

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2026

Том 26

Выпуск 2



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



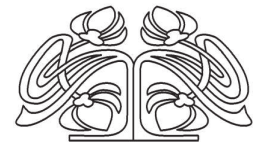
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2026 Том 26

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Артамонов Н. А. Модификация метода обратного ряда построения точных решений уравнений нелинейной математической физики 160

Комиссарова Н. Е. Обобщенный нестационарный кратномасштабный анализ на локально компактных нуль-мерных группах с произвольной образующей последовательностью 165

Smaglichenko T. A. Merging of Euler's method with trigonometric functions for accurate ray path in a two-gradient medium
[Смагличенко Т. А. Объединение метода Эйлера и тригонометрических функций для определения точного пути луча в двухградиентной среде] 175

Чистов И. С., Цыбуля Л. М. Применение подхода групповых действий к решению линейных диофантовых уравнений 187

Механика

Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний аэрозоля в узком закрытом резонаторе 198

Еремин А. В., Зинина С. А., Брагин Д. М., Попов А. И. Об одном методе исследования процессов теплопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой 211

Зуев Ю. В. Влияние степени подогрева газокапельной турбулентной струи на ее параметры 225

Любимова А. А., Кучумов А. Г. Исследование гемодинамических характеристик течения в Виллизиевом круге с использованием реологических моделей крови 236

Муслов С. А., Сухочев П. Ю. Сравнение гиперупругих и формально определенных деформационных моделей сухожилия стремной мышцы среднего уха 251

Радченко В. П., Глебов В. Е. Метод расчёта релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочнённых цилиндрах с надрезами при комбинированном нагружении крутящим моментом и растягивающей силой в условиях высокотемпературной ползучести 265

Информатика

Горбунова А. В., Лебедев А. В. Модели зависимостей между приборами в системах массового обслуживания типа split-merge. Случай экспоненциального обслуживания 280

Podgorny A. S. Stochastic framework for macroeconomic scenario forecasting using sparse graph optimization and CIR++ simulations
[Подгорный А. С. Стохастическая модель прогнозирования макроэкономических сценариев с использованием оптимизации разреженных графов и симуляций CIR++] 296

Силинская А. А., Богомолов А. С., Кушников В. А. Математическая модель процесса эвакуации социальных групп из помещений с несколькими выходами 302

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал входит в ЕГПНИ (Белый список), RSCI, Scopus, Web of Science (ESCI), MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

Верстка

Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

Адрес учредителя, издателя

и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49,
52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 25.05.2026.

Подписано в свет 01.06.2026.

Выход в свет 01.06.2026.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 18,13 (19,5).

Тираж 100 экз. Заказ 33-Т

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2026

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS**Scientific Part****Mathematics**

Artamonov N. A. Modification of the inverted series method for constructing exact solutions to equations of nonlinear mathematical physics 160

Komissarova N. Ye. Generalized non-stationary multiresolution analysis on locally compact zero-dimensional groups with an arbitrary generating sequence 165

Smaglichenko T. A. Merging of Euler's method with trigonometric functions for accurate ray path in a two-gradient medium 175

Chistov I. S., Tsybulya L. M. Application of the group action approach to solving linear Diophantine equations 187

Mechanics

Gubajdullin D. A., Tukmakov D. A. Numerical simulation of aerosol oscillations in a narrow closed resonator 198

Eremin A. V., Zinina S. A., Bragin D. M., Popov A. I. On a method for investigating heat transfer processes in porous media with ordered macrostructures 211

Zuev Yu. V. Influence of gas-droplet turbulent jet heating degree on its parameters 225

Lyubimova A. A., Kuchumov A. G. The influence of the rheological models of blood on the hemodynamic characteristics of the flow in the Circle of Willis 236

Muslov S. A., Sukhochev P. Yu. Comparison of hyperelastic and formally defined deformation models of the stapedius tendon of the middle ear 251

Radchenko V. P., Glebov V. E. A method for calculating the relaxation of residual stresses in surface-hardened cylinders with incisions under combined torque and tensile force loading under conditions of high-temperature creep 265

Computer Sciences

Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Servers dependency models in split-merge queueing systems. The case of exponential service 280

Podgorny A. S. Stochastic framework for macroeconomic scenario forecasting using sparse graph optimization and CIR++ simulations 296

Silinskaya A. A., Bogomolov A. S., Kushnikov V. A. A mathematical model of social group evacuation from buildings with multiple exits 302



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Лисовенко Дмитрий Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Dmitry S. Lisovenko (Moscow, Russia)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

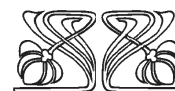
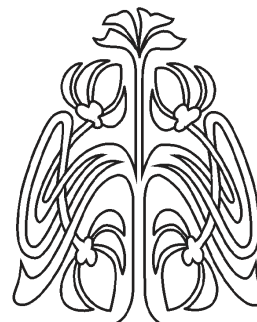
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

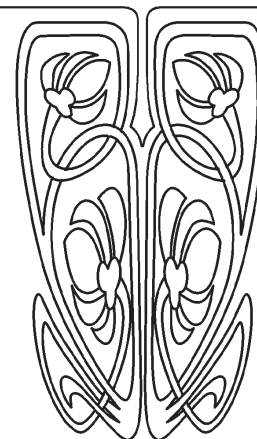
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 160–164

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 160–164

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-160-164>

EDN: <https://elibrary.ru/ADJGNO>

Краткое сообщение

УДК 530.182:517.912:517.929

Модификация метода обратного ряда построения точных решений уравнений нелинейной математической физики

Н. А. Артамонов

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Артамонов Николай Александрович, аспирант кафедры прикладной математики и системного анализа, twostvoll@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0001-0683-2428>, SPIN: 8251-2604, AuthorID: 1296661

Аннотация. В работе предложена модификация метода обратного ряда, приводящая к расширению выявляемых им классов точных решений нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Работоспособность модифицированного метода продемонстрирована на примерах решения интегрируемого уравнения Цицейки и неинтегрируемого уравнения Фишера.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, точные решения, метод обратного ряда

Для цитирования: Артамонов Н. А. Модификация метода обратного ряда построения точных решений уравнений нелинейной математической физики // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 160–164. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-160-164>, EDN: ADJGNO

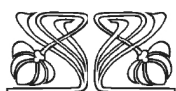
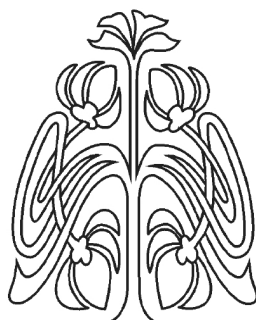
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Short communication

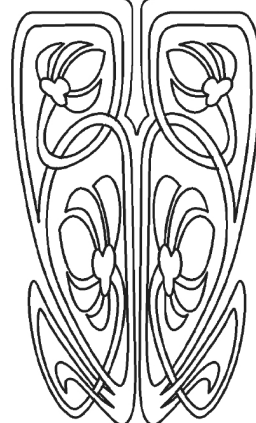
Modification of the inverted series method for constructing exact solutions to equations of nonlinear mathematical physics

N. A. Artamonov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia



Научный
отдел





Nikolay A. Artamonov, twostvoll@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0001-0683-2428>, SPIN: 8251-2604, AuthorID: 1296661

Abstract. This paper proposes a modification of the inverted series method that expands the classes of exact solutions it identifies for nonlinear differential equations in mathematical physics. The effectiveness of the modified method is demonstrated using examples of solving the integrable Tzitzeica equation and the nonintegrable Fisher equation.

Keywords: nonlinear differential equations, exact solutions, inverted series method

For citation: Artamonov N. A. Modification of the inverted series method for constructing exact solutions to equations of nonlinear mathematical physics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 160–164 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-160-164>, EDN: ADJGNO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задача нахождения точных решений уравнений нелинейной математической физики, в частности дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, по-прежнему является весьма актуальной. Характеристики точных решений позволяют исследовать фундаментальные свойства уравнений; точные решения являются основой для отладки приближенных методов решения. За последние десятилетия было предложено немало эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений, например, метод экспоненциальной функции, метод гиперболического тангенса, метод простейших уравнений [1–3], метод геометрического ряда [4] и др. Настоящая статья посвящена модификации метода обратного ряда [5], позволяющей расширить круг решаемых этим методом уравнений.

1. Идея модификации метода

Согласно [5] на первом этапе метода обратного ряда строится ряд возмущений по степеням решения линеаризованного уравнения в форме экспоненциальной функции e^z , зависящей от переменной бегущей волны $z = kx - \omega t$. На втором этапе для полученного степенного ряда $S_1(y)$, построенного по степеням переменной y , $y = e^z$, формируется обратный степенной ряд $S_2(y)$ согласно условию

$$S_1 S_2 = 1. \tag{1}$$

Как оказывается, обратный ряд S_2 обрывается безусловно для большинства интегрируемых уравнений и после выполнения специального условия — для многих неинтегрируемых уравнений, и выражение S_2^{-1} дает точное решение уравнения в замкнутой форме. Обрывание степенного ряда, т. е. обращение в ноль всех его коэффициентов, начиная с некоторого номера, основано на том, что рациональная дробь, представляющая точное решение уравнения, во многих случаях имеет вид

$$\frac{y}{P_n(y)}, \tag{2}$$

где P_n — многочлен степени n от 1 до 3. Обратное к (2) выражение является многочленом по y , соответствующим оборванному обратному ряду. Однако в некоторых случаях структура точного решения более сложная и имеет вид

$$\frac{y^m(y + C)}{P_n(y)}, \tag{3}$$

где $m \in Z$ и $C = \text{const}$. Второй множитель в числителе (3) препятствует обрыванию обратного ряда и, следовательно, нахождению решения в замкнутой форме. Для устранения проблемы предлагается заменить условие (1) следующим:

$$S_1 S_2 S_3 = 1, \tag{4}$$

где

$$S_3 = \frac{1}{C} - \frac{y}{C^2} + \frac{y^2}{C^3} - \frac{y^3}{C^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{n-1}}{C^n} + \dots \quad (5)$$

есть формальное разложение выражения $(y + C)^{-1}$ в степенной ряд. При такой замене комбинация $S_1 S_3$ лишается проблемного множителя $(y + C)$ и ничто не препятствует обрыванию ряда S_2 . Точное решение уравнения при этом определяется выражением

$$\left(\frac{S_2}{y + C} \right)^{-1}. \quad (6)$$

2. Решение уравнения Цицейки

Интегрируемому уравнению Цицейки

$$u_{xt} = e^{2u} - e^{-u} \quad (7)$$

при $\omega = -3/k$ соответствует ряд возмущений [4]

$$u = y + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{27}y^4 + \frac{121}{6480}y^5 + \frac{25}{2592}y^6 + \frac{1681}{326592}y^7 + \dots \quad (8)$$

Сингулярный анализ ведущих членов (7) дает нулевой порядок полюса его решения, поэтому вместо (8) рассмотрим ряд

$$S_1 = y \frac{du}{dy} = y + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}y^3 + \frac{4}{27}y^4 + \frac{121}{1296}y^5 + \frac{25}{432}y^6 + \frac{1681}{46656}y^7 + \dots \quad (9)$$

Будем искать обратный ряд в форме

$$S_2 = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n y^n. \quad (10)$$

Подставив (9), (10) и (5) в (4) и перенеся все слагаемые в левую часть, будем последовательно приравнять нулю множители при возрастающих степенях y , начиная с нулевой:

$$\begin{aligned} y^0 : \quad \frac{b_{-1}}{C} - 1 = 0 &\Rightarrow b_{-1} = C, \\ y^1 : \quad \frac{b_0 - 1}{C} + \frac{1}{3} = 0 &\Rightarrow b_0 = 1 - \frac{C}{3}, \dots \end{aligned}$$

В результате получим

$$S_2 = \frac{C}{y} + 1 - \frac{C}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{5C}{12} + 1 \right) y - \frac{1}{18} \left(\frac{C}{3} + \frac{5}{2} \right) y^2 - \frac{C + 6}{324} y^3 - \frac{C + 6}{1944} y^4 - \dots \quad (11)$$

Как видим, начиная со степени y^3 , все коэффициенты обращаются в ноль при $C = -6$, и ряд (11), обрываясь, превращается в многочлен

$$-\frac{6}{z} + 3 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{36},$$

а выражение (6), где $y = kx + \frac{3}{k}t$, дает сумму ряда (9)

$$\frac{36y(6 - y)}{(y + 6)(y^2 - 24y + 36)}, \quad (12)$$

которая определяет точное решение уравнения Цицейки, приведенное в [4].



3. Решение уравнения Фишера

Неинтегрируемому уравнению Фишера

$$u_t - \alpha u_{xx} - u + \beta u^2 = 0$$

при $\omega = -\alpha k^2 + 1$ соответствует ряд возмущений

$$S_0 = \frac{1}{\beta} + y + \frac{\beta y^2}{2\alpha k^2 + 1} + \frac{\beta^2 y^3}{(2\alpha k^2 + 1)(3\alpha k^2 + 1)} + \frac{\beta^3 (7\alpha k^2 + 3) y^4}{3(2\alpha k^2 + 1)^2 (3\alpha k^2 + 1)(4\alpha k^2 + 1)} + \dots$$

Для упрощения выкладок избавимся в ряду от постоянного слагаемого, т. е. примем $S_1 = S_0 - \frac{1}{\beta}$ и воспользуемся условием (4). Получим следующие выражения для коэффициентов обратного ряда (10):

$$\begin{aligned} b_{-1} &= C, \\ b_0 &= 1 - \frac{C\beta}{2\alpha k^2 + 1}, \\ b_1 &= \frac{\beta(-6\alpha^2 k^4 + \alpha k^2(C\beta - 5) - 1)}{(2\alpha k^2 + 1)^2 (3\alpha k^2 + 1)}, \\ b_2 &= -\frac{\alpha\beta^2 k^2(-24\alpha^2 k^4 + 2\alpha k^2(C\beta - 9) - 2C\beta - 3)}{3(2\alpha k^2 + 1)^3 (3\alpha k^2 + 1)(4\alpha k^2 + 1)}, \\ b_3 &= \frac{\alpha\beta^3 k^2(\alpha k^2 - 1)(-120\alpha^3 k^6 + 4\alpha^2 k^4(3C\beta - 31) - 2\alpha k^2(3C\beta + 20) - 3C\beta - 4)}{6(2\alpha k^2 + 1)^4 (3\alpha k^2 + 1)^2 (4\alpha k^2 + 1)(5\alpha k^2 + 1)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Подстановка решения уравнения $b_2 = 0$, линейного относительно неизвестной C , в следующие коэффициенты b_3, b_4, \dots факторизует числители их выражений, так что везде в них появляется общий множитель $(6\alpha k^2 - 1)$. Приравнивание последнего нулю выявляет два условия:

$$C = -\frac{4}{\beta}, \quad \alpha = \frac{1}{6k^2},$$

при которых обратный ряд (10) обрывается и дает точное решение уравнения Фишера

$$u = \frac{1}{\beta} - \frac{y(\beta y - 4)}{(\beta y - 2)^2},$$

где $y = e^z, z = kx - \frac{5}{6}t$.

Заключение

Метод обратного ряда [5] является модификацией метода геометрического ряда [4], позволяющего находить точные решения дифференциальных уравнений в случаях, когда ряд возмущения является геометрическим рядом или приводится к нему. Преимуществом метода обратного ряда является более высокая вычислительная эффективность. Но в своей исходной формулировке метод обратного ряда не был способен обнаруживать решения вида (3). Предложенная модификация устраняет этот недостаток метода и расширяет круг обнаруживаемых им решений.

Список литературы

1. Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный : Интеллект, 2010. 368 с.



2. Конт Р., Мюзетт М. Метод Пенлеве и его приложения. Москва ; Ижевск : Изд-во Ин-та компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 315 с.
3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. Москва : Юрайт, 2025. 256 с.
4. Бочкарев А. В., Землянухин А. И. Метод геометрического ряда построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 7. С. 1113–1125. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466917070079>, EDN: YTLTRJ
5. Землянухин А. И., Артамонов Н. А., Бочкарев А. В., Безлюдный В. И. Обращение степенных рядов и точные решения уравнений нелинейной математической физики // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6. С. 929–942. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003180>, EDN: XEHQXM

References

1. Kudryashov N. A. *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny, Intellect, 2010. 368 p. (in Russian).
2. Conte R., Musette M. *The Painleve Handbook*. Dordrecht, Springer Science+Business Media B.V., 2008. 256 p. (Russ. ed.: Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research, Regular and Chaotic Dynamics Publ., 2011. 315 p.).
3. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Nelineynye uravneniya matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Nonlinear equations of mathematical physics and mechanics. Solution methods]. Moscow, Yurait, 2025. 256 p. (in Russian).
4. Bochkarev A. V., Zemlyanukhin A. I. The geometric series method for constructing exact solutions to nonlinear evolution equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, iss. 7, pp. 1111–1123. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542517070065>, EDN: XOUKKK
5. Zemlyanukhin A. I., Artamonov N. A., Bochkarev A. V., Bezlyudny V. I. Power series reversion and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2025, vol. 33, iss. 6, pp. 929–942. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003180>, EDN: XEHQXM (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 10.01.2026

Принята к публикации / Accepted 26.01.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 165–174

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 165–174

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-165-174>

EDN: <https://elibrary.ru/EJPJVI>

Научная статья

УДК 517.51

Обобщенный нестационарный кратномасштабный анализ на локально компактных нуль-мерных группах с произвольной образующей последовательностью

Н. Е. Комиссарова

Саратовский национальный исследовательский университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Комиссарова Наталья Евгеньевна, старший преподаватель кафедры математического анализа, nataliyakomissarov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7104-2377>, SPIN: 8621-2807, AuthorID: 723893

Аннотация. Рассматривается локально компактная нуль-мерная группа (G, \dagger) , порядки смежных классов у которой произвольные простые числа. Если порядки смежных классов совпадают и равны некоторому простому числу, кратномасштабный анализ строится с помощью оператора растяжения. Если же порядки смежных классов не совпадают, определить оператор растяжения не представляется возможным. В работе указан способ построения кратномасштабного анализа без использования оператора растяжения и построен соответствующий всплесковый базис.

Ключевые слова: локально компактные нуль-мерные группы, кратномасштабный анализ, всплесковый базис

Для цитирования: Комиссарова Н. Е. Обобщенный нестационарный кратномасштабный анализ на локально компактных нуль-мерных группах с произвольной образующей последовательностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 165–174. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-165-174>, EDN: EJPJVI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Generalized non-stationary multiresolution analysis on locally compact zero-dimensional groups with an arbitrary generating sequence

N. Ye. Komissarova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Nataliya Ye. Komissarova, nataliyakomissarov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7104-2377>, SPIN: 8621-2807, AuthorID: 723893

Abstract. We consider a locally compact zero-dimensional group (G, \dagger) , whose coset orders are arbitrary prime numbers. If the orders of the cosets are constant and equal to some prime number, the multiresolution analysis can be constructed by using a dilation operator. If the orders of the cosets are different, it is not possible to define the dilation operator. In this paper, we describe a method for constructing a multiresolution analysis without using the dilation operator and construct the corresponding wavelet basis.



Keywords: locally compact zero-dimensional group, multiresolution analysis, wavelet basis

For citation: Komissarova N. Ye. Generalized non-stationary multiresolution analysis on locally compact zero-dimensional groups with an arbitrary generating sequence. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 165–174 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-165-174>, EDN: EJPJVI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Вейвлет-анализ сформировался в последние десятилетия XX в. В начале XXI в. значительно вырос интерес к вопросам построения базисов вейвлетов на локально компактных нуль-мерных абелевых группах. Так, в [1, 2] были построены кратномасштабный анализ (КМА) и на его основе ортонормированные базисы в $L_2(G)$ как сжатий и сдвигов нескольких функций (в [1] на группе Виленкина, в [2] на поле всех p -адических чисел).

В [3] была построена система Хаара на компактной нуль-мерной абелевой группе.

В работе [4] была рассмотрена задача построения ортогональных всплесковых базисов на произвольных локально компактных нуль-мерных группах, для которых порядки смежных классов совпадают и равны некоторому простому числу. В указанном случае возможно определить оператор растяжения.

В [5] было дано следующее определение нестационарного КМА.

Определение. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L_2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$ называется *нестационарным кратномасштабным анализом* (НКМА), если выполнены следующие условия:

- 1) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(G)$;
- 3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$;
- 4) для любого j существует функция $\varphi_j \in V_j$ такая, что последовательность $\{\varphi_j(\cdot + k 2^{-j})\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса (ортонормированный базис) в V_j . Последовательность $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ называется *масштабирующей* для данного НКМА.

В данной работе построен нестационарный кратномасштабный анализ (НКМА) и всплесковый ортонормированный базис на произвольной локально компактной нуль-мерной группе с произвольной образующей последовательностью, т. е. в случае, когда порядки смежных классов — различные простые числа. Соответственно, в этой ситуации ввести оператор растяжения не представляется возможным. В данном случае НКМА порождается последовательностью функций, а всплесковый базис — последовательностью всплеск-функций. В [6] был построен по такому принципу НКМА. В данной работе рассматривается более общая ситуация. Причем и КМА, и ортонормированный базис удастся построить без использования преобразования Фурье.

1. Локально компактные группы, топология, характеры

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп

$$\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

таких, что $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = 0$ (0 — нулевой элемент группы G).

При каждом фиксированном $N \in \mathbb{Z}$ подгруппа G_N является компактной абелевой группой относительно той же операции $\dot{+}$ в топологии, порожденной системой подгрупп

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$



Так как каждая группа G_n компактна, то каждая фактор-группа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n — ее порядок. Можно считать, что p_n — простые числа, так как, используя теорему Силова, можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки фактор-групп G_n/G_{n+1} станут простыми. В этом случае базой топологии являются всевозможные смежные классы $G_n \dot{+} g$ ($g \in G$).

Числа \mathbf{m}_n определим равенствами

$$\mathbf{m}_0 = 1, \quad \mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n \cdot p_n.$$

При $n \geq 1$ имеют место равенства

$$\mathbf{m}_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1}, \quad \mathbf{m}_{-n} = \frac{1}{p_{-1} p_{-2} \dots p_{-n}}.$$

Смежные классы $G_n \dot{+} g$ ($n \in \mathbb{Z}$) вместе с пустым множеством образуют полукольцо \mathcal{K} . На каждом смежном классе $G_n \dot{+} g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n \dot{+} g) = \mu G_n = 1/\mathbf{m}_n$.

Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$. Меру μ можно продолжить с полукольца \mathcal{K} на σ -алгебру (например, по схеме Каратеодори). Получим меру μ , совпадающую на борелевских множествах с мерой Хаара на G , которая инвариантна относительно сдвига.

Пусть далее $\int_G f(x) d\mu(x)$ — абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ . При каждом $N \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в этой сумме слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т. е.

$$x = \sum_{n=-N}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}, a_n \neq 0).$$

Систему элементов (g_n) будем называть *базисной*.

Пусть далее X — совокупность характеров группы G , которая является группой относительно умножения, G_n^\perp — аннулятор группы G_n , т. е. $G_n^\perp = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$.

Каждый аннулятор G_n^\perp есть группа относительно умножения, G_n^\perp образуют возрастающую последовательность

$$\dots \subset G_{-n}^\perp \subset \dots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset \dots$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = 1,$$

причем фактор-группа имеет порядок p_n .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $\chi \in X$ единственным образом представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в произведении множителей с положительными номерами конечное число. Характеры r_n будем называть *функциями Радемахера*.

В группе характеров X можно ввести топологию, используя цепочку подгрупп и выбирая в качестве базы топологии совокупность смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$ ($\chi \in X$). Совокупность таких смежных классов вместе с пустым множеством образует полукольцо χ . Для каждого смежного класса определим его меру ν равенством $\nu(G_n^\perp \chi) = \nu(G_n^\perp) = m_n$. Таким образом, всегда $\mu(G_n)\nu(G_n^\perp) = 1$. Мера ν продолжается стандартным способом (например, по схеме Каратеодори) на σ -алгебру измеримых множеств. По этой мере строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_X F(\chi) d\nu(\chi)$. Группа характеров X с такой топологией является нуль-мерной локально компактной группой, и имеет место двойственная ситуация: каждый элемент $x \in G$ является характером группы X и G_n есть аннулятор группы G_n^\perp .

Обозначим

$$H_n = \left\{ q \in G : q = \sum_{j=N}^{n-1} a_j g_j, N \in \mathbb{Z}, a_j = \overline{0, p_n - 1} \right\}.$$

2. Нестационарный кратномасштабный анализ на локально компактной нуль-мерной группе

Определение 1. *Нестационарным кратномасштабным анализом (НКМА)* будем называть совокупность замкнутых подпространств $V_j \subset L_2(G)$, для которых справедливы следующие аксиомы:

A1) $V_j \subset V_{j+1}$;

A2) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L_2(G)$;

A3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$;

A4) для любого $n \in \mathbb{Z}$ найдутся функции $\varphi_{j_n, j_{n+1}}^{(n)}(x)$; $j_n = \overline{0, p_n - 1}$, $j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}$ и множества H_n такие, что система $(\varphi_{j_n, j_{n+1}}^{(n)}(x \cdot h); j_n = \overline{1, p_n - 1}, j_{n+1} = \overline{1, p_{n+1} - 1}, h \in H_n)$ образует ортонормированный базис в V_n .

Для построения КМА выберем функции $\varphi_{j_n, j_{n+1}}^{(n)} \in L_2(G)$ следующим образом.

Положим

$$\begin{aligned} \varphi_{j_0, 0}^{(0)}(x) &= \sqrt{m_1} \mathbf{1}_{G_1 + j_0 g_0}(x), \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 2}, \\ \varphi_{p_0 - 1, j_1}^{(0)}(x) &= \sqrt{m_2} \mathbf{1}_{G_2 + j_1 g_1 + (p_0 - 1)g_0}(x), \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 1} \end{aligned}$$

(носители этих функций содержатся в G_0).

Положим

$$V_0 = \overline{\text{span} \left\{ \varphi_{j_0, 0}^{(0)}(x \cdot h_0), \varphi_{p_0 - 1, j_1}^{(0)}(x \cdot h_0) \right\}}, \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 2}, \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 1}, \quad h_0 \in H_0.$$

Затем определим

$$\begin{aligned} \varphi_{j_1, 0}^{(1)} &= \sqrt{m_2} \mathbf{1}_{G_2 + j_1 g_1}(x), \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 2}, \\ \varphi_{p_1 - 1, j_2}^{(1)} &= \sqrt{m_3} \mathbf{1}_{G_3 + j_2 g_2 + (p_1 - 1)g_1}(x), \quad j_2 = \overline{0, p_2 - 1}, \\ \text{supp } \varphi_{j_1, 0}^{(1)} &\subset G_1, \quad \text{supp } \varphi_{p_1 - 1, j_2}^{(1)} \subset G_1. \end{aligned}$$

Положим

$$V_1 = \overline{\text{span} \left\{ \varphi_{j_1, 0}^{(1)}(x \cdot h_1), \varphi_{p_1 - 1, j_2}^{(1)}(x \cdot h_1) \right\}}, \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 2}, \quad j_2 = \overline{0, p_2 - 1}, \quad h_1 \in H_1.$$

Продолжим этот процесс. На n -м шаге получим

$$\varphi_{j_n, 0}^{(n)} = \sqrt{m_{n+1}} \mathbf{1}_{G_{n+1} + j_n g_n}(x), \quad j_n = \overline{0, p_n - 2},$$



$$\begin{aligned} \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)} &= \sqrt{m_{n+2}} \mathbf{1}_{G_{n+2} \dot{+} j_{n+1} g_{n+1} \dot{+} (p_n-1) g_n}(x), \quad j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}, \\ \text{supp } \varphi_{j_n, 0}^{(n)} &\subset G_n, \quad \text{supp } \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)} \subset G_n \end{aligned}$$

и положим

$$V_n = \overline{\text{span} \left\{ \varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x \dot{-} h_n), \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n) \right\}}, \quad j_n = \overline{0, p_n - 2}, \quad j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}, \quad h_n \in H_n.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \overline{\text{span} \left\{ \varphi_{j_{-1}, 0}^{(-1)}(x \dot{-} h_{-1}), \varphi_{p_{-1}-1, j_0}^{(-1)}(x \dot{-} h_{-1}) \right\}}, \\ j_{-1} &= \overline{0, p_{-1} - 2}, \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 1}, \quad h_{-1} \in H_{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{j_n, 0}^{(-1)} &= \sqrt{m_0} \mathbf{1}_{G_0 \dot{+} j_{-1} g_{-1}}(x), \quad j_{-1} = \overline{0, p_{-1} - 2}, \\ \varphi_{p_{-1}-1, j_0}^{(-1)} &= \sqrt{m_1} \mathbf{1}_{G_1 \dot{+} j_0 g_0 \dot{+} (p_{-1}-1) g_{-1}}(x), \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 1}, \\ \text{supp } \varphi_{j_{-1}, 0}^{(-1)} &\subset G_{-1}, \quad \text{supp } \varphi_{p_{-1}-1, j_0}^{(-1)} \subset G_{-1}. \end{aligned}$$

Продолжаем процесс до бесконечности в обе стороны.

Таким образом, мы построили последовательность подпространств $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Теорема 1. Совокупность подпространств $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ образует НКМА.

Доказательство. Докажем, что для построенных подпространств выполнены аксиомы А1–А4 НКМА.

А1. Покажем, что $V_n \subset V_{n+1}$. Возьмем $f \in V_n \iff$

$$\iff f = \sum_{h_n \in H_n} \left(\sum_{j_n=0}^{p_n-2} C_{j_n, 0, h_n} \varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x \dot{-} h_n) + \sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1} C_{p_n-1, j_{n+1}, h_n} \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n) \right).$$

Так как $\varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x)$ постоянны на смежных классах по подгруппе G_{n+1} , функции $\varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x)$ постоянны на смежных классах по подгруппе G_{n+2} , а функции $\varphi_{j_{n+1}, 0}^{(n+1)}(x)$ постоянны на смежных классах по G_{n+2} , $\varphi_{p_{n+1}-1, j_{n+2}}^{(n+1)}(x)$ постоянны на смежных классах по G_{n+3} , то $\varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x) \in V_{n+1}$, $\varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x) \in V_{n+1}$, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x) &= \sum_{h_{n+1} \in H_{n+1}} \left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2} d_{j_{n+1}, 0, h_{n+1}} \varphi_{j_{n+1}, 0}^{(n+1)}(x \dot{-} h_{n+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1} d_{p_{n+1}-1, j_{n+2}, h_{n+1}} \varphi_{p_{n+1}-1, j_{n+2}}^{(n+1)}(x \dot{-} h_{n+1}) \right), \\ \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x) &= \sum_{h_{n+1} \in H_{n+1}} \left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2} b_{j_{n+1}, 0, h_{n+1}} \varphi_{j_{n+1}, 0}^{(n+1)}(x \dot{-} h_{n+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1} b_{p_{n+1}-1, j_{n+2}, h_{n+1}} \varphi_{p_{n+1}-1, j_{n+2}}^{(n+1)}(x \dot{-} h_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{h_n \in H_n} \left(\sum_{j_n=0}^{p_n-2} C_{j_n,0,h_n} \left(\sum_{h_{n+1} \in H_{n+1}} \left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2} d_{j_{n+1},0,h_{n+1}} \varphi_{j_{n+1}}^{(n+1)}(x \dot{-} (h_n \dot{+} h_{n+1})) \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1} d_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h_{n+1}} \varphi_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}^{(n+1)}(x \dot{-} (h_n \dot{+} h_{n+1})) \right) + \\
 &\quad + \sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1} C_{p_n-1,j_{n+1},h_n} \left(\sum_{h_{n+1} \in H_{n+1}} \left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2} b_{j_{n+1},0,h_{n+1}} \varphi_{j_{n+1},0}^{(n+1)}(x \dot{-} (h_n \dot{+} h_{n+1})) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1} b_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h_{n+1}} \varphi_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}^{(n+1)}(x \dot{-} (h_n \dot{+} h_{n+1})) \right) \Big) = \\
 &= \sum_{h_n \in H_n} \sum_{h_{n+1} \in H_{n+1}} \left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2} \varphi_{j_{n+1},0}^{(n+1)}(x \dot{-} (h_{n+1} \dot{+} h_n)) \left(d_{j_{n+1},0,h_{n+1}} \sum_{j_n=0}^{p_n-2} C_{j_n,0,h_n} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + b_{j_{n+1},0} \sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1} C_{p_n-1,j_{n+1},h_n} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1} \varphi_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}^{(n+1)}(x \dot{-} (h_{n+1} \dot{+} h_n)) \left(d_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h_{n+1}} \sum_{j_n=0}^{p_n-2} C_{j_n,0,h_n} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + b_{p_{n+1}-1,j_{n+2}} \sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-1} C_{p_n-1,j_{n+1},h_n} \right) \right) = \\
 &= \sum_{h'_{n+1} \in H_{n+1}} \left(\sum_{j_{n+1}=0}^{p_{n+1}-2} C'_{j_{n+1},0,h'_{n+1}} \varphi_{j_{n+1},0}^{(n+1)}(x \dot{-} h'_{n+1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j_{n+2}=0}^{p_{n+2}-1} C'_{p_{n+1}-1,j_{n+2},h'_{n+1}} \varphi_{p_{n+1}-1,j_{n+2}}^{(n+1)}(x \dot{-} h'_{n+1}) \right) \in V_{n+1},
 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
 h_{n+1} \dot{+} h_n &= (a_{-N}g_{-N} \dot{+} \dots \dot{+} a_n g_n) \dot{+} (b_{-M}g_{-M} \dot{+} \dots \dot{+} b_{n-1}g_{n-1}) = \\
 &= \alpha_{-m}g_{-m} \dot{+} \dots \dot{+} \alpha_{n-1}g_{n-1} \dot{+} \alpha_n g_n,
 \end{aligned}$$

где $m = \max(N, M)$, и $h_{n+1} \dot{+} h_n \in H_{n+1}$.

