \right).$$

Random variables \hat{V}_t and \check{V}_t are a.s. bounded. One may prove it in the same way as it was done for inequality (1).

Theorem 1. *The upper and lower guaranteed values $\{\hat{V}_t\}_{t \in N_0}$ and $\{\check{V}_t\}_{t \in N_0}$ satisfy a.s. the recurrent relations, $t \in N_0$,*

$$\left(\begin{array}{l} \hat{V}_t = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in U_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\hat{V}_{t+1} e^{-\gamma \Delta S_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t \right], \\ \hat{V}_N = e^{f_N}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left. \left(\begin{array}{l} \check{V}_t = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in U_{t+1}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\check{V}_{t+1} e^{-\gamma \Delta S_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t \right], \\ \check{V}_N = e^{f_N} \end{array} \right) \right). \quad (3)$$

To prove Theorem 1, we justified non-strict inequalities in both directions for the left and right parts of (2) and (3). The issue is to rearrange the essential extremum and conditional mathematical expectation. One can verify that the sets for which optimization is carried out are all of them directed upwards [1]. So, the monotone convergence theorem allows for rearranging.

Now, let us establish existence conditions for a seller's strategies $\hat{\gamma}$ ($\check{\gamma}$) $\in U$ such that for any $t \in N_1$, one has a.s.

$$\hat{V}_{t-1} = \left(\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\hat{V}_t e^{-\gamma_t \Delta S_t} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \right) \Big|_{\gamma_t = \hat{\gamma}_t} \quad (4)$$

$$\left(\check{V}_{t-1} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\check{V}_t e^{-\check{\gamma}_t \Delta S_t} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \right). \quad (5)$$

Let us denote $\hat{\Upsilon} := \{\gamma \in U \text{ satisfies (4) for any } t \in N_1\}$ and $\check{\Upsilon} := \{\gamma \in U \text{ satisfies (5) for any } t \in N_1\}$. By \mathfrak{M} we denote the set of all $(\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ -martingale probability measures defined on (Ω, \mathcal{F}) [1, Definition 5.14].

Theorem 2. *The following statements are equivalent:*

- 1) $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$;
- 2) $\hat{\Upsilon} (\check{\Upsilon}) \neq \emptyset$;
- 3) *there are $\hat{\gamma}$ ($\check{\gamma}$) $\in U$ and $(\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ -adapted a.s. non-decreasing non-negative stochastic sequens $\hat{C} := \{\hat{C}_t\}_{t \in N_0}$ ($\check{C} := \{\check{C}_t\}_{t \in N_0}$) with $\hat{C}_0 = 0$ ($\check{C}_0 = 0$) such that self-financing portfolio with consumption $(\hat{\pi}, \hat{C})$ ($(\check{\pi}, \check{C})$), where the number of risky assets is determined by a strategy $\hat{\gamma}$ ($\check{\gamma}$) and $\hat{X}_t := X_t^{(\hat{\pi}, \hat{C})} = \ln \hat{V}_t$ ($\check{X}_t := X_t^{(\check{\pi}, \check{C})} = \ln \check{V}_t$), $t \in N_0$, has the following properties:*
 - $f_N \leq \hat{X}_N$ ($f_N \leq \check{X}_N$) a.s. and
 - for any other portfolio with consumption (π, C) : $f_N \leq X_N^{(\pi, C)}$ a.s. it follows that $\hat{X}_t \leq X_t^{(\pi, C)}$ ($\check{X}_t \leq X_t^{(\pi, C)}$) a.s., $t \in N_0$.



The essence of the proof is as follows. Implication from 1 to 2 follows from the fact that for any $t \in N_0$, random variables $\hat{\Phi}_t^\gamma := \text{ess sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\hat{V}_t e^{-\gamma \Delta S_t} | \mathcal{F}_{t-1}]$ and $\check{\Phi}_t^{\mathbb{Q}, \gamma} := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\check{V}_t e^{-\gamma \Delta S_t} | \mathcal{F}_{t-1}]$ are a.s. finite, convex, continuous functions of γ , and for any $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$ such that $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\gamma_k\|_{\mathbb{R}^d} = \infty$ a.s. the limit $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\Phi}_t^{\gamma_k} = \infty$ $\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \check{\Phi}_t^{\mathbb{Q}, \gamma_k} = \infty, \mathbb{Q} \in \mathfrak{R} \right)$ a.s. One can prove implication from 2 to 3 directly by writing the corresponding inequalities for the portfolio with number of risky assets defined by $\hat{\gamma} \in \hat{\Upsilon}$ ($\check{\gamma} \in \check{\Upsilon}$) and $\Delta \hat{C}_t^{\hat{\gamma}} := -\Delta \ln \hat{V}_t + \hat{\gamma}_t \Delta S_t$ ($\Delta \check{C}_t^{\check{\gamma}} := -\Delta \ln \check{V}_t + \check{\gamma}_t \Delta S_t$), $\hat{C}_0 = \check{C}_0 = 0, t \in N_1$. Implication from 3 to 1 follows from the contradiction between item 3 of the theorem and the existence of $t \in N_1$ and non-zero $\gamma' \in U_t$ such that $\mathbb{P}(\gamma' \Delta S_t < 0 | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ and $\mathbb{P}(\gamma' \Delta S_t > 0 | \mathcal{F}_{t-1}) > 0$ a.s. It immediately proves that $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$ [10, Lemma 3, p. 422].

Remark 1. The proof of Theorem 2 implies that $\gamma \in U$ in items 2 and 3 is the same object. Thus, items 2 and 3 of the theorem suggest the way to construct a super-hedging portfolio with minimal initial value, which also allows us to calculate the value of such a portfolio at any time moment $t \in N_0$.

Remark 2. The values \hat{X}_t и $\check{X}_t, t \in N_0$, are a.s. minimal, and $\hat{C}_0 = \check{C}_0 = 0$. So, item 3) of Theorem 2 implies that there is always an equilibrium in the game Γ with an arbitrage-free market model (i.e., model with $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$).

3. Examples

Suppose one-dimensional random variables $\{S_t\}_{t \in N_0}$ are defined by recurrent relations

$$S_t = S_{t-1} (1 + \rho_t), \quad S_t|_{t=0} = x_0 > 0,$$

where $\{\rho_t\}_{t \in N_1}$ are i.i.d. with support $\{a_1, \dots, a_l\}, -1 < a_1 < \dots < a_i < 0 < a_{i+1} \dots < a_l < \infty, 1 \leq i < l$, and respective probabilities $p_j > 0, j = \overline{1, l}, \sum_{j=1}^l p_j = 1$. Then $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is the corresponding probability space. Let $\mathcal{F}_t := \sigma(S_s, s \leq t), t \in N_0$. Here S_t is used for the discounted value of a risky asset unit, and ρ_t is its yield, $t \in N_0$. It is known that this market model with $l > 2$ is incomplete.

For a European contingent claim $f_N = f(S_N)$, where $\mathbb{P}(f_N \geq 0) = 1$ and f is convex, solution for the minimax problem is well known [9], $t \in N_1$:

1) $\mathbb{Q}^*(\rho_t = a_1) = q^*, \mathbb{Q}^*(\rho_t = a_l) = 1 - q^*$ and $\mathbb{Q}^*(\rho_t = a_j) = 0, j \notin \{a_1, a_l\}$, where $q^* = a_l / (|a_1| + a_l)$;

2) $\ln V_t(x) = \sum_{s=1}^{N-t} C_{N-t}^s f(x(1+a_1)^s(1+a_l)^{N-t-s})(q^*)^s(1-q^*)^{N-t-s};$

3) $\gamma_t^* = \frac{1}{S_{t-1}(|a_1|+a_l)} \ln \frac{V_t(S_{t-1}(1+a_l))}{V_t(S_{t-1}(1+a_1))};$

4) the number of risk-free asset units might be calculated via self-financing condition, and one may chose $\beta_0 = \ln V_0$.

There in Theorem 2, it was proved that such a portfolio is a super-hedging one with minimal initial value.

Let us apply game theory to calculate a vanilla European call for gold. We use the opening quotes for a troy ounce of gold for the period from 03 September 2007 to 25 November 2023, published at <https://www.finam.ru/profile/tovary/gold/export/>. From the data, it follows that prices for gold varied in the range from 674.90 to 2066.30 dollars for one troy ounce, and its yield varied from -0.100781 to 0.079597 . So, we are able to price the European call option for gold with $f_N(x) = \max\{0, S_N - K\}$, where K is a constant. Suppose we will price it for a monthly contract, specifically for August 2023. We find: $S_0 = 1986.2, N = 26, a_1 = -0.100781, a_l = 0.079597, q^* = 0.441279, 1 - q^* = 0.558721$. If $K = 1900$, than $\hat{X}_0 = 398.12$ dollars. A superhedging portfolio, its value, consumption, and its value minus consumption are in the Table.