A2. Выполнение аксиомы $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L_2(G)$ очевидно, так как множество всех ступенчатых функций всюду плотно в $L_2(G)$.

A3. Докажем справедливость аксиомы $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$.

Пусть

$$f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j. \tag{1}$$

Покажем, что $f = 0$. Выражение (1) означает, что $f \in V_j$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $f \in V_0$. Значит,

$$f(x) = \begin{cases} C_{i_0}^{(0)}, & \text{при } x \in G_1 \dot{+} i_0 g_0, \quad i_0 = \overline{0, p_0 - 2}, \\ C_{i_1}^{(0)}, & \text{при } x \in G_2 \dot{+} (p_0 - 1)g_0 \dot{+} i_1 g_1, \quad i_1 = \overline{0, p_1 - 1}, \end{cases}$$

т.е. $f(x) = C_0^{(0)}$ при $x \in G_1$.



Но $f \in V_{-1}$, значит,

$$f(x) = \begin{cases} C_{i_{-1}}^{(-1)}, & \text{при } x \in G_0 \dot{+} i_{-1} g_{-1}, \quad i_{-1} = \overline{0, p_{-1} - 2}, \\ C_{i_0}^{(-1)}, & \text{при } x \in G_1 \dot{+} (p_{-1} - 1) g_{-1} \dot{+} i_0 g_0, \quad i_0 = \overline{0, p_0 - 1} \end{cases}$$

и $f(x) = C_0^{(-1)}$ при $x \in G_0$.

Так как $G_1 \subset G_0$, то $f(x) = C_0^{(-1)} = C_0^{(0)}$ на G_0 .

Но и $f \in V_{-2}$. Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} C_{i_{-2}}^{(-2)}, & \text{при } x \in G_{-1} \dot{+} i_{-2} g_{-2}, \quad i_{-2} = \overline{0, p_{-2} - 2}, \\ C_{i_{-1}}^{(-2)}, & \text{при } x \in G_0 \dot{+} (p_{-2} - 1) g_{-2} \dot{+} i_{-1} g_{-1}, \quad i_{-1} = \overline{0, p_{-1} - 1} \end{cases}$$

и $f(x) = C_0^{(-2)}$ при $x \in G_{-1}$.

Снова так как $G_0 \subset G_{-1}$, то $f(x) = C_0^{(-2)} = C_0^{(-1)} = C_0^{(0)}$ на G_{-1} .

Продолжая эти рассуждения, получим $f(x) = C$ на G .

Но $f \in L_2(G)$. Значит,

$$\|f\|_2^2 = \int_G f^2(x) d\mu(x) = \int_G C^2 d\mu(x) = C^2 \mu(G) < \infty.$$

Следовательно, $C = 0$.

Таким образом, если $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, то $f \equiv 0$.

А4. Функции $\left(\varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x \dot{-} h_n), \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n) \right)_{\substack{h_n \in H_n, \\ j_n = \overline{0, p_n - 2}, \\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}}}$ образуют ортонормированный

базис V_n .

Достаточно доказать, что $\left(\varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x \dot{-} h_n), \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n) \right)_{\substack{h_n \in H_n, \\ j_n = \overline{0, p_n - 2}, \\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}}}$ образуют орто-

нормированную систему.

Заметим, что $\left(\varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x), \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x) \right)_{\substack{j_n = \overline{0, p_n - 2}, \\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1}}}$ образуют ортонормированную систе-

му, так как их носители не пересекаются и $\|\varphi_{j_n, 0}^{(n)}\| = 1$, $\|\varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}\| = 1$.

Система $\left(\varphi_{j_n, 0}^{(n)}(x \dot{-} h_n), \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)}(x \dot{-} h_n) \right)$ — есть ортонормированная система в V_n . Доказывается аналогично, так как при $h_n \neq h_m$ сдвиг осуществляется на различные непересекающиеся смежные классы по подгруппе G_{n+1} .

Таким образом, все аксиомы для подпространств V_n выполнены, следовательно, $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ образуют НКМА. \square

3. Всплесковые базисы

Основным свойством КМА является возможность на их основе строить базисы всплесков. Опишем конструкцию пространств всплесков.

Пусть $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — НКМА с масштабирующей последовательностью $\left(\varphi_{j_n, 0}^{(n)}, \varphi_{p_n-1, j_{n+1}}^{(n)} \right)$.

Обозначим W_n — ортогональное дополнение к V_n в пространстве V_{n+1} , т. е. $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ и $V_n \perp W_n$. Причем $W_n \perp W_m$, $n \neq m$, и $L_2(G) = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$.

Определим пространства W_n следующим образом. Сначала определим функции

$$\psi_{j_0, 0, h_0, \alpha_1}^{(0)}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_1} \cdot r_1^{\alpha_1} (x \dot{-} j_0 g_0 \dot{-} h_0) \mathbf{1}_{G_1 \dot{+} j_0 g_0 \dot{+} h_0}(x),$$

$$\alpha_1 = \overline{1, p_1 - 1}, \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 2}, \quad h_0 \in H_0,$$

$$\psi_{j_0, p_1-1, h_0, \alpha_2}^{(0)}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_2} \cdot r_2^{\alpha_2}(x \dot{-} (p_1 - 1)g_1 \dot{-} j_0g_0 \dot{-} h_0) \cdot \mathbf{1}_{G_2 \dot{+} (p_1-1)g_1 \dot{+} j_0g_0 \dot{+} h_0}(x),$$

$$\alpha_2 = \overline{1, p_2 - 1}, \quad j_0 = \overline{0, p_0 - 1}, \quad h_n \in H_n.$$

Здесь $r_i(x)$, $i = 1, 2$ — функции Радемахера [7].

Положим $W_0 = \overline{\text{span} \left\{ \psi_{j_0, 0, h_0, \alpha_1}^{(0)}(x), j_0 = \overline{0, p_0 - 2}, \psi_{j_0, p_1-1, h_0, \alpha_2}^{(0)}(x), j_0 = \overline{0, p_0 - 1} \right\}}$.

Затем

$$\psi_{j_1, 0, h_1, \alpha_2}^{(1)}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_2} \cdot r_2^{\alpha_2}(x \dot{-} j_1g_1 \dot{-} h_1) \mathbf{1}_{G_2 \dot{+} j_1g_1 \dot{+} h_1}(x),$$

$$\alpha_2 = \overline{1, p_2 - 1}, \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 2}, \quad h_1 \in H_1,$$

$$\psi_{j_1, p_2-1, h_1, \alpha_3}^{(1)}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_3} \cdot r_3^{\alpha_3}(x \dot{-} (p_2 - 1)g_2 \dot{-} j_1g_1 \dot{-} h_1) \cdot \mathbf{1}_{G_3 \dot{+} (p_2-1)g_2 \dot{+} j_1g_1 \dot{+} h_1}(x),$$

$$\alpha_3 = \overline{1, p_3 - 1}, \quad j_1 = \overline{0, p_1 - 1}, \quad h_1 \in H_1.$$

Положим $W_1 = \overline{\text{span} \left\{ \psi_{j_1, 0, h_1, \alpha_2}^{(1)}(x), j_1 = \overline{0, p_1 - 2}, \psi_{j_1, p_2-1, h_1, \alpha_3}^{(1)}(x) \right\}}$.

Продолжая этот процесс, на n -м шаге получим

$$\psi_{j_n, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}} \cdot r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x),$$

$$\alpha_{n+1} = \overline{1, p_{n+1} - 1}, \quad j_n = \overline{0, p_n - 2}, \quad h_n \in H_n,$$

$$\psi_{j_n, p_{n+1}-1, h_n, \alpha_{n+2}}^{(n)}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+2}} \cdot r_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(x \dot{-} (p_{n+1} - 1)g_{n+1} \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \times$$

$$\times \mathbf{1}_{G_{n+2} \dot{+} (p_{n+1}-1)g_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x),$$

$$\alpha_{n+2} = \overline{1, p_{n+2} - 1}, \quad j_n = \overline{0, p_n - 1}, \quad h_n \in H_n$$

и положим

$$W_n = \overline{\text{span} \left\{ \psi_{j_n, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x), j_n = \overline{0, p_n - 2}, \psi_{j_n, p_{n+1}-1, h_n, \alpha_{n+2}}^{(n)}(x), j_n = \overline{0, p_n - 1} \right\}}$$

и т. д. Получим последовательность подпространств $(W_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Теорема 2. *Функции $\left(\psi_{j_n, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x), j_n = \overline{0, p_n - 2}, \psi_{j_n, p_{n+1}-1, h_n, \alpha_{n+2}}^{(n)}(x), j_n = \overline{0, p_n - 1} \right)$, $h_n \in H_n$, $\alpha_{n+1} = \overline{1, p_{n+1} - 1}$, $\alpha_{n+2} = \overline{1, p_{n+2} - 1}$ образуют ортонормированную последовательность.*

Доказательство. Пусть сначала n — фиксированное.

1. Если $j_{n_1} \neq j_{n_2}$, то $\int_G \psi_{j_{n_1}, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x) \psi_{j_{n_2}, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x) d\mu(x) = 0$, так как носители этих функций не пересекаются.

2. Далее рассмотрим

$$\left(\psi_{j_n, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x), \psi_{j_n, 0, h_n, \alpha_{n+2}}^{(n)}(x) \right) =$$

$$= \mathbf{m}_{n+1} \int_G r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x) \bar{r}_{n+1}^{\alpha_{n+2}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x) d\mu(x) =$$

$$= \mathbf{m}_{n+1} \int_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \bar{r}_{n+1}^{\alpha_{n+1}+l}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) d\mu(x) =$$

$$= \mathbf{m}_{n+1} \int_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n} \bar{r}_{n+1}^l(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) d\mu(x) = 0,$$

в предположении для определенности $\alpha_{n+1} < \alpha_{n+2}$, т. е. $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + l$.



Легко проверить, что $\|\psi_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}^{(n)}(x)\|_2 = 1$, а значит, последовательность ортонормированна.

Аналогично

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{j_{n_1},p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}^{(n)}(x), \psi_{j_{n_2},p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}^{(n)}(x) \right) = 0, \\ & \left(\psi_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}^{(n)}(x), \psi_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}^{(n)}(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим $\left(\psi_{j_{n_1},0,h_n,\alpha_{n+1}}^{(n)}(x), \psi_{j_{n_2},p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}^{(n)}(x) \right) = 0$, если $j_{n_1} \neq j_{n_2}$, так сдвиг производится на различные смежные классы по подгруппе G_{n+1} . Если же $j_{n_1} = j_{n_2}$, то получим

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}^{(n)}(x), \psi_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}^{(n)}(x) \right) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{n+2}} \int_G r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x) \times \\ & \times \bar{r}_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(x \dot{-} (p_{n+1} - 1)g_{n+1} \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \mathbf{1}_{G_{n+2} \dot{+} (p_{n+1}-1)g_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x) d\mu(x) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{n+2}} \int_{G_{n+2} \dot{+} (p_{n+1}-1)g_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \times \\ & \times \bar{r}_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(x \dot{-} (p_{n+1} - 1)g_{n+1} \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) d\mu(x) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{n+2}} \int_{G_{n+2}} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(y \dot{+} (p_{n+1} - 1)g_{n+1}) \cdot \bar{r}_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(y) d\mu(y) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{n+2}} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(G_{n+2} \dot{+} (p_{n+1} - 1)g_{n+1}) \int_{G_{n+2}} \bar{r}_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(y) d\mu(y) = 0. \end{aligned}$$

4. Пусть теперь $n \neq N$ (для определенности $N > n$).

Убедимся, что $\left(\psi_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}^{(n)}(x), \psi_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}^{(N)}(x) \right) = 0$.

Если носители функций $\psi_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}^{(n)}(x)$ и $\psi_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}^{(N)}(x)$ не пересекаются, то равенство очевидно выполняется. Иначе $\text{supp } \psi_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}^{(N)}(x) \subset \text{supp } \psi_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}^{(n)}(x)$. И тогда

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}^{(n)}(x), \psi_{j_N,0,h_N,\alpha_{N+1}}^{(N)}(x) \right) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{N+1}} \int_G r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x) \times \\ & \times \bar{r}_{N+1}^{\alpha_{N+1}}(x \dot{-} j_N g_N \dot{-} h_N) \mathbf{1}_{G_{N+1} \dot{+} j_N g_N \dot{+} h_N}(x) d\mu(x) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{N+1}} \int_{G_{N+1} \dot{+} j_N g_N \dot{+} h_N} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \bar{r}_{N+1}^{\alpha_{N+1}}(x \dot{-} j_N g_N \dot{-} h_N) d\mu(x) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{N+1}} \int_{G_{N+1}} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(y \dot{+} j_N g_N \dot{+} h_N \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \bar{r}_{N+1}^{\alpha_{N+1}}(y) d\mu(y) = \\ & = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1} \mathbf{m}_{N+1}} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(G_{N+1} \dot{+} j_N g_N \dot{+} h_N \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \int_{G_{N+1}} \bar{r}_{N+1}^{\alpha_{N+1}}(y) d\mu(y) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\left(\psi_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}^{(n)}(x), \psi_{j_N,p_{N+1}-1,h_N,\alpha_{N+2}}^{(N)}(x) \right) = 0.$$



В ходе доказательства были использованы свойства функций Радемахера, доказанные в [7]. \square

Итак, функции $(\psi_{j_n, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x), \psi_{j_n, p_{n+1}-1, h_n, \alpha_{n+2}}^{(n)}(x))$ образуют ортонормированную систему, а значит, и ортонормированный базис в W_n . В силу $L_2(G) = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$ последовательность $(\psi_{j_n, 0, h_n, \alpha_{n+1}}^{(n)}(x), \psi_{j_n, p_{n+1}-1, h_n, \alpha_{n+2}}^{(n)}(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в $L_2(G)$.

Список литературы

1. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Математические заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4181>, EDN: IIRPIN
2. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M. p -Adic refinable functions and MRA-based wavelets // arXiv: 0711.2820v1 [math.GM].
3. Лукомский С. Ф. О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 14–19. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-1-14-19>, EDN: KAMPFR
4. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7580>, EDN: QBFWLJ
5. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. Москва : Физматлит, 2005. 616 с.
6. Комиссарова Н. Е. Нестационарный КМА на локально-компактных нульмерных группах с произвольной образующей последовательностью // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2019. Вып. 9. С. 7–16. EDN: HVPJRH
7. Lukomskii S. F. Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian group // East Journal on Approximation. 2009. Vol. 15, iss. 2. P. 219–231.

References

1. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, iss. 6, pp. 843–859. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434607110296>, EDN: LKELPN
2. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M. p -Adic refinable functions and MRA-based wavelets. *arXiv: 0711.2820v1 [math.GM]*.
3. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 14–19 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-1-14-19>, EDN: KAMPFR
4. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, iss. 5, pp. 669–661. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM2010v201n05ABEH004088>, EDN: OHNDUH
5. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Teoriya vspleskov* [Wavelet theory]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 616 p. (in Russian).
6. Komissarova N. Ye. Non-stationary multiresolution analysis on locally compact zero-dimensional groups with arbitrary generating sequence. *Research in Algebra, Number Theory, Functional Analysis and Related Problems*, 2019, iss. 9, pp. 7–16 (in Russian). EDN: HVPJRH
7. Lukomskii S. F. Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian group. *East Journal on Approximation*, 2009, vol. 15, iss. 2, pp. 219–231.

Поступила в редакцию / Received 15.02.2026

Принята к публикации / Accepted 24.02.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Article

Merging of Euler's method with trigonometric functions for accurate ray path in a two-gradient medium

T. A. Smaglichenko

Oil and Gas Institute Russian Academy of Sciences, 3 Gubkina St., Moscow 119333, Russia

Tatyana A. Smaglichenko, t.a.smaglichenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9786-6959>, SPIN: 8626-5251, AuthorID: 59811

Abstract. In this paper, an analytical solution is presented to provide an accurate trajectory of a ray propagating from the known position of the source to the receiver in a two-gradient medium. A system of two linear gradients connects two different layered media when the transition from one to the other occurs at some boundary. Within each medium, refractive indices determine the propagation of waves and, accordingly, the curved trajectories of rays. Different radii of curves make it difficult to track the ray as it propagates from the source to the receiver. Euler's method provides an exact solution for a one-gradient model. However, in the case of two gradients, the accurate solution cannot be obtained because of the underdetermined common system for ray curves and computational complexity. In this paper, a technique is described that combines Euler's method and trigonometric functions to derive direct formulas for calculating key angles responsible for the ray path in both gradient media. An exact solution overcomes the the drawbacks of iterative approaches, which are subject to computational errors. The basic formula developed for two-gradient models was tested using a small set of real data by transforming it into a particular case of a one-gradient model. The independence of the evaluations is confirmed by comparing the calculated parameters with those taken from an earlier publication. The derived formulas are essential for solving problems in oil and gas exploration, geothermal exploration, and other challenges related to energetics. The solution can be extended for acoustic, optical, and other tasks.

Keywords: ray tracing algorithm, two-gradient model, incidence angle, analytic solution

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 125021302095-2 "Fundamental basis of innovative, digital technologies for forecasting, prospecting, exploration and development of oil and gas resources (fundamental, prospecting, applied, economic and interdisciplinary research until 2030)"). We are grateful to Kristin Vogfjord (Icelandic Meteorological Office, Reykjavik) for useful discussion about gradient models. Also, we thank Martin Hensch for providing us with the data.

For citation: Smaglichenko T. A. Merging of Euler's method with trigonometric functions for accurate ray path in a two-gradient medium. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 175–186. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-175-186>, EDN: [EVOAWM](https://elibrary.ru/EVOAWM)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья

УДК 517.98

Объединение метода Эйлера и тригонометрических функций для определения точного пути луча в двухградиентной среде

Т. А. Смагличенко

Институт проблем нефти и газа Российской академии наук, Россия, 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 3

Смагличенко Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, t.a.smaglichenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9786-6959>, SPIN: 8626-5251, AuthorID: 59811

Аннотация. В данной работе представлено аналитическое решение, позволяющее получить точную траекторию луча, распространяющегося от известного положения источника к приёмнику в двухградиентной среде. Система из двух линейных градиентов соединяет две различные слоистые среды, переход от одной в другую происходит на некоторой границе. В каждой среде показатели преломления определяют распространение волн и, соответственно, искривлённые пути лучей. Различные радиусы кривых затрудняют отслеживание луча при его распространении от источника до приёмника. Метод Эйлера даёт точное решение для модели, характеризующейся одним градиентом. Однако в случае двух градиентов точное решение невозможно построить из-за недоопределённости общей системы кривых лучей и вычислительной сложности. В статье описывается метод, объединяющий метод Эйлера и тригонометрические функции для вывода прямых формул при расчете ключевых углов, отвечающих за траекторию луча в обеих градиентных средах. Точное решение позволяет преодолеть недостаток итерационного подхода, связанный с вычислительной погрешностью. Базовая формула, разработанная для двухградиентных моделей, была протестирована на небольшом наборе реальных данных путём её преобразования в частный случай одноградиентной модели. Независимость оценок подтверждена сравнением расчётных параметров с параметрами, взятыми из более ранней публикации. Полученные формулы имеют важное значение для решения проблем при разведке месторождений нефти и газа, геотермальных ресурсов и других, связанных с энергетикой. Решение может быть обобщено на акустические, оптические и другие задачи.

Ключевые слова: алгоритм трассировки лучей, двухградиентная модель, угол падения, аналитическое решение

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 125021302095-2 «Фундаментальный базис инновационных, цифровых технологий прогноза, поиска, разведки и освоения нефтегазовых ресурсов (фундаментальные, поисковые, прикладные, экономические и междисциплинарные исследования до 2030 года)»). Авторы благодарят Кристин Фогфьорд (Исландское метеорологическое бюро, Рейкьявик) за полезное обсуждение градиентных моделей и Мартина Хенша за предоставленные данные.

Для цитирования: *Smaglichenko T. A. Merging of Euler's method with trigonometric functions for accurate ray path in a two-gradient medium [Смагличенко Т. А. Объединение метода Эйлера и тригонометрических функций для определения точного пути луча в двухградиентной среде] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 175–186. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-175-186>, EDN: EVOAWM*
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Gradient models are widely used in energy production areas. One example is the formalization of the process of water injection into wells at large oil fields. The process of water injection helps to



extract oil from the depths to the surface. The amount of water injected is related to the amount of oil produced through a linear relationship that includes a gradient, the numerical value of which characterizes the reservoir pressure [1]. The gradient model considered in this paper is also based on linear dependence. It is determined by seismic velocity growth with depth and changing gradients. Thus, constructing optimal gradient models is part of production processes.

It is essential to recognize that the complexity of geological structures extends beyond one gradient. Oil companies report difficulties in extracting oil and gas from deep-seated traps [2]. Moreover, the lack of knowledge of geological structures can lead to accidents and equipment failure [3]. Such a case occurred during the drilling of geothermal wells in Iceland. At a certain boundary, the velocity gradient was altered under the influence of hot magma. The equipment failed. This event slowed down the energy extraction process for several years.

The best minimal model for a one-gradient medium can be found by applying the method developed by the authors of the article [4]. The technique is effective for detecting gas areas. Local earthquake data from neighboring areas of the Icelandic region (Subarctic zone) were used. The result revealed that the P-wave velocity gradient for an area where up to 550 tons of carbon dioxide are extracted has a greater numerical value than the values of other areas. The gradient increase began at a depth of 2.5 km and increased to 6.0 km [5]. The authors (participants of the project RANNIS ID-152432-051) discussed the issue of the linear gradient distribution at a meeting with representatives of the Icelandic Meteorological Office (IMO). According to their information, in many areas of Iceland, the second velocity gradient represents a change in velocity at a depth of 3.0 km. This has led to the need to consider the two-gradient model.

Another motivation for such a model is the existence of the boundary of velocity change in the Arctic regions on Franz Josef Land [6]. The depth at which properties of geological material changed was determined based on knowledge of the output angle of a seismic ray at the surface. This angle was calculated using readings from seismographs and galvanometers tuned to different wavelengths. The instrumental data were stored at the expeditionary station named "Arkticheskaya" (the Research Institute of Arctic Geology) and the station "Kheys" (Krenkel Polar Station, Kheysa Island) located on Alexandra Land Island. The coordinates of the epicenters were taken from the bulletins of the USSR seismic station network. Using these data, the author of the work [7] constructed experimental curves and concluded that the wave changes its direction at a depth of 2.5–3.0 km. Thus, it was assumed that the jump in velocity occurs in this depth range. To determine the formula that establishes the relation between the output angle and "apparent" velocity at different depths, the author of [8] developed a differentiated method based on two formulas of Benndorf and Wiechert – Chibisov.

Thus, the output angle, velocity, and depth are analytically connected parameters. From the history of seismology [6–8], we can note that instrumental observations of the output angles permitted the construction of velocity models. Nowadays, knowledge about the velocity distribution with depth at different areas is stable. Another task becomes relevant. Instead of expensive equipment, mathematical modeling should be used to calculate the incidence angle of a seismic ray at the surface in a complex velocity gradient medium. Note that in exploration methods, the incidence angle is the central parameter determining the residual between theoretical and experimental values. Creating models of geological structures helps to develop digital twins that provide energy savings in the manufacturing process. According to oil and gas companies operating in the Arctic, the main reserves are confined to the boundary depths (about 3.0 km) of the Achimov and Jurassic deposits [2]. Other examples are described above. Thus, the properties of rocks change sharply at a certain boundary. The different structures of geological material may correspond to two gradients of seismic velocity.

A medium with a velocity discontinuity between two linear gradients is referred to as a two-gradient model. Different parameters characterize each linear gradient. Curved ray trajectories represent a system of two circles with centers at various points of the medium. Knowledge of the incidence angle at the receiver determine the positions of ray paths under the condition of an



accurate fit of the ray to the receiver when the coordinates of the source and receiver are known. Therefore, the goal is to develop an analytical solution for determining a formula to calculate the incidence angle on the Earth's surface and other key angles in a medium with two linear gradients. Note that the boundary, at which a velocity discontinuity occurs, is assumed to be given.

Other approaches to constructing ray paths are based on the "shooting" method. The ray is emitted from the source, refracted at specified boundary surfaces, and reaches the station. One such procedure is the bending (pseudo-bending) method, in which curved rays are emitted from the source to hit the receiver. However, the solution is unstable [9].

Therefore, the author of the work [10] developed a parameterized method of "shooting" for the Cartesian coordinate system, which assumes that direct rays come from the source. The increase in the accuracy of the entrance at the receiver was achieved because the approximate calculations of the method [9] were replaced in [10] by integral analytical solutions. In [11] and [12], the convergence control was developed. Owing to this approach, the degree of convergence was improved by 10%. The authors of [13] revised the method by using spherical coordinates.

The focus of this paper is on accurately determining the ray path, specifically the method that determines the precise path of the ray from the given source to the receiver. For a one-gradient medium, the solution of the system of differential Euler equations provides the calculation of coordinates for the ray's point if the incident angle is known [14]. The solution cannot be used when rays pass through the given boundary of the gradient change.

The authors of [15] constructed the solution for a simple model consisting of two basic layers. The first is located from the surface to the upper bound of the known depth. A constant velocity of wave propagation characterizes this layer. The linear gradient of velocity describes the second layer. A variational algorithm that solves the Cauchy problem and applies the iterative Runge–Kutta technique was used to determine the solution. However, there is no ray-tracing solution for two-gradient media.

The issue is that the solution for the common ray path is not obtained by using Euler's formula for both the medium in the upper layer and the medium below the boundary. The tangents to the ray curve are distributed like a fan, and there are multiple refractions in the limits of each gradient layer. To find the connection between two different parts of the model, one can use only the tangent to the ray that falls on the boundary at the point where the parameters of the first-gradient are changed when the ray accurately passes from the source to the receiver.

In the given paper, analytical expressions for the tracing angles have been obtained based on the proposed approach. Euler's method is combined with the algorithm for deriving trigonometric functions that assign the angles' values for exact ray trajectories in a two-gradient medium.

1. Statement of the problem

Suppose it is known from a priori information about the area being studied that the velocity undergoes a discontinuity at a certain depth. At the same time, there are assumptions about the velocity parameters, which describe the media above and below the boundary depth z_{bd} . Let a linear relationship characterize the medium of the first-gradient of velocity as $V(z) = V_0 + V_1z$, while the medium of the second gradient can be described as $V(z) = \tilde{V}_0 + \tilde{V}_1z$, where z stands for depth, V_0 and V_1 are the velocity value at the surface and the gradient value above the boundary depth, \tilde{V}_0 and \tilde{V}_1 are parameters for the second part of the medium. Figure 1, *a* demonstrates an image of two velocity gradients. The first-gradient is presented by various gray bars, while dark gray bars correspond to the second gradient. A bold line denotes the boundary between two gradients. Figure 1, *b* shows the velocity profile with a linear dependence of velocity on depth. For any depth, represented by a horizontal line in Fig. 1, *a*, the velocity is calculated using formulas in Fig. 1, *b*.

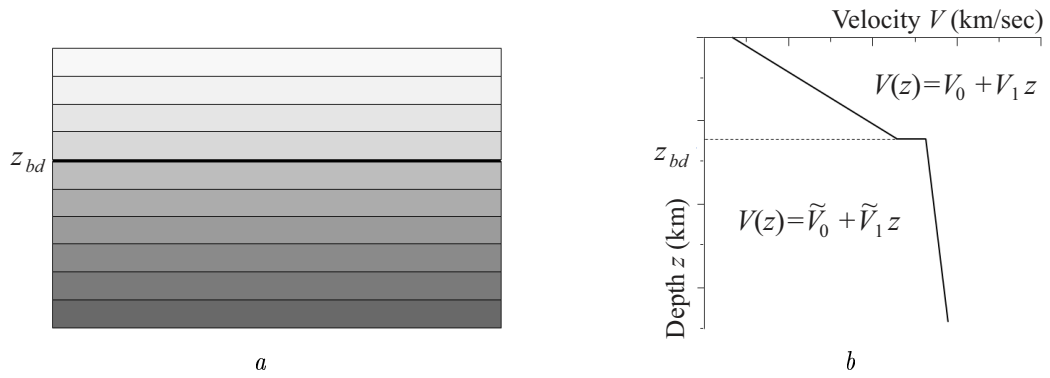


Fig. 1. Two-gradient model: *a* shows images of the gradients; *b* shows linear velocity functions

Figure 2 shows a ray path in the ray plane (w, z) , where $w = \frac{x - \bar{x}}{\cos \varphi}$, \bar{x} is the Cartesian coordinate of the receiver, and φ is the azimuth angle. A ray travels from the source (denoted by the closed circle) in the medium above the boundary depth. Then its trace continues in the medium of the second gradient. Finally, it reaches the receiver (denoted by the triangle) in the medium of the first-gradient.

Figure 3 illustrates an error if Snell's law is used for the ray tangents of the first-gradient medium refracted at the boundary between two media. In that case, the solution can be constructed; however, the path from the source to the receiver will not be exact.

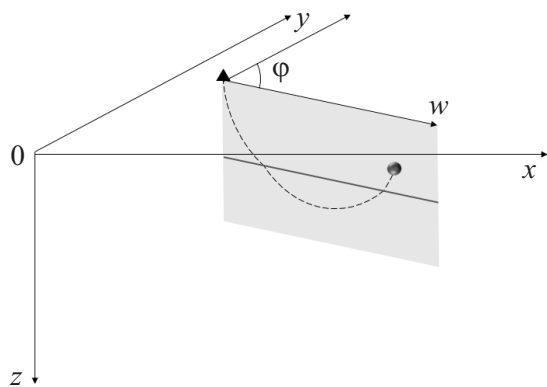


Fig. 2. The ray plane (w, z) within a Cartesian plane. Angle φ is the angle between the plane and the direction $0Y$, which is normally the north direction. A bold line denotes the gradient change

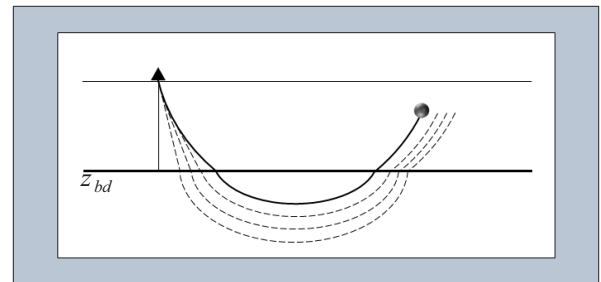


Fig. 3. The solution error occurs if Euler's method is combined with Snell's law for the ray tangents of the first-gradient medium

If the ray tangent refracts at the point, for which the ray path is accurate, then the number of unknown angle parameters will be greater than the number of equations. Therefore, in this paper, the algorithm has been developed to overcome this uncertainty.

Figure 4 shows the key angles that determine the ray trace from the source to the receiver. Two coordinate systems were used. The first is for the ray points in the medium above the boundary depth. The origin of this system coincides with the receiver point. The second system is in the medium below the boundary depth. The origin corresponds to the transition point of the gradient change for the exact ray path.

The problem is formulated as follows: Derive the formula to calculate α an incidence angle on the receiver through the parameters V_0 and V_1 , \tilde{V}_0 and \tilde{V}_1 , and the boundary depth z_{bd} .

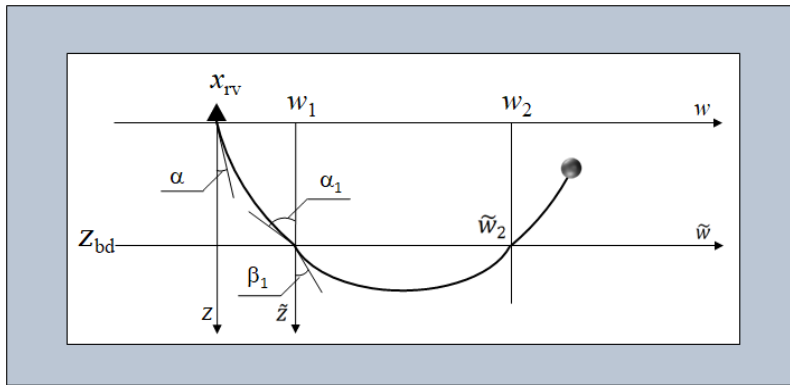


Fig. 4. A plane of the ray: α is the incidence angle of ray on the receiver, α_1 is the angle of incidence on the depth z_{bd} that is a boundary between two gradients, β_1 is the refraction angle, which determines the wave propagation in the medium of the second gradient, (w_1, z_{bd}) and (w_2, z_{bd}) are points of intersection of the ray with the boundary depth, when the coordinate system is used for the medium of the first-gradient; $(\tilde{w}_2, 0.0)$ is a point in the coordinate system of the medium of the second gradient

2. Derivation of the key angles formulas for a two-gradient model

According to [14], the application of Euler’s method to the system of differentiated equations determines the trajectory of a seismic ray in a one-gradient medium:

$$y - \bar{y} = (x - \bar{x}) \tan \varphi, \tag{1}$$

$$(V_0 + V_1 z)^2 + \frac{V_1^2}{\cos^2 \varphi} \left[x - \bar{x} - \frac{(V_0 + V_1 \bar{z}) \cos \varphi}{V_1 \tan \alpha} \right]^2 = \frac{(V_0 + V_1 \bar{z})^2}{\sin^2 \alpha}. \tag{2}$$

The ray travels from the point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ to (x, y, z) . In the following sections, we explain how equations (1) and (2) are applied and define the method to obtain the formula for the incidence angle on the receiver in a two-gradient medium.

2.1. Relationship between the incidence angle on the receiver and the incidence angle to the boundary depth

The formula to derive the angle α in the medium of the first-gradient can be obtained using equation (2) for a portion of the ray passing from point $(\bar{x}, \bar{z}) = (x_{rv}, z_{rv})$ to $(x, z) = (x_1, z_{bd})$, where (x_{rv}, z_{rv}) is the receiver coordinates, and x_1 is coordinate corresponding w_1 on Fig. 2:

$$(V_0 + V_1 z_{bd})^2 + \frac{V_1^2}{\cos^2 \varphi} \left[x_1 - x_{rv} - \frac{(V_0 + V_1 z_{rv}) \cos \varphi}{V_1 \tan \alpha} \right]^2 = \frac{(V_0 + V_1 z_{rv})^2}{\sin^2 \alpha}.$$

Let us perform operations inside the square brackets first. Since $z_{rv} = 0$, we have

$$(V_0 + V_1 z_{bd})^2 + \frac{V_1^2}{\cos^2 \varphi} \left[(x_1 - x_{rv})^2 - 2 \frac{(x_1 - x_{rv}) V_0 \cos \varphi}{V_1 \tan \alpha} + \frac{V_0^2 \cos^2 \varphi}{V_1^2 \tan^2 \alpha} \right] = \frac{V_0^2}{\sin^2 \alpha}.$$

After multiplying, simplifying, and using trigonometric identities, we get

$$\begin{aligned} (V_0 + V_1 z_{bd})^2 + V_1^2 w_1^2 - 2V_0 V_1 w_1 \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{V_0^2}{\tan^2 \alpha} &= \frac{V_0^2}{\sin^2 \alpha}, \\ (V_0 + V_1 z_{bd})^2 + V_1^2 w_1^2 - \frac{2V_0 V_1 w_1}{\tan \alpha} &= \frac{V_0^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{V_0^2}{\tan^2 \alpha} = V_0^2. \end{aligned} \tag{3}$$



From equation (3), we obtain

$$\tan \alpha = \frac{2V_0V_1w_1}{(V_0 + V_1z_{bd})^2 + V_1^2w_1^2 - V_0^2}. \quad (4)$$

The angle α_1 can be determined by applying equation (2) to the inverse trajectory of a ray from point $(\bar{x}, \bar{z}) = (x_1, z_{bd})$ to $(x, z) = (x_{rv}, z_{rv})$:

$$\begin{aligned} (V_0 + V_1z_{rv})^2 + \frac{V_1^2}{\cos^2\varphi} \left[x_{rv} - x_1 - \frac{(V_0 + V_1z_{bd}) \cos \varphi}{V_1 \tan \alpha_1} \right]^2 &= \frac{(V_0 + V_1z_{bd})^2}{\sin^2\alpha_1}, \\ V_0^2 + \frac{V_1^2}{\cos^2\varphi} \left[(x_{rv} - x_1)^2 - 2 \frac{(x_{rv} - x_1)(V_0 + V_1z_{bd}) \cos \varphi}{V_1 \tan \alpha_1} + \frac{(V_0 + V_1z_{bd})^2 \cos^2\varphi}{V_1^2 \tan^2\alpha_1} \right] &= \\ &= \frac{(V_0 + V_1z_{bd})^2}{\sin^2\alpha_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

The equation (5) is transformed using steps similar to obtaining equation (4). Finally, we have the following formula:

$$\tan \alpha_1 = \frac{2(V_0 + V_1z_{bd})V_1w_1}{(V_0 + V_1z_{bd})^2 - V_1^2w_1^2 - V_0^2}. \quad (6)$$

Next, we divide equation (4) by equation (6). After reductions and transformations, we get

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_1} = \frac{V_0}{(V_0 + V_1z_{bd})} \left[1 - \frac{2V_1^2w_1^2}{(V_0 + V_1z_{bd})^2 + V_1^2w_1^2 - V_0^2} \right]. \quad (7)$$

From formula (7), we have a formula for determining $\cot^2\alpha_1$:

$$\cot^2\alpha_1 = \frac{V_0^2}{(V_0 + V_1z_{bd})^2} \left[1 - \frac{2V_1^2w_1^2}{(V_0 + V_1z_{bd})^2 + V_1^2w_1^2 - V_0^2} \right]^2 \frac{1}{\tan^2\alpha}. \quad (8)$$

2.2. Relationship between the angle of incidence on the boundary depth and the refraction angle

According to Snell's law for two media, the following equation links the incidence angle α_1 and refraction angle β_1 via the velocity parameters:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{(V_0 + V_1z_{bd})}{(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_1z_{bd})}. \quad (9)$$

From equation (9), we obtain

$$\sin^2\beta_1 = \sin^2\alpha_1 \frac{(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_1z_{bd})^2}{(V_0 + V_1z_{bd})^2}. \quad (10)$$

2.3. Obtaining the formula for the refraction angle in the medium of the second gradient

Let us set down a coordinate system with the origin at the point where the first-gradient is changed by the second for the ray path. Let us consider the medium of the second gradient and determine the formula for $\tan \beta_1$ in the plane (\tilde{w}, \tilde{z}) .

Using equation (2) for the portion of a ray going from point $(\bar{x}, \bar{z}) = (x_1, z_{bd})$ that has coordinates (0.0, 0.0) in a new system into the point $(x, z) = (x_2, z_{bd})$ that has coordinates $(\tilde{x}, 0.0)$ we obtain

$$\tilde{V}_0^2 + \frac{\tilde{V}_1^2}{\cos^2\varphi} \left[\tilde{x}_2 - \frac{\tilde{V}_0 \cos \varphi}{\tilde{V}_1 \tan \beta_1} \right]^2 = \frac{\tilde{V}_0^2}{\sin^2\beta_1}. \quad (11)$$

Note that

$$\frac{\tilde{x}_2^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{(\tilde{x}_2 - \bar{x})^2}{\cos^2 \varphi} = \tilde{w}_2^2.$$

Then equation (11) can be written as

$$\tilde{V}_0^2 + \tilde{V}_1^2 \tilde{w}_2^2 - 2\tilde{w}_2 \tilde{V}_1 \tilde{V}_0 \frac{1}{\tan \beta_1} + \frac{\tilde{V}_0^2}{\tan^2 \beta_1} = \frac{\tilde{V}_0^2}{\sin^2 \beta_1}. \tag{12}$$

After transforming equation (12), we obtain the formula for $\tan \beta_1$:

$$\tan \beta_1 = \frac{2\tilde{V}_0}{\tilde{V}_1 \tilde{w}_2}. \tag{13}$$

Let us apply the trigonometric equation

$$1 + \cot^2 \beta_1 = \frac{1}{\sin^2 \beta_1}. \tag{14}$$

Then from equations (13) and (14) we get

$$\sin^2 \beta_1 = \frac{4\tilde{V}_0^2}{4\tilde{V}_0^2 + \tilde{V}_1^2 \tilde{w}_2^2}. \tag{15}$$

2.4. The formula for the angle of incidence on the boundary depth via the parameters of two gradients

Let us equate the right-hand sides of the expressions obtained for $\sin^2 \beta_1$, which are represented by equations (10) and (15). This technique will allow us to determine the angle α_1 through the parameters describing two gradients:

$$\sin^2 \alpha_1 = \frac{4(V_0 + V_1 z_{bd})^2 \tilde{V}_0^2}{(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_1 z_{bd})^2 (4\tilde{V}_0^2 + \tilde{V}_1^2 \tilde{w}_2^2)}. \tag{16}$$

2.5. The formula to calculate the angle of incidence on the receiver

Let us apply the trigonometric equation (14) for the angle α_1 . We will use equations (8) and (16). Substituting the obtained expressions for $\cot^2 \alpha_1$ and $\sin^2 \alpha_1$ we obtain

$$1 + \frac{V_0^2}{(V_0 + V_1 z_{bd})^2} \left[1 - \frac{2V_1^2 w_1^2}{(V_0 + V_1 z_{bd})^2 - V_0^2 + V_1^2 w_1^2} \right]^2 \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \left(1 + \frac{\tilde{V}_1^2 \tilde{w}_2^2}{4\tilde{V}_0^2} \right) \frac{(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_1 z_{bd})^2}{(V_0 + V_1 z_{bd})^2}. \tag{17}$$

After some transformation of equation (17), we determine the incidence angle at the receiver α as its trigonometric function $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{S_1}{S_2}, \tag{18}$$

where

$$S_1 = \frac{V_0}{(V_0 + V_1 z_{bd})} \left[1 - \frac{2V_1^2 w_1^2}{(V_0 + V_1 z_{bd})^2 - V_0^2 + V_1^2 w_1^2} \right]$$

and

$$S_2 = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{\tilde{V}_1^2 \tilde{w}_2^2}{4\tilde{V}_0^2} \right) \frac{(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_1 z_{bd})^2}{(V_0 + V_1 z_{bd})^2} - 1 \right]}. \tag{19}$$



3. Testing of the basic equation by application to a small set of real data

The reliability of the basic constructed equation (18) is confirmed by performing the following expertise. Let us use the result of ray tracing for a one-gradient model that was published a few years ago in [16]. The dataset contains local seismic events recorded in 2001 by the South Iceland Lowland (SIL) seismic network. The Icelandic Meteorological Office provided the data within the framework of a joint research project supported by the RANNIS fund ID-152432-051. Table 1 presents the parameters of the five rays, which involve the permanent stations (receivers) names, coordinates of the point of the ray maximal descent (w_{\max}, z_{\max}), the incidence angle to the receiver θ , the local earthquake depth, the epicentral distance is the distance from the epicenter (projection of the earthquake source on the Earth's surface) to the station [16].

Table 1

Ray path parameters calculated for the seismic data sample (after [16])

Station name	z_{\max} , km	w_{\max} , km	θ (radians)	Depth, km	Epicentral distance, km
Hau	12.4865770	17.2813225	0.319398791	4.4	32.4136772
Hei	17.1106834	22.0989037	0.253079265	3.7	42.8926048
Hau	11.3059006	16.0329971	0.342429072	1.9	31.2556458
Kro	14.6913977	19.5900269	0.283867538	1.5	38.6784210
Kro	15.3930874	20.3199387	0.274182767	2.9	39.5899811

Figure 5 shows the ray traces in the one plane. The parameters were calculated for a one-gradient model that is the SIL model, for which $V_0 = 4.926$, $V_1 = 0.479$ [4, 16].

Let us check the formula (18) by transforming it to the formula for a one-gradient model. To do this, we substitute the parameters of the first-gradient V_0 and V_1 , instead of the parameters of the second gradient \tilde{V}_0 and \tilde{V}_1 . Then, after the transformation of equation (19), we get the following equation to calculate the incidence angle to the receiver α as its trigonometric function $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{t_1}{t_2}, \tag{20}$$

where $t_1 = S_1$, $t_2 = \frac{V_1 \tilde{w}_2}{2V_0}$.

Note that in Table 1, the incidence angle to the receiver, denoted by θ after research [16], while in the given paper the same angle is denoted as α .

Let us assume that the boundary depth is equal to the source depth: $z_{bd} = z_{source}$ (Fig. 6). Then $\tilde{w}_2 = w_2 - w_1$, where w_2 is the epicentral distance, and $w_1 = 2w_{\max} - w_2$. Using the data from Table 1 and substituting them into equation (20), we calculate the incidence angle for each testing ray.

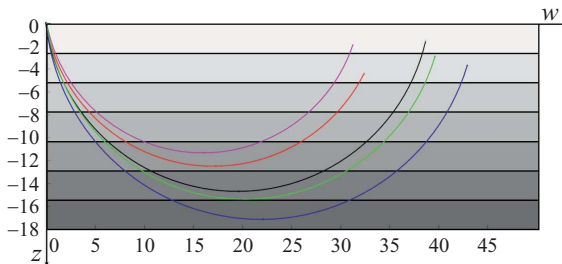


Fig. 5. Ray trajectories in the plane (w, z) (after [16]) (color online)

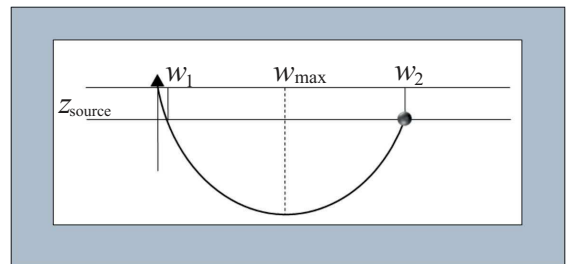


Fig. 6. Illustration of the testing data



Table 2

Illustration of the modeling error for each ray from Table 1

Station name	Depth, km	Error (radians)
Hau	4.4	0.005754648
Hei	3.7	0.004890067
Hau	1.9	0.061486027
Kro	1.5	0.063026168
Kro	2.9	0.023682692

Table 2 shows the difference between the values of the incident angle for the one-gradient model using only the formula of Euler’s method (after [16]) and the values calculated for the same parameters of the one-gradient model applying the technique merging Euler’s method with trigonometric formulas by reducing the derived two-gradient model to a one-gradient case. One can see that the modeling error is within the limits of accuracy. Thus, the correctness of the formula (18) has been verified for each ray.

4. Method for determining a formula to calculate the angle of incidence at the receiver

The method to find the formula for the angle of incidence on the receiver in a two-gradient medium includes the mathematical calculations (see Subsections 2.1–2.5), considering the physics of wave propagation. In the first-gradient medium, equation (7) is derived linking the angle of incidence on the receiver and the angle of incidence on the boundary of two gradients. For this, the property of ray reversibility is used. The tangent function is determined for each angle through the parameters describing the velocity growth with depth in the first-gradient medium. The relationship between the tangents of the angles is established by dividing one equation by another.

According to Snell’s law, we obtain a formula for the known trigonometric relationship between the sine function of the angle of incidence at the boundary depth and the sine function of the angle of refraction through the parameters of the first and second gradients. The tangent of the angle of refraction is determined through the parameters of the medium of the second gradient by an algorithm that is the same as for the angles in the medium of the first-gradient (Subsection 2.3). Applying the known trigonometric equation relating the sine function and the inverse tangent function, we can obtain a formula for calculating the square of the sine of the refraction angle. Thus, the square sine of the refraction angle is defined twice through Snell’s law and by utilizing a trigonometric equation. Equating the corresponding parts, we determine a formula for calculating the square sine of the angle of incidence on the depth, which is the boundary between two gradients. The parameters of both the first and second gradients are involved in this formula.

Again, applying the trigonometric equation relating the sine function and the inverse tangent function for the angle of incidence at the boundary depth, we derive a formula for determining the square tangent of the angle of incidence on the receiver.

Thus, the strategy of the method is as follows. It is necessary to find the “crossing” angle, which will be determined twice. From one direction, it will be related to the angle of incidence on the receiver for the ray path in the medium of the first-gradient, and from the other direction, it will be expressed through the parameters describing the medium of the second gradient. A simple substitution of the formula obtained for the “crossing” angle from the second direction into the expression for the first direction will give the desired formula for the angle of incidence on the receiver.

The equation of the basic angle of the ray path was tested through the transition from parameters for the two-gradient model to the parameters for the one-gradient model. An independent validation was performed by examining the difference between angle values known for a set of experimental data (published a few years ago in [16]) and the basic angle values calculated by applying the derived equation. The correctness of the result can be verified by direct substitution of the numerical data given in Table 1 (after [16]) into the formula (20).



Note that the basic formula (18) we derived for the incident angle on the receiver contains arithmetic operations and the trigonometric square function. This can lead to insignificant computing errors because numbers participate in calculations with rounding-off errors. It is known that for iterative approaches, including the Runge–Kutta method, this error can be critical and affect the correctness of the solution.

5. Discussion of application fields of the obtained solution

In this paper, we have obtained formulas for determining key angles through the parameters of the first and second gradients in a two-gradient model: the angle of incidence on the depth of the boundary between gradients (equation (16)), the angle of refraction (equation (15)), and finally the angle of incidence at the receiver (equation (18)). These important angles define the ray trace. The angle of incidence on the receiver is the main parameter for calculating the theoretical travel time. In seismic tomography, the efficiency of solutions to the direct and inverse problems depends on the difference between the theoretical travel time values and experimental observations.

Potential areas for the utilization of formulas constructed in the paper are beyond the scope of seismic tomography. Possible applications are in acoustic, optics, meteorology, astronomy, etc.

Let us consider the ray acoustic tasks, in which the sound velocity is not constant, and the rays are curved. For instance, the author [17] analyzed the sound propagation in the ocean. The model was considered for the medium with the sound velocity varying with depth. The ray angle was used to find a formula for the ray's radius of curvature at a defined depth. The main parameter of ray tracing is the initial ray angle at the source. The important contribution of the author [17] is the technique for underwater acoustic propagation over a layered bottom with a thin fluid sedimentary layer under the condition of moderately range-varying bathymetry.

Another application can be performed for light propagation theory, when the curved rays arise under the influence of gravity centers (lenses, galaxy) in the atmosphere. Coordinates of the ray path can be found by solving the system of differential equations with Euler's and Runge–Kutta iterative methods, not analytically [18]. The increase in the distance between the gravity center and the light particles leads to a decrease in the attenuation function and a change in the radii of the curved rays.

The author [18] discussed the intersection of curved light rays with massive gravity objects (black holes). The effects of shading can be calculated. However, shading models take into account the angle of incidence. A problem arises with the determination of this angle. Note that our research showed the incidence angle of the ray at any point can be calculated using the property of a ray in reverse.

Conclusion

The paper presents the technology established for determining the precise path of a ray in a two-gradient medium, given the starting positions of the receivers and sources, under the boundary condition of a gradient change at a certain depth. The equation derived for the basic angle in the two-gradient model can be applied to a specific case of a one-gradient model. The method involves a sequence of steps to solve the underdeterminacy problem in the ray tracing. It was found that the number of unknown parameters can be decreased if the property of the ray inverse trajectory is used. Numerous tests have shown that the modeling error is significantly reduced by using the coordinate systems, each of which is connected to the medium of one separate gradient. Trigonometric manipulations of Euler's method solutions for the different systems provide the formulas to calculate an accurate ray path in a two-gradient medium.

References

1. Minkhanov I. F., Dolgikh S. A., Varfolomeev M. A. *Razrabotka neftnykh i gazovykh mestorozhdenij* [Development of oil and gas fields]. Kazan, KFU Publ., 2019. 96 p. (in Russian).



2. Arctic LNG 2 (liquefied natural gas) projects of the NOVATEK company. Available at: <https://www.novatek.ru/en/about/lng-projects/arctic-lng/> (accessed September 30, 2025).
3. Smaglichenko T., Smaglichenko A., Sayankina M. Risk of deep drilling: Seismic velocities estimate for Skjalfandi Bay, Iceland based on selected coordinate descent. *17th International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD)*, Moscow, Russian Federation, September 24–26, 2024, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/MLSD61779.2024.10739448>
4. Smaglichenko T., Bjarnason I., Smaglichenko A., Jacoby W. Method to find the minimum 1D linear gradient model for seismic tomography. *Fundamenta Informaticae*, 2016, vol. 146, iss. 2, pp. 211–217. DOI: <https://doi.org/10.3233/FI-2016-1382>
5. Smaglichenko T. A., Smaglichenko A. V., Zelinka I., Chigarev B. Seismic attractor can assist in finding of geothermal area? *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, 2018, vol. 33, iss. 5, pp. 503–512. DOI: <https://doi.org/10.1080/17445760.2017.1419349>
6. Avetisov G. P. Output angles of longitudinal seismic waves according to observations at Franz Josef Land stations. *Geofizicheskie metody issledovaniy v Arktike* [Geophysical Methods of Exploration in the Arctic], 1974, vol. 9, pp. 96–101 (in Russian).
7. Malinovskaya L. N. On the issue of calculating theoretical seismograms of interference oscillations. *Voprosy dinamicheskoy teorii rasprostraneniya seismicheskikh voln* [Questions of the dynamic theory of seismic wave propagation]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1959, vol. 3, pp. 356–378 (in Russian).
8. Savarensky E. F. *Ob uglakh izlucheniya seismicheskoy radiatsii i nekotorykh svyazannykh s etim voprosom* [On the angles of seismic radiation emission and some related issues]. Proceedings of the Geophysical Institute of the USSR Academy of Sciences, vol. 15 (142). Moscow, USSR Academy of Sciences Publ., 1952. 111 p. (in Russian).
9. Um J., Thurber C. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1987, vol. 77, iss. 3, pp. 972–986. DOI: <https://doi.org/10.1785/BSSA0770030972>
10. Sun Y. Ray tracing in 3-D media by parametrized shooting. *Geophysical Journal International*, 1993, vol. 114, iss. 1, pp. 145–155. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1993.tb01474.x>
11. Zhao D., Hasegawa A. P-wave tomographic imaging of the crust and upper mantle beneath the Japan islands. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1993, vol. 98, iss. B3, pp. 4333–4353. DOI: <https://doi.org/10.1029/92JB02295>
12. Gudmundsson Ó., Sambridge M. A regionalized upper mantle (RUM) seismic model. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1998, vol. 103, iss. B4, pp. 7121–7136. DOI: <https://doi.org/10.1029/97JB02488>
13. Sekine S., Koketsu K. Parametrized shooting of seismic rays in a spherical earth with discontinuities. *Geophysical Journal International*, 2001, vol. 146, iss. 2, pp. 497–503. DOI: <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2001.01472.x>
14. Antonova L. N., Matveeva N. N. Kinematics of waves in three-dimensional block-gradient media. *Voprosy dinamicheskoy teorii rasprostraneniya seismicheskikh voln* [Questions of the dynamic theory of seismic wave propagation]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1975, vol. 15, pp. 78–89 (in Russian).
15. Gomaniuk Y. A., Stepanov P. Y. Variational ray tracing algorithms in solving kinematic seismic problems in two-dimensional media. *Journal of Geophysics*, 2024, vol. 1, pp. 24–32 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.34926/geo.2024.79.16.003>, EDN: QFTVIO
16. Smaglichenko T. A., Smaglichenko A. V., Genkin A. L., Sayankina M. K. Simulation of the ray path in techniques for imaging of elastic medium. *Journal of Information Technologies and Computing Systems*, 2018, vol. 3, pp. 52–58 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14357/20718632180305>, EDN: VCEEFO
17. Hovem J. M. Ray trace modeling of underwater sound propagation. In: Beghi M. G. (ed.) *Modeling and measurement methods for acoustic waves and for acoustic microdevices*. InTech – Open Access Publisher, Rijeka, Croatia, 2013, pp. 573–598. DOI: <https://doi.org/10.5772/55935>
18. Gröller E. Nonlinear ray tracing: Visualizing strange worlds. *The Visual Computer*, 1995, vol. 11, pp. 263–274. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01901044>

Поступила в редакцию / Received 30.09.2025

Принята к публикации / Accepted 06.03.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 187–197

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 187–197

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-187-197>

EDN: <https://elibrary.ru/FLT0EI>

Научная статья

УДК 512.54

Применение подхода групповых действий к решению линейных диофантовых уравнений

И. С. Чистов[✉], Л. М. Цыбуля

Московский педагогический государственный университет, Россия, 119435, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1

Чистов Иван Сергеевич, студент Института математики и информатики, i.chistow2014@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0008-0265-4346>, SPIN: 1546-4903, AuthorID: 1321103

Цыбуля Лилия Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, liliya-kinder@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7062-8782>, AuthorID: 505215

Аннотация. В статье обоснован способ решения линейных диофантовых уравнений средствами теории групповых действий. Цель работы — ввести действия определенных групп на множестве линейных диофантовых уравнений и изучить их свойства, связанные с множеством решений данных уравнений. Методами теории групп удалось достичь цели и установить, что действия групп симметрий правильных n -мерных многогранников на множестве исследуемых уравнений сводятся к комбинации действий симметрической группы S_n и группы автоморфизмов группы целых чисел $Aut(\mathbb{Z})$ на том же множестве. Изучена также связь между действиями группы параллельных переносов на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений: так, вектор общего решения уравнения, полученного в результате действия, можно найти как сумму вектора общего решения уравнения, которое подверглось действию, и вектора параллельного переноса. В данной статье было продолжено формирование класса линейных диофантовых уравнений. Так, стало возможным решать больше уравнений, используя решение всего одного представителя.

Ключевые слова: действие группы, симметрическая группа, группа диэдра, линейное представление группы, линейное диофантово уравнение

Для цитирования: Чистов И. С., Цыбуля Л. М. Применение подхода групповых действий к решению линейных диофантовых уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 187–197. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-187-197>, EDN: FLT0EI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Application of the group action approach to solving linear Diophantine equations

I. S. Chistov[✉], L. M. Tsybulya

Moscow Pedagogical State University, 1/1 Malaya Pirogovskaya St., Moscow 119435, Russia

Ivan S. Chistov, i.chistow2014@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0008-0265-4346>, SPIN: 1546-4903, AuthorID: 1321103

Liliya M. Tsybulya, liliya-kinder@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7062-8782>, AuthorID: 505215



Abstract. The article substantiates a method for solving linear Diophantine equations using the theory of group actions. The purpose of this paper is to introduce actions of certain groups on the set of linear Diophantine equations and to study their properties related to the set of solutions of these equations. Using group-theoretic methods, we achieve the goal and establish that the actions of symmetry groups of regular n -dimensional polyhedra on the set of equations under study are reduced to a combination of the actions of the symmetric group S_n and the automorphism group of the group of integers $Aut(\mathbb{Z})$ on the same set. The relationship between the actions of a group of parallel transfers on the set of linear Diophantine equations and on the set of their solutions is also studied: for example, the vector of the general solution of an equation obtained as a result of an action can be found as the sum of the vector of the general solution of the equation that was subjected to the action and the vector of parallel transfer. In this article, we continued the formation of a class of linear Diophantine equations. Thus, it became possible to solve more equations using the solution of just one representative.

Keywords: group action, symmetric group, dihedral group, linear representation of a group, linear Diophantine equation

For citation: Chistov I. S., Tsybulya L. M. Application of the group action approach to solving linear Diophantine equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 187–197 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-187-197>, EDN: FLTOEI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Закономерности, выявленные при действии группы на конкретном множестве, могут выступать средством рационального решения некоторых задач.

Цель работы — ввести действия группы диэдра D_{2n} [1] и группы параллельных переносов T_n на множестве линейных диофантовых уравнений, на множестве их решений \mathbb{Z}^n и выявить взаимосвязи данных действий.

Требуется задать конкретные действия на исследуемых множествах, связать эти действия и заложить основы формальной теории действий над уравнениями.

В первом разделе введены и исследованы действия диэдральной группы и других групп симметрий правильных n -мерных многогранников на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений; во втором показаны действия группы параллельных переносов; в последнем разделе содержатся практические рекомендации по применению описываемого подхода при решении линейных диофантовых уравнений.

Научная новизна исследования состоит в применении теории групповых действий на нестандартном объекте — множестве, состоящем из линейных диофантовых уравнений с n переменными.

Научная значимость результатов исследования заключается в возможности использования и дальнейшего расширения механизма поиска решений различных диофантовых уравнений с помощью метода групповых действий, а также в формализации таких действий над уравнениями, как перестановка его коэффициентов или замена знака коэффициента.

1. Действия групп симметрий правильных n -мерных многогранников на множестве линейных диофантовых уравнений

Определение 1 ([2]). *Линейным диофантовым уравнением (ЛДУ) с n неизвестными* будем называть уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n, b — целые числа, причем хотя бы одно $a_i \neq 0$, и при этом поставлена задача, чтобы неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n принимали только целые значения. Числа a_1, a_2, \dots, a_n называют *коэффициентами ЛДУ*.



Определение 2. Назовем линейное диофантово уравнение *совместным*, если оно имеет решения, и *несовместным* в противном случае.

Множество всех линейных диофантовых уравнений с n неизвестными будем обозначать

$$LDE_n = \{D : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \mid a_i, b \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Пусть $n = 2$. В этом случае мы будем иметь дело с группами симметрий правильных многоугольников, которые называются диэдральными группами (группами диэдра) [1].

Рассмотрим действие группы диэдра D_8 (с операцией о правой композиции отображений) на множестве, содержащем все ЛДУ с двумя переменными и только их

$$LDE_2 = \{D : a_1x_1 + a_2x_2 = b \mid a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Устроим отображение

$$d_8 : D_8 \times LDE_2 \rightarrow LDE_2,$$

при котором каждой паре (f, D) ставится в соответствие элемент

$$f \cdot D = f(D),$$

где $f(D)$ есть уравнение прямой, являющейся образом прямой, заданной уравнением D , при движении f .