Table. Pricing results for month European call option for troy ounce of gold

Date	Price for troy ounce of gold	Number of risky assets units	Number of risk-free assets units	Value of portfolio	Portfolio value minus consumption	Consumption
01.08.23	1 986.20	0.000000	398.12	398.12	398.12	0.00
02.08.23	1 972.60	0.619681	-832.69	389.69	385.76	3.93
03.08.23	1 970.30	0.613819	-821.13	388.28	376.65	11.64
04.08.23	1 977.10	0.610657	-814.89	392.43	372.19	20.25
06.08.23	1 974.00	0.613040	-819.61	390.53	366.59	23.95
07.08.23	1 967.80	0.610268	-814.13	386.75	348.44	38.31
08.08.23	1 963.90	0.605305	-804.37	384.39	345.80	38.59
09.08.23	1 951.20	0.603263	-800.36	376.73	325.52	51.21
10.08.23	1 946.60	0.594048	-782.38	374.00	319.03	54.96
11.08.23	1 945.50	0.591792	-777.99	373.35	309.19	64.16
13.08.23	1 944.60	0.588073	-770.75	372.82	298.83	73.98
14.08.23	1 939.40	0.587151	-768.96	369.76	290.57	79.19
15.08.23	1 934.90	0.581689	-758.37	367.15	271.55	95.60
16.08.23	1 922.30	0.576632	-748.58	359.88	263.09	96.79
17.08.23	1 924.10	0.567866	-731.73	360.90	248.12	112.79
18.08.23	1 917.70	0.564413	-725.08	357.29	240.22	117.07
20.08.23	1 920.40	0.560673	-717.91	358.80	229.68	129.12
21.08.23	1 924.70	0.556741	-710.36	361.20	218.99	142.20
22.08.23	1 929.90	0.560426	-717.45	364.11	215.83	148.28
23.08.23	1 948.90	0.559876	-716.39	374.75	205.40	169.35
24.08.23	1 941.00	0.572266	-740.54	370.23	196.86	173.37
25.08.23	1 941.40	0.567633	-731.55	370.46	178.53	191.93
27.08.23	1 944.10	0.559143	-715.06	371.96	164.48	207.48
28.08.23	1 953.30	0.572692	-741.40	377.23	158.12	219.11
29.08.23	1 964.70	0.569838	-735.83	383.73	125.33	258.40
30.08.23	1 970.40	0.612307	-819.27	387.22	126.96	260.26
31.08.23	1 965.50	0.639355	-872.57	384.09	65.50	318.59

Conclusion

We reformulated the problem of European option pricing on an incomplete market with discrete time and a finite number of assets, without transaction costs and trading restrictions as the dynamic stochastic antagonistic game Γ of the market and the option seller. It was shown that the upper and lower guaranteed values satisfy a.s. the Bellman-type recurrent relations. So, the implementation of the stochastic dynamic programming method is justified. As it turns out, the game equilibrium and self-financing portfolios, at which the minimum in the recurrent relations is reached, exist if and only if the market model is an arbitrage-free one. These portfolios are superhedging, and their value is minimal for a superhedging portfolio. So, the game suggests how to construct a superhedging portfolio with minimal value for a European option. Analytical and numerical examples are given.

References

1. Föllmer H., Schied A. *Stochastic finance: An introduction in discrete time*. Berlin, Boston, De Gruyter, 2016. 596 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110463453>
2. Föllmer H., Kabanov Y. M. Optional decomposition and Lagrange multipliers. *Finance and Stochastics*, 1997, vol. 2, iss. 1, pp. 69–81. DOI: <https://doi.org/10.1007/s007800050033>
3. Karoui N. E., Quenez M.-C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1995, vol. 33, iss. 1, pp. 29–66. DOI: <https://doi.org/doi:10.1137/s0363012992232579>
4. Kramkov D. O. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. *Probability Theory and Related Fields*, 1996, vol. 105, iss. 4, pp. 459–479. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01191909>



5. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: Financial market model, trading constraints, and the Bellman–Isaacs equations. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, pp. 722–743. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117921040081>
6. Khametov V. M., Chalov D. M. European-style option is an endless antagonistic game. *Review of Applied and Industrial Mathematics*, 2004, vol. 11, iss. 2, pp. 264–265 (in Russian).
7. Smirnov S. N. *A guaranteed deterministic approach to the modeling of financial markets*. Diss. Dr. Sci. (Phys. and Math.). St. Petersburg, 2023. 400 p. (in Russian). Available at: <https://disser.spbu.ru/zashchita-uchenoj-stepeni-spbgu/907-smirnov-sergey.html> (accessed October 25, 2023). EDN: RVFYUS
8. Zverev O., Khametov V., Shelemekh E. Mathematical model of Evropean option pricing in incomplete market without transaction costs (discreet time). Part I. *Nanostructures. Mathematical Physics and Modeling*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 5–45. DOI: <https://doi.org/10.31145/2224-8412-2020-20-1-05-45>, EDN: PRAJGM
9. Zverev O., Khametov V., Shelemekh E. Mathematical model of Evropean option pricing in incomplete market without transaction costs (discreet time). Part II. *Nanostructures. Mathematical Physics and Modeling*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 5–22. DOI: <https://doi.org/10.31145/2224-8412-2020-20-2-05-22>, EDN: SFPHVA
10. Shiryaev A. N. *Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte., Ltd., 1999. 834 p. (Russ. ed.: Moscow, Fazis, 1998. 1017 p.).

Поступила в редакцию / Received 23.11.2023

Принята к публикации / Accepted 12.12.2023

Опубликована / Published 02.03.2026



Научная статья

УДК 519.866.2, 519.863

Модель динамического ценообразования без отрицательных примеров, основанная на безградиентной выпуклой оптимизации с неточным оракулом

А. Н. Курганский, А. Ю. Максимова[✉], С. А. Корнев

Институт прикладной математики и механики, Россия, 283048, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74

Курганский Алексей Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории интеллектуальных систем, topologika@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0006-9968-1935>, SPIN: 5236-5352, AuthorID: 1273323

Максимова Александра Юрьевна, кандидат технических наук, заведующий лабораторией интеллектуальных систем, maximova.alexandra@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9496-4385>, SPIN: 1097-6085, AuthorID: 615429

Корнев Сергей Александрович, инженер-исследователь лаборатории интеллектуальных систем, sergkornev2001@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0006-0029-0740>

Аннотация. В работе предложен основанный на безградиентной стохастической выпуклой оптимизации с неточным оракулом нулевого порядка алгоритм решения одного из вариантов задачи динамического ценообразования в случае, когда при переменном потоке покупателей обучающая выборка содержит информацию только о совершенных покупках, а число отказов от покупки при данной цене неизвестно. В работе рассматривается модель с одним сегментом клиентов и одним видом товаров как элемент более сложных, иерархических моделей динамического ценообразования. При отсутствии данных об отказах для сведения к задаче выпуклой безградиентной оптимизации используется прием логарифмирования целевой функции и разбиения сегмента клиентов случайным образом на два подсегмента при каждой итерации.

Ключевые слова: динамическое ценообразование, математическое моделирование, безградиентная выпуклая оптимизация, машинное обучение

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках научной темы «Разработка и совершенствование интеллектуальных методов классификации и прогнозирования для задач распознавания образов и моделирования информационных процессов» (проект № FREM-2024-0001).

Для цитирования: Курганский А. Н., Максимова А. Ю., Корнев С. А. Модель динамического ценообразования без отрицательных примеров, основанная на безградиентной выпуклой оптимизации с неточным оракулом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 139–144. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-139-144>, EDN: YOXDEJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Dynamic pricing model without negative examples based on gradient-free convex optimization with inexact oracle

A. N. Kurganskii, A. Ju. Maximova[✉], S. A. Kornev

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, 74 Rosa Luxemburg St., Donetsk 283048, Russia



Aleksei N. Kurganskii, topologika@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0006-9968-1935>, SPIN: 5236-5352, AuthorID: 1273323

Alexandra Ju. Maximova, maximova.alexandra@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9496-4385>, SPIN: 1097-6085, AuthorID: 615429

Sergei A. Kornev, sergkornev2001@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0006-0029-0740>

Abstract. The paper proposes an approach based on gradient-free stochastic convex optimization with an inexact oracle of zero-order to solve a special case of the dynamic pricing problem with a variable flow of customers when the training data contains information about purchases made, but the number of refusals to purchase at the given price is unknown. The paper considers a model with one customer segment and one type of product as a possible element of more complex, hierarchical dynamic pricing models. In the unavailability of data on rejections for reduction to a convex non-gradient optimization problem, the work uses the technique of logarithmization of the objective function and random division of the customer segment into two subsegments at each iteration.

Keywords: dynamic pricing, mathematical modelling, gradient-free convex optimization, machine learning

Acknowledgements: This work was supported by the Minobrnauki of Russia (project No. FREM-2024-0001).