По аналитическим соображениям под прямой иногда будем понимать ее уравнение и наоборот.

Предложение 1. *Отображение d_8 есть действие группы D_8 на LDE_2 .*

Доказательство. Отображение d_8 задано корректно, так как для каждой пары существует и притом единствен результат в силу выбора подходящих множества LDE_2 и группы D_8 .

В случае $n = 2$ ЛДУ с двумя неизвестными визуально отождествляются с прямыми, которые можно поворачивать относительно точки плоскости и отражать относительно других прямых в прямоугольной декартовой системе координат (ПДСК). При этом будет выбран стандартный базис. Все повороты будем осуществлять относительно начала ПДСК, а симметрии — относительно осей или биссектрис координатных углов ПДСК.

1. Результат отображения d_8 лежит в LDE_2 , так как каждое из преобразований в D_8 сохранит целочисленность коэффициентов ЛДУ, а свободный член b в конечном счете не изменится (далее в табл. 1 будет показано, как именно устроено данное действие).

2. Осталось проверить две аксиомы действия [3]:

$$1) \text{ пусть } f = id : \begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \end{cases} \quad D : a_1x_1 + a_2x_2 = b. \text{ Тогда } id(D) = D;$$

2) пусть $f, g \in D_8$. Тогда в силу задания действия d_8 справедливо требуемое

$$f(g(D)) = (f \circ g)(D). \quad \square$$

Известно, что любое движение f на плоскости в ПДСК xOy задается следующими формулами

$$f : \begin{cases} x' = x \cos \varphi - \varepsilon y \sin \varphi + x_0, \\ y' = x \sin \varphi + \varepsilon y \cos \varphi + y_0, \end{cases}$$

где $\varepsilon = 1$, если движение первого рода, и $\varepsilon = -1$, если оно второго рода [4].

Положим $x = x_1$, $y = x_2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Выясним сначала результат действия группы D_8 элементом $R_{\frac{\pi}{2}}^O$, т. е. поворотом квадрата относительно начала координат на угол



$\varphi = \frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Поворот является движением первого рода, следовательно, $\varepsilon = 1$. Наконец, подставив $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получим

$$R_O^{\frac{\pi}{2}} : \begin{cases} x'_1 = -x_2, \\ x'_2 = x_1. \end{cases}$$

Тогда

$$R_O^{\frac{\pi}{2}} : \begin{cases} x_1 = x'_2, \\ x_2 = -x'_1. \end{cases}$$

Выходит, что

$$D' = (a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 = b) = f \cdot D = f(D) = R_O^{\frac{\pi}{2}}(a_1 x_1 + a_2 x_2 = b) = (a_1 x'_2 + a_2(-x'_1) = b) = (-a_2 x'_1 + a_1 x'_2 = b).$$

Теперь выясним, что будет в случае действия, например, элементом $S_{y=0}$, т. е. симметрией квадрата относительно координатной оси Ox .

В данном случае представим ситуацию геометрически: для каждой точки только ордината меняется на противоположную, а абсцисса остается прежней. Получаем

$$S_{y=0} : \begin{cases} x'_1 = x_1, \\ x'_2 = -x_2, \end{cases} \quad \text{значит,} \quad S_{y=0} : \begin{cases} x_1 = x'_1, \\ x_2 = -x'_2, \end{cases}$$

т. е.

$$D' = (a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 = b) = f \cdot D = f(D) = S_{y=0}(a_1 x_1 + a_2 x_2 = b) = (a_1 x'_1 + a_2(-x'_2) = b) = (a_1 x'_1 - a_2 x'_2 = b).$$

Составим табл. 1, иллюстрирующую все результаты действия $D_8 \curvearrowright LDE_2$ и интерпретацию этого действия на язык других действий.

Таблица 1 / Table 1

Связь действий a_σ и $a^{(-)}$ с действием группы D_8
The connection between the actions a_σ and $a^{(-)}$ with the action of the group D_8

f	$f(D)$	Интерпретация $f(D)$
$R_O^0 = id$	$D : a_1 x'_1 + a_2 x'_2 = b$	D
$R_O^{\frac{\pi}{2}}$	$-a_2 x'_1 + a_1 x'_2 = b$	$a^{(-+)}(a_{(12)}(D))$ или $a_{(12)}(a^{(+)}(D))$
R_O^π	$-a_1 x'_1 - a_2 x'_2 = b$	$a^{(--)}(D)$
$R_O^{\frac{3\pi}{2}}$	$a_2 x'_1 - a_1 x'_2 = b$	$a^{(+)}(a_{(12)}(D))$ или $a_{(12)}(a^{(-+)}(D))$
$S_{y=0}$	$a_1 x'_1 - a_2 x'_2 = b$	$a^{(+)}(D)$
$S_{x=0}$	$-a_1 x'_1 + a_2 x'_2 = b$	$a^{(-+)}(D)$
$S_{y=x}$	$a_2 x'_1 + a_1 x'_2 = b$	$a_{(12)}(D)$
$S_{y=-x}$	$-a_2 x'_1 - a_1 x'_2 = b$	$a^{(--)}(a_{(12)}(D))$ или $a_{(12)}(a^{(--)}(D))$

Таким образом, любое действие диэдральной группы D_8 на множестве ЛДУ с двумя неизвестными есть не что иное, как последовательное применение ранее изученных действий a_σ , где $\sigma \in S_2$, и $a^{(-)}$. Данные действия описаны в работе [5] и представляют собой соответственно перестановку коэффициентов ЛДУ в порядке подстановки σ и замену некоторых коэффициентов ЛДУ на им противоположные, причем для последнего случая в



табл. 1 представлены уточняющие обозначения, а именно знак «−» использован для обозначения факта замены коэффициента на ему противоположный, а знак «+» — для обозначения того факта, что знак коэффициента остался прежним. Порядок данных знаков в обозначении отражает порядок следования коэффициентов ЛДУ.

Решим следующую задачу, пользуясь данными, представленными в табл. 1.

Задача 1. *Прямую, заданную уравнением $D : 2x_1 + 5x_2 = 7$, повернули на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ около начала координат. Найдите координаты всех целочисленных точек, принадлежащих образу прямой D .*

Решение. Задача сводится к решению ЛДУ $D' = R_O^{\frac{\pi}{2}}(D)$. Однако уравнение ЛДУ D' можно не находить. Следует найти вектор общего решения ЛДУ D .

Так как $D' = a^{(+)}(a_{(12)}(D))$, то по [5] $z_{D'} = z^{(+)}(z_{(12)}(z_D))$.

Так как $z_D = (1 - 5t_2, 1 + 2t_2)$, $t_2 \in \mathbb{Z}$, то $z_{D'} = (-1 - 2t_2, 1 - 5t_2)$, $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $z_{D'} = (-1 - 2t_1, 1 - 5t_2)$, $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Обобщим действие d_g на случай $n > 2$ или $n < 2$. В табл. 2 представлено, какая группа подходит для действия на ЛДУ с конкретным числом переменных n . Во всех этих случаях аналогично двумерному варианту будет прослеживаться связь с действиями a_σ (где $\sigma \in S_n$) и $a^{(-)}$.

Таблица 2 / Table 2

Группы, подходящие для действия на LDE_n
Groups suitable for action on LDE_n

n	Группа, количество элементов в ней
1	Группа симметрий отрезка (в одномерном пространстве), 2
2	Группа симметрий квадрата (в двумерном пространстве), 8
3	Группа симметрий куба (в трехмерном пространстве), 48
4	Группа симметрий тессеракта (в четырехмерном пространстве), 384
5	Группа симметрий пентеракта (в пятимерном пространстве), 3840
6	Группа симметрий гексеракта (в шестимерном пространстве), 46080
...	...
k	Группа симметрий k -мерного куба (в k -мерном пространстве), $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k = k! \cdot 2^k$ элементов

Поясним, как было получено количество элементов в данных группах: каждое движение в n -мерном пространстве связано с ортогональной квадратной матрицей, которую можно, выбрав определенным образом базис, привести к блочно-диагональному виду. Определитель такой матрицы равен ± 1 . При этом в нашем случае (повороты на углы, кратные $\frac{\pi}{2}$, и отражения) в каждой строке и в каждом столбце матрицы может присутствовать лишь один ненулевой элемент — единица или единица со знаком минус, а остальные элементы матрицы суть нули. Можно уточнить, что ненулевые элементы располагаются на главной диагонали и/или на соседних с ней [6]. Посчитаем количество таких матриц, используя комбинаторные соображения.

1. Для n строк и n столбцов мы можем выбрать одну позицию для ненулевого элемента в каждой строке, что соответствует количеству перестановок из n элементов. Количество перестановок из n элементов равно $n!$.

2. Для каждого ненулевого элемента имеется два выбора: 1 или -1 . Поскольку в каждой строке и в каждом столбце будет ровно один такой элемент, то их всего будет n штук. Это дает нам 2^n способов выбрать ненулевой элемент.

Таким образом, общее количество ортогональных матриц размерности $n \times n$, составленных из элементов 0, 1, -1 с заданными условиями, будет равно $n! \cdot 2^n$.

Рассмотрим линейное представление группы D_8 [7]. Для этого гомоморфно инъективно отображим D_8 в группу $GL_2(\mathbb{Z})$ всех целочисленных матриц с определителем ± 1 с операцией умножения матриц, т. е. имеем

$$h : D_8 \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}).$$

Множество всех матриц, соответствующих движениям из D_8 , обозначим через $\text{Im}(h)$. Матричное представление элементов группы D_8 опишем ниже.

$$\begin{aligned} id &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & R_O^{\frac{\pi}{2}} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & R_O^{\pi} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & R_O^{\frac{3\pi}{2}} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{y=0} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & S_{x=0} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & S_{y=x} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & S_{y=-x} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При действии d_8 совместность уравнений является инвариантом, так как НОД коэффициентов снова делит свободный член образа.

Будем для удобства воспринимать элементы \mathbb{Z}^2 как векторы-строки или как векторы-столбцы в определенных ситуациях.

Теорема 1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$ – векторы общего решения совместных ЛДУ $D_1, D_2 \in LDE_2$ соответственно. Пусть имеется преобразование $f \in D_8$, и при этом $A_f \in \text{Im}(h)$ есть матрица f . Тогда

$$\forall D_1, D_2 \in LDE_2 \quad (D_2 = f(D_1) \implies z_2 = A_f \cdot z_1).$$

Доказательство. Используем соображения теории линейных операторов [8]. Действительно, так как f переводит D_1 в D_2 , то каждая точка прямой, заданной D_2 , получается из точки прямой, заданной D_1 , с помощью A_f . Решения ЛДУ D_1 представляют собой узлы целочисленной решетки, но тоже лежат на прямой, заданной D_1 , поэтому именно с помощью A_f можно получить все решения D_2 . \square

Задача 2. Пусть ЛДУ $D_1 : x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9$. Известно, что ЛДУ D_2 задает плоскость, полученную вращением плоскости, заданной D_1 , на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ относительно оси Ox . Решите D_2 .

Решение. Имеется как минимум два способа решения: первый способ предполагает поиск явного вида ЛДУ D_2 и его непосредственное решение (теория групповых действий не используется), а второй не подразумевает обязательный поиск D_2 , но подразумевает поиск матрицы преобразования (опирается на теорию групповых действий). Решим вторым способом.

Нетрудно видеть, что $z_{D_1} = (9 - 3t_2 - 5t_3, t_2, t_3)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$. Поворот в пространстве около оси абсцисс на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ обозначим через $f = R_{Ox}^{\frac{\pi}{2}}$. Матрица f имеет вид [9]

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$z_{D_2} = A_f \cdot z_{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 - 3t_2 - 5t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 3t_2 - 5t_3 \\ -t_3 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad t_2, t_3 \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $z_{D_2} = (9 - 3t_2 - 5t_3, -t_3, t_2)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$.



Задача 3. Имеется два ЛДУ:

$$D_1 : x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9, \quad D_2 : -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -9.$$

Найдите явно решение только одного из них, а решение второго получите с помощью соображений из теории групповых действий.

Решение. Для начала преобразуем ЛДУ D_2 в равносильное ему, домножив обе его части на -1 . Тогда имеем

$$D_1 : x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9, \quad D_2 : x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9.$$

Решим сначала ЛДУ $D_1 : z_{D_1} = (9 - 3t_2 - 5t_3, t_2, t_3)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$. Таким образом, так как

$$D_2 = a^{(+ - +)}(a_{(23)}(D_1)),$$

то по теоремам связи действий на множестве LDE_3 и действий на множестве их решений \mathbb{Z}^3 , описанных в [5], $z_{D_2} = z^{(+ - +)}(z_{(23)}(z_{D_1})) = (9 - 3t_2 - 5t_3, -t_3, t_2)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $z_{D_1} = (9 - 3t_2 - 5t_3, t_2, t_3)$, $z_{D_2} = (9 - 3t_2 - 5t_3, -t_3, t_2)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$.

2. Действия группы параллельных переносов на множестве линейных диофантовых уравнений

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим T_n — группу параллельных переносов t_m на векторы $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ с операцией \circ правой композиции отображений.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем отображение

$$\rightarrow_n : T_n \times LDE_n \rightarrow LDE_n,$$

определенное следующим образом: каждой паре (t_m, D) , где $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ есть вектор длины n параллельного переноса t_m , поставим в соответствие элемент

$$t_m \cdot D = t_m(D),$$

где $t_m(D)$ есть уравнение прямой, являющейся образом прямой, заданной уравнением D , при движении t_m .

Выберем стандартный базис в пространстве \mathbb{R}^n . При этом заметим, что компоненты m_i , $i \in \mathbb{N}$, вектора $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ могут рассматриваться так же, как его координаты. Аналитически параллельный перенос задается следующими формулами [4]:

$$t_m : \begin{cases} x'_1 = x_1 + m_1, \\ \dots \\ x'_n = x_n + m_n, \end{cases}$$

значит,

$$t_m : \begin{cases} x_1 = x'_1 - m_1, \\ \dots \\ x_n = x'_n - m_n. \end{cases}$$

Пусть $D : (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b)$. Найдем образ D при действии параллельным переносом t_m

$$\begin{aligned} D' &= (a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + \dots + a'_nx'_n = b') = t_m(D) = t_m(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b) = \\ &= (a_1(x'_1 - m_1) + a_2(x'_2 - m_2) + \dots + a_n(x'_n - m_n) = b) = \\ &= (a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_nx'_n = b + D(m)), \end{aligned}$$

где $D(m) = a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_nm_n = b' - b$ (представляет собой результат подстановки координат вектора параллельного переноса m вместо переменных в левой части ЛДУ D).



Предложение 2. *Отображение \rightarrow_n есть действие группы T_n на LDE_n .*

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично предложению 1 в силу схожести правил задания действий, о которых в данных предложениях идет речь. \square

Предложение 3. *Действие \rightarrow_n сохраняет совместность ЛДУ.*

Доказательство. Можно показать справедливость данного утверждения, используя НОД коэффициентов. \square

Уточним следующей теоремой, как найти вектор общего решения образа, если известны вектор параллельного переноса и вектор общего решения прообраза.

Теорема 2. *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^n$ – векторы общего решения совместных ЛДУ $D_1, D_2 \in LDE_n$ соответственно. Пусть $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ есть вектор параллельного переноса $t_m \in T_n$. Тогда*

$$\forall D_1, D_2 \in LDE_n \quad (D_2 = t_m(D_1) \implies z_2 = z_1 + m).$$

Доказательство. Данное утверждение справедливо в силу геометрической интерпретации параллельного переноса. Так, все точки, принадлежащие прямой (плоскости или гиперплоскости), заданной уравнением D_1 , перенесутся на вектор m в точки прямой (плоскости или гиперплоскости), заданной уравнением D_2 . То же касается и решений D_1 : так как все решения D_1 являются узлами \mathbb{Z}^n , то в силу целочисленности координат вектора m они также преобразуются в узлы \mathbb{Z}^n , но уже принадлежащие объекту, задаваемому уравнением D_2 . Значит, данные узлы и являются решениями D_2 . \square

Для каждого действия, в частности, для всех действий, рассмотренных в данной работе, справедлива лемма 1 об обратимости действия.

Лемма 1. *Для произвольных $\tau \in S_2$, $f \in D_8$, $t_m \in T_2$ справедливо:*

- 1) *если $D_2 = a_\sigma(\tau, D_1)$, то $D_1 = a_\sigma(\tau^{-1}, D_2)$;*
- 2) *если $D_2 = a^{(-)}(f, D_1)$, то $D_1 = a^{(-)}(f^{-1}, D_2)$;*
- 3) *если $D_2 = d_8(f, D_1)$, то $D_1 = d_8(f^{-1}, D_2)$;*
- 4) *если $D_2 = \rightarrow_2(t_m, D_1)$, то $D_1 = \rightarrow_2(t_m^{-1}, D_2)$.*

Доказательство. Утверждение справедливо в силу определений группы и группового действия. \square

3. Практические рекомендации к применению теории групповых действий при решении линейных диофантовых уравнений

При использовании данной теории на практике для решения конкретных ЛДУ стоит отметить, что действие группы чаще выступает не целью, а средством.

Рассмотрим следующую задачу.

Дано несколько ЛДУ D_1, D_2, \dots, D_s , $s \in \mathbb{N}$, с одинаковым количеством неизвестных n . Требуется решить все данные ЛДУ.

Процесс решения с применением теории групповых действий может происходить по следующему предписанию.

1. Привести все ЛДУ к «удобному» виду (1): $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, упростить все ЛДУ, например, разделив обе части на отличный от единицы НОД всех коэффициентов или домножив обе части каких-либо уравнений на -1 .

2. Вычленив минимум два похожих ЛДУ (например, определенная схожесть в коэффициентах).

3. Определить, может ли какое-либо из этих двух ЛДУ быть получено из другого с помощью группового действия, используя признак действия (ниже).



4. Спрогнозировать, будет ли рациональным использовать групповые действия при решении данной задачи.

5. В случае положительного ответа на вопрос 3 следует решить одно ЛДУ из двух выбранных (то, которое решается проще/быстрее) и применить теорему о связи решений для двух данных ЛДУ, при этом выбрав теорему рационально, если теорем несколько. Для рационального выбора теоремы использовать условие задачи.

Ниже сформулированы признаки действия групп на множестве линейных диофантовых уравнений с учетом применения к ним шага 1 выше [10]. Далее, говоря «ЛДУ-образ» или «ЛДУ-прообраз», будем иметь в виду соответственно ЛДУ, получившееся в результате некоторого действия, и ЛДУ, подвергшееся этому действию.

Признак 1 ($S_n \curvearrowright LDE_n$). Если множества коэффициентов ЛДУ D_1 и D_2 совпадают, однако, быть может, порядок их следования отличается, а свободные члены одинаковы, то ЛДУ D_1 и D_2 могут быть получены друг из друга описанными в [5] действиями S_n .

Признак 2 ($Aut(\mathbb{Z}) \curvearrowright LDE_n$). Если множества абсолютных значений коэффициентов ЛДУ D_1 и D_2 совпадают, порядок следования абсолютных значений коэффициентов неизменен, абсолютные значения свободных членов ЛДУ совпадают, то ЛДУ D_1 и D_2 могут быть получены друг из друга описанными в [5] действиями $Aut(\mathbb{Z})$.

Признак 3 ($D_8 \curvearrowright LDE_2$). Если множества абсолютных значений коэффициентов ЛДУ D_1 и D_2 совпадают, однако, быть может, порядок их следования отличается, но абсолютные значения свободных членов также совпадают, то ЛДУ D_1 и D_2 могут быть получены друг из друга описанным выше действием D_8 .

Данный признак обобщается на действия групп, приведенных в табл. 2.

Признак 4 ($T_n \curvearrowright LDE_n$). Если ЛДУ D_1 и D_2 оба совместны и отличаются только свободным членом, то ЛДУ D_1 и D_2 могут быть получены друг из друга описанным выше действием T_n .

Процесс нахождения координат вектора параллельного переноса состоит опять же в нахождении решения ЛДУ, но уже другого: $a_1 m_1 + \dots + a_n m_n = b_2 - b_1$, относительно переменных m_i , при этом достаточно найти (возможно, подбором) хотя бы одно его частное решение, которое и будет являться искомым вектором m .

К слову, любые два ЛДУ от двух переменных (на плоскости), отличающиеся только свободным членом, задают две параллельные прямые, значит, всегда существует вектор параллельного переноса m такой, что $D_2 = t_m(D_1)$. Однако если какое-либо из данных уравнений не совместно, то ясно, что $m \notin \mathbb{Z}^2$.

Рассмотрим произвольное совместное ЛДУ $D : (a_1 x_1 + a_2 x_2 = b) \in LDE_2$. Пусть $d = \text{НОД}(a_1, a_2)$. Тогда уравнение

$$D' : \left(\frac{a_1}{d} x_1 + \frac{a_2}{d} x_2 = \frac{b}{d} \right)$$

равносильно D .

Пусть (x_{10}, x_{20}) есть частное решение уравнения D' . Тогда его общее решение выглядит так:

$$z_t = \left(x_{10} + \frac{a_2}{d} t, x_{20} - \frac{a_1}{d} t \right), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Зафиксируем произвольный параметр t , породив какое-либо одно решение ЛДУ D (D').

Определение 3. Назовем два решения ЛДУ $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \in LDE_2$ соседними, если целые параметры, порождающие их, отличаются на единицу.

В нашем случае соседнее решение породится, например, параметром $t + 1$:

$$z_{t+1} = \left(x_{10} + \frac{a_2}{d} (t + 1), x_{20} - \frac{a_1}{d} (t + 1) \right), \quad t \in \mathbb{Z}.$$



Определение 4. Расстоянием между соседними решениями $z_t, z_{t+1} \in \mathbb{Z}^2$ ЛДУ $a_1x_1 + a_2x_2 = b \in LDE_2$ будем называть длину отрезка, концами которого являются точки z_t и z_{t+1} .

Лемма 2. Пусть $D : (a_1x_1 + a_2x_2 = b) \in LDE_2$ совместно. Тогда расстояние между любыми двумя соседними решениями ЛДУ D на плоскости постоянно и вычисляется по формуле

$$s = \frac{1}{d} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ где } d = \text{НОД}(a_1, a_2).$$

Доказательство. Найдем соответственно расстояния между абсциссами двух соседних решений ЛДУ и их ординатами: s_x и s_y .

$$s_x = \left| x_{10} + \frac{a_2}{d}(t+1) - \left(x_{10} + \frac{a_2}{d}t \right) \right| = \left| \frac{a_2}{d} \right|, \quad s_y = \left| x_{20} - \frac{a_1}{d}(t+1) - \left(x_{20} - \frac{a_1}{d}t \right) \right| = \left| \frac{a_1}{d} \right|.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами $\left| \frac{a_2}{d} \right|$ и $\left| \frac{a_1}{d} \right|$ гипотенуза, а значит, и искомое расстояние вычисляется следующим образом:

$$s = \sqrt{\left(\frac{a_1}{d} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{d} \right)^2} = \frac{1}{d} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \quad \square$$

Геометрически, так как на плоскости расстояние между любыми двумя решениями ЛДУ в пределах одной прямой постоянно и определяется посредством коэффициентов и их НОД, о чем говорит лемма 2, в силу параллельности прямых, на которых располагаются решения, можно выбрать вектор параллельного переноса не единственным образом. Алгебраически данный факт подкрепляется тем, что у совместного ЛДУ $a_1m_1 + \dots + a_nm_n = b_2 - b_1$ бесконечно много частных решений.

Задача 4. Даны два ЛДУ $D_1 : 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1$, $D_2 : 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 16$. Вектор $z_1 = (1 - t_2 - 2t_3, 1 + 2t_2 - 3t_3, -1 - t_2 + 3t_3)$ (где $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$) есть общее решение D_1 . Можно ли решить D_2 , зная решение D_1 ? Если да, то как?

Решение. Согласно признаку 4 действия \rightarrow_3 , существует (причем не является единственным) вектор $m = (m_1, m_2, m_3)$ такой, что $D_2 = \rightarrow_n(m, D_1) = t_m(D_1)$. Найдем m . Так как $b_2 = b_1 + D_1(m)$, то $D_1(m) = b_2 - b_1$, т. е. $3m_1 + 5m_2 + 7m_3 = 15$. Подбором находим, что $m = (1, 1, 1)$.

Значит, по теореме 2 $z_2 = z_1 + m = (1 - t_2 - 2t_3, 1 + 2t_2 - 3t_3, -1 - t_2 + 3t_3) + (1, 1, 1) = (2 - t_2 - 2t_3, 2 + 2t_2 - 3t_3, -t_2 + 3t_3)$.

Ответ: да, D_2 можно решить не напрямую, а зная лишь решение D_1 , пользуясь при этом действием \rightarrow_3 .

Заключение

По ходу работы были получены следующие важные результаты и выводы [10]:

1) действия группы диэдра на множестве линейных диофантовых уравнений сводятся к комбинации действий, описанных в [5]: к перестановке коэффициентов и замене некоторых коэффициентов на противоположные им;

2) действие, порожденное параллельным переносом, индуцирует перемещение всех решений исходного уравнения на вектор параллельного переноса;

3) были даны рекомендации к применению подхода групповых действий, а также выявлены признаки описываемых действий;

4) такие действия над уравнениями, как перестановка коэффициентов или замена их знаков, были формализованы средствами теории групп в [5] и продолжили свое формальное описание в данной работе.



Таким образом, все задачи работы решены, и цель достигнута.

Исследование возможно расширить, например, в следующих направлениях:

- разработать подход групповых действий для решения нелинейных диофантовых уравнений;
- выявить структуру множества действий конкретной группы на множестве ЛДУ.

Список литературы

1. Dummit D. S., Foote R. M. *Abstract algebra*. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2004. 932 p.
2. Бухштаб А. А. *Теория чисел*. Москва : Просвещение, 1966. 384 с.
3. Кострикин А. И. *Введение в алгебру : в 3 ч. Ч. 3. Основные структуры*. 3-е изд. Москва : Физматлит, 2004. 272 с. EDN: UGLDTF
4. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. *Геометрия : в 2 ч. Ч. 1*. Москва : Просвещение, 1986. 336 с.
5. Чистов И. С., Цыбуля Л. М. Связь между решениями линейных диофантовых уравнений при действиях группы подстановок и группы автоморфизмов целых чисел // *Чебышевский сборник*. 2025. Т. 26, вып. 5. С. 259–279. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-5-259-279>, EDN: JYVEIN
6. Гельфанд И. М. *Лекции по линейной алгебре*. Москва : Наука, 1971. 271 с.
7. Винберг Э. Б. *Линейные представления групп*. Москва : Наука, 1985. 144 с.
8. Кострикин А. И. *Введение в алгебру : в 3 ч. Ч. 2. Линейная алгебра*. Москва : Физматлит, 2000. 368 с.
9. Шафаревич И. Р., Ремизов А. О. *Линейная алгебра и геометрия*. Москва : Физматлит, 2009. 512 с.
10. Чистов И. С., Цыбуля Л. М. О решении линейных диофантовых уравнений в рамках подхода групповых действий // *Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии : тр. XXV Междунар. конф. (Нижегород, 17–19 ноября 2025 г.)*. Нижний Новгород : Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2025. С. 189–194. EDN: CQMNWF

References

1. Dummit D. S., Foote R. M. *Abstract Algebra*. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2004. 932 p.
2. Bukhshtab A. A. *Teoriya chisel* [Number theory]. Moscow, Prosveshchenie, 1966. 384 p. (in Russian).
3. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebru. Ch. 3. Osnovnyye struktury* [Introduction to algebra. Pt. 3. Basic structures]. 3rd. ed. Moscow, Fizmatlit, 2004. 272 p. (in Russian). EDN: UGLDTF
4. Atanasyan L. S., Bazylev V. T. *Geometriya. Ch. I* [Geometry. Pt. I]. Moscow, Prosveshchenie, 1986. 336 p. (in Russian).
5. Chistov I. S., Tsybulya L. M. The connection between the linear Diophantine equations solutions under the actions of the symmetric group and the automorphism group of the integers. *Chebyshevskiy sbornik*, 2025, vol. 26, iss. 5, pp. 259–279 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-5-259-279>, EDN: JYVEIN
6. Gelfand I. M. *Lektsii po lineynoy algebre* [Lectures on linear algebra]. Moscow, Nauka, 1971. 271 p. (in Russian).
7. Vinberg E. B. *Lineynye predstavleniya grupp* [Linear representations of groups]. Moscow, Nauka, 1985. 144 p. (in Russian).
8. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebru. Ch. 2. Lineynaya algebra* [Introduction to algebra. Pt. 2. Linear algebra]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 368 p. (in Russian).
9. Shafarevich I. R., Remizov A. O. *Lineynaya algebra i geometriya* [Linear algebra and geometry]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 512 p. (in Russian).
10. Chistov I. S., Tsybulya L. M. On the Solution of linear Diophantine equations within the framework of the group actions approach. *Matematicheskoe modelirovanie i superkomp'yuternye tekhnologii* [Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies]. Proceedings of the XXV International Conference (Nizhny Novgorod, November 17–19, 2025). Nizhny Novgorod, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2025, pp. 189–194 (in Russian). EDN: CQMNWF

Поступила в редакцию / Received 17.02.2026

Принята к публикации / Accepted 02.03.2026

Опубликована / Published 01.06.2026

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 198–210

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 198–210

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-198-210>

EDN: <https://elibrary.ru/IBKYED>

Научная статья

УДК 532.534

Численное моделирование колебаний аэрозоля в узком закрытом резонаторе

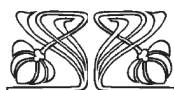
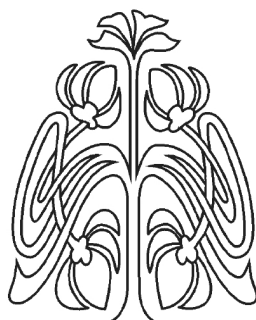
Д. А. Губайдуллин, Д. А. Тукмаков[✉]

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

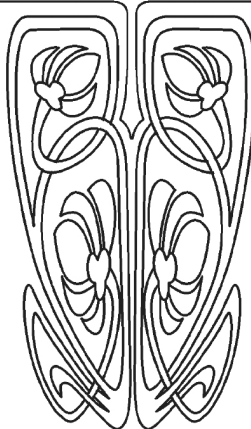
Губайдуллин Дамир Анварович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Института механики и машиностроения, gubaidullin@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6678-1212>, SPIN: 8475-5730, AuthorID: 3619

Тукмаков Дмитрий Алексеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения, tukmakovda@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>, SPIN: 3556-8576, AuthorID: 739648

Аннотация. Работа посвящена численному моделированию колебаний газовзвеси в акустическом резонаторе. Математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования динамики многофазных сред в эйлеровых координатах, позволяющую учесть взаимодействие газа и дисперсной фазы. Динамика несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного теплообмена и обмена импульсом между фазами смеси. В качестве сил межфазного обмена импульсом учитывались сила аэродинамического сопротивления, сила присоединенных масс и динамическая сила Архимеда. Динамика дисперсной фазы описывалась системой уравнений, включающей в себя уравнение неразрывности для средней плотности, уравнения сохранения пространственных составляющих импульса дисперсной фазы и уравнение сохранения тепловой энергии, записанные с учетом межфазного теплового взаимодействия и обмена импульсом между фазами. Система уравнений динамики многоскоростной многотемпературной монодисперсной системы интегрировалась явным конечно-разностным методом второго порядка точности. При реализации конечно-разностного метода использовалась схема расщепления по пространственным направлениям. Монотонность решения обеспечивалась схемой нелинейной коррекции. При помощи численной модели исследован процесс ко-



Научный
отдел





лебаний газозвеси в закрытом акустическом резонаторе для различных амплитуд хождения поршня на частоте, близкой к частоте первого линейного резонанса. Проведенное сопоставление результатов численных расчетов с физическим экспериментом показало приемлемое соответствие численного решения и данных физического эксперимента. Также в рамках монодисперсного приближения математической модели динамики газозвеси было исследовано влияние дисперсности частиц на интенсивность изменения продольной составляющей скорости движения дисперсной фазы и колебаний концентрации дисперсной фазы. Дисперсные включения большего размера имеют меньшую скорость движения, также выявлено, что если дисперсные включения имеют меньший размер, то амплитуда колебаний давления несущей среды имеет меньшее значение.