For citation: Kurganskii A. N., Maximova A. Ju., Kornev S. A. Dynamic pricing model without negative examples based on gradient-free convex optimization with inexact oracle. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 139–144 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-139-144>, EDN: YOXDEJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задача динамического ценообразования появляется в разнообразных постановках, отражающих сложность содержания и разносторонность экономической жизни. Непрерывное развитие и усложнение экономической жизни сохраняет актуальность задачи динамического ценообразования вместе с поиском новых подходов и методов её решения на основе развития математических инструментов. Градиентные и отталкивающие от них стохастические и безградиентные методы оптимизации представляют собой такие развивающиеся инструменты. Примеры работ в данном направлении представлены в [1–3]. Так, в [1] авторы непараметрически восстанавливают спрос и минимизируют потери при полном доступе к данным и ограничениях на динамику цен. Баланс спроса и предложения в [2] рассматривается в дискретной модели выбора, опираясь на данные о потребителях и поставщиках. Авторы же [3] изучают безградиентные методы для негладких невыпуклых задач из области принятия решений в экономике.

В настоящей работе предлагается основанный на безградиентной стохастической выпуклой оптимизации с неточным оракулом нулевого порядка [4–8] метод решения задачи динамического ценообразования в следующей ниже постановке. Отметим, что отличительной особенностью рассматриваемой задачи является неизвестный переменный поток покупателей и отсутствие данных об отказах совершить покупку по данной цене. При некоторых предположениях её удаётся свести к задаче выпуклой оптимизации с неточным оракулом, что позволяет применять соответствующие известные современные методы решения. В работе рассматривается упрощённая модель с одним сегментом клиентов и одним видом товаров как элемент более сложных, иерархических моделей динамического ценообразования.

1. Постановка задачи

Пусть компания продаёт товары. Клиент один раз в период узнаёт цену, после чего покупает товар или отказывается. Требуется разработать алгоритм, оптимизирующий выручку продавца.



Уточним условие задачи. Клиенты со схожими признаками образуют потребительский сегмент. Цена товара как функция признаков клиента одна для всего сегмента. Однако признаки не полностью отражают состояние клиентов. Нельзя исключить, что разные клиенты одного сегмента готовы купить продукт по разным ценам. Это различие в потребителях одного сегмента представляется так называемой чувствительностью к цене. Под чувствительностью $p(x)$ сегмента мы понимаем функцию от цены x , которую возможно интерпретировать как вероятность $p(x)$ того, что случайно выбранный клиент сегмента купит продукт по цене x . Пусть далее сегменту C предложена цена x и только некоторая часть $C_k \subseteq C$ сегмента заинтересована в рассматриваемый период k времени в продукте. Тогда выручка за период k выражается величиной $U_k(x) = |C_k| xp(x)$. Задачей динамического ценообразования является нахождение оптимальной цены x_{opt} , доставляющей максимальное значение выручки $U_k(x)$ или, что эквивалентно, нормализованной выручки $E(x) = xp(x)$.

Расчёт чувствительности к цене упростился бы при наличии данных как о принятых, так и об отклонённых ценах. Однако обучающие данные зачастую содержат лишь информацию о покупках (позитивные примеры) и не содержат отказов от покупки товара по предлагаемой цене (негативные примеры). Ограничение в виде отсутствия негативных примеров ставит проблему и является основополагающей особенностью в формулировании задачи. В рамках данной работы мы отталкиваемся от следующих допущений, ограничений и упрощений: 1) даны один сегмент покупателей и один вид товара; 2) в начале каждого периода продавец устанавливает цену на товар; 3) клиент покупает не больше одной единицы товара за период; 4) продавцу известно только количество проданного товара, а количество покупателей, ознакомившихся с ценой за период, неизвестно, т.е. неизвестно, сколько покупателей отклонили цену как слишком высокую; 5) чувствительность к цене сегмента неизвестна, однако мы предполагаем в качестве её модели некоторое параметрическое семейство монотонно убывающих функций $p(x)$ со значениями в $[0, 1]$ и неубывающей полуэластичностью $\frac{d \log p(x)}{dx} = \frac{p'(x)}{p(x)}$; параметризованная функция $p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{(1 + e^{\frac{x-\mu}{\sigma}})}$ является примером такого семейства, используемого ниже для иллюстраций; 6) чувствительность не меняется от периода к периоду; 7) только продавец предлагает цену покупателям, между продавцом и покупателем нет переговорного взаимодействия. Требуется найти оптимальную цену минимальными средствами.

2. Модель решения задачи

Обозначим через M число клиентов в сегменте, а через N число периодов, пронумерованных множеством $\{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$. Для простоты под периодом дальше понимаем один день. Для инвариантности модели относительно всеобщих скачков цен мы рассматриваем относительные цены. Например, если известна максимальная P_{\max} цена на товар на рынке, то цена P_{own} товара в относительном измерении есть величина $P = \frac{P_{own}}{P_{\max}}$. Или, допустим, известна минимальная, например, закупочная, цена P_{\min} , то относительной ценой будет величина $P = \frac{P_{own}}{P_{\min}}$.

Для продавца потребительский сегмент представляет собой чёрный ящик. Моделью чёрного ящика является функция чувствительности $p(x) = p(x; \mu, \sigma)$ к цене с неизвестными параметрами μ, σ . Входом чёрного ящика является цена x на начало текущего периода (итерации, дня), а выходом — nx , где n — количество продуктов, приобретённых по x за день. Требуется найти оптимальную цену минимальными средствами на основе данных, получаемых из чёрного ящика в форме пары значений (цена, выручка). Оптимальная цена доставляет максимум функции $E(x) = xp(x)$. Однако мы не можем напрямую найти оптимум для $E(x)$, поскольку оракул (чёрный ящик) в среднем доставляет значение $E_k(x) = M_k E(x)$, но не $E(x)$, где $M_k \leq M$ — неизвестное число клиентов, посмотревших цену в течение дня k . Трудность заключается не только в том, что неизвестно число M_k , но и в том, что оно варьируется от периода к периоду. Ниже мы предлагаем обходной путь этих трудностей,



приводящий к известным методам стохастической безградиентной выпуклой оптимизации с использованием неточного двухточечного оракула нулевого порядка.

По условию задачи нет явно заданного градиента $\nabla E(x)$ функции $E(x)$, однако можно вычислить его приближение $\frac{E(x+\Delta x)-E(x)}{\Delta x}$. Для этого требуются значения функции в двух точках для каждой аппроксимации градиента. Это вынуждает на каждой итерации k случайно делить потребительский сегмент на два непересекающихся подсегмента S_k и S'_k и предлагать каждому подсегменту разные, но близкие цены x_k и $x'_k = x_k + \Delta x$ соответственно. Затем оракул возвращает два значения — $M_k E(x_k)$ и $M'_k E(x'_k)$. Количество M_k и M'_k клиентов, увидевших цены x_k и x'_k соответственно, нам неизвестны и, вообще говоря, отличаются друг от друга. Однако, если в данный период мы назначим каждого клиента первому или второму подсегменту с вероятностями $\frac{1}{2}$, то, исходя из вероятностных соображений, при достаточно больших M_k и M'_k будет достигнуто приближительное равенство $M_k \approx M'_k$. Таким образом, можно сказать, что оракул возвращает в точках x_k и x'_k неточные значения $M_k E(x_k)$ и $M_k E(x'_k)$, возмущённые случайным шумом.

Сформулируем сказанное более формально. Обозначим через $(\zeta_1^k, \dots, \zeta_c^k, \dots, \zeta_M^k) \in \{0, 1\}^M$ случайный вектор с неизвестным распределением, но такой, что $C_k = \sum_c \zeta_c^k \gg 1$, где $\zeta_c^k = 1$ тогда и только тогда, когда клиент c в день k посмотрел цену на товар.

Обозначим через $I_c^{k,x}$ случайную величину со значениями в $\{0, 1\}$ такую, что $I_c^{k,x} = 1$ тогда и только тогда, когда клиент c в день k увидел цену x . Таким образом, величина $M_k^x = \sum_c \zeta_c^k I_c^{k,x}$ показывает число всех клиентов, увидевших в день k цену x . В день k предлагаются две цены x_k и x'_k так, что $I_c^{k,x_k} + I_c^{k,x'_k} = 1$, при этом $I_c^{k,x_k} = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Из определений следует равенство математических ожиданий $\mathbb{E}(M_k^{x_k}) = \mathbb{E}(M_k^{x'_k})$. Обозначим $M_k = \mathbb{E}(M_k^{x_k})$.

Пусть случайная величина $\xi_c^{k,x}$ со значениями в $\{0, 1\}$ равна 1 тогда и только тогда, когда клиент c в день k купил продукт по цене x . Из определений следует, что

$$P(\xi_c^{k,x} = 1 | \zeta_c^k = 1, I_c^{k,x} = 1) = p(x).$$

Обозначим $U_k(x) = x \sum_{c=1}^M \xi_c^{k,x} \zeta_c^k I_c^{k,x}$. Значение функции $U_k(x)$ доставляет оракул чёрного ящика в период k . Очевидно, что $\mathbb{E}(U_k(x_k)) = M_k E(x_k)$ и $\mathbb{E}(U_k(x'_k)) = M_k E(x'_k)$. Более того, при больших M_k имеем

$$U_k(x_k) = x_k M_k \frac{\sum_{\zeta_c^k=1, I_c^{k,x_k}=1} \xi_c^{k,x_k}}{M_k} \rightarrow x_k M_k p(x_k) = \mathbb{E}(U_k(x_k)).$$

Отсюда следует, что, с одной стороны,

$$\mathbb{E}\left(\frac{\log U_k(x'_k) - \log U_k(x_k)}{x'_k - x_k}\right) = \frac{\log E(x'_k) - \log E(x_k)}{x'_k - x_k} \approx \nabla \log E(x_k),$$

с другой —

$$\mathbb{E}\left(\frac{\log U_k(x'_k) - \log U_k(x_k)}{x'_k - x_k}\right) \approx \frac{\log U_k(x'_k) - \log U_k(x_k)}{x'_k - x_k}.$$

Следовательно, $\nabla \log E(x_k) \approx \frac{\log U_k(x'_k) - \log U_k(x_k)}{x'_k - x_k}$.