Ключевые слова: численное моделирование, многофазные среды, континуальная модель, межфазное взаимодействие, уравнение Навье–Стокса

Для цитирования: Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний аэрозоля в узком закрытом резонаторе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 198–210. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-198-210>, EDN: IBKYED

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Numerical simulation of aerosol oscillations in a narrow closed resonator

D. A. Gubajdullin, D. A. Tukmakov[✉]

Federal Research Center “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevskogo St., Kazan 420111, Russia

Damir A. Gubajdullin, gubaidullin@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6678-1212>, SPIN: 8475-5730, AuthorID: 3619

Dmitry A. Tukmakov, tukmakovda@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>, SPIN: 3556-8576, AuthorID: 739648

Abstract. This work is devoted to the numerical simulation of gas suspension oscillations in an acoustic resonator. The mathematical model utilizes a continuum technique for simulating the dynamics of multi-phase media in Euler coordinates, accounting for the interaction between the gas and the dispersed phase. The dynamics of the carrier medium are described by a system of Navier–Stokes equations for a compressible, heat-conducting gas, taking into account interphase heat and momentum exchange between the mixture phases. The interphase momentum exchange forces included the aerodynamic drag force, the added mass force, and the dynamic Archimedes force. The dispersed phase dynamics are described by a system of equations including the continuity equation for the mean density, the conservation equations for the spatial components of the dispersed phase momentum, and the thermal energy conservation equation, all written taking into account interphase thermal interaction and momentum exchange between the phases. The system of equations for the dynamics of a multi-velocity, multi-temperature, monodisperse system was integrated using an explicit, second-order finite-difference method. A spatial-direction splitting scheme was used to implement the finite-difference method. A nonlinear correction scheme ensured the monotonicity of the solution. Using a numerical model, the oscillations of a gas suspension in a closed acoustic resonator were studied for various piston stroke amplitudes at a frequency close to the first linear resonance frequency. The numerical results were compared with the physical experiment. The comparison showed acceptable agreement between the numerical solution and the physical experiment data. Furthermore, within the framework of the monodisperse approximation of the mathematical model of gas suspension dynamics, the effect of particle dispersion on the intensity of change in the longitudinal component of the dispersed phase velocity and fluctuations in the dispersed phase concentration was studied. Larger dispersed inclusions have a lower velocity, and it was also found that smaller dispersed inclusions result in smaller amplitudes of carrier medium pressure fluctuations.



Keywords: numerical modeling, multiphase media, continuum model, interphase interaction, Navier – Stokes equation

For citation: Gubajdullin D. A., Tukmakov D. A. Numerical simulation of aerosol oscillations in a narrow closed resonator. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 198–210 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-198-210>, EDN: **IBKYED**

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Газовзвеси, аэрозоли и туманы представляют собой двухфазные среды, одна из фаз которой — жидкие капли или твердые частицы.

Исследование волновых процессов в таких средах является актуальной проблемой динамики многофазных сред. В данной работе исследуются колебания газа с дисперсными частицами в акустическом резонаторе. Для математического моделирования применяется континуальная методика динамики многофазных сред.

В монографии [1] разработаны основы теории многофазных и многокомпонентных, основанные на уравнениях механики сплошных сред, представлены уравнения континуальной методики моделирования течений многофазных сред. В [2] исследуются различные процессы физики многофазных сред — пузырьковых смесей, жидкостей и газов, содержащих в себе твердые частицы и жидкие капли. Рассмотрены нестационарные процессы в различных типах газодисперсных смесей. В работе [3] на основе континуальной методики моделирования многофазных сред разработаны математические модели одномерной нестационарной динамики газовзвесей без учета вязкости несущей среды. В статье [4] исследованы процессы распространения волн в пузырьковой жидкости с учетом двухмерной геометрии процесса. Математическая модель реализована с помощью численного метода конечных разностей.

Одной из проблем динамики многофазных сред является исследование динамики газодисперсных сред в акустических полях, в том числе в акустических резонаторах. Таким образом, исследование течений аэрозоля в акустических полях сопряжено с исследованием резонансных колебаний в различных емкостях. В публикации [5] экспериментально и теоретически исследованы нелинейные колебания газа в акустическом резонаторе, представляющем собой трубу, на одном конце которой находится поршень, а другой конец трубы либо закрыт, либо частично открыт. В статье [6] рассматриваются вопросы применения одномерного акустического поля для формирования распределений дисперсных включений, находящихся под действием акустического поля по заданному закону. В публикации [7] сделан обзор теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию течений дисперсных включений в газовых потоках применительно к различным процессам в природе и технике. В работе [8] проведен обзор теоретических и экспериментальных исследований динамики газовзвесей, а также отдельных частиц в волновых полях. Рассматривались эффекты коагуляции и осаждения аэрозолей под воздействием акустических и ударно-волновых полей. В статье [9] изучается воздействие сфокусированного акустического поля на газокапельную среду, капельная фаза которой имеет полидисперсный состав. Рассматривается влияние дисперсности фракций жидкости на интенсивность испарения фракций под действием акустического поля. В публикации [10] экспериментально изучаются процессы удаления дисперсной фазы из газа с помощью воздействия акустического поля. Исследуются вопросы влияния частоты и интенсивности акустического поля на эффективность удаления дисперсных включений из газа.

В статье [11] с целью применения в промышленных технологиях проводятся экспериментальные исследования по удалению дисперсной фазы из газа и формированию заданного геометрического распределения концентрации дисперсных частиц с помощью акустического поля.



В работе [12] экспериментально и теоретически исследованы процессы удаления дисперсных включений субмикронного размера из газа с помощью акустического поля, рассмотрены параметры воздействия акустического поля, наиболее эффективные для удаления мелкодисперсных частиц в газе. В публикации [13] экспериментально и численно изучены способы акустического удаления дисперсных включений из газа, целью исследования было увеличение эффективности и снижение энергетических затрат в этих технологиях. В [14] с помощью численного моделирования исследуются процессы коагуляции дисперсных включений газозвеси под действием акустического поля с целью укрупнения дисперсных включений для их более эффективного удаления.

В [15] с помощью вычислительной гидродинамики моделируются процессы формирования агломераций дисперсных включений под действием акустического поля в газе с учетом высокого давления и высокой температуры несущей среды.

В публикации [16] с помощью пакета программ вычислительной гидродинамики при помощи решения линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса численно исследовано формирование агломераций дисперсных включений под действием акустического поля с учетом воздействия несущей среды на динамику дисперсных частиц и взаимодействие между самими дисперсными частицами, но без учета воздействия дисперсных включений на динамику несущей среды. В работе [17] теоретически и численно исследованы процессы седиментации и коагуляции мелкодисперсных частиц микронного размера в акустическом поле, рассмотрено ускорение процессов осаждения дисперсных включений под действием акустического поля.

В статье [18] экспериментальными методами рассматривается оптимизация технологий акустической очистки газа от дисперсных включений, отмечается высокая эффективность применения таких технологий для частиц размером более 10 мкм и необходимость оптимизации этих технологий для очистки газа от дисперсных включений размером менее 10 мкм. В [19] разработана математическая модель динамики и взаимодействия двух дисперсных включений и их коагуляции под действием акустического поля с учетом несферической формы дисперсных включений. В работе [20] рассматриваются технические и медицинские приложения технологий воздействия акустических полей малой мощности на дисперсные включения субмикронных размеров в малом объеме. В публикации [21] экспериментально и численно исследованы проблемы и увеличение эффективности технологий акустической фокусировки дисперсных включений под действием акустического поля в канале малого размера. В работе [22] рассматриваются различные теоретические проблемы исследования воздействия акустических полей на дисперсные частицы с целью приложения в медицинских технологиях и технологиях промышленной экологии.

В работе [23] с помощью численного решения двумерного уравнения Гельмгольца исследованы течения газа с мелкодисперсными частицами в каналах с прямоугольным сечением под действием резонансных акустических полей.

Целью представленных работ являются исследования динамических процессов в газодисперсных средах, которые осуществляются как с помощью математического моделирования, так и с помощью физических экспериментов. Воздействие акустических полей на аэрозоли изучается в связи с различными технологиями очистки газодисперсных сред от дисперсных включений.

В данной работе проводится моделирование течений газодисперсных сред в рамках континуальной эйлеровой математической модели для исследования колебаний аэрозоля в акустическом резонаторе, а также сопоставление численных расчетов с физическим экспериментом. Были рассмотрены процессы колебаний аэрозоля в акустических полях для монодисперсных газозвесей с двумя различными размерами дисперсных включений.

1. Математическая модель

Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса с учетом межфазного обмена импульсом и теплообмена [24–28]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) = -F_x + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy}) = -F_y + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([e_1 + p - \tau_{xx}]u_1 - \tau_{xy}v_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}([e_1 + p - \tau_{yy}]v_1 - \tau_{yx}u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y}) = \\ = -Q - (|F_x|(u_1 - u_2) + |F_y|(v_1 - v_2)) + \alpha_2 \left(\frac{\partial(pu_1)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_1)}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Замыкающие соотношения для уравнений (1)–(4):

$$p = (\gamma - 1)(e_1 - \rho_1(u_1^2 + v_1^2)/2), \quad e_1 = \rho_1(I + (u_1^2 + v_1^2)/2), \quad I = RT_1/(\gamma - 1),$$

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad D = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right).$$

Динамика дисперсной фазы описывается системой уравнений [24–28]:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 u_2 v_2) = F_x - \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 v_2^2) = F_y - \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(e_2 v_2) = Q. \tag{8}$$

Переменные с индексом 1 описывают изменение физических параметров несущей среды, а с индексом 2 — дисперсной фазы. Используются следующие обозначения: ρ_1 — плотность газа, u_1, v_1 — составляющие вектора скорости газа $V_1 = (u_1, v_1)$, e_1 и T_1 полная энергия и температура несущей среды, p — давление газа, λ, μ, γ — коэффициенты теплопроводности, динамической вязкости и постоянная адиабаты для несущей среды, $I = RT_1/(\gamma - 1)$ — тепловая энергия несущей среды (R — газовая постоянная) [29], $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ — составляющие тензора вязких напряжений несущей среды; α_2 — объемное содержание дисперсной фазы, $\rho_2 = \alpha_2 \rho_{20}$ — средняя плотность дисперсной фазы, ρ_{20} — физическая плотность материала дисперсной фазы, u_2, v_2 — составляющие вектора дисперсной фазы $V_2 = (u_2, v_2)$, e_2 и T_2 — тепловая энергия и температура дисперсной фазы, $e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$, C_{p2} — удельная теплоемкость вещества дисперсной фазы.

Межфазный обмен импульсом включает в себя:

силу аэродинамического сопротивления

$$F_{xd} = \frac{3\alpha_2}{4d} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2),$$

$$F_{yd} = \frac{3\alpha_2}{4d} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2);$$



динамическую силу Архимеда

$$F_{xA} = \alpha_2 \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$F_{yA} = \alpha_2 \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right);$$

силу присоединенных масс

$$F_{xm} = 0.5 \alpha_2 \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right),$$

$$F_{ym} = 0.5 \alpha_2 \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right).$$

Теплообмен между несущей средой и дисперсной фазой [3]

$$Q = 6 \alpha_2 \lambda N u_{12} (T_1 - T_2) / d^2.$$

Все частицы предполагаются сферической формы: d — диаметр частицы, C_d — коэффициент сопротивления частицы [3]. Коэффициенты уравнений дисперсной фазы

$$C_d = C_d^0 \phi(M_{12}) \varphi(\alpha_2), \quad C_d^0 = \frac{24}{Re_{12}} + \frac{4}{Re_{12}^{0.5}} + 0.4,$$

$$\phi(M_{12}) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_{12}^{0.63}}\right), \quad \varphi(\alpha_2) = (1 - \alpha_2)^{-2.5},$$

$$Re_{12} = d \rho_1 |V_1 - V_2| / \mu, \quad M_{12} = |V_1 - V_2|,$$

$$Pr = c_p \mu (\lambda)^{-1}, \quad Nu_{12} = 2 \exp(-M_{12}) + 0.459 Re_{12}^{0.55} Pr^{0.33},$$

c_p — теплоемкость газа. При определении коэффициента сопротивления C_d функция $\varphi(\alpha_2)$ учитывает множественность частиц [3].

Для интегрирования системы уравнений (1)–(8) применялся явный конечно-разностный метод Мак-Кормака второго порядка точности представленный на примере нелинейного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} = c(f)$$

в виде двух этапов [29]:

$$f_i^* = f_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{i+1}^{n-1} - a_i^{n-1}) + \Delta t c_i^{n-1}, \quad (9)$$

$$f_i^n = 0.5(f_i^* + f_i^n) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_i^* - a_{i-1}^*) + 0.5 \Delta t c_i^*. \quad (10)$$

Алгоритм численного метода (9), (10) можно представить в виде оператора $P(\Delta t)$, ставящего в соответствие значению функции на n -ом временном слое — f_{in} значение функции на временном слое $n+1$ — f_{in+1} : $P(\Delta t) f_{in} = f_{in+1}$. При реализации численного метода применялась схема расщепления по пространственным направлениям, сводящая применение двухмерного метода к последовательности применения одномерных операторов [30]:

$$f_{ij}^{n+1} = P_x \left(\frac{\Delta t}{2} \right) P_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) P_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) P_x \left(\frac{\Delta t}{2} \right) f_{ij}^n. \quad (11)$$

Для подавления численных осцилляций использовалась нелинейная схема коррекции сеточной функции [31, 32].

На поверхности поршня скорость несущей среды и дисперсной фазы изменялась по гармоническому закону. На боковых поверхностях и на торцевой поверхности канала для x и y составляющих скорости задавались однородные граничные условия Дирихле. Для остальных функций везде задавались однородные граничные условия Неймана:

$$\begin{aligned} u_k(n, 1, j) &= A\omega \cos(\omega n \Delta t), & v_k(n, 1, j) &= 0, & u_k(n, N_x, j) &= 0, & v_k(n, N_x, j) &= 0, \\ u_k(n, i, 1) &= 0, & v_k(n, i, 1) &= 0, & u_k(n, i, N_y) &= 0, & v_k(n, i, N_y) &= 0, \\ \rho_k(n, 1, j) &= \rho_k(n, 2, j), & \rho_k(n, N_x, j) &= \rho_k(n, N_x - 1, j), \\ \rho_k(n, i, 1) &= \rho_k(n, i, 2), & \rho_k(n, i, N_y) &= \rho_k(n, i, N_y - 1), \\ e_k(n, 1, j) &= e_k(n, 2, j), & e_k(n, N_x, j) &= e_k(n, N_x - 1, j), \\ e_k(n, i, 1) &= e_k(n, i, 2), & e_k(n, i, N_y) &= e_k(n, i, N_y - 1). \end{aligned}$$

Здесь N_x, N_y — количество узлов, i, j — нумерация узлов в x и y направлениях соответственно. Расчеты проводились на равномерной сетке $\Delta x_i = i \cdot L / (N_x - 1), \Delta y_j = j \cdot h / (N_y - 1)$.

2. Результаты расчетов

На рис. 1 представлена общая схема моделируемого процесса колебаний газозвеси в канале, аналогичная установке, которая применялась в физическом эксперименте [33].

Рассмотрим динамику монодисперсной газозвеси при резонансных режимах колебаний несущей среды в закрытом канале, продольные колебания в котором возбуждаются поршнем, перемещающимся по гармоническому закону.

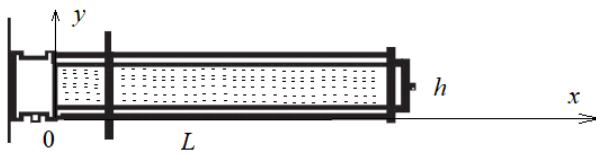


Рис. 1. Общая схема акустического резонатора
Fig. 1. General scheme of the acoustic resonator

В численных расчетах длина канала составляла $L = 1.06$ м, ширина канала — $h = 0.0365$ м (см. рис. 1). Газозвесь в начальный момент времени представляет собой смесь воздуха с равномерно распределенными в объеме резонатора частицами твердой фазы — сферами одинакового диаметра с фиксированной плотностью вещества.

В начальный момент времени газозвесь неподвижна, температуры фаз равны — $T_{10} = T_{20} = 293.5$ К, заданы плотность воздуха, вещества дисперсной фазы и ее объемное содержание $\alpha = 0.000068$, массовая доля дисперсной фазы составляла $m = 0.034$. В момент времени $t = 0$ поршень начал движение по гармоническому закону $x(t) = A \sin(\omega t)$, где $\omega = 2\pi f$, f — резонансная частота колебаний газового столба [33], A — амплитуда хождения поршня.

Зависимость отношения размаха перепада давления вблизи поверхности поршня $\Delta p = p_{\max} - p_{\min}$ к размаху перепада давления при амплитуде хождения поршня — $A = 0.1$ мм — $\Delta p_{A=0.1}$ от амплитуды хождения поршня A представлена на рис. 2.

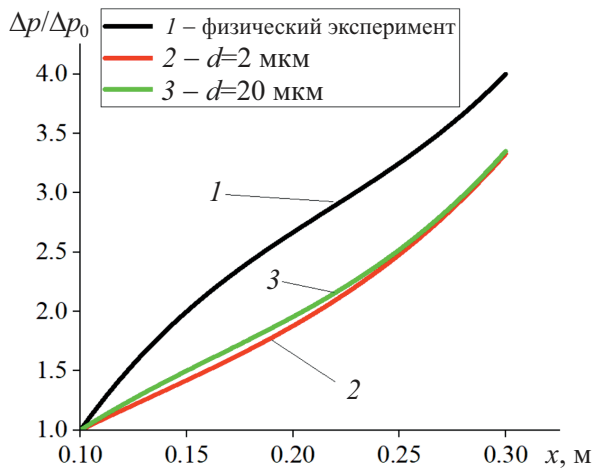


Рис. 2. Сопоставление физических экспериментов, проведенных в работе [33], и численных расчетов для различных размеров дисперсных включений
Fig. 2. Comparison of physical experiments conducted in the work [33], and numerical calculations for different sizes of dispersed inclusions



Численно моделировались монодисперсные газовзвеси с размером частиц $d = 2$ мкм и $d = 20$ мкм. Результаты физического эксперимента, проведенного в работе [33], и численные расчеты аппроксимированы сплайном третьего порядка [34].

Для амплитуд перемещения поршня в интервале от $A = 0.1$ мм до $A = 0.25$ мм увеличение размаха перепада давления происходит менее интенсивно для мелкодисперсной газовзвеси. Закономерность возможно объяснить тем, что интенсивность взаимодействия фаз определяется площадью взаимодействия несущей среды и дисперсной фазы, и для дисперсной фазы, состоящей из мелких частиц, площадь взаимодействия больше, таким образом, для мелкодисперсных газовзвесей сильнее влияние межфазного взаимодействия.

Для мелкодисперсных частиц — $d = 2$ мкм для различных амплитуд колебаний поршня значение продольной величины скорости движения дисперсной вазы выше, чем для более крупнодисперсных частиц — $d = 20$ мкм (рис. 3).

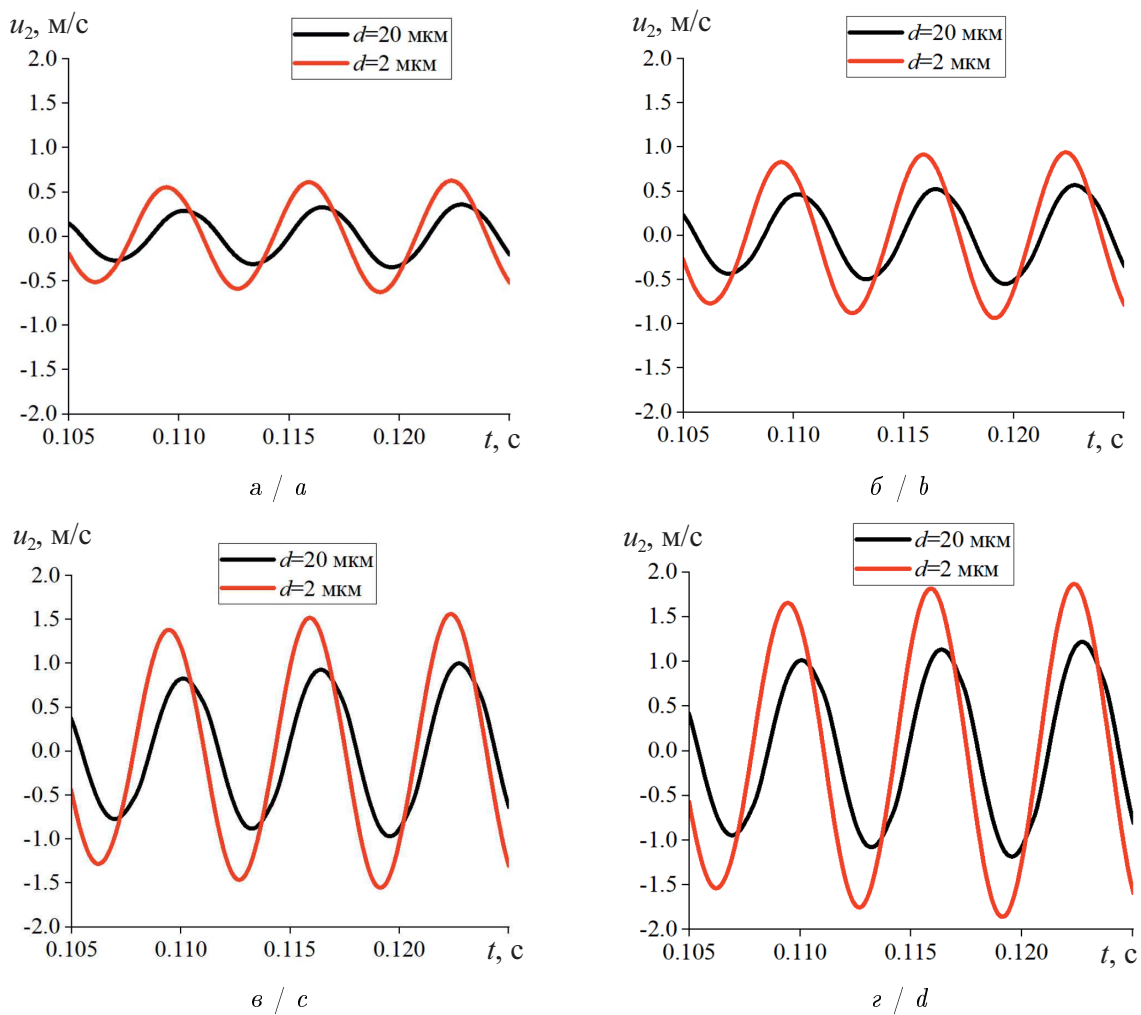


Рис. 3. Временная зависимость продольной составляющей скорости дисперсной фазы в точке $x = L/2, y = h/2$. Амплитуда хождения поршня: а — $A = 0.1$ мм; б — $A = 0.15$ мм; в — $A = 0.25$ мм; г — $A = 0.3$ мм (цвет онлайн)

Fig. 3. Time dependence of the longitudinal component of the dispersed phase velocity at point $x = L/2, y = h/2$. Piston stroke amplitude: а is $A = 0.1$ mm; б is $A = 0.15$ mm; в is $A = 0.25$ mm; г is $A = 0.3$ mm (color online)

При увеличении амплитуды хождения поршня в газовзвеси амплитуда колебаний концентрации частиц дисперсной фазы также возрастает (рис. 4).

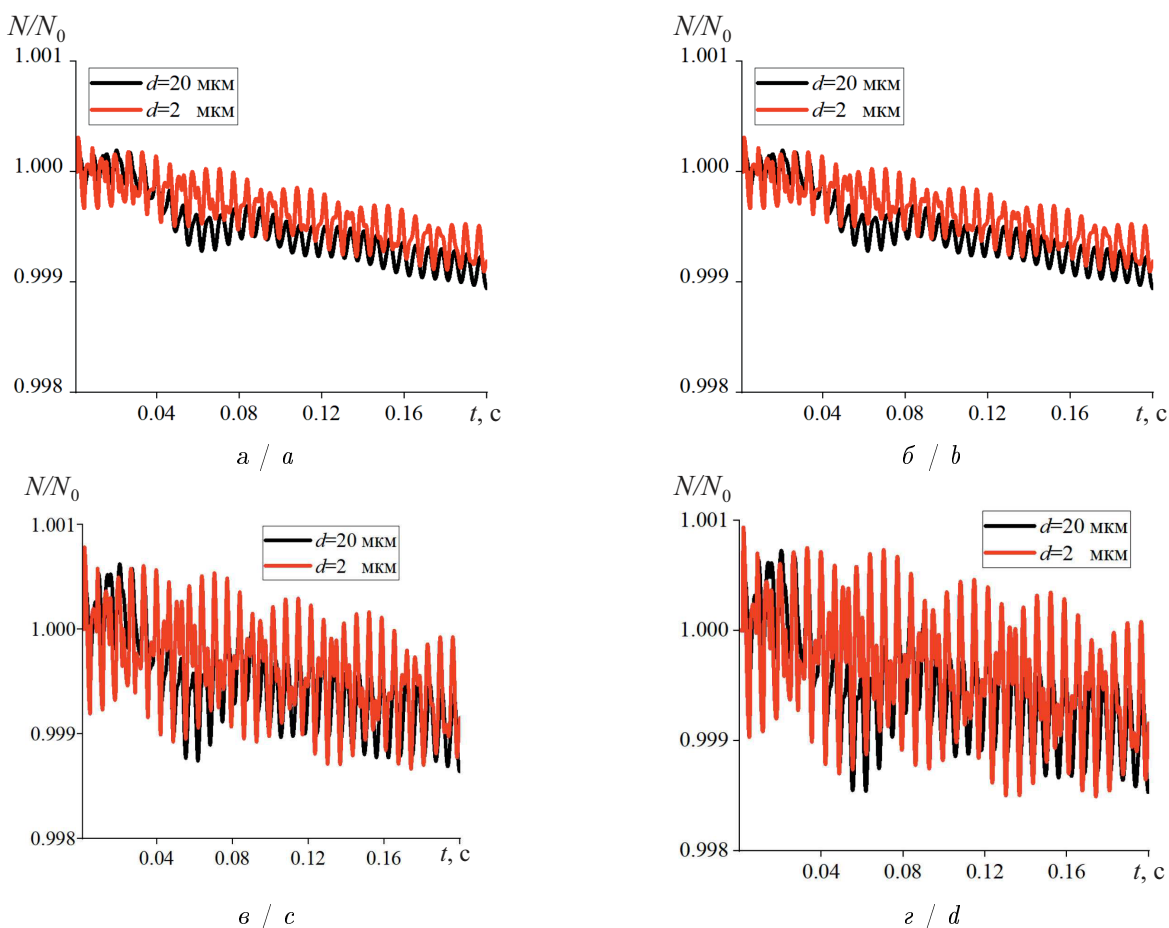


Рис. 4. Временная зависимость отношения концентрации частиц к начальной концентрации для двух размеров частиц дисперсной фазы в точке $x = L/2, y = h/2$. Амплитуда хождения поршня: $a - A = 0.1$ мм; $b - A = 0.15$ мм; $c - A = 0.25$ мм; $d - A = 0.3$ мм (цвет онлайн)

Fig. 4. Time dependence of the ratio of particle concentration to the initial concentration for two sizes of dispersed phase particles at point $x = L/2, y = h/2$. Piston stroke amplitude: a is $A = 0.1$ mm; b is $A = 0.15$ mm; c is $A = 0.25$ mm; d is $A = 0.3$ mm (color online)

Заключение

В данной работе численно моделировались колебания газозвеси в акустическом резонаторе, расчеты проведены на основе континуальной математической модели динамики многофазных сред. Динамика несущей среды описывалась системой уравнений Навье – Стокса, при этом она учитывает воздействие, оказываемое со стороны дисперсной фазы.

Проведены расчеты колебаний монодисперсного аэрозоля с двумя различными размерами дисперсных включений. Результаты расчетов были сопоставлены с серией физических экспериментов по колебаниям газозвеси в акустическом резонаторе с различными амплитудами хождения поршня. Сопоставление дало приемлемое соответствие. Результаты работы могут быть применены как при теоретическом исследовании колебаний газа в акустических полях, так и при разработке промышленных технологий, в которых дисперсные включения движутся в акустических полях.

Список литературы

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. Москва : Наука, 1978. 336 с.
2. Tetkin S. Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspensions. New York : Cambridge University Press, 2005. 400 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546129>
3. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург : Недра, 2003. 283 с.