Лемма 1. Если полуэластичность $\frac{d \log p(x)}{dx} = \frac{p'(x)}{p(x)}$ чувствительности к цене $p(x)$ не возрастает, т.е. $\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right) \leq 0$, то функция $\log E(x)$ выпуклая.



Доказательство. Найдём вторую производную функции $\log E(x)$:

$$(\log E(x))' = (\log x + \log p(x))' = \frac{1}{x} + \frac{p'(x)}{p(x)},$$

$$(\log E(x))'' = -\frac{1}{x^2} + \left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)' < 0.$$

Что и требовалось доказать □

Легко проверить, что функции семейства $p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)}$ удовлетворяют условию леммы.

Далее рассматриваем только модели сегмента клиентов с невозрастающей полуэластичностью чувствительности к цене. Поскольку точки максимумов функций $E(x)$ и $\log E(x)$ совпадают, то задача $\arg \max E(x)$ эквивалентна задаче $\arg \max \log E(x)$, для решения которой уже, в силу вышесказанного, возможно применить методы безградиентной стохастической выпуклой оптимизации с использованием неточного двухточечного оракула нулевого порядка, основываясь на значениях $U_k(x_k)$ и $U_k(x'_k)$ выхода чёрного ящика в модели. В данной математической постановке задача оптимизации известна [4–8].

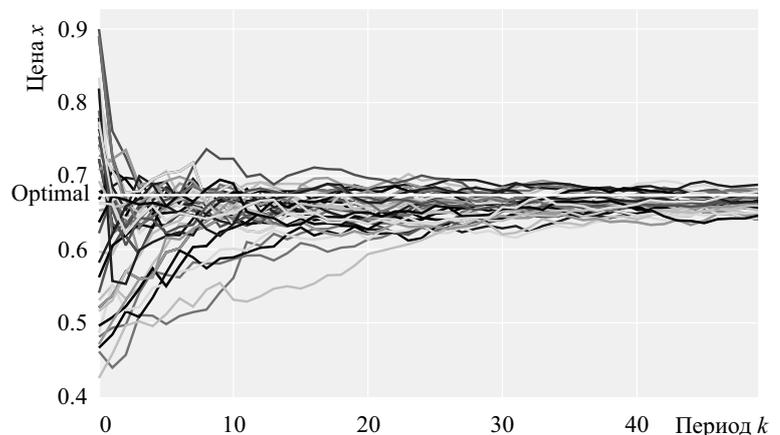
Скорость сходимости метода, от которой зависит и выручка, определяется выбором параметров метода: инициальных цен, длины обучающего шага и расстояния между x_k и x'_k на каждой итерации k . Оценка и выбор наилучших параметров в предлагаемой модели основывается на сравнении потерь в форме разности между возможно наилучшей и фактической выручками:

$$\text{Regret} \left(\{(x_k, x'_k)\}_{k=0}^{N-1} \right) = x_{opt}p(x_{opt}) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_k p(x_k) + x'_k p(x'_k)}{2}.$$

Теоретические оценки параметров модели являются предметом дальнейших исследований авторов. Имея априорные предположения о возможных значениях параметров μ и σ функции чувствительности к цене, можно экспериментально, основываясь на Regret и выборе числа итераций, найти наилучшие значения параметров модели решения задачи.

3. Симуляция работы модели на синтетическом примере

Продemonстрируем сходимость предлагаемой модели решения задачи на синтетическом примере (рисунок). Предполагаются истинными, но неизвестными для модели, значения $x_{opt} = 0.67$, $\mu = 0.8$ и $\sigma = 0.05$. Возьмём инициальные цены товаров из интервала $[0.4, 0.9]$. Пусть количество посмотревших цену клиентов равно $|C_k| = 150$, а разброс цен при этом $x'_k - x_k = 0.1$. Шаг обучения определяется из предположения о константе Липшица $L = 50$. Возьмём число итераций равным 50. В результате выполненных



Симуляции поиска оптимальной цены. Кривые показывают величину $\frac{x_k + x'_k}{2}$
 Figure. Simulations of optimal price calculation. Curves show the value of $\frac{x_k + x'_k}{2}$



модельных вычислений получены следующие значения: оптимальная выручка за период равна 0.624; средняя выручка за период в течение всех 50 итераций оптимизации равна 0.596; при этом $\text{Regret} = 0.045x_{opt}p(x_{opt})$. Среднее значение всех цен, полученных на последнем шаге симуляцией оптимизации, с точностью до второго знака равно 0.67.

На рисунке представлены графики изменения цены для 100 различных симуляций поиска оптимальной цены. Пример демонстрирует сходимость модели.

Заключение

Предложенная в работе модель требует дальнейшего исследования сходимости, выбора её наилучших параметров для сходимости при предположениях об априорном распределении параметров модели клиентов, а также обобщения на случай многих сегментов клиентов и товаров в форме байесовской иерархической модели.

Список литературы / References

1. Perakis G., Singhvi D. Dynamic pricing with unknown nonparametric demand and limited price changes. *Operations Research*, 2023, vol. 72, iss. 6, pp. 1123–1145. DOI: <http://dx.doi.org/10.1287/opre.2020.0445>, EDN: RGGZRJ
2. Pasechnyuk D., Dvurechensky P., Omelchenko S., Gasnikov A. Stochastic optimization for dynamic pricing. In: Olenev N. N., Evtushenko Y. G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (eds.) *Advances in optimization and applications. OPTIMA 2021*. Communications in Computer and Information Science, vol. 1514. Cham, Springer, 2021, pp. 82–94. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-92711-0_6, EDN: ZWJGID
3. Lin T., Zheng Z., Jordan M. I. Gradient-free methods for deterministic and stochastic nonsmooth nonconvex optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2022, vol. 35, pp. 26160–26175.
4. Duchi J. C., Jordan M. I., Wainwright M. J., Wibisono A. Optimal rates for zero order convex optimization: The power of two function evaluations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, vol. 61, iss. 5, pp. 2788–2806. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2409256>
5. Nesterov Yu. Random gradient-free minimization of convex functions. *Technical Report 2011001, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), Catholic University of Louvain (UCL)*, 2011, vol. 16. 32 p. EDN: GEPEND
6. Devolder O., Glineur F., Nesterov Yu. First-order methods of smooth convex optimization with inexact oracle. *Mathematical Programming*, 2014, vol. 146, iss. 1–2, pp. 37–75. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10107-013-0677-5>, EDN: CPTOLC
7. Gasnikov A.V., Nesterov Yu. E. Universal method for stochastic composite optimization problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, iss. 1, pp. 48–64. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S0965542518010050>, EDN: XXGXEL
8. Bayandina A. S., Gasnikov A. V., Lagunovskaya A. A. Gradient-free two-point methods for solving stochastic nonsmooth convex optimization problems with small non-random noises. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, iss. 8, pp. 1399–1408. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S0005117918080039>, EDN: VBKOAV

Поступила в редакцию / Received 24.11.2025

Принята к публикации / Accepted 05.12.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Научная статья

УДК 519.87

Приближенный метод анализа системы массового обслуживания с неординарным входящим потоком и групповым обслуживанием

Н. В. Сергеева[✉], Е. П. Станкевич, И. Е. Тананко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Сергеева Надежда Викторовна, старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, sergeevanv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6125-7078>, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Станкевич Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, stankevichelena@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0630-4550>, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, tanankoie@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8960-9709>, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Аннотация. Рассматривается система массового обслуживания с одним прибором и буфером бесконечной емкости. Из источника в систему в некоторый момент времени может поступить одно или сразу два требования с заданными вероятностями. Длительности интервалов времени между поступлениями требований являются экспоненциально распределенными случайными величинами. Требования выбираются из буфера случайным образом и обслуживаются группами фиксированного размера. Длительность обслуживания группы имеет экспоненциальное распределение. После завершения обслуживания вся группа мгновенно покидает систему. Если в этот момент в очереди системы группа требований не сформирована, то прибор ожидает, пока в систему не поступит необходимое число требований. Используя метод производящих функций, в работе получены формулы для вычисления стационарных вероятностей состояний рассматриваемой системы, математического ожидания числа требований в системе и математического ожидания длительности пребывания требований в системе. Предложен приближенный метод анализа системы с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием, в основе которого лежит метод анализа системы обслуживания с ординарным входящим потоком и групповым обслуживанием. Проведен сравнительный анализ результатов вычислений характеристик, полученных с использованием точного и приближенного методов анализа рассматриваемой системы обслуживания.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповой входящий поток, групповое обслуживание