4. Галлимзянов М. Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 27–35. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35>, EDN: NBNMEB
5. Ipatov M. A., Zaripov R. G., Galiullin R. G., Repin V. B. Nonlinear oscillations of a gas in a tube // Applied Mechanics Reviews. 1996. Vol. 49, iss. 3. P. 137–154. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3101922>, EDN: LDSQX
6. Habibi R., Devendran C., Neild A. Trapping and patterning of large particles and cells in a 1D ultrasonic standing wave // Lab on a Chip. 2017. Vol. 17. P. 3279–3290. DOI: <https://doi.org/10.1039/C7LC00640C>
7. Вараксин А. Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455. EDN: PZVLIT
8. Губайдуллин Д. А., Зарипов Р. Г., Осипов П. П., Ткаченко Л. А., Шайдуллин Л. Р. Волновая динамика газовзвесей и отдельных частиц при резонансных колебаниях // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59, № 3. С. 443–466. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0040364421030054>, EDN: ZCWXUW
9. Meshkinzar A., Al-Jumaily A. M. Acoustically enhanced evaporation of a polydisperse stream of micro water droplets // Journal of Aerosol Science. 2020. Vol. 139. Art. 105466. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2019.105466>
10. Amiri M., Sadighzadeh A., Falamaki C. Experimental parametric study of frequency and sound pressure level on the acoustic coagulation and precipitation of PM2.5 // Aerosol and Air Quality Research. 2016. Vol. 16. P. 3012–3025. DOI: <https://doi.org/10.4209/aaqr.2015.12.0683>
11. Zhenghui Q., Yaji H., Vincenzo N. Aerosol manipulation through modulated multiple acoustic wavepackets with a pair of resonators // Powder Technology. 2017. Vol. 322. P. 24–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.08.062>
12. Zhenghui Q., Liang S., Pan X., Bi X., Zhang S., Biana C., Gua H., Chen L., Cheng M., Jin Y., Shi S., Zhu D. Aerosol aggregation through modulated symmetrically opposing acoustic field in normal 16-sided waveguide coupled with resonators // Powder Technology. 2020. Vol. 364. P. 738–745. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2020.02.032>
13. Zhao Y., Zeng X., Tian Z. Acoustic agglomeration of fine particles based on a high intensity acoustical resonator // AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1685, iss. 1. Art. 060005. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4934430>
14. Wang X., Yang J., Wang Y., Li Y. Acoustic coagulation of fine particles from WFGD // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 955–959. P. 2434–2439. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.955-959.2434>
15. Shi Y., Wei J., Qiu J., Chu H., Bai W., Wang G. Numerical study of acoustic agglomeration process of droplet aerosol using a three-dimensional CFD-DEM coupled model // Powder Technology. 2020. Vol. 362. P. 37–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.12.017>
16. Shi Y., Wei J., Bai W., Wang G. Numerical investigations of acoustic agglomeration of liquid droplet using a coupled CFD-DEM model // Advanced Powder Technology. 2020. Vol. 31, iss. 6. P. 2394–2411. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apt.2020.04.003>
17. Antonnikova A. A., Korovina N. V., Kudryashova O. B. Sedimentation of superfine aerosol by means of ultrasound // Open Journal of Acoustics. 2013. Vol. 3, iss. 3A. P. 16–20. DOI: <https://doi.org/10.4236/oja.2013.33A004>
18. Kudryashova O., Antonnikova A., Korovina N., Akhmadeev I. Mechanisms of aerosol sedimentation by acoustic field // Archives of Acoustics. 2015. Vol. 40, iss. 4. P. 485–489. DOI: <https://doi.org/10.1515/aoa-2015-0048>
19. Хмелев В. Н., Шалунов А. В., Голых Р. Н., Нестеров В. А., Шалунова К. В., Галахов А. Н. Выявление оптимальных режимов ультразвуковой коагуляции субмикронных частиц и определение формы образующихся агрегатов методами математического моделирования // Южно-Сибирский научный вестник. 2014. № 1 (5). С. 17–21. EDN: RTQHDR
20. Mao Z. M., Li P., Wu M. X., Bachman H., Mesyngier N., Guo X. S., Liu S., Costanzo F., Huang T. J. Enriching nanoparticles via acoustofluidics // ACS Nano. 2017. Vol. 11, iss. 1. P. 603–612. DOI: <https://doi.org/10.1021/acsnano.6b06784>
21. Fornell A., Garofalo F., Nilsson J., Bruus H., Tenje M. Intra-droplet acoustic particle focusing: Simulations and experimental observations // Microfluidics and Nanofluidics. 2018. Vol. 22. Art. 75. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10404-018-2094-9>



22. Wu M., Ozcelik A., Rufo J., Wang Z., Fang R., Jun Huang T. Acoustofluidics separation of cells and particles // *Microsystems & Nanoengineering*. 2019. Vol. 5. Art. 32. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41378-019-0064-3>
23. Lei J., Cheng F., Li K. Numerical simulation of boundary-driven acoustic streaming in microfluidic channels with circular cross-sections // *Micromachines*. 2020. Vol. 11, iss. 3. Art. 240. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi11030240>
24. Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния дробления дисперсной фазы на процесс распространения ударной волны из чистого газа в аэрозоль // *Теплофизика высоких температур*. 2019. Т. 57, № 6. С. 909–913. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040364419060097>, EDN: HTGTET
25. Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. Numerical modeling of the shock waves reflection from a firm surface in mono- and polydisperse gas suspensions // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, iss. 1. P. 104–109. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221010133>
26. Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. Numerical study of the effect of polydispersity on the mass transfer of the dispersed phase during the passage of a shock wave through a gas suspension // *Fluid Dynamics*. 2023. Vol. 58, iss. 7. P. 1373–1383. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462823601997>
27. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовой взвеси // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 90–102. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102>, EDN: DJLRDK
28. Тукмаков Д. А. Численное исследование коагуляции дисперсных включений при вдуве капельных фракций в поток запыленной среды // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 419–433. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433>, EDN: OVRYHI
29. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей : в 2 т. Т. 2. Москва : Мир, 1991. 552 с.
30. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск : Наука, 1990. 247 с.
31. Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // *Математическое моделирование*. 1993. Т. 5, № 3. С. 74–83.
32. Тукмаков А. Л. Численное моделирование процесса волновой сепарации твердых частиц при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // *Акустический журнал*. 2009. Т. 55, № 3. С. 342–349. EDN: KAVQOX
33. Губайдуллин Д. А., Зарипов Р. Г., Ткаченко Л. А., Шайдуллин Л. Р., Фадеев С. А. Осаждение полидисперсного аэрозоля в узкой закрытой трубе при резонансном режиме колебаний // *Теплофизика высоких температур*. 2023. Т. 61, № 6. С. 953–956. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0040364423060078>
34. Вержбицкий В. М. Численные методы. Москва : Высшая школа, 2001. 382 с.

References

1. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p. (in Russian).
2. Temkin S. *Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspensions*. New York, Cambridge University Press, 2005. 400 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546129>
3. Kutyshev A. G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkobraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media]. Saint Petersburg, Nedra, 2003. 283 p. (in Russian).
4. Galimzyanov M. N. Propagation of pressure waves in finite-size bubbles zones. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 27–35 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35>, EDN: NBNMEB
5. Ilgamov M. A., Zaripov R. G., Galiullin R. G., Repin V. B. Nonlinear oscillations of a gas in a tube. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, vol. 49, iss. 3, pp. 137–154. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3101922>, EDN: LQSDQX
6. Habibi R., Devendran C., Neild A. Trapping and patterning of large particles and cells in a 1D ultrasonic standing wave. *Lab on a Chip*, 2017, vol. 17, pp. 3279–3290. DOI: <https://doi.org/10.1039/C7LC00640C>



7. Varaksin A. Y. Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: Problems and achievements. *High Temperature*, 2013, vol. 51, iss. 3, pp. 377–407. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X13030073>, EDN: RFGBRD
8. Gubaidullin D. A., Zaripov R. G., Osipov P. P., Tkachenko L. A., Shaidullin L. R. Wave dynamics of gas suspensions and individual particles during resonance oscillations. *High Temperature*, 2021, vol. 59, iss. 2–6, pp. 384–404. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X21030056>, EDN: QUNSJF
9. Meshkinzar A., Al-Jumaily A. M. Acoustically enhanced evaporation of a polydisperse stream of micro water droplets. *Journal of Aerosol Science*, 2020, vol. 139, art. 105466. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2019.105466>
10. Amiri M., Sadighzadeh A., Falamaki C. Experimental parametric study of frequency and sound pressure level on the acoustic coagulation and precipitation of PM2.5. *Aerosol and Air Quality Research*, 2016, vol. 16, pp. 3012–3025. DOI: <https://doi.org/10.4209/aaqr.2015.12.0683>
11. Zhenghui Q., Yaji H., Vincenzo N. Aerosol manipulation through modulated multiple acoustic wavepackets with a pair of resonators. *Powder Technology*, 2017, vol. 322, pp. 24–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.08.062>
12. Zhenghui Q., Liang S., Pan X., Bi X., Zhang S., Biana C., Gua H., Chen L., Cheng M., Jin Y., Shi S., Zhu D. Aerosol aggregation through modulated symmetrically opposing acoustic field in normal 16-sided waveguide coupled with resonators. *Powder Technology*, 2020, vol. 364, pp. 738–745. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2020.02.032>
13. Zhao Y., Zeng X., Tian Z. Acoustic agglomeration of fine particles based on a high intensity acoustical resonator. *AIP Conference Proceedings*, 2015, vol. 1685, iss. 1, art. 060005. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4934430>
14. Wang X., Yang J., Wang Y., Li Y. Acoustic coagulation of fine particles from WFGD. *Advanced Materials Research*, 2014, vol. 955–959, pp. 2434–2439. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.955-959.2434>
15. Shi Y., Wei J., Qiu J., Chu H., Bai W., Wang G. Numerical study of acoustic agglomeration process of droplet aerosol using a three-dimensional CFD-DEM coupled model. *Powder Technology*, 2020, vol. 362, pp. 37–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.12.017>
16. Shi Y., Wei J., Bai W., Wang G. Numerical investigations of acoustic agglomeration of liquid droplet using a coupled CFD-DEM model. *Advanced Powder Technology*, 2020, vol. 31, iss. 6, pp. 2394–2411. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.appt.2020.04.003>
17. Antonnikova A. A., Korovina N. V., Kudryashova O. B. Sedimentation of superfine aerosol by means of ultrasound. *Open Journal of Acoustics*, 2013, vol. 3, iss. 3A, pp. 16–20. DOI: <https://doi.org/10.4236/oja.2013.33A004>
18. Kudryashova O., Antonnikova A., Korovina N., Akhmadeev I. Mechanisms of aerosol sedimentation by acoustic field. *Archives of Acoustics*, 2015, vol. 40, iss. 4, pp. 485–489. DOI: <https://doi.org/10.1515/aoa-2015-0048>
19. Khmelev V. N., Shalunov A. V., Golykh R. N., Nesterov V. A., Shalunova K. V., Galakhov A. N. Identification of optimal modes of ultrasonic coagulation of submicron particles and determination of the shape of the formed aggregates using mathematical modeling. *South-Siberian Scientific Bulletin*, 2014, iss. 1 (5), pp. 17–21 (in Russian). EDN: RTQHDR
20. Mao Z. M., Li P., Wu M. X., Bachman H., Mesyngier N., Guo X. S., Liu S., Costanzo F., Huang T. J. Enriching nanoparticles via acoustofluidics. *ACS Nano*, 2017, vol. 11, pp. 603–612. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.nano.6b06784>
21. Fornell A., Garofalo F., Nilsson J., Bruus H., Tenje M. Intra-droplet acoustic particle focusing: Simulations and experimental observations. *Microfluidics and Nanofluidics*, 2018, vol. 22, art. 75. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10404-018-2094-9>
22. Wu M., Ozelik A., Rufo J., Wang Z., Fang R., Jun Huang T. Acoustofluidics separation of cells and particles. *Microsystems & Nanoengineering*, 2019, vol. 5, art. 32. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41378-019-0064-3>
23. Lei J., Cheng F., Li K. Numerical simulation of boundary-driven acoustic streaming in microfluidic channels with circular cross-sections. *Micromachines*, 2020, vol. 11, iss. 3, art. 240. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi11030240>
24. Gubaidullin D. A., Tukumakov D. A. Numerical study of the influence of the breakup of dispersed phase on the distribution of a shock wave from pure gas into aerosol. *High Temperature*, 2019,



- vol. 57, iss. 6, pp. 899–903. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X19060099>, EDN: QMQXBD
25. Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. Numerical modeling of the shock waves reflection from a firm surface in mono- and polydisperse gas suspensions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, iss. 1, pp. 104–109. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221010133>
 26. Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. Numerical study of the effect of polydispersity on the mass transfer of the dispersed phase during the passage of a shock wave through a gas suspension. *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 58, iss. 7, pp. 1373–1383. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462823601997>
 27. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 90–102 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102>, EDN: DJLRDK
 28. Tukmakov D. A. Numerical study of coagulation of dispersed inclusions during injection of droplet fractions into a flow of dusty medium. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 419–433 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-419-433>, EDN: OVRYHI
 29. Fletcher C. *Computation techniques for fluid dynamics. Vol. 2. Specific techniques for different flow categories*. Berlin, Springer-Verlang, 1988. 898 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1991. 552 p.).
 30. Kovenya V. M., Tarnavsky G. A., Cherny S. G. *Primenenie metoda rasshchepeniya v zadachakh aerodinamiki* [Application of the splitting method in aerodynamic problems]. Novosibirsk, Nauka, 1990. 247 p. (in Russian).
 31. Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V. Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1993, vol. 5, iss. 3, pp. 74–83 (in Russian).
 32. Tukmakov A. L. Numerical simulation of the process of wave separation of solid particles in resonance gas vibrations in the closed pipe. *Acoustical Physics*, 2009, vol. 55, iss. 3, pp. 345–352. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063771009030099>, EDN: LLYOTZ
 33. Gubaidullin D. A., Zaripov R. G., Tkachenko L. A., Shaidullin L. R., Fadeev S. A. Deposition of a polydisperse aerosol in a narrow closed tube in resonance oscillation mode. *High Temperature*, 2023, vol. 61, iss. 6, pp. 875–878. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0018151x23060081>, EDN: VRMTUT
 34. Verzhbitskii V. M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001. 382 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.12.2025

Принята к публикации / Accepted 06.03.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 211–224

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 211–224

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-211-224>

EDN: <https://elibrary.ru/NEJOCV>

Научная статья

УДК 536.21

Об одном методе исследования процессов теплопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой

А. В. Еремин, С. А. Зинина , Д. М. Брагин, А. И. Попов

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

Еремин Антон Владимирович, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Промышленная теплоэнергетика», eremin.av@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>, SPIN: 3892-0775, AuthorID: 664490

Зинина Софья Алексеевна, аспирант кафедры «Промышленная теплоэнергетика», sofazinina4@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0002-9104-1336>, SPIN: 5683-6798, AuthorID: 1170625

Брагин Дмитрий Михайлович, аспирант кафедры «Промышленная теплоэнергетика», Dimabragin2204@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9835-0206>, SPIN: 4016-4044, AuthorID: 1164301

Попов Андрей Игоревич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Промышленная теплоэнергетика», pixinot@icloud.com, <https://orcid.org/0000-0001-5014-8167>, SPIN: 5560-6869, AuthorID: 1100421

Аннотация. В настоящей работе предложен метод математического моделирования процесса теплопроводности в пористой среде с упорядоченной макроструктурой. На основе совместного использования методов минимального репрезентативного объема, вычислительной гомогенизации получена зависимость эффективной теплопроводности пористой среды от геометрических характеристик (толщина, высота) элементарной ячейки — единичного структурного элемента исследуемой среды. В качестве элементарной ячейки рассматривается трижды периодическая минимальная поверхность (ТПМП) типа Шварца Р. Полученная зависимость для определения значений эффективного коэффициента теплопроводности была использована при постановке краевой задачи теплопроводности в тонкой пористой пластине при граничных условиях первого рода. Используя приближенно-аналитический метод, основанный на введении дополнительных граничных характеристик и новой искомой функции, получено простое по форме аналитическое решение сформулированной задачи. Из анализа полученных решений сделан вывод о возможности использования ТПМП-ячеек для проектирования материалов с заданными теплофизическими свойствами. В частности, показано, что путем изменения пористости пластины можно увеличить/уменьшить интенсивность теплопереноса, получить требуемые значения термического сопротивления пластины.

Ключевые слова: эффективная теплопроводность, минимальная поверхность, ТПМП, минимальная поверхность Шварца Р (Schwarz P), приближенный аналитический метод, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные характеристики, тепловой поток, пористость

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-79-10044, <https://rscf.ru/project/23-79-10044/>).

Для цитирования: Еремин А. В., Зинина С. А., Брагин Д. М., Попов А. И. Об одном методе исследования процессов теплопереноса в пористых средах с упорядоченной макроструктурой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 211–224. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-211-224>, EDN: NEJOCV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

On a method for investigating heat transfer processes in porous media with ordered macrostructures

A. V. Eremin, S. A. Zinina[✉], D. M. Bragin, A. I. Popov

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

Anton V. Eremin, eremin.av@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>, SPIN: 3892-0775, AuthorID: 664490

Sofya A. Zinina, sofazinina4@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0002-9104-1336>, SPIN: 5683-6798, AuthorID: 1170625

Dmitry M. Bragin, Dimabragin2204@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9835-0206>, SPIN: 4016-4044, AuthorID: 1164301

Andrey I. Popov, pixinot@icloud.com, <https://orcid.org/0000-0001-5014-8167>, SPIN: 5560-6869, AuthorID: 1100421

Abstract. This paper proposes a mathematical modeling method for the heat conduction process in a porous medium with an ordered macrostructure. Based on the combined use of the minimal representative volume method and computational homogenization, a dependence of the effective thermal conductivity of the porous medium on the geometric characteristics (thickness, height) of the elementary cell — the unit structural element of the studied medium — is obtained. The elementary cell is considered as a triply periodic minimal surface (TPMS) of the Schwarz P type. The derived dependence for determining the values of the effective thermal conductivity coefficient was used in formulating the boundary value problem of heat conduction in a thin porous plate under first-kind boundary conditions. Using an approximate analytical method based on the introduction of additional boundary characteristics and a new unknown function, a simple analytical solution to the formulated problem was obtained. The analysis of the obtained solutions led to the conclusion that TPMS cells can be used for designing materials with specified thermophysical properties. In particular, it is shown that by adjusting the porosity of the plate, the intensity of heat transfer can be increased or decreased, and the required values of the plate's thermal resistance can be achieved.

Keywords: effective thermal conductivity, minimal surface, TPMS, Schwarz minimal surface (Schwarz P), approximate analytical method, additional unknown function, additional boundary characteristics, heat flux, porosity

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-79-10044, <https://rscf.ru/project/23-79-10044/>).

For citation: Eremin A. V., Zinina S. A., Bragin D. M., Popov A. I. On a method for investigating heat transfer processes in porous media with ordered macrostructures. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 211–224 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-211-224>, EDN: NEJOCV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Пористые материалы широко используются во многих отраслях промышленности. Благодаря наличию в них полостей и пустот, заполненных плохо проводящими тепло газами, включая воздух, применение пористых материалов возможно при производстве тепловой изоляции [1]. В работе [2] исследованы пористые материалы, используемые в качестве звукоизоляции. Кроме того, такие материалы обладают меньшей массой в сравнении с однородной средой. Таким образом, целесообразно применение пористых материалов в условиях массо-габаритных ограничений, например, в авиационном и космическом машиностроении [3]. Широкое распространение пористые материалы получили в нефтехимии, энергетике [4] и других отраслях промышленности.



Однако пористые материалы имеют ряд недостатков: при стохастическом распределении пор [5] могут снижаться прочностные свойства, анизотропия свойств приводит к существенному усложнению методов теоретического анализа процессов переноса (тепла, массы, импульса), протекающих в пористых средах, и др. В настоящей работе рассматривается пористый материал, образованный однотипными элементарными ячейками на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП). Такие материалы обладают малой массой, высокими прочностными характеристиками и прогнозируемыми теплофизическими свойствами [6]. Наибольшее распространение на практике получили ТПМП, имеющие строгое математическое описание.

Особенностью пористых ТПМП-материалов является возможность прогнозирования их свойств в зависимости от основных геометрических характеристик элементарных ячеек (толщины стенки, размера и т.д.) [6]. Так, например, при увеличении пористости ТПМП-материала повышается термическое сопротивление, а при уменьшении — обеспечивается повышение прочностных свойств конструкций [7].

Трижды периодические минимальные поверхности Шварца Р и материалы на их основе позволяют разделить пространство на два непересекающихся объема/лабиринта. Данное свойство может быть использовано при разработке теплообменного оборудования, например, при проектировании рекуперативных теплообменников с большой площадью теплообмена [8]. В работе [9] показано, что наибольшим коэффициентом теплопередачи среди исследуемых ТПМП-структур обладает ТПМП «Diamond». Тепловые характеристики теплообменников на основе ТПМП «Diamond» зависят от толщины стенок пористой структуры, диаметра пор и длины.

Структура на основе ТПМП «Gyroid» обеспечивает оптимальное соотношение между эффективностью теплопереноса и гидравлическим сопротивлением. В работе [10] показано, что теплообменник со структурой «Gyroid» обладает на 55% большей тепловой мощностью в сравнении с противоточным теплообменником. При этом коэффициент теплопередачи в структуре «Gyroid» оказалась больше, чем в «Diamond» при числе Рейнольдса выше 16 000 [11].

Пористые среды на основе ТПМП используются в теплообменных аппаратах в качестве теплообменных трактов, элементов конструкции, тепловой защиты и др. Такие теплообменные аппараты обладают рядом преимуществ. Например, коэффициент теплопроводности упорядоченного ТПМП-каркаса из алюминия на 144% выше, чем в случае со стохастическим распределением [12]. При этом прочность ТПМП-каркаса в пять раз выше [6].

Эффективная теплопроводность пористых материалов на основе ТПМП зависит от относительной плотности [13], пористости, размера ячеек, формы пор [6], материала заполнения межпорового пространства и конструкции [14], ориентации пор. Зависимость коэффициента эффективной теплопроводности от относительной плотности может иметь как линейный [13], так и нелинейный вид [6]. В общем случае следует учитывать также теплообмен в межпоровом пространстве. При исследовании теплофизических свойств в пористых материалах, состоящих из нано- и микрочастиц, могут быть использованы диффузионные модели теплопереноса [15].

Основные этапы генерации пористых материалов на основе ТПМП представлены на рис. 1. Формирование поверхности начинается с создания «petals»-элементов (англ. petal — лепесток) — базовых элементов симметрии. Для этого используются автоматизированные алгоритмы Surface Evolver, Minisurf [16]. Путем объединения базовых элементов создается ТПМП с минимально возможной средней кривизной. На этом шаге также применяются методы сглаживания полигональной сетки. Придание толщины выполняется путем перемещения всех точек поверхности триангулированного многогранника вдоль векторов нормали к соответствующим граням на заданное расстояние с последующим созданием непрерывного (без пустот и самопересечений) объема между ними [17]. Получившийся объект с топологией ТПМП называют элементарной ячейкой. На заключительном этапе создается пористый материал на основе ТПМП путем «сшивания» элементарных ячеек на границах.

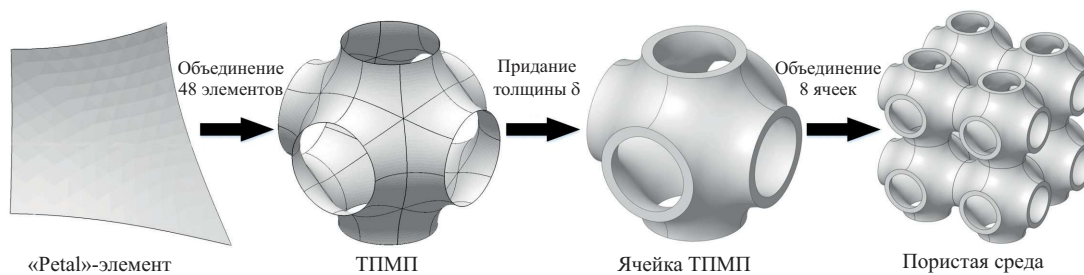


Рис. 1. Процесс формирования ТПМП-материала
Fig. 1. Process of TPMS-material formation

Исследованию тепловых свойств материалов на основе ТПМП посвящено большое количество научных работ. Однако зависимости теплофизических свойств от геометрических характеристик пористых сред получены лишь в частных случаях. В рамках настоящей работы получены простые по форме зависимости для определения коэффициента эффективной теплопроводности пористых материалов на основе ТПМП-ячеек типа Шварца Р. Используя найденные зависимости, сформулирована и решена краевая задача теплопроводности в пористой пластине, выполнен анализ полученных решений. Представленные в статье результаты могут быть использованы при проектировании теплообменных трактов ТМО-аппаратов, при разработке тепловой защиты оборудования и др.

1. Определение теплопроводности ТПМП-материала

Для определения эффективной теплопроводности пористых сред на основе ТПМП-ячеек типа Шварца Р будем использовать метод вычислительной гомогенизации и метод минимального репрезентативного объема (RVE-метод). Согласно RVE-методу в исследуемой области выделяется минимально возможный объем, свойства которого тождественны (или приближены с достаточной точностью) свойствам всей области. Для ТПМП-материала минимальный объем представляет собой элементарную ячейку. Далее выполняется вычислительная гомогенизация среды, т.е. истинные свойства осредняются в пределах минимального объема. Коэффициенты теплопроводности, температуропроводности, теплоемкость, плотность заменяются эффективными (осредненными) их значениями. Таким образом, задача описания тепловых процессов в пористой среде существенно упрощается и фактически сводится к решению классических уравнений переноса в изотропных телах. Очевидно, что точность получаемых решений в этом случае снижается, однако остается достаточной для решения большинства инженерных задач.

Трижды периодическая минимальная поверхность Шварца Р (рис. 2) обладает ярко выраженной вращательной симметрией.

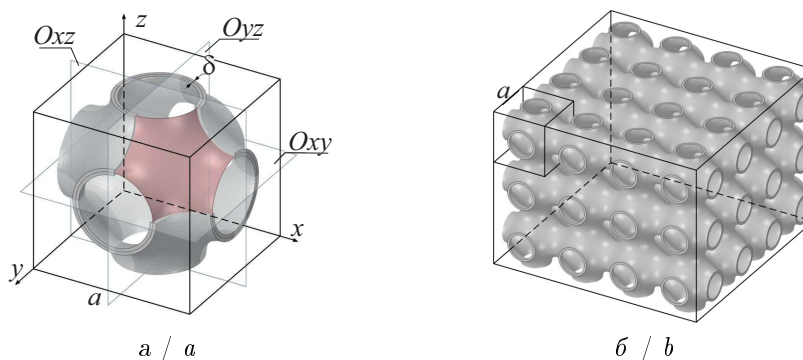


Рис. 2. ТПМП Шварца Р: a — элементарная ячейка; b — соединение ячеек в структуру
Fig. 2. Schwarz P TPMS: a is elementary cell; b is assembly of cells into a structure



Поворот относительно осей симметрии x, y, z на угол $\pi/2$ приводит к совмещению всех точек исходной поверхности с поверхностью, образованной в результате вращения; x, y, z — оси симметрии четвертого порядка. Кроме того, рассматриваемая поверхность обладает зеркальной симметрией относительно плоской симметрии Oxy, Oyz, Oxz . Очевидно, что ТПМП Шварца Р обладает и другими видами симметрии (зеркально-поворотная, кубическая и др.). В таком случае коэффициенты в главной диагонали тензора теплопроводности будут равны между собой. Соответственно, для определения теплопроводящих свойств материала на основе ТПМП Шварца Р достаточно определить теплопроводность в одном из направлений.

Для определения свойств материала на основе ТПМП рассмотрим минимальный репрезентативный объем — элементарную ячейку Шварца Р. Теплопроводность элементарной ячейки (см. рис. 2, а) в направлении оси Oz определяется свойствами материала каркаса, размером ячейки a и величиной толщины стенки δ . Еще одной важной характеристикой, влияющей на интенсивность теплопереноса, является просветность — коэффициент, равный отношению площади просветов в рассматриваемом сечении к общей площади сечения:

$$\gamma = \frac{a^2 - S_r}{a^2}. \tag{1}$$

На рис. 3, а приведены графики функции $\gamma(\beta)$ для различных значений относительной толщины стенки ячейки χ . Здесь β — безразмерная координата z , равная $\beta = z/a$. Относительная толщина χ определяется отношением $\chi = \delta/a$. Из данных рис. 3, а следует, что независимо от χ график функции $\gamma(\beta)$ имеет экстремумы в точках $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. Максимумы функции $\gamma(\beta)$ равны и наблюдаются в точках $\beta = 0, 0.5, 1$. Из этого следует, что площадь каркаса в этих точках принимает минимальное значение: $S_r(0) = S_r(0.5) = S_r(1) = \min$.

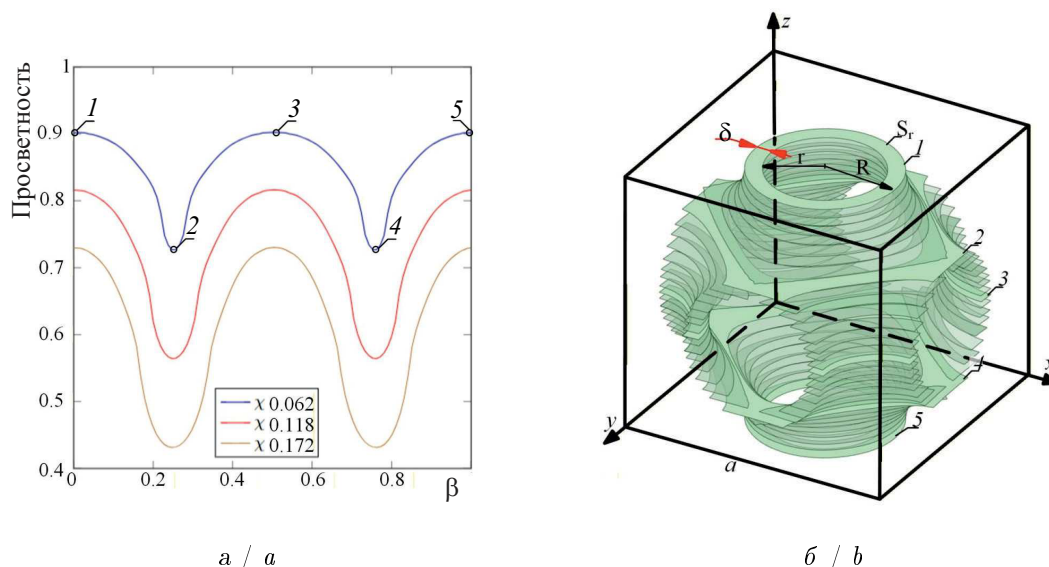


Рис. 3. Определение просветности в элементарной ячейке: а — зависимость просветности от β и относительной толщины χ ; б — геометрическая модель ячейки Шварца Р; 1–5 — экстремумы функции $\gamma(\beta)$ в точках $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ соответственно (цвет онлайн)

Fig. 3. Determination of transparency in the elementary cell: а is dependence of transparency on β and relative thickness χ ; б is geometric model of the Schwarz P cell; 1–5 are extrema of the function $\gamma(\beta)$ at the points $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, respectively (color online)

В статье рассматривается теплоперенос вдоль твердотельного ТПМП-каркаса без учета теплообмена в поровом пространстве. В этом случае коэффициент теплопроводности пористого материала не может быть больше, чем у твердотельного каркаса, и их равенство

возможно только при $\gamma = 0$. Таким образом, для любого $\gamma > 0$ справедливо $k_s > k_{eff}$. Теплопроводность пористого материала k_{eff} меньше теплопроводности каркаса k_s вследствие меньшей площади сечения, через которое происходит теплоперенос. Численное соотношение k_s и k_{eff} определяется просветностью в минимальном сечении. Это утверждение справедливо в случае равенства градиентов температуры в соответствующих точках гомогенизированной среды и ТППП-каркаса. Из данных рис. 3, б видно, что минимальная площадь каркаса в направлении переноса тепла, например в плоскости $\beta = 0$, определяется как площадь кольца толщины δ :

$$S_r = \pi(R^2 - r^2) = \pi((a/4 + \delta/2)^2 - (a/4 - \delta/2)^2) = \pi a \delta / 2, \quad (2)$$

где S_r — минимальная площадь кольца.

При определении эффективного коэффициента теплопроводности положим, что на противоположных поверхностях элементарной ячейки ($\beta = 0, 1$) заданы граничные условия первого рода T_1 и T_2 соответственно (рис. 3, б), а процесс переноса тепла — установившийся. Примем, что тепловой поток Q_r , протекающий через сечение S_r , равен тепловому потоку Q_z , протекающему через сечение $S_z = a^2$:

$$q_z \cdot S_z = q_r \cdot S_r \leftrightarrow k_{eff}(\text{grad } T)_z S_z = k_s(\text{grad } T)_r S_r, \quad (3)$$

где q_r , $(\text{grad } T)_r$ — осредненные по сечению ячейки при $z = 0$ (или $z = a$) соответственно удельная плотность теплового потока и градиент температуры; S_z — площадь сечения куба в направлении оси z ; $(\text{grad } T)_z$ — величина, описывающая изменение температуры в направлении оси z .

В установившемся режиме, при заданных граничных условиях градиент температуры для гомогенизированной среды равен $(\text{grad } T)_z = (T_1 - T_2)/a$. В действительности для элементарной ячейки Шварца Р справедливо лишь приближенное равенство $(\text{grad } T)_r \approx (T_1 - T_2)/a$. С учетом (2), (3) можно записать

$$k_{eff} \approx k_s \frac{S_r}{S_z} \approx k_s \frac{\pi a \delta}{2 a^2} \approx k_s \chi \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Полученное соотношение (4) позволяет определять эффективную теплопроводность пористой среды в зависимости от свойств материала каркаса и характерных геометрических характеристик (толщины и размера) элементарной ячейки.

Применение формулы (4) в нестационарных задачах возможно, но требует дополнительных исследований, выходящих за рамки данной работы. Так, решение задач в нестационарном режиме требует некоторых упрощений, таких как гомогенизация пористой среды. Например, в работе [18] представлено решение задачи теплопроводности в пористой пластине, учитывающее гомогенизацию среды. Однако полученная в настоящей работе формула (4) для определения эффективной теплопроводности действительна лишь для элементарной ячейки Шварц Р.

В настоящей работе использовалась методика определения минимального сечения исходя из поверхности уровня [19]. Для Шварц Р уравнения поверхности уровня дают «кольцо». Однако поверхности уровня для других элементарных ячеек могут иметь иную форму минимального сечения. Минимальная площадь сечения элементарной ячейки может быть получена также путем интегрирования известных уравнений поверхностей ТППП.