Для цитирования: Сергеева Н. В., Станкевич Е. П., Тананко И. Е. Приближенный метод анализа системы массового обслуживания с неординарным входящим потоком и групповым обслуживанием // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 145–155. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-145-155>, EDN: XIYXTG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

An approximate method for analyzing a queuing system with batch arrivals and batch services

N. V. Sergeeva[✉], E. P. Stankevich, I. E. Tananko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Nadezhda V. Sergeeva, sergeevanv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6125-7078>, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Elena P. Stankevich, stankevichelena@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0630-4550>, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Igor E. Tananko, tanankoie@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8960-9709>, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Abstract. A queueing system with a single server and an infinite-capacity buffer is considered. At any given time, one or two customers with specified probabilities can be received at once. The durations of intervals between arrivals of customers are exponentially distributed random variables. The customers are randomly selected from the buffer and served in batches of a fixed size. Customers are served as a unique batch of a given size with exponentially distributed service time. After the completion of service, the entire batch instantly leaves the system. If a batch of customers is not formed in the system queue at this moment, the server waits until the required number of customers is received by the system. Using the method of probability generating functions, expressions for the stationary probabilities of the system with batch arrivals and batch services are obtained. The average queue size and the average sojourn time in the system are derived. An approximate method for analyzing systems with batch arrivals and batch services based on a queueing system with ordinary arrivals and batch services is proposed. A comparative analysis of the results of calculations of the characteristics obtained using accurate and approximate methods of analysis of the service system under consideration is carried out.

Keywords: queueing system, batch arrival, batch service

For citation: Sergeeva N. V., Stankevich E. P., Tananko I. E. An approximate method for analyzing a queueing system with batch arrivals and batch services. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 145–155 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-145-155>, EDN: XIYXTG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Системы массового обслуживания с групповым поступлением и/или групповым обслуживанием находят широкое применение при решении научно-прикладных задач. Например, для решения задачи планирования работы амбулаторных отделений больниц впервые была исследована система обслуживания с пуассоновским потоком и групповым обслуживанием требований одним прибором [1]. В работе [2] рассмотрена система массового обслуживания с общей функцией распределения длительности обслуживания одним прибором и поступлением групп требований через экспоненциально распределенные интервалы времени. Исследованы свойства длительности периода занятости системы, процессы поступления и выхода требований из системы обслуживания, получено распределение вероятностей числа требований в системе.

Другие результаты анализа систем массового обслуживания, в которые требования либо поступают группами, либо обслуживаются группами, можно найти в [3–7]. Исследование систем обслуживания, в которые поступает неординарный поток, а требования прибором обслуживаются группами, приведено в [8,9]. Для получения стационарных характеристик систем массового обслуживания используют различные методы. Например, в работах [10–12]



применялся метод производящих функций. Так, авторы работ [10, 11] использовали этот метод при вычислении стационарных характеристик систем массового обслуживания с ординарным потоком, многими приборами и групповым обслуживанием. Кроме аппарата производящих функций, для получения стационарных характеристик систем часто применяют преобразование Лапласа [13–15]. Например, в работе [15] для системы $M^X/M/1$ применяется преобразование Лапласа для получения вероятностей переходов процесса Маркова, описывающего эволюцию системы, и затем максимального числа требований в системе. Также для решения задач анализа систем часто применяются матрично-геометрический метод [16] и метод вложенных цепей Маркова [17, 18]. Для вычисления совместных стационарных вероятностей числа требований в системе и размера группы обслуживания в произвольные моменты времени, моменты выхода требований из системы, моменты перед поступлением требований помимо метода вложенных цепей Маркова в работе [17] также применялся метод дополнительных переменных.

К настоящему времени хорошо развит математический аппарат, позволяющий анализировать сети массового обслуживания, которые состоят из систем массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком требований и экспоненциальной длительностью обслуживания.

Одна из первых попыток объединить системы массового обслуживания с ординарным потоком и групповым обслуживанием в сеть предпринята в работе [19], в которой предполагается, что размер выходящей после обслуживания группы много меньше, чем количество систем, в которые эти обслуженные требования могут перейти, а также, что вероятности перехода обслуженных требований в системы сравнимы. Тогда вероятность поступления двух и более требований в одну систему мала и ею пренебрегают. Это позволяет сохранить предположение о пуассоновском входящем потоке в каждую систему сети обслуживания. Но если любое из этих предположений не выполняется, то пренебрегать вероятностью поступления двух и более требований, вообще говоря, нельзя. В связи с этим возникает вопрос: насколько будут отличаться характеристики в системах обслуживания, когда предполагается, что в системы обслуживания требования могут поступать только по одному, и когда допускается, что в систему может поступать не только одно требование, а, например, два требования, но с небольшой вероятностью.

В данной работе показано, что систему массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и групповым обслуживанием можно использовать в качестве приближенной модели системы массового обслуживания с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием, но с измененной соответствующим образом интенсивностью входного потока.

Работа содержит три раздела. В первом разделе рассматривается одноприборная система массового обслуживания с групповым обслуживанием, в которую в каждый момент времени может поступать либо одно требование, либо только два требования. С помощью аппарата производящих функций получены выражения для стационарных вероятностей состояний системы. Во втором разделе описывается одноприборная система обслуживания с групповым обслуживанием и ординарным потоком. Для этой системы предлагается выражение для пересчета интенсивности потока требований. В третьем разделе приводятся и сравниваются результаты численных экспериментов для обеих систем обслуживания.

1. Описание системы массового обслуживания с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием

Рассматривается система массового обслуживания S^X с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием. В систему может поступать одно или два требования. Вероятность того, что в систему поступит одно требование, равна q , два требования — $1 - q$. Длительности интервалов времени между последовательными поступлениями требований являются случайными величинами, имеющими экспоненциальное распределение с параметром λ . В системе имеется один обслуживающий прибор и буфер бесконечной емкости. Из

буфера на обслуживание требования выбираются произвольно группой размера b . Если в очереди нет необходимого количества требований, то обслуживающий прибор простаивает до тех пор, пока в очереди не накопится минимум b требований. Длительность обслуживания группы требований имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Состояние системы определяется числом находящихся в ней требований. Диаграмма интенсивностей переходов имеет вид, представленный на рис. 1.

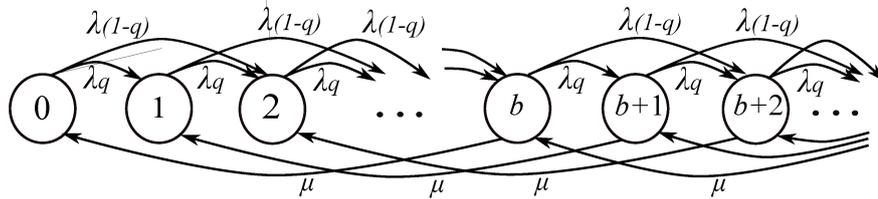


Рис. 1. Диаграмма интенсивностей переходов для системы S^X
 Fig. 1. State transition rate diagram for the system S^X

На основании построенной диаграммы интенсивностей переходов система уравнений равновесия примет вид

$$\begin{cases} \lambda\pi^X(0) = \mu\pi^X(b), \\ \lambda\pi^X(1) = \lambda q\pi^X(0) + \mu\pi^X(b+1), \\ \lambda\pi^X(n) = \lambda q\pi^X(n-1) + \lambda(1-q)\pi^X(n-2) + \mu\pi^X(b+n), \quad 2 \leq n \leq b-1, \\ (\lambda + \mu)\pi^X(n) = \lambda q\pi^X(n-1) + \lambda(1-q)\pi^X(n-2) + \mu\pi^X(b+n), \quad n \geq b, \end{cases} \quad (1)$$

где $\pi^X(n), n = 0, 1, 2, \dots$ — стационарная вероятность пребывания системы S^X в состоянии n .

Для нахождения стационарных вероятностей воспользуемся аппаратом производящих функций [4]. Определим производящую функцию в виде

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^X(n)z^n. \quad (2)$$

Умножим уравнения системы (1) на z^n и сложим, тогда, применяя (2), получим

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left(P(z) - \sum_{n=0}^{b-1} \pi^X(n)z^n \right) &= \lambda qz \left(P(z) - \sum_{n=0}^{b-2} \pi^X(n)z^n \right) + \\ + \lambda(1-q)z^2 \left(P(z) - \sum_{n=0}^{b-3} \pi^X(n)z^n \right) &+ \frac{\mu}{z^b} \left(P(z) - \sum_{n=0}^{2b-1} \pi^X(n)z^n \right). \end{aligned}$$

Выделяя производящую функцию из последнего равенства, получим

$$P(z) = \frac{(1 - z^b) \sum_{n=0}^{b-1} \pi^X(n)z^n}{b\psi(1-q)z^{b+2} + b\psi qz^{b+1} - (b\psi + 1)z^b + 1}, \quad (3)$$

где $\psi = \frac{\lambda}{b\mu}$.

Многочлен, стоящий в знаменателе в правой части (3), имеет $b + 2$ корней, одним из которых является единица. Для остальных $b + 1$ корней можно показать, что точно $b - 1$ лежат в круге $|z| < 1$, а оставшиеся, которые обозначим z_1 и z_2 , удовлетворяют условию $|z_1| > 1$ и $|z_2| > 1$. Для этого воспользуемся теоремой Руше и покажем, что если для



функций $|f(z)| = |(b\psi + 1)z^b|$ и $|g(z)| = |b\psi(1 - q)z^{b+2} + b\psi qz^{b+1} + 1|$ на некотором контуре ∂G выполняется неравенство $|f(z)| - |g(z)| > 0$, то в области G функции f и $f + g$ имеют одинаковое количество нулей.

Рассмотрим контур ∂G : $|z| < 1 + \delta$. При условии

$$\psi < \frac{1}{2 - q} \tag{4}$$

выберем вещественное δ такое, что

$$0 < \delta < -\frac{1}{2b} \left(\frac{b(2 - q)}{1 - q} + 1 \right) + \frac{1}{2b} \sqrt{\left(\frac{b(2 - q)}{1 - q} - 1 \right)^2 + \frac{4b}{\psi(1 - q)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(z)| - |g(z)| &\geq (b\psi + 1)(1 + \delta)^b - b\psi(1 - q)(1 + \delta)^{b+2} - b\psi q(1 + \delta)^{b+1} - 1 = \\ &= (1 + \delta)^b (b\psi + 1 - b\psi(1 - q)(1 + \delta)^2 - b\psi q(1 + \delta)) - 1 \geq \\ &\geq (1 + b\delta) (b\psi + 1 - b\psi(1 - q)(1 + \delta)^2 - b\psi q(1 + \delta)) - 1 = \\ &= b\delta(1 - \psi(2 - q) - \psi(b(2 - q) + 1 - q)\delta - b\psi(1 - q)\delta^2). \end{aligned}$$

При соответственном выборе параметров ψ и δ

$$1 - \psi(2 - q) - \psi(b(2 - q) + 1 - q)\delta - b\psi(1 - q)\delta^2 > 0.$$

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получим, что знаменатель (3) имеет точно b нулей в области $|z| \leq 1$, но один корень $|z| = 1$. Таким образом, знаменатель (3) имеет точно $b - 1$ нулей в области $|z| < 1$ и два корня z_1, z_2 — в области $|z| > 1$.

Числитель дроби также представляет собой многочлен относительно z . Одним корнем является $|z| = 1$. Так как функция $P(z)$ должна оставаться ограниченной в области $|z| < 1$, то остальные $b - 1$ корней числителя должны точно совпадать с теми корнями знаменателя, для которых выполняется условие $|z| < 1$. Отсюда следует, что эти два многочлена степени $b - 1$ должны быть пропорциональны с коэффициентом K :

$$K \sum_{n=0}^{b-1} \pi^X(n) z^n = \frac{b\psi(1 - q)z^{b+2} + b\psi qz^{b+1} - (b\psi + 1)z^b + 1}{(1 - z)(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Используя это равенство для сокращения общих множителей числителя и знаменателя дроби в правой части равенства (3), получим

$$P(z) = \frac{1 - z^b}{K(1 - z)(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Учитывая, что $P(1) = 1$, найдем константу K в виде

$$K = \frac{b}{(1 - z_1)(1 - z_2)}.$$

Окончательно производящая функция примет вид

$$P(z) = \frac{(1 - z^b) \left(1 - \frac{1}{z_1}\right) \left(1 - \frac{1}{z_2}\right)}{b(1 - z) \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)}. \tag{5}$$



Раскладывая правую часть равенства (5) в ряд по z , получим выражения для стационарных вероятностей состояний в виде

$$\begin{aligned} \pi^X(0) &= \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{z_1}\right) \left(1 - \frac{1}{z_2}\right), \\ \pi^X(n) &= \frac{\pi^X(0)}{z_1 - z_2} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1^k z_2^k}, \quad 1 \leq n < b - 1, \\ \pi^X(n) &= \frac{\pi^X(0)}{z_1 - z_2} \sum_{k=n-b+1}^n \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1^k z_2^k}, \quad n \geq b - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Математическое ожидание числа требований в системе вычислим по формуле

$$\bar{n}^X = P'(1) = \frac{b-1}{2} + \frac{1}{z_1-1} + \frac{1}{z_2-1}. \tag{7}$$

Формула Литтла для математического ожидания длительности пребывания требований в системе имеет вид

$$\bar{u}^X = \frac{\bar{n}^X}{\lambda}, \tag{8}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda(2 - q)$.

2. Описание системы массового обслуживания с ординарным входящим потоком и групповым обслуживанием

Рассмотрим систему массового обслуживания S , которая отличается от системы S^X тем, что требования могут поступать только по одному, т. е. входящий поток является пуассоновским.

В этом случае уравнения равновесия будут иметь вид [19]

$$\begin{cases} \lambda\pi(0) = \mu\pi(b), \\ \lambda\pi(n) = \lambda\pi(n-1) + \mu\pi(b+n), & 1 \leq n \leq b-1, \\ (\lambda + \mu)\pi(n) = \lambda\pi(n-1) + \mu\pi(b+n), & n \geq b, \end{cases} \tag{9}$$

где $\pi(n)$ — стационарные вероятности состояний.

Система S функционирует в стационарном режиме, если коэффициент использования системы $\psi = \frac{\lambda}{b\mu} < 1$.

Эволюцию системы можно описать с помощью процесса размножения и гибели [20], представленном на рис. 2.

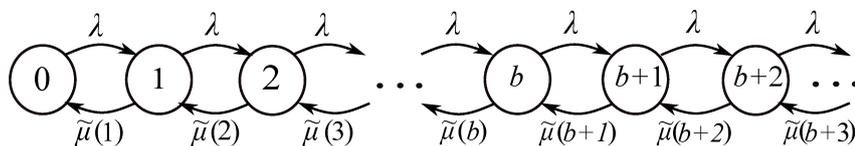


Рис. 2. Процесс размножения и гибели
Fig. 2. Birth–death processes

В этом случае стационарные вероятности определяются формулами [21]

$$\pi(k) = \pi(0) \prod_{n=1}^k \frac{\lambda}{\tilde{\mu}(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{10}$$



где

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^k \frac{\lambda}{\tilde{\mu}(n)} \right)^{-1}, \tag{11}$$

а интенсивности $\tilde{\mu}(n)$ имеют вид [20]

$$\begin{cases} \tilde{\mu}(n) = \lambda - \mu \frac{\lambda^b}{\tilde{\mu}(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(n+b)}, & 1 \leq n \leq b-1, \\ \tilde{\mu}(n) = \lambda + \mu - \mu \frac{\lambda^b}{\tilde{\mu}(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(n+b)}, & n \geq b. \end{cases} \tag{12}$$

Используя стационарные вероятности (10), (11), в работе [20] была получена формула для математического ожидания длительности пребывания требования в системе в виде

$$\bar{u}(\lambda) = \frac{b-1}{2\lambda} + \frac{1}{M-\lambda}, \tag{13}$$

где $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(n)$ — корень уравнения

$$M^{b+1} - (\lambda + \mu)M^b + \lambda^b \mu = 0,$$

принадлежащий интервалу

$$\left(\frac{b(\lambda + \mu)}{b+1}, \frac{(\lambda + \mu)^{b+1} - \lambda^b \mu}{(\lambda + \mu)^b} \right).$$

3. Численный пример

Рассмотрим систему S^X , в которую может поступить одно требование с вероятностью $q = 0.9$ и два требования с вероятностью $1 - q = 0.1$. Интенсивность входящего потока $\lambda = 5$. Длительность обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu = 2$. Также рассмотрим систему S , в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $\bar{\lambda} = \lambda(2 - q) = 5.5$. Длительность обслуживания в системе S имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu = 2$.

На рис. 3 представлены первые пятнадцать стационарных вероятностей состояний рассмотренных систем обслуживания при $b = 3, 4, 5, 6$. Сплошная линия соответствует стационарным вероятностям $\pi^X(n)$ для системы S^X , которые вычислялись по формулам (10). Пунктирная линия соответствует стационарным вероятностям $\pi(n)$ для системы S и вычислялись по формулам (10), (11), (12).

Для сравнения полученных вероятностей использовалась метрика — расстояние Колмогорова

$$D_n = \max_{i \geq 0} \left| \sum_{k=0}^i \pi^X(k) - \sum_{k=0}^i \pi(k) \right|, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

значения которой приведены в табл. 1. Из представленных данных видно, что отклонение накопленных стационарных вероятностей рассматриваемых систем не превосходит 0.016.