В недавно опубликованной сторонними авторами работе [20] представлены результаты, описывающие существенное влияние минимального сечения элементарной ячейки на теплопроводящие свойства ТППМ-структур. Исследование, проводимое в настоящей работе, не противоречит результатам, полученным С. Pan, Н. Tang, X. Yue. Согласованность с результатами сторонних авторов подтверждает адекватность полученных формул и повышает практическую значимость исследования.

Выполним сравнение результатов вычислений k_{eff} по формуле (4) с результатами других авторов (рис. 4).



Так, эффективную теплопроводность пористых материалов на основе ТПМП Шварца Р можно оценить с использованием классических моделей:

Maxwell – Eucken

$$k_{eff} = k_s \frac{2k_s + k_g - 2\varepsilon(k_s - k_g)}{2k_s + k_g + \varepsilon(k_s - k_g)}; \quad (5)$$

Ashby

$$k_{eff} = \frac{k_s}{3}((1 - \varepsilon) + 2(1 - \varepsilon)^{1.5}) + k_s\varepsilon; \quad (6)$$

Austin [21]

$$k_{eff} = \frac{k_s(1 - \varepsilon)}{1 + 0.5\varepsilon}; \quad (7)$$

Hashin – Shtrikman model [22]

$$k_{eff} = k_s - \frac{3\varepsilon k_s(k_s - k_g)}{3k_s - (1 - \varepsilon)(k_s - k_g)}; \quad (8)$$

где k_s — теплопроводность материала, из которого состоит каркас пористого материала, k_g — теплопроводность жидкости или газа в межпоровом пространстве, ε — пористость материала.

Уравнения (5)–(8) могут быть использованы для определения эффективной теплопроводности сферических пор.

Для оценки «приближения» формы геометрического объекта к форме сферы используют коэффициент сферичности [23]. Для поверхности Шварца Р коэффициент сферичности составляет 0.6–0.7 [23].

Для определения теплопроводящих свойств каркаса на основе ТПМП Шварца Р проведены многочисленные численные и экспериментальные исследования [24]. Зависимости коэффициентов теплопроводности каркаса от пористости, полученные в работах [12, 13], могут быть обобщены и записаны в виде

$$k_{eff} = \psi k_s(1 - \varepsilon)^m, \quad (9)$$

где ψ и m — постоянные, определяемые согласно таблице.

На рис. 4 представлены зависимости эффективной теплопроводности ТПМП-каркаса на основе элементарных ячеек типа Шварца Р от относительной толщины. Рассмотрен каркас из алюминиевого сплава AlSi10Mg [24]. Приведенные результаты расчетов k_{eff} получены по формулам (4)–(9). Из анализа представленных графиков следует, что результаты расчетов по формулам (5)–(8) и (4), (9) согласуются лишь в диапазоне значений $0 < \chi \leq 0.22$ [25]. При большей относительной толщине расхождение результатов вычислений k_{eff} по формулам (5)–(8) и (4), (9) возрастает. Таким образом, использование классических моделей Maxwell–Eucken, Ashby и других возможно

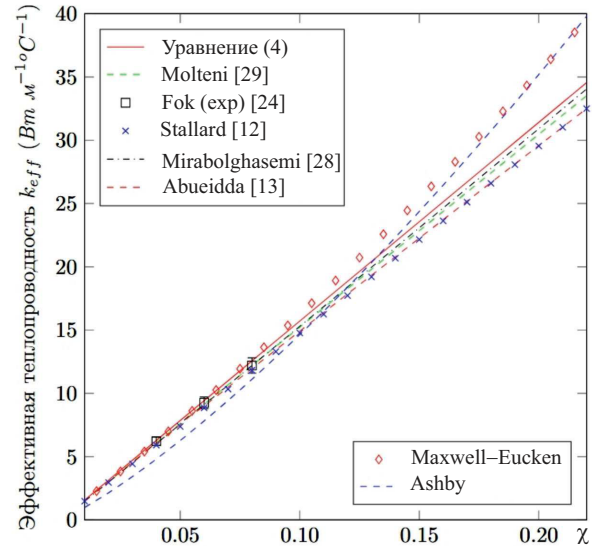


Рис. 4. Эффективная теплопроводность каркаса на основе ТПМП Шварца Р (AlSi10Mg) от относительной толщины по моделям. Модели Maxwell–Eucken, Austin и Hashin–Shtrikman при $k_g = 0$ принимают одинаковые значения, поэтому представлена только модель Maxwell–Eucken (цвет онлайн)

Fig. 4. Effective thermal conductivity of the Schwarz TPMS framework (AlSi10Mg) as a function of relative thickness according to the models. The Maxwell–Eucken, Austin, and Hashin–Shtrikman models take the same values at $k_g = 0$, so only the Maxwell–Eucken model is presented (color online)

Коэффициенты численных моделей
Table. Coefficients of numerical models

Модель	ψ	m
Molteni	0.6760	1.000
Stallard [12]	0.6550	1.000
Mirabolghasemi	0.6941	1.015
Abueidda [13]	0.6500	0.988

лишь в узком диапазоне изменения относительной толщины. Важно отметить, что результаты, полученные согласно моделям Molteni, Stallard, Mirabolghasemi, Abueidda и по формуле (4), согласуются во всем рассматриваемом диапазоне χ , расхождение результатов не превышает 5%. Небольшое расхождение результатов может быть вызвано особенностями САД- и САЕ-моделирования. Так, в работах авторов для создания САД-модели пористой среды использовались разные программные комплексы — Surface Evolver, MSLattice, Matlab. САЕ-моделирование осуществлялось с использованием Abaqus v6.12, Comsol Multiphysics v6.3 и др. В свою очередь, уравнение (4) получено на основе анализа топологии ТПМП-ячейки, а не в результате обобщения данных вычислительных экспериментов, и, соответственно, не имеет погрешности, вызванной дискретизацией модели. Отметим, что результаты, полученные в настоящей работе, практически совпадают с данными [26] (модель Mirabolghasemi). Это связано с использованием аналогичных подходов по осреднению свойств пористых сред — методов гомогенизация и RVE.

В случае, если при определении коэффициента эффективной теплопроводности по формуле (4) неизвестно значение относительной толщины χ , но задана пористость, удобно использовать приближенную зависимость:

$$\varepsilon = 1 - 2.254\chi. \tag{10}$$

На рис. 4 для дальнейшего сравнения с классическими моделями при построении графика по формуле (4) использовалась приближенная зависимость относительной толщины от пористости (10).

2. Математическая постановка задачи

В данной работе при расчете температурного состояния пористой пластины предлагается использовать приближенно-аналитический метод, основанный на совместном применении методов введения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных характеристик, интегрального метода теплового баланса. При этом учитывается метод «гомогенизации среды», при котором выполняется осреднение теплофизических свойств материала в исследуемой области и, соответственно, предполагается, что функция температуры в пористой среде имеет такой же характер распределения, что и у сплошной среды с эффективной теплопроводностью. Предложенный приближенно-аналитический метод решения задач теплопроводности в пористых телах позволяет получить обобщенное выражение для определения температуры и плотности теплового потока в пористой структуре.

Используя метод, изложенный в [28, 29], найдем распределение температуры в пластине из пористого материала на основе ТПМП Шварца Р. Схема теплообмена представлена

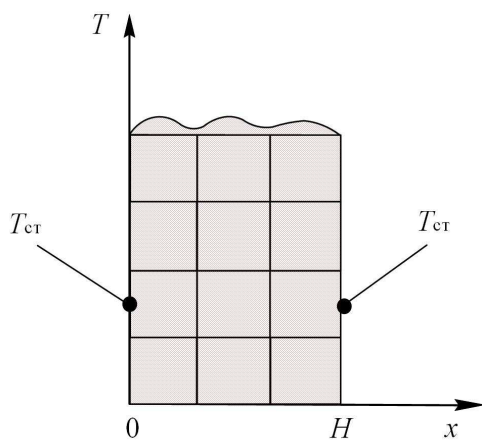


Рис. 5. Схема теплообмена
Fig. 5. Heat exchange scheme

на рис. 5. На противоположных поверхностях пластины заданы граничные условия первого рода — температура $T_{ст}$. Теплопроводящие свойства рассматриваемого материала определяются соотношением (4). Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{k_{eff}}{c_{eff}\rho_{eff}} \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}$$

$$(0 < x < H, \tau > 0),$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad T(0, \tau) = T(H, \tau) = T_{ст},$$

где c_{eff} , ρ_{eff} , k_{eff} — эффективные (осредненные) коэффициенты теплоемкости, плотности, теплопроводности гомогенизированной среды. Очевидно, что $c_{eff} = c_s$, $\rho_{eff} = \rho_s(1 - \varepsilon)$.



С целью обобщения получаемых результатов введем безразмерные переменные Θ , ξ — температуру и относительный размер соответственно. Учитывая симметрию задачи, решение уравнения теплопроводности отыскивается в диапазоне изменения пространственной координаты $0 < x < \frac{H}{2}$. В центре пластины зададим условие отсутствия теплообмена. С учетом введенных обозначений задача принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{4\pi}{2} \frac{k_s \chi}{c_s \rho_s (1 - \varepsilon) H^2} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (11)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (12)$$

$$\Theta(0, \tau) = 1, \quad \frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (13)$$

где $\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cr} - T_0}$ — безразмерная температура; $\xi = \frac{2x}{H}$ — пространственная координата, °C; x — пространственная координата, м; τ — время, с; k_s — теплопроводность каркаса, Вт/(м°C); c — удельная теплоемкость, Дж/(кг°C); ρ_s — плотность, кг/м³; a — размер ячейки, м; δ — толщина стенки, м; χ — относительная толщина, $\chi = \frac{\delta}{a}$; H — толщина пластины, $H = na$; n — количество рядов ячеек.

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим

$$A = \frac{4\pi}{2} \frac{k_s \chi}{c_s \rho_s (1 - \varepsilon) H^2} = a_s \left[\frac{4\pi}{2} \frac{\chi}{(1 - \varepsilon) H^2} \right], \quad (14)$$

где A — коэффициент, зависящий от геометрических характеристик пористой среды (множитель в скобках) и от тепловых свойств материала каркаса a_s . c^{-1} . Размерность коэффициента $[A] = c^{-1}$.

С учетом выражения (14) уравнение (11) примет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = A \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}. \quad (15)$$

3. Приближенное аналитическое решение

Согласно методу, изложенному в [28, 29], в рассмотрение вводится новая функция

$$\sigma(\tau) = \frac{\partial \Theta(0, \tau)}{\partial \xi}. \quad (16)$$

Решение задачи (15), (12)–(13) отыскивается в виде алгебраического ряда

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n b_i(\tau) \xi^{i-1}, \quad (17)$$

где $n \in N$ — натуральное число, соответствующее количеству членов ряда (17), $b_i(\tau)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие от времени.

Для получения решения задачи в первом приближении ограничимся тремя слагаемыми ($n = 3$) в выражении (17). Для определения неизвестных коэффициентов подставим соотношение (17) в (13), (16). В результате подстановки получаем систему алгебраических уравнений, из решения которой получаем

$$b_1(\tau) = 1; \quad b_2(\tau) = \sigma(\tau); \quad b_3(\tau) = -\frac{\sigma(\tau)}{2}.$$

Соотношение (17) с учетом найденных коэффициентов запишется в виде

$$\Theta(\xi, \tau) = \sigma(\tau) \xi - \frac{\sigma(\tau) \xi^2}{2} + 1. \quad (18)$$

Полученное соотношение удовлетворяет граничным условиям (13) и условию (16), но не удовлетворяет уравнению (15) и начальному условию (12). Для приближенного удовлетворения исходного дифференциального уравнения (15) проинтегрируем его в пределах изменения пространственной координаты, т. е. составим интеграл теплового баланса

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} \partial \xi = \int_0^1 A \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \partial \xi. \quad (19)$$

Вычисляя интеграл теплового баланса, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} + A\sigma(\tau) = 0. \quad (20)$$

Решив (20), получаем

$$\sigma(\tau) = C_1 e^{-3A\tau}, \quad (21)$$

где C_1 — константа интегрирования.

Подставляя (21) в (18), получаем

$$\Theta(\xi, \tau) = C_1 e^{-3A\tau} \xi - \frac{C_1 e^{-3A\tau}}{2} \xi^2 + 1. \quad (22)$$

Для выполнения начального условия EQ:(12) составим его невязку

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \partial \xi = 0. \quad (23)$$

Из решения уравнения (23) определим константу интегрирования. Для первого приближения $C_1 = -2.5$. Выражение (22) с учетом найденного C_1 представляет решение задачи (15), (12)–(13) в первом приближении и может быть записано в виде

$$\Theta(\xi, \tau) = -2.5 e^{(-3A\tau)} \xi + 1.25 e^{(-3A\tau)} \xi^2 + 1. \quad (24)$$

Используя рассмотренный в [28, 29] метод, можно получить решение задачи (15), (12), (13) во втором и последующих приближениях. При этом используются дополнительные граничные характеристики. Так, во втором приближении решение будет

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \tau) &= -2.09 f_1(\xi) e^{(-2.46A\tau)} - 2.24 f_2(\xi) e^{(-36.5A\tau)} + 1, \\ f_1(\xi) &= \left(\frac{K_1}{15A} + \frac{1}{5} \right) \xi^5 - \left(\frac{5K_1}{24A} + \frac{1}{2} \right) \xi^4 + \left(\frac{K_1}{6A} \right) \xi^3 + \xi, \\ f_2(\xi) &= \left(\frac{K_2}{15A} + \frac{1}{5} \right) \xi^5 - \left(\frac{5K_2}{24A} + \frac{1}{2} \right) \xi^4 + \left(\frac{K_2}{6A} \right) \xi^3 + \xi, \end{aligned} \quad (25)$$

где $K_1 = -2.46A$, $K_2 = -36.5A$.

Используя (24), (25), можно найти соотношения для определения плотности теплового потока внутри пористого материала и на его поверхности. Так, согласно закону Фурье

$$q = -k_{eff} \text{grad } T. \quad (26)$$

Подставляя (24), (25) в (26), получим соотношение для определения плотности теплового потока в первом и втором приближениях соответственно:

$$q = -\frac{k_s \chi}{H} \pi (T_{ст} - T_0) 2,5 e^{-3A\tau} (\xi - 1); \quad (27)$$

$$q = -\frac{\pi k_s \chi}{H} (T_{ст} - T_0) (2.09 F_1(\xi) e^{-2.46A\tau} + 2.24 F_2(\xi) e^{-36.5A\tau}); \quad (28)$$

$$F_1(\xi) = \left(\frac{K_1}{3A} + 1 \right) \xi^4 - \left(\frac{5K_1}{6A} + 2 \right) \xi^3 + \left(\frac{K_1}{2A} \right) \xi^2 + 1;$$

$$F_2(\xi) = \left(\frac{K_2}{3A} + 1 \right) \xi^4 - \left(\frac{5K_2}{6A} + 2 \right) \xi^3 + \left(\frac{K_2}{2A} \right) \xi^2 + 1.$$



4. Численное решение

С целью оценки точности полученных приближенных аналитических решений получим численное решение рассматриваемой задачи методом конечных разностей. Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, найдено дискретное решение задачи (11)–(13) на пространственно-временной сетке

$$\begin{aligned} \xi_j &= j\Delta\xi, \quad j = \overline{0, J}, \\ \tau_i &= i\Delta\tau, \quad i = \overline{0, I}, \end{aligned} \quad (29)$$

где J, I — число шагов соответственно по переменным ξ и τ .

Результаты численного решения задачи (11)–(13) в сравнении с результатами, полученными в первом и втором приближениях, приведены на рис. 6. Из анализа данных рис. 6 можно заключить, что уже в первом приближении погрешность вычислений в диапазоне времени $\tau \geq 1000$ с составляет не более 10%. Во втором приближении погрешность снижается до 3%. Повышение точности решений, полученных в первом и втором приближениях, косвенно свидетельствует о сходимости метода, рассмотренного в документации к Abaqus¹ и Comsol Multiphysics².

5. Обсуждение результатов

Полученные результаты могут быть использованы для определения эффективной теплопроводности пористых материалов на основе ТПМП, температурных полей и тепловых потоков внутри пористых сред при одномерном переносе тепла (рис. 7). Стоит отметить, что формулы (4), (10), а следовательно, и (24), (25), (27), (28) справедливы лишь в случае сохранения топологической структуры элементарных ячеек. Путем анализа вычислительных экспериментов установлено, что ТПМП-ячейка типа Шварца Р сохраняет структуру (не происходит внутренних пересечений, полного заполнения пор и др.) в диапазоне толщины стенки $0 < \chi \leq 0.22$. С учетом зависимости (10) область допустимых значений пористости составляет $0.5 < \varepsilon \leq 1$. Для указанных значений χ, ε распределение температуры по координате практически не зависит от геометрических характеристик ячейки.

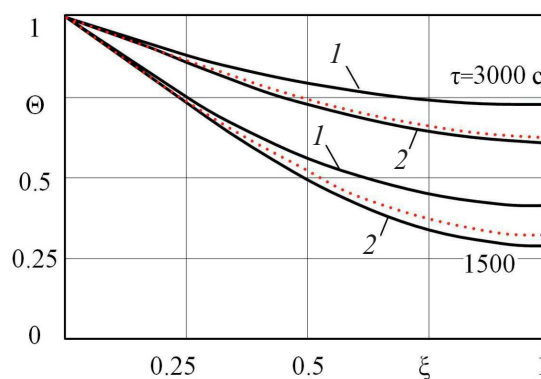


Рис. 6. Распределение температурного профиля в пористой пластине по координате при пористости $\varepsilon = 0.86$. Сплошная линия — приближенное решение (1, 2 — номер приближения); точка — численное решение

Fig. 6. Temperature profile distribution in a porous plate along the coordinate at a given porosity $\varepsilon = 0.86$. Solid line is approximate solution (1, 2 are approximation numbers); dot is numerical solution

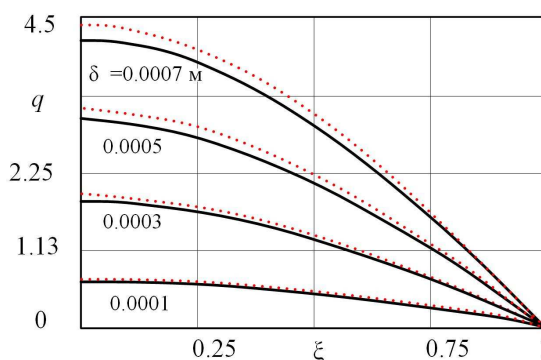


Рис. 7. Распределение плотности теплового потока во втором приближении в момент времени $\tau = 3000$ с при изменяющейся толщине стенки элементарной ячейки. Сплошная линия — приближенное решение; точка — численное решение

Fig. 7. Heat flux density distribution in the second approximation at time $\tau = 3000$ with varying wall thickness of the elementary cell. Solid line is approximate solution; dot is numerical solution

¹Abaqus 6.12 Analysis User's Manual. Documentations. URL: <https://manualzz.com/doc/7288684/using-abaqus-online-documentation?ysclid=mmvn49pk18117266660&p=2> (дата обращения: 20.03.2025).

²Introduction to COMSOL Multiphysics. URL: https://cdn.comsol.com/doc/6.3.0.335/COMSOL_MultiphysicsInstallationGuide.pdf (дата обращения: 20.03.2025).



Температурные профили для пористой пластины качественно не отличаются от классических профилей температуры в неограниченной пластине. Различие между ними определяется величиной отношения теплопроводности материала каркаса к эффективной теплопроводности. Для ячеек типа Шварца Р это значение постоянно. Значения плотности теплового потока отличаются существенно (см. рис. 7). Например, при неизменном размере ($a = 0.005$ м) увеличение толщины стенки δ от 0.0001 до 0.0007 м приводит к возрастанию плотности теплового потока q с 0.63 до 4.4 Вт/м². Таким образом, изменяя геометрические характеристики ТПМП-ячейки, можно получить материал с заданными теплопроводящими свойствами. Данный подход применим при проектировании тепловой защиты оборудования, теплообменников устройств, теплоизоляционных материалов и др.

Заключение

1. Получена приближенная зависимость коэффициента эффективной теплопроводности пористой среды, основанной на ТПМП типа Шварца Р, от относительной толщины. С целью оценки точности полученной зависимости приведены результаты расчетов коэффициента эффективной теплопроводности по формулам (5)–(9). Из анализа представленных зависимостей следует, что использование классических моделей Maxwell–Eucken, Ashby и других возможно лишь в узком диапазоне изменения относительной толщины. При этом результаты, полученные по формуле (4), и результаты, полученные из моделей Molteni, Stallard, Mirabolghasemi, Abueidda, согласуются во всем рассматриваемом диапазоне χ (расхождение результатов не превышает 5%).

2. Получено простое по форме аналитическое решение задачи переноса тепла через плоскую пористую стенку, структура которой основана на ТПМП типа Шварца Р. Полученные выражения для определения температурной функции, а также для плотности теплового потока позволяют без использования специализированного ПО и вычислительной техники находить распределение температур внутри пористых материалов, определять тепловые потери и т.д.

3. С целью верификации разработанного приближенно-аналитического метода решения задачи теплопереноса в пористой среде, основанной на ТПМП типа Шварца Р, выполнено сравнение результатов расчетов температурной функции в первом и втором приближениях с результатами, полученными методом конечных разностей. Погрешность вычислений во втором приближении, по сравнению с численным методом, не превышает 3% во временном диапазоне $\tau \geq 1000$ с.

Список литературы / References

1. Zhao X., Liu Y., Zhao L., et al. A scalable high-porosity wood for sound absorption and thermal insulation. *Nature Sustainability*, 2023, vol. 6, iss. 3, pp. 306–315. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41893-022-01035-y>
2. Wang S., Xiao Y., Gu J., Hu Ch., Zhang H., Wen J. Double-panel metastructure lined with porous material for broadband low-frequency sound insulation. *Applied Acoustics*, 2023, vol. 207, art. 109332. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2023.109332>
3. Alifanov O. M., Salosina M. O., Budnik S. A., Nenarokomov A. V. Design of aerospace vehicles' thermal protection based on heat-insulating materials with optimal structure. *Aerospace*, 2023, vol. 10, iss. 7, art. 629. DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace10070629>
4. Li X., Shao J., Zheng J., Bai C., Zhang X., Qiao Y., Colombo P. Fabrication and application of porous materials made from coal gangue: A review. *International Journal of Applied Ceramic Technology*, 2023, vol. 20, iss. 4, pp. 2099–2124. DOI: <https://doi.org/10.1111/ijac.14359>
5. Fteiti M., Ghalambaz M., Sheremet M., Ghalambaz M. The impact of random porosity distribution on the composite metal foam-phase change heat transfer for thermal energy storage. *Journal of Energy Storage*, 2023, vol. 60, art. 106586. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.est.2022.106586>
6. Wang F., Jiang H., Chen Y., Li X. Predicting thermal and mechanical performance of stochastic



- and architected foams. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, vol. 171, art. 121139. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121139>
7. Zhang J., Shen Y., Sun Y., Yang J., Gong Y., Wang K., Zhang Z., Chen X., Bai L. Design and mechanical testing of porous lattice structure with independent adjustment of pore size and porosity for bone implant. *Journal of Materials Research and Technology*, 2022, vol. 18, pp. 3240–3255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.04.002>
 8. Dharmalingam L. K., Aute V., Ling J. Review of triply periodic minimal surface (TPMS) based heat exchanger designs. *International Refrigeration and Air Conditioning Conference*, 2022, art. 2393. Available at: <https://docs.lib.purdue.edu/iracc/2393/> (accessed March 20, 2025).
 9. Iyer J., Moore T., Nguyen D., Roy P., Stolaroff J. Heat transfer and pressure drop characteristics of heat exchangers based on triply periodic minimal and periodic nodal surfaces. *Applied Thermal Engineering*, 2022, vol. 209, art. 118192. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.118192>
 10. Dixit T., Al-Hajri E., Paul M. C., Nithiarasu P., Kumar S. High performance, microarchitected, compact heat exchanger enabled by 3D printing. *Applied Thermal Engineering*, 2022, vol. 210, art. 118339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.118339>
 11. Li W., Li W., Yu Z. Heat transfer enhancement of water-cooled triply periodic minimal surface heat exchangers. *Applied Thermal Engineering*, 2022, vol. 217, art. 119198. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119198>
 12. Stallard S., Jiang H., Chen Y., Bergman T. L., Li X. Exploring the design space of the effective thermal conductivity, permeability, and stiffness of high-porosity foams. *Materials & Design*, 2023, vol. 231, art. 112027. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2023.112027>
 13. Abueidda D. W., Al-Rub R. K. A., Dalaq A. S., Lee D. W., Khan K. A., Jasiuk I. T. Effective conductivities and elastic moduli of novel foams with triply periodic minimal surfaces. *Mechanics of Materials*, 2016, vol. 95, pp. 102–115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.01.004>
 14. Popov A., Eremin A., Bragin D. Modeling and measurement of effective thermal conductivity of materials reinforced with bars. *International Journal of Thermophysics*, 2023, vol. 44, iss. 2, art. 17. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-022-03137-3>
 15. Eremin A., Kishov E., Popov A. Discrete heat transfer model with space-time nonlocality. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2022, vol. 138, art. 106346. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106346>
 16. Popov A. I., Bragin D. M., Eremin A. V. Effective thermal conductivity of structured porous medium: Numerical study. *Defect and Diffusion Forum*, 2022, vol. 419, pp. 69–76. DOI: <https://doi.org/10.4028/p-oevvt9>
 17. Zeng C., Wang W., Hai K., Ma S. Lightweight airborne TPMS-filled reflective mirror design for low thermal deformation. *Composite Structures*, 2024, vol. 327, art. 117665. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117665>
 18. Zinina S., Eremin A. V., Popov A. I., Bragin D. M. Mathematical modeling of thermal conductivity in a porous medium with an ordered macrostructure. *Journal of Mathematical Sciences*, 2025, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07730-3>, EDN: SGNESN
 19. Hsieh M. T., Valdevit L. *Minisurf* — A minimal surface generator for finite element modeling and additive manufacturing. *Software Impacts*, 2020, vol. 6, art. 100026. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.simpa.2020.100026>
 20. Pan C., Tang L. H., Yue X. Minimum cross-section dominated effective thermal conductivity in morphology-modulated gyroid lattices. *International Journal of Thermal Sciences*, 2026, vol. 221, art. 110468. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2025.110468>
 21. Austin J. *Symposium on Thermal Insulating Materials: Columbus Regional Meeting*. American Society For Testing Materials, 1939, pp. 65–67.
 22. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*, 1962, vol. 33, iss. 10, pp. 3125–3131. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1728579>
 23. Cruz-Matías I., Ayala D., Hiller D., Gutsch S., Zacharias M., Estradé S., Peiró F. Sphericity and roundness computation for particles using the extreme vertices model. *Journal of Computational Science*, 2019, vol. 30, pp. 28–40. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2018.11.005>



24. Fok P. J. Y., Kandasamy R., Ho J. Y., Wong T. N. Enhancing the performance of composite phase change materials using novel triply periodic minimal surface structures. *Chemical Engineering Journal*, 2023, vol. 476, art. 146352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cej.2023.146352>
25. Bragin D. M., Popov A. I., Eremin A. V. The thermal conductivity properties of porous materials based on TPMS. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, vol. 231, art. 125863. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.125863>
26. Mirabolghasemi A., Akbarzadeh A., Rodrigue D., Therriault D. Thermal conductivity of architected cellular metamaterials. *Acta Materialia*, 2019, vol. 174, pp. 61–80. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.04.061>
27. Molteni M., Candidori S., Graziosi S., Gariboldi E. Improving the thermal response flexibility of 2- and 3-phase composite phase change materials by metallic triply periodic minimal surface structures. *Journal of Energy Storage*, 2023, vol. 72, pt. C, art. 108185. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.108185>
28. Eremin A. Study of thermal exchange with liquid flowing in a cylindrical channel. *2019 International Science and Technology Conference "EastConf IEEE"*. Vladivostok, Russia, 2019, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/EastConf.2019.8725422>
29. Stefanyuk E. V., Kudinov V. A. Additional boundary conditions in nonstationary problems of heat conduction. *High Temperature*, 2009, vol. 47, pp. 250–262. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X09020163>

Поступила в редакцию / Received 21.03.2025

Принята к публикации / Accepted 07.02.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Научная статья

УДК 532.529.2:532.529.5

Влияние степени подогрева газокапельной турбулентной струи на ее параметры

Ю. В. Зуев

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

Зуев Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры теории воздушно-реактивных двигателей, yuri_zuev@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2091-0912>, SPIN: 4501-1347, AuthorID: 231856

Аннотация. В статье изучается влияние степени подогрева газокапельной струи с фазовыми переходами и соударениями капель на параметры этой струи. Под степенью подогрева струи понимается отношение температур газа на срезе сопла и в окружающей среде. Методом исследования является математическое моделирование. Расчеты проводятся с помощью нашей ранее опубликованной математической модели двухфазной струи, полученной в рамках RANS-подхода. В этой модели осредненные уравнения газовой фазы и капель записываются в переменных Эйлера. В связи с тем, что струйные течения являются автомодельными, для расчета моментов корреляции пульсационных параметров фаз используются алгебраические формулы. При математическом моделировании рассматривается газокапельная затопленная струя, истекающая в газовую среду с температурой, существенно отличающейся от температуры газа на срезе сопла. Анализ результатов проведенных расчетов показал, что при истечении нагретой двухфазной струи в газовую среду с меньшей температурой численное значение степени подогрева струи не оказывает заметного влияния на все параметры струи. В случае истечения двухфазной струи в газовую среду с большей температурой по сравнению с температурой газа на срезе сопла величина степени подогрева струи существенным образом влияет на температуры фаз, объемные концентрации и размеры капель, а также на интенсивность фазовых переходов. В этом случае уменьшение степени подогрева струи приводит к существенному увеличению температуры газа, интенсивности фазовых переходов, более резкому уменьшению вдоль оси струи массового расхода и диаметров капель, а также к увеличению их объемных концентраций на участке струи вблизи среза сопла.

Ключевые слова: двухфазная струя, газ, капли, фазовые переходы, коагуляция и дробление капель, математическое моделирование, результаты расчетов

Для цитирования: *Зуев Ю. В.* Влияние степени подогрева газокапельной турбулентной струи на ее параметры // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 225–235. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-225-235>, EDN: MQCRIY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Influence of gas-droplet turbulent jet heating degree on its parameters

Yu. V. Zuev

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia

Yuri V. Zuev, yuri_zuev@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2091-0912>, SPIN: 4501-1347, AuthorID: 231856



Abstract. The article is devoted to the study of the influence of the heating degree of the gas-droplet jet with phase transitions and droplet collisions on the parameters of this jet. By the heating degree of the jet is meant the ratio of gas temperatures at the nozzle edge and in the environment. The research method is mathematical modeling. Calculations are carried out using our previously published mathematical model of a two-phase jet obtained as part of the RANS approach. In this model, the averaged equations of gas phase and droplets are written in Euler variables. Due to the fact that jet currents are self-similar, algebraic formulas are used to calculate the moments of correlation of pulsation phase parameters. Mathematical modeling considers a gas-droplet submerged jet flowing into a gas medium with a temperature significantly different from the gas temperature in the outlet section of the nozzle. The analysis of the results of the calculations showed that when the heated two-phase jet expires into a gas medium with a lower temperature, the numerical value of the heating degree of the jet does not significantly affect all the parameters of the jet. If a two-phase jet flows into a gas medium with a higher temperature than the gas temperature in the outlet section of the nozzle, the heating degree of the jet significantly affects the phase temperatures, volume concentrations and droplet sizes, as well as the intensity of phase transitions. In this case reduction of the heating degree of the jet leads to significant increase in temperature of gas, intensity of phase transitions, sharper reduction along an axis of a jet of mass flow and diameters of drops and also to increase in their volume concentrations on the site of a jet near an outlet section of the nozzle.