В табл. 2 приведены значения математических ожиданий числа требований и длительностей пребывания требования в системах S^X и S при различных значениях b . Для системы S^X значения \bar{n}^X и \bar{u}^X вычислялись по формулам (7) и (8) соответственно. Для системы S значения $\bar{u}(\bar{\lambda})$ вычислялись по формуле (13). В четвертом и седьмом столбцах табл. 2 приведены оценки разности в полученных значениях характеристик, вычисленные по формулам $\delta \bar{n} = \frac{|\bar{n}^X - \bar{n}(\lambda)|}{\bar{n}^X} \cdot 100\%$ и $\delta \bar{u} = \frac{|\bar{u}^X - \bar{u}(\lambda)|}{\bar{u}^X} \cdot 100\%$ соответственно.

Таблица 1 / Table 1

Расстояние Колмогорова для стационарных вероятностей
Kolmogorov distance for stationary probabilities

b	3	4	5	6
D_n	0.0155	0.0105	0.0078	0.0061

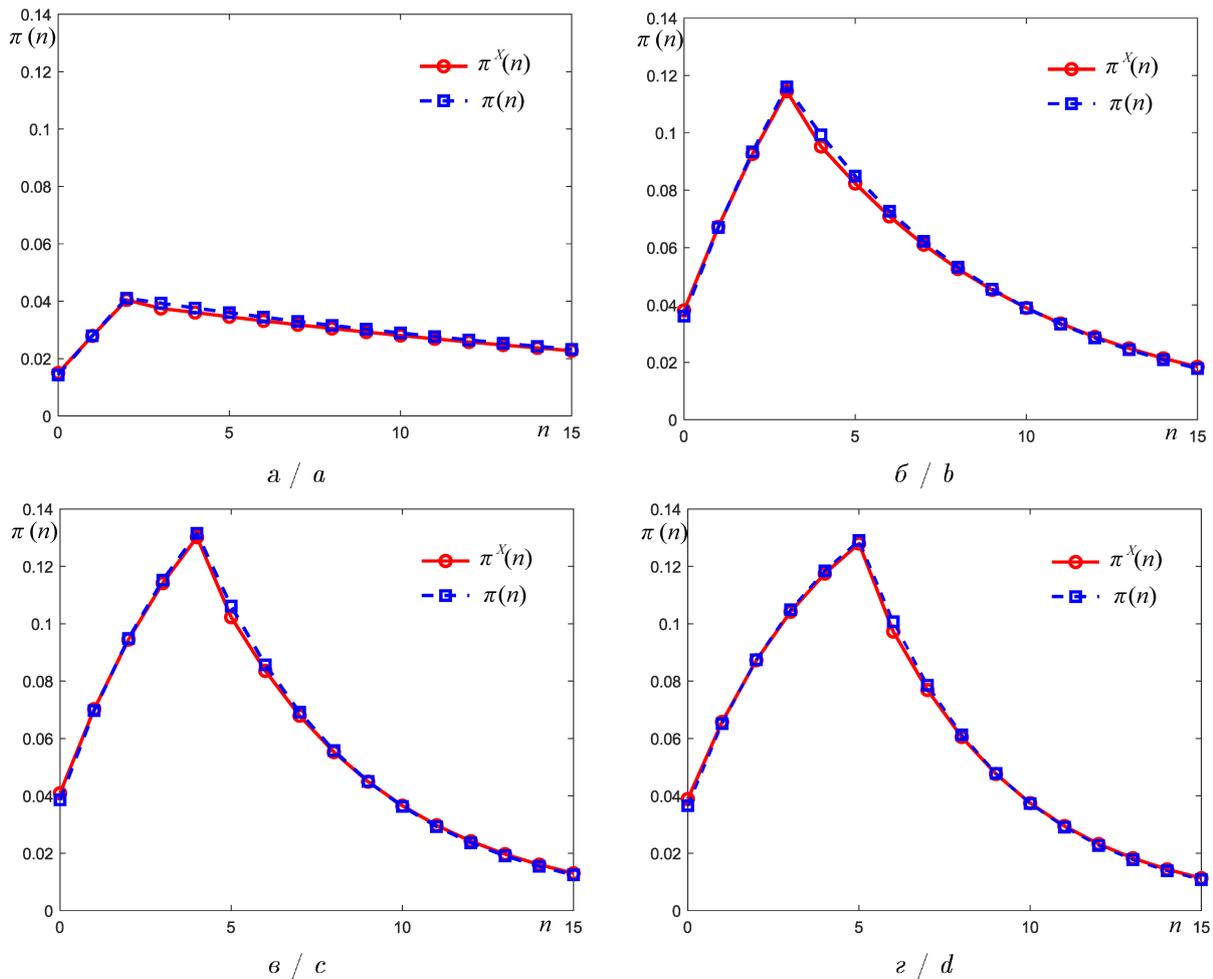


Рис. 3. Стационарные вероятности состояний систем S^X и S при $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$: $a - b = 3$; $\text{б} - b = 4$; $\text{в} - b = 5$; $\text{г} - b = 6$ (цвет онлайн)
 Fig. 3. Stationary state probabilities of systems S^X and S for $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$: a is $b = 3$; b is $b = 4$; c is $b = 5$; d is $b = 6$ (color online)

Таблица 2 / Table 2

Характеристики для систем S^X и S при $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$
 Characteristics of systems S^X and S for $\lambda = 5, \mu = 2, q = 0.9$

b	\bar{n}^X	$\bar{n}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{n}, \%$	\bar{u}^X	$\bar{u}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{u}, \%$
3	24.3055	23.3212	4.05	4.4192	4.2402	4.05
4	7.6075	7.4259	2.39	1.3832	1.3502	2.39
5	6.2721	6.1807	1.46	1.1404	1.1238	1.46
6	6.1083	6.0517	0.93	1.1106	1.1003	0.93

Из данных, представленных в табл. 2, видно, что относительная погрешность в полученных значениях не превосходит 5%.

В табл. 3 приведены значения математического ожидания числа требований и математическое ожидание времени пребывания требования в системах S^X и S при $\lambda = 5, \mu = 2, b = 4$ и различных значениях вероятности q . При этом интенсивность входного потока в систему S

вычислялась по формуле $\bar{\lambda} = \lambda(2 - q)$. В четвертом и седьмом столбцах табл. 3 приведены оценки разности в полученных значениях, в последнем столбце приведено расстояние Колмогорова. Для выбранных параметров вероятность поступления одного требования согласно ограничению (4) $q > 0.4$.



Таблица 3 / Table 3

Характеристики для систем S^X и S при $\lambda = 5$, $\mu = 2$, $b = 4$
 Characteristics of systems S^X and S for $\lambda = 5$, $\mu = 2$, $b = 4$

q	\bar{n}^X	$\bar{n}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{u}, \%$	\bar{u}^X	$\bar{u}(\bar{\lambda})$	$\delta\bar{u}, \%$	D_n
0.41	458.4135	399.4987	12.85	57.6621	50.2514	12.85	0.0478
0.50	44.4124	39.4871	11.09	5.9217	5.2649	11.09	0.0442
0.60	21.4109	19.4734	9.05	3.0587	2.7819	9.05	0.0366
0.70	13.7428	12.7920	6.92	2.1143	1.9680	6.92	0.0286
0.80	9.9082	9.4429	4.70	1.6514	1.5738	4.70	0.0200
0.90	7.6075	7.4259	2.39	1.3832	1.3502	2.39	0.0105
0.99	6.2040	6.1890	0.24	1.2285	1.2255	0.24	0.0011

Из данных, представленных в табл. 3, видно, что при увеличении вероятности поступления одного требования относительная погрешность в значениях математического ожидания длительности пребывания требований в системах S^X и S и расстояние Колмогорова уменьшаются. При $q > 0.6$ относительная погрешность математического ожидания длительности пребывания требования в системы не превосходит 10%, а расстояние Колмогорова меньше $D_n < 0.04$. Таким образом, при соответствующем выборе параметров систему с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием можно с хорошей точностью аппроксимировать более простой системой с ординарным входящим потоком и групповым обслуживанием.

Заключение

Предлагаемый приближенный метод анализа системы с неординарным потоком и групповым обслуживанием требований может быть использован для решения задач управления процессами функционирования систем потоковой передачи информации, систем грузовых и пассажирских перевозок, систем сборочного производства.

Продолжение исследования может быть связано с разработкой приближенного метода анализа системы с групповым обслуживанием, в которую могут поступать группы требований произвольного размера, а также определения оценки вычислительной эффективности метода анализа.

Список литературы

1. *Bailey N.* On queueing processes with bulk service // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1954. Vol. 16. P. 80–87.
2. *Gaver D.* Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line process in continuous time // The Annals of Mathematical Statistics. 1959. Vol. 30, iss. 3. P. 698–720. DOI: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177706200>
3. *Medhi J.* Stochastic models in queueing theory. 2nd ed. San Diego : Elsevier Science, 2002. 482 p.
4. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. Москва : Машиностроение, 1979. 432 с.
5. *Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K. S.* Queueing networks and Markov chains: Modeling and performance evaluation with computer science applications. New Jersey : John Wiley & Sons, 2006. 896 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471791571>
6. *Chaudhry M. L., Templeton J. G. C.* A first course in bulk queues. New York : John Wiley & Sons, 1983. 372 p.
7. *Santhi K., Saravanan R.* Performance analysis of cloud computing bulk service using queueing models // International Journal of Applied Engineering Research. 2017. Vol. 12, iss. 17. P. 6487–6492.



8. Chao X., Miyazawa M., Pinedo M. Queueing networks: Customers, signals and product form solutions. New York : John Wiley & Sons, 1999. 464 p.
9. Ritha W., Sreelekha B. Fuzzy steady state analysis of $M^X/M^{(A,B)}/1$ queue models with random breakdowns // International Journal of Applied Engineering and Technology. 2012. Vol. 2, iss. 2. P. 200–207.
10. Nakamura A., Phung-Duc T. Stationary analysis of infinite server queue with batch service // Performance Engineering and Stochastic Modeling. EPEW ASMTA 2021 / eds. by P. Ballarini, H. Castel, I. Dimitriou, M. Iacono, T. Phung-Duc, J. Walraevens. Cham : Springer, 2021. P. 411–424. (Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13104). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91825-5_25
11. Nakamura A., Phung-Duc T. Exact and asymptotic analysis of infinite server batch service queues with random batch sizes // Queueing Systems. 2024. Vol. 106. P. 129–158. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-023-09898-4>
12. Gupta G. K., Banerjee A. Steady state analysis of system size-based balking in $M/M^b/1$ queue // International Journal of Mathematics in Operational Research. 2019. Vol. 14, iss. 3. P. 319–337. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2019.099383>
13. Chen A., Pollett Ph., Li J., Zhang H. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with state-dependent control // Queueing Systems. 2010. Vol. 64. P. 267–304. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-009-9162-5>
14. Chen A., Wu X., Zhang J. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with general state-dependent control // Queueing Systems. 2020. Vol. 95. P. 331–378. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09660-0>
15. Stadge W. Some exact expressions for the bulk-arrival queue $M^X/M/1$ // Queueing Systems. 1989. Vol. 4. P. 85–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01150859>
16. Rama G., Ramshankar R., Ramanarayanan R. $M/M/1$ bulk arrival and bulk service queue with randomly varying environment // IOSR Journal of Mathematics. 2014. Vol. 10, iss. 6. P. 58–66. DOI: <https://doi.org/10.9790/5728-10635866>
17. Gupta G. K., Banerjee A. On finite buffer bulk arrival bulk service queue with queue length and batch size dependent service // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2019. Vol. 5. Art. 32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40819-019-0617-z>
18. Bhat U. N. Imbedded Markov chain analysis of single server bulk queues // Journal of the Australian Mathematical Society. 1964. Vol. 4, iss. 2. P. 244–263. DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446788700023454>
19. Stankevich E., Tananko I., Pagano M. Optimization of open queueing networks with batch services // Mathematics. 2022. Vol. 10, iss. 16. Art. 3027. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10163027>
20. Станкевич Е. П., Тананко И. Е., Пагано М. Анализ системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунаро. науч. конф. Саратов : Научная книга, 2021. С. 148–151. EDN: PGOIEL
21. Вишневецкий В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. Москва : Техносфера, 2003. 506 с.

References

1. Bailey N. On queueing processes with bulk service. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1954, vol. 16, pp. 80–87.
2. Gaver D. Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line process in continuous time. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1959, vol. 30, iss. 3, pp. 698–720. DOI: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177706200>
3. Medhi J. *Stochastic models in queueing theory*. 2nd ed. San Diego, Elsevier Science, 2002. 482 p.
4. Kleinrock L. *Queueing systems. Vol. I: Theory*. New York, John Wiley & Sons, 1975. 437 p. (Russ. ed.: Moscow, Mashinostroenie, 1979. 432 p.).
5. Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K. S. *Queueing networks and Markov chains: Modeling and performance evaluation with computer science applications*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2006. 896 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471791571>
6. Chaudhry M. L., Templeton J. G. C. *A first course in bulk queues*. New York, John Wiley & Sons, 1983. 372 p.
7. Santhi K., Saravanan R. Performance analysis of cloud computing bulk service using queueing

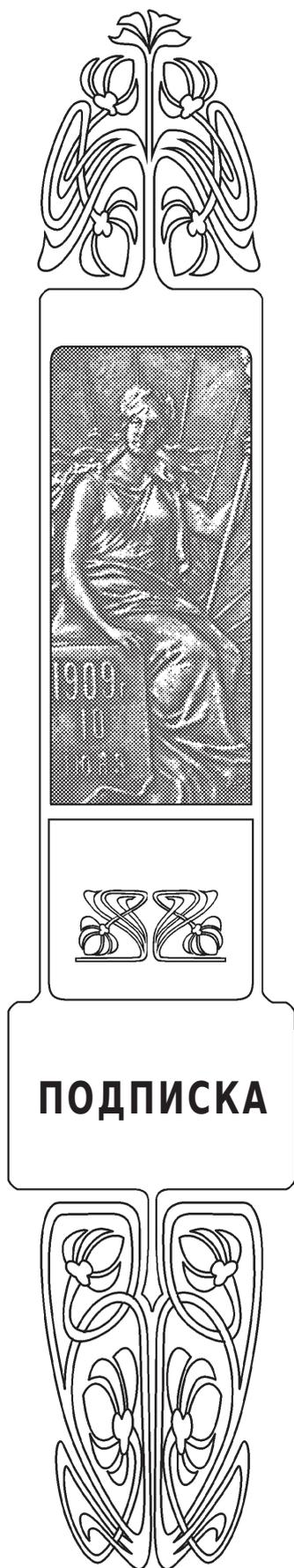


- models. *International Journal of Applied Engineering Research*, 2017, vol. 12, iss. 17, pp. 6487–6492.
8. Chao X., Miyazawa M., Pinedo M. *Queueing networks: Customers, signals and product form solutions*. New York, John Wiley & Sons, 1999. 464 p.
 9. Ritha W., Sreelekha B. Fuzzy steady state analysis of $M^X/M^{(A,B)}/1$ queue models with random breakdowns. *International Journal of Applied Engineering and Technology*, 2012, vol. 2, iss. 2, pp. 200–207.
 10. Nakamura A., Phung-Duc T. Stationary analysis of infinite server queue with batch service. In: Ballarini P., Castel H., Dimitriou I., Iacono M., Phung-Duc T., Walraevens J. (eds.) *Performance Engineering and Stochastic Modeling. EPEW ASMTA 2021*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 13104. Cham, Springer, 2021, pp. 411–424. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91825-5_25
 11. Nakamura A., Phung-Duc T. Exact and asymptotic analysis of infinite server batch service queues with random batch sizes. *Queueing Systems*, 2024, vol. 106, pp. 129–158. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-023-09898-4>
 12. Gupta G. K., Banerjee A. Steady state analysis of system size-based balking in $M/M^b/1$ queue. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 2019, vol. 14, iss. 3, pp. 319–337. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2019.099383>
 13. Chen A., Pollett Ph., Li J., Zhang H. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with state-dependent control. *Queueing Systems*, 2010, vol. 64, pp. 267–304. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-009-9162-5>
 14. Chen A., Wu X., Zhang J. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with general state-dependent control. *Queueing Systems*, 2020, vol. 95, pp. 331–378. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09660-0>
 15. Stadje W. Some exact expressions for the bulk-arrival queue $M^X/M/1$. *Queueing Systems*, 1989, vol. 4, pp. 85–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01150859>
 16. Rama G., Ramshankar R., Ramanarayanan R. $M/M/1$ bulk arrival and bulk service queue with randomly varying environment. *IOSR Journal of Mathematics*, 2014, vol. 10, iss. 6, pp. 58–66. DOI: <https://doi.org/10.9790/5728-10635866>
 17. Gupta G. K., Banerjee A. On finite buffer bulk arrival bulk service queue with queue length and batch size dependent service. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2019, vol. 5, art. 32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40819-019-0617-z>
 18. Bhat U. N. Imbedded Markov chain analysis of single server bulk queues. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1964, vol. 4, iss. 2, pp. 244–263. DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446788700023454>
 19. Stankevich E., Tananko I., Pagano M. Optimization of open queueing networks with batch services. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 16, art. 3027. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10163027>
 20. Stankevich E. P., Tananko I. E., Pagano M. Analysis of a queueing system with group servicing of requirements. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii* [Computer Science and Information Technologies: Proceedings of the International sci. conf.]. Saratov, Nauchnaya kniga, 2021, pp. 148–151 (in Russian). EDN: PGOIEL
 21. Vishnevskij V. M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternyh setey* [Theoretical foundations of computer network design]. Moscow, Tekhnosfera, 2003. 506 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 27.11.2025

Принята к публикации / Accepted 07.12.2025

Опубликована / Published 02.03.2026



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 36017.
Оформить подписку на печатную версию
можно в интернет-каталоге
ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89
Факс: +7(845-2) 27-85-29
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54
E-mail: mmi@sgu.ru
Website: <https://mmi.sgu.ru>



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026.
Том 26, выпуск 1

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика
Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология
Серия: Экономика. Управление. Право