Keywords: two-phase jet, gas, drops, phase transitions, droplet coagulation and fragmentation, mathematical modeling, calculation results

For citation: Zuev Yu. V. Influence of gas-droplet turbulent jet heating degree on its parameters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 225–235 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-225-235>, EDN: MQCRIY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Двухфазные турбулентные струйные течения находят широкое применение в различных областях техники. Во многих случаях непрерывной фазой таких течений является газ, а дискретной фазой — капли жидкости. При математическом моделировании газокапельных струй, наряду с различием в скорости и температуре фаз, полидисперсностью капель и межфазным теплообменом, необходимо учитывать фазовые превращения и столкновения капель, которые заканчиваются их коагуляцией или дроблением. Предложенные за последние тридцать лет математические модели газожидкостных струй имеют существенные ограничения по их использованию, связанные с допущениями при выводе уравнений этих моделей. Это можно проиллюстрировать на примере статей [1–5], характерных для времени их опубликования.

Модели [1,2] разработаны для газовых струй с каплями фреона, в которых температура капель близка к температуре газовой фазы. Поэтому в них отсутствует уравнение энергии капель, которое заменяется равенством температуры капель температуре газа. Результаты расчетов по моделям [4,5] сравниваются с данными экспериментального исследования струи с каплями ацетона, температура которых отличается всего на 20 К от температуры газовой фазы. Это не позволяет предсказать поведение этих моделей при существенно большем различии в температурах фаз. Во всех отмеченных моделях учитывается только испарение жидкой фазы, но в случае полидисперсного течения, наряду с испарением мелких капель, на крупных каплях возможна конденсация пара в результате различия температур этих капель. Вследствие того, что в математических моделях [1–5] не учитываются столкновения капель, приводящие к их коагуляции или дроблению, эти модели, как отмечают их авторы, могут быть использованы только при объемной концентрации капель, не превышающей 10^{-4} . На практике концентрация капель в газокапельных струях существенно превосходит эту величину.

Информация о проведении другими авторами математического моделирования газока-



пельных струй с одновременно протекающими в них фазовыми переходами, коагуляцией и дроблением капель в настоящее время в литературе отсутствует. Об этом свидетельствуют обзорные статьи [6, 7].

Математическая модель газок капельной струи с фазовыми переходами и соударениями капель, приводящими к их коагуляции или дроблению, описана в нашей статье [8]. В этой работе моделировалась газок капельная струя с каплями воды, истекающая в неподвижную воздушную среду с температурой, существенно превышающей температуру газа на срезе сопла (в начальном сечении струи). Результаты расчетов позволили выявить степень влияния фазовых переходов и соударений капель на все осредненные параметры струи в зависимости от величины объемной концентрации капель на срезе сопла. В статье делается предположение о том, что при истечении двухфазной струи в газовую среду с температурой, меньшей температуры газа на срезе сопла, влияние фазовых переходов и соударений капель на параметры струи будет существенно отличаться от описанного в [8].

Ниже приводится математическая модель газок капельной струи с учетом фазовых переходов и соударений капель, и сравниваются результаты расчетов этой струи с различными граничными условиями по температуре газовой фазы на срезе сопла и в окружающей среде.

1. Математическая модель газок капельной струи с фазовыми переходами и столкновениями капель

При проведении расчетов газок капельной турбулентной струи использовалась математическая модель, приведенная в нашей статье [8]. В этой модели уравнения, описывающие движение газа и капель, записаны в переменных Эйлера с использованием RANS-подхода. Эти уравнения получены в результате осреднения по пространству [9] и времени [10] мгновенных уравнений Навье – Стокса с последующей оценкой порядка их членов [10].

В окончательном виде осредненные уравнения фаз турбулентной круглой стационарной неизотермической газок капельной струи в приближении пограничного слоя в цилиндрической системе координат записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) = - \sum_{f=1}^F M_{f,ph}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_f \alpha_f u_f + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) = M_{f,ph} + M_{f,c}, \quad (2)$$

$$u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \langle u' v' \rangle \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) - \sum_{f=1}^F F_{cf,x} - \sum_{f=1}^F M_{f,ph} (u_{ph} - u), \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial u_f}{\partial y} = - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + F_{cf,x} + M_{f,ph} (u_{ph} - u_f) + \sum_{f=1}^F M_{fj,c} (u_j - u_f), \quad (5)$$

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + 2 \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial v_f}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \rho_f (\alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + u_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle) - \frac{v_f}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle v_f'^2 \rangle + F_{cf,y} + M_{f,ph} (v_{ph} - v_f) + \sum_{f=1}^F M_{fj,c} (v_j - v_f), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial c_p T}{\partial x} + \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) \frac{\partial c_p T}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} - \\
 & - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \langle T' v' \rangle \sum_{k=1}^K (c_{pk} \rho_k \alpha_k) - \langle u' v' \rangle \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial u}{\partial y} - \sum_{f=1}^F F_{cf,x} (u_f - u) - \\
 & - \sum_{f=1}^F M_{f,ph} \left[i_{ph} - i_v(T) + \frac{(u_{ph} - u)^2}{2} \right] - \sum_{f=1}^F Q_{f,conv}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial c_f T_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial c_f T_f}{\partial y} = - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y c_f \rho_f \alpha_f \langle T'_f v'_f \rangle - \\
 & - \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle \frac{\partial u_f}{\partial y} + M_{f,ph} \left[i_{ph} - i_f(T_f) + \frac{(u_{ph} - u_f)^2}{2} \right] + \\
 & + \sum_{f=1}^F M_{fj,c} \left[i_j(T_f) - i_j(T_j) + \frac{(u_j - u_f)^2}{2} \right] + Q_{f,conv}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} = \\
 & = - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \langle \alpha'_i v' \rangle \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) - \sum_{f=1}^F M_{f,ph}, \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\frac{dD_f^3}{dx} = \frac{D_f^3}{\alpha_f \rho_f u_f} M_{f,ph} + \frac{6}{\pi u_f} + \sum_{j=1}^f K_{fj} e_{fj} \Phi_{fj} \alpha_j, \tag{10}$$

$$p = \rho_k R_k T, \quad \rho_f = \text{const}, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k + \sum_{f=1}^F \alpha_f = 1. \tag{12}$$

В этой системе уравнений: (1) и (2) — уравнения массы фаз; (3) и (4) — проекции уравнения движения газовой фазы на оси x и y ; (5) и (6) — проекции уравнения движения капель фракции f на оси x и y ; (7) и (8) — уравнения энергии фаз; (9) — уравнение концентрации компонентов газовой фазы; (10) — уравнение, описывающее изменение диаметров капель за счет фазовых переходов, коагуляции и дробления капель; (11) — уравнения состояния газовой фазы и капель; (12) — уравнение, связывающее объемные концентрации компонентов газовой фазы и фракций капель.

В данной работе для капель используется модель дискретных частиц, в соответствии с которой капли объединяются в F фракций, параметры которых обозначаются индексом f ($f = 1, 2, \dots, F$). Параметры компонентов газовой фазы обозначаются индексом k ($k = 1, 2, \dots, K$); параметры газовой фазы, общие для всех ее компонентов (скорость, температура, давление), индексов не имеют; пульсационные параметры фаз обозначаются штрихами, а их моменты корреляции заключены в скобки вида $\langle \cdot \rangle$.

При записи уравнений (1)–(12) введены следующие обозначения: x и y — оси цилиндрической системы координат; u и v — проекции вектора скорости \mathbf{W} на оси координат x и y ; ρ — физическая плотность; α — объемная концентрация; p — давление; T — температура; D_f — диаметр капель фракции f ; R — удельная газовая постоянная; c_p — удельная теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении; c_f — удельная теплоемкость вещества капель; $F_{cf,x}$ и $F_{cf,y}$ — проекции вектора силы сопротивления капель \mathbf{F}_{cf} на оси x и y [11]; $Q_{f,conv}$ — удельный (приходящийся на единицу объема среды) конвективный тепловой поток от газа к каплям фракции f [11]; $M_{f,pf}$ — интенсивность фазовых переходов (масса вещества капель фракции f , претерпевающая фазовый переход в единице объема среды за единицу време-



ни); $M_{f,c}$ — изменение массы капель фракции f за счет их столкновений с каплями других фракций в единице объема среды за единицу времени; $M_{fj,c}$ — масса капель, перешедшая из фракции f во фракцию j за счет столкновений капель этих фракций в единице объема среды за единицу времени; $i_f(T_f)$ и $i_j(T_j)$ — удельные энтальпии вещества капель фракций f и j при температурах T_f и T_j ; $i_v(T)$ — удельная энтальпия пара вещества капель при температуре газовой фазы T ; u_{ph} и v_{ph} — проекции вектора скорости фазового перехода \mathbf{W}_{ph} на оси x и y ; i_{ph} — удельная энтальпия вещества капель, претерпевающего фазовый переход; K_{fj} , e_{fj} , Φ_{fj} — константа коагуляции, коэффициент захвата и коэффициент эффективности соударений капель фракций f и j [12]. При испарении капель $\mathbf{W}_{ph} = \mathbf{W}_f$; $i_{ph} = i_v(T_f)$, а при конденсации пара $\mathbf{W}_{ph} = \mathbf{W}$; $i_{ph} = i_v[T_{vs}(p_v)]$ [9] ($i_v(T_f)$ — удельная энтальпия пара вещества капель при температуре T_f ; $i_v[T_{vs}(p_v)]$ — удельная энтальпия вещества капель на линии насыщения при парциальном давлении пара p_v в газовой смеси).

В связи с тем, что объемная концентрация пара в газовой фазе при проведении расчетов, результаты которых приводятся ниже, была существенно меньше 0.2, для интенсивности фазовых переходов используется формула [13]

$$M_{f,ph} = \frac{6\alpha_f D_\alpha \text{Sh}}{D_f^2} (\rho_{vp} - \rho_{vs}),$$

в которой ρ_{vp} — плотность пара, определяемая по его парциальному давлению в газовой фазе; ρ_{vs} — плотность пара, соответствующая давлению насыщения вещества капель при температуре капли T_f ; D_α — коэффициент диффузии пара в газовой смеси; Sh — критерий Шервуда.

Оценка порядка членов уравнений системы (1)–(12), проведенная при их выводе, показала, что расчет коагуляции и дробления капель в двухфазной струе можно проводить в одномерной постановке, пренебрегая пульсационными скоростями капель по сравнению с их осредненными скоростями, что согласуется с выводами монографии [14]. Поэтому в данной работе используется квазиодномерная модель столкновений разделенных на фракции капель за счет различия в их осредненных продольных скоростях, описанная в [12]. В этой монографии, в частности, приведены формулы для расчета членов уравнений (2), (5), (6) и (8), учитывающих изменение массы, количества движения и энергии капель фракции f в результате их взаимодействия с каплями других фракций.

Вследствие того, что двухфазные струйные течения являются автомодельными, моменты корреляции пульсационных параметров фаз, входящие в уравнения системы (1)–(12), рассчитываются с использованием алгебраических выражений [8].

Метод расчета двухфазной струи, математическая модель которой аналогична приведенной выше, изложен в монографии [15]. Валидация математической модели (1)–(12), выполненная в [8] с использованием данных экспериментального исследования воздушной струи с каплями керосина, истекающей в спутный воздушный поток с температурой 450 К [16], показала хорошее совпадение результатов расчетов с данными эксперимента.

2. Результаты расчетов

Расчеты двухфазной неизотермической турбулентной струи, выполненные с использованием приведенной выше математической модели, позволили выявить влияние граничных условий по температуре газовой фазы на параметры струи. В теории однофазных струй вводится параметр, который называется степенью подогрева струи. Он представляет собой отношение температуры газа на оси начального сечения струи и на ее границе. В данной работе этот параметр используется для газовой фазы струи: $\theta = T_{0m}/T_e$ (T_{0m} — температура газовой фазы на оси начального сечения струи; T_e — температура газа на границе струи). Ниже сравниваются результаты расчетов, в которых значения параметра θ были меньше или больше 1: $T_{0m} = 300$ К, $T_e = 400$ К ($\theta = 0.75$); $T_{0m} = 300$ К, $T_e = 500$ К ($\theta = 0.60$); $T_{0m} = 400$ К, $T_e = 300$ К ($\theta = 1.33$); $T_{0m} = 500$ К, $T_e = 300$ К ($\theta = 1.67$).

Предполагалось, что дисперсионной фазой струйного двухфазного течения является смесь водяного пара (компонент $k = 1$) с воздухом (компонент $k = 2$), а дисперсной фазой – капли воды, объединенные в пять фракций [12] с характерными диаметрами 15, 45, 75, 105 и 135 мкм. При проведении расчетов принималось, что струя истекает из круглого сопла радиусом $R_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ м в неподвижную воздушную среду с давлением $p = 10^5$ Па и относительной влажностью 65%, которой соответствует объемная концентрация водяного пара $\alpha_{k=1} = 0.024$. Считалось, что в начальном сечении струи поперечные поля всех параметров равномерные; скорость газа $u_0 = 100$ м/с; скорость капель всех фракций $u_{f0} = 80$ м/с; температура капель всех фракций $T_{f0} = 300$ К; объемная концентрация водяного пара $\alpha_{k=1} = 0.033$ (соответствует относительной влажности воздуха 90%); суммарная объемная концентрация капель $\alpha_{f\Sigma 0} = \sum \alpha_{f0} = 10^{-3}$ с распределением этой концентрации по фракциям в пропорции 1:2:4:2:1.

Влияние степени подогрева двухфазной струи, определенной по температуре газовой фазы, на параметры фаз этой струи можно проследить по графикам на рис. 1–3. На этих рисунках зависимости параметров фаз на оси струи от продольной координаты x представлены в безразмерном виде. При этом введены следующие обозначения: $\bar{x} = x/R^*$; $\bar{u}_m = u_m/u^*$; $\bar{u}_{fm} = u_{fm}/u^*$; $\bar{u}_{f\Sigma m} = u_{f\Sigma m}/u^*$; $\bar{T}_m = T_m/T^*$; $\bar{T}_{fm} = T_{fm}/T^*$; $\bar{\alpha}_{fm} = \alpha_{fm}/\alpha^*$; $\bar{D}_{fm} = D_{fm}/D_f^*$; $\bar{M}_{f,ph} = M_{f,ph}/(D_\alpha^* \rho^*/D_f^{*2})$, в которых индексом m обозначены параметры фаз на оси струи. Масштабы соответствующих величин имеют значения: $R^* = 25 \cdot 10^{-3}$ м; $u^* = 100$ м/с; $T^* = 288$ К; $D_f^* = 100 \cdot 10^{-6}$ м; $\alpha^* = \alpha_{f\Sigma 0} = 10^{-3}$; ρ^* и D_α^* – плотность водяного пара и его коэффициент диффузии в воздухе при нормальных условиях. Среднемассовая скорость капель рассчитывается по формуле: $u_{f\Sigma} = \sum \alpha_f u_f^2 / \sum \alpha_f u_f$.

О влиянии степени подогрева струи на скорости фаз можно судить по результатам расчетов, представленным на рис. 1.

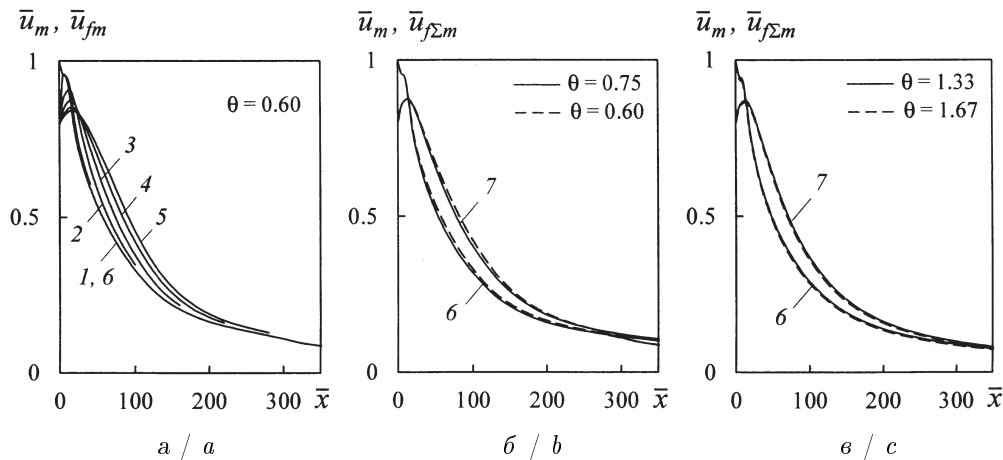


Рис. 1. Изменение скорости газа и скорости капель вдоль оси двухфазной струи при различных значениях степени подогрева этой струи θ : а – скорость газа и скорости пяти фракций при $\theta = 0.60$; б – скорость газа и среднемассовая скорость капель при $\theta < 1$; в – скорость газа и среднемассовая скорость капель при $\theta > 1$. Кривые 1–5 – скорости капель фракций $f = 1-5$; 6 – скорость газа; 7 – среднемассовая скорость капель

Fig. 1. Change in the gas velocity and droplet velocities along the axis of the two-phase jet at different values of the heating degree of this jet θ : a is the velocities of gas and droplets of five fractions at $\theta = 0.60$; b is the gas velocity and average mass velocity of drops at $\theta < 1$; c is the gas velocity and average mass velocity of drops at $\theta > 1$. Curves 1–5 are droplet velocities of fractions $f = 1-5$; 6 is the gas velocity; 7 is the average mass velocity of drops

На рис. 1, а приведены графики изменения вдоль оси струи скорости газа и капель пяти выделенных фракций для случая $\theta = 0.60$, при котором струя истекает в окружающую



среду с существенно бóльшей температурой по сравнению с температурой фаз на срезе сопла. Скорость газа при удалении от сопла уменьшается за счет подмешивания к струе газа из окружающей среды. При этом скорость капель возрастает, достигает скорости газа, а затем уменьшается, оставаясь больше скорости газа. Причем чем больше размер капель, тем в большей степени их скорости отличается от скорости газа. Это объясняется увеличением инерционности капель с ростом их диаметра. Зависимости $\bar{u}_m = \bar{u}_m(\bar{x})$ и $\bar{u}_{fm} = \bar{u}_{fm}(\bar{x})$ для других значений параметра θ аналогичны зависимостям, представленным на рис. 1, а для $\theta = 0.60$.

На рис. 1, б приведены графики изменения вдоль оси струи скорости газа \bar{u}_m и среднемассовой скорости капель $\bar{u}_{f\Sigma m}$ при $\theta < 1$, а на рис. 1, в — эти же графики при $\theta > 1$. Из данных рис. 1 следует, что изменение степени подогрева двухфазной струи с фазовыми переходами и соударениями капель в диапазоне $0.60 < \theta < 1.67$ практически не влияет на ее кинематические параметры.

На рис. 2 представлены зависимости изменения вдоль оси струи других ее параметров для степени подогрева $\theta < 1$.

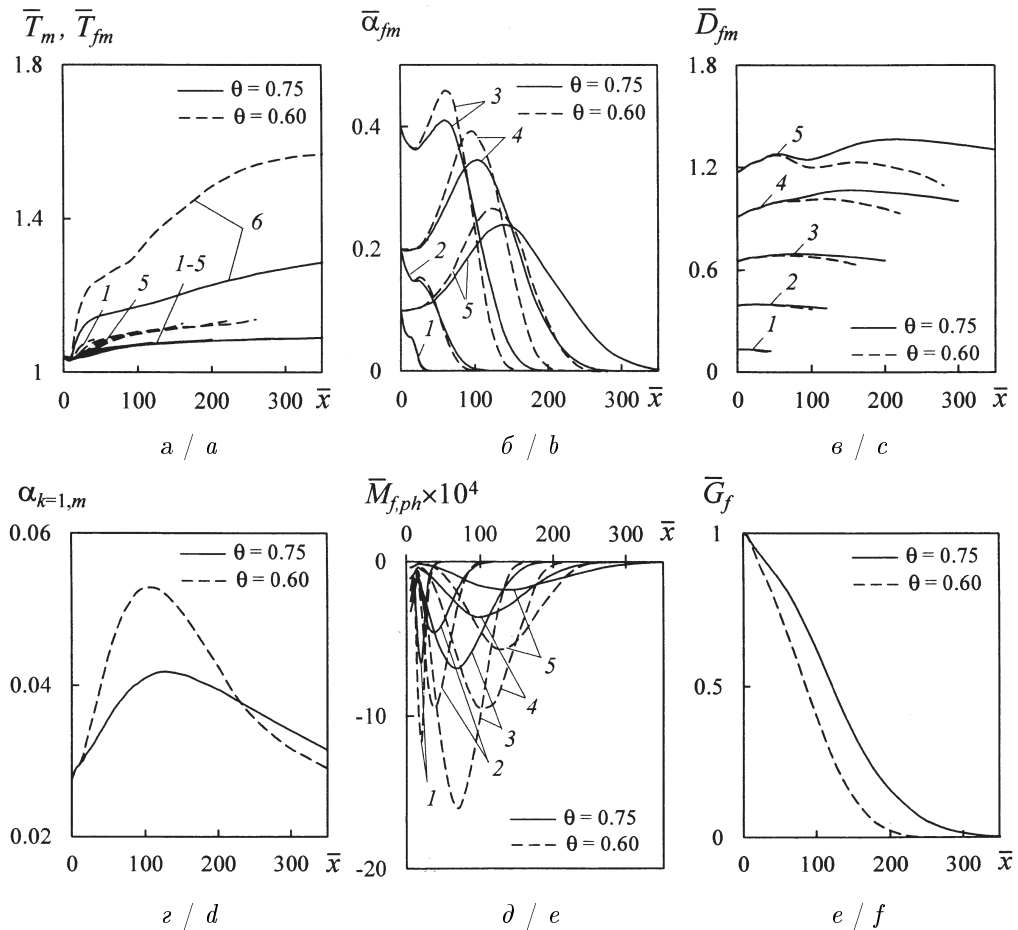


Рис. 2. Графики изменений значений параметров вдоль оси двухфазной струи при степени подогрева струи $\theta < 1$: а — температура фаз; б — объемная концентрация капель; в — диаметр капель; г — объемная концентрация пара в газовой смеси; д — интенсивность фазовых переходов; е — массовый расход капель. Номера кривых соответствуют номерам фракций

Fig. 2. Graphs of parameter changes along the axis of the two-phase jet, when the jet heating degree is $\theta < 1$: а are the phases temperatures; б are the volume concentrations of droplets; в are the diameters of droplets; г is the volume concentration of steam in the gas mixture; д is the intensity of phase transitions; е is the mass flow velocity of droplets. Curve numbers correspond to fraction numbers

В этом случае при удалении от сопла температура газа на оси струи возрастает (рис. 2, а), причем при подогреве $\theta = 0.60$ величина этой температуры примерно в два раза больше по сравнению с подогревом $\theta = 0.75$. Температура капель заметно увеличивается на участке струи $\bar{x} < 100$, при этом ее значения обратно пропорциональны размеру капель. При больших значениях \bar{x} рост температуры капель замедляется и температура капель всех фракций примерно одинакова. На определенных расстояниях от сопла, зависящих от размеров капель, капли исчезают, полностью испаряясь. Увеличение значения параметра θ приводит к уменьшению температуры газа и капель вследствие поступления в струю из окружающей среды газа с меньшей температурой.

На рис. 2, б представлены графики изменения объемных концентраций капель пяти фракций вдоль оси струи, построенные для двух значений степени подогрева этой струи. Зависимости $\bar{\alpha}_{fm} = \bar{\alpha}_{fm}(\bar{x})$ для капель фракций $f = 2-5$, в отличие от однофазных струй, являются немонотонными: на некоторых расстояниях от начального сечения струи, зависящих от размера капель, происходит увеличение их концентрации. Этот эффект, который в литературе называется «шнурованием», подробно рассмотрен в статье [17]. При уменьшении параметра θ (увеличении температуры окружающей среды) максимальные значения концентраций капель фракций $f = 3-5$ существенно возрастают (до 15%).

Графики на рис. 2, в позволяют выявить влияние степени подогрева струи на размеры капель. Это влияние является существенным и выражается в уменьшении диаметра капель при уменьшении значения параметра θ (максимум на 18% для капель фракции $f = 5$).

Зависимости объемной концентрации пара в газовой смеси от координаты \bar{x} приведены на рис. 2, г. Максимальные значения этой концентрации соответствуют $\bar{x} \simeq 100$, причем при $\theta = 0.60$ максимальное значение $\bar{\alpha}_{k=1,m}$ на 30% больше по сравнению со случаем $\theta = 0.75$.

На рис. 2, д приведены графики зависимостей интенсивности фазовых переходов $\bar{M}_{f,ph} = \bar{M}_{f,ph}(\bar{x})$ для капель различного размера от степени подогрева струи. Абсолютные значения этих зависимостей имеют максимумы, величина и расположение которых зависят от размера капель. Согласно результатам расчетов, приведенным на этом рисунке, уменьшение степени подогрева струи от 0.75 до 0.60 приводит к увеличению интенсивности фазовых переходов в 1.5–2.0 раза.

На рис. 2, е изображены графики изменения вдоль оси двухфазной струи массового расхода дисперсной фазы в поперечных сечениях струи при различных значениях параметра θ . Уменьшение степени подогрева струи приводит к более резкому уменьшению вдоль ее оси массового расхода капель.

На рис. 3 показаны зависимости изменения по длине струи ее параметров при степени подогрева $\theta > 1$.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 3, свидетельствуют о том, что при степени подогрева двухфазной струи $\theta > 1$ величина этого подогрева практически не влияет на значения температуры фаз, объемной концентрации и диаметра капель, интенсивности фазовых переходов и массового расхода капель. И при этом в случае $\theta > 1$ существуют значительные отличия изменения этих параметров струи от случая $\theta < 1$. При истечении нагретой струи в среду с меньшей температурой на участке $\bar{x} < 50$ (рис. 3, а) происходит резкое падение температуры газа в струе вследствие подмешивания к ней более холодного газа из окружающего пространства; при $\bar{x} > 50$ температура газа на оси струи плавно уменьшается. Из-за этого температура капель вблизи сопла незначительно возрастает (максимум на 6%), а затем уменьшается, приближаясь к температуре окружающей среды. Вследствие уменьшения температуры газа в струе уменьшается интенсивность фазовых переходов и параметры струи в большей степени зависят от столкновений капель. Это приводит к возрастанию диаметра капель и замедлению убывания их массового расхода вдоль оси струи.

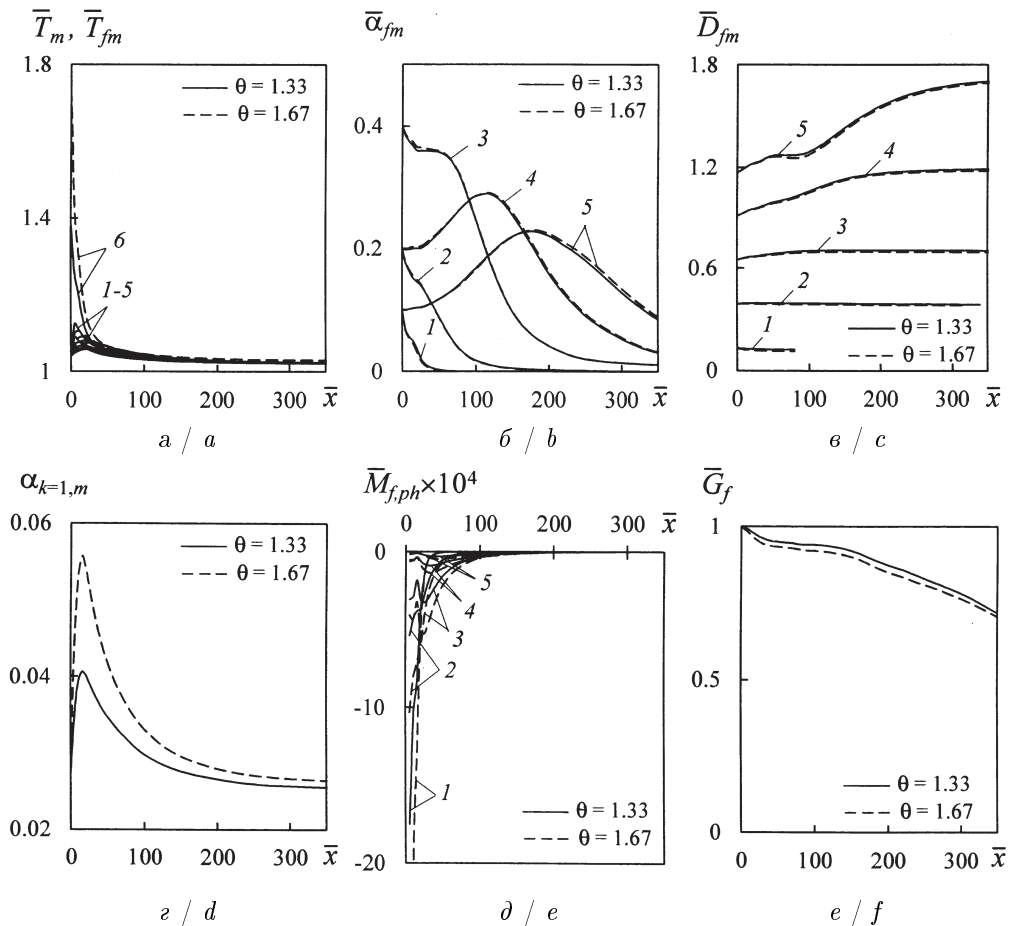


Рис. 3. Графики изменений значений параметров вдоль оси двухфазной струи при степени подогрева струи $\theta > 1$: а — температура фаз; б — объемная концентрация капель; в — диаметр капель; г — объемная концентрация пара в газовой смеси; д — интенсивность фазовых переходов; е — массовый расход капель. Номера кривых соответствуют номерам фракций

Fig. 3. Graphs of parameter changes along the axis of the two-phase jet, when the jet heating degree is $\theta > 1$: а are the phases temperatures; б are the volume concentrations of droplets; в are the diameters of droplets; г is the volume concentration of steam in the gas mixture; д is the intensity of phase transitions; е is the mass flow velocity of droplets. Curve numbers correspond to fraction numbers

Заклучение

Проведены расчеты газок капельной турбулентной неизотермической полидисперсной струи с учетом фазовых переходов, коагуляции и дробления капель, в которых изменялась степень подогрева струи θ . При этом под степенью подогрева двухфазной струи понимается отношение температуры газа на срезе сопла и в окружающей среде (на границе струи). Степень подогрева струи варьировалась в диапазоне 0.60–1.67. Анализ результатов расчетов показал, что, независимо от величины степени подогрева струи, этот подогрев не оказывает какого-либо заметного влияния на скорость газа и капель. Влияние степени подогрева струи на другие ее параметры принципиально отличается для случаев $\theta > 1$ и $\theta < 1$. При $\theta > 1$ (истечение нагретой струи в газовую среду с меньшей температурой) величина степени подогрева практически не оказывает влияния на температуру фаз, объемную концентрацию и размер капель и незначительно влияет на интенсивность фазовых переходов, которые локализованы в небольшой области, расположенной за срезом сопла. При $\theta < 1$ (истечение струи в газовую среду с температурой, превышающей температуру



газовой фазы на срезе сопла) уменьшение степени подогрева струи от 0.75 до 0.60 приводит к изменению всех параметров струи: на оси струи температура газа увеличивается (примерно в два раза); максимальные значения объемной концентрации капель фракций $f = 3-5$ возрастают (до 15%); диаметр капель этих фракций уменьшается (до 18%); интенсивность фазовых переходов возрастает (в 1.5–2.0 раза). При этом температура капель на оси струи увеличивается незначительно (до 4%) вследствие их испарения.

Список литературы

1. Mostafa A. A., Elghobashi S. E. A two-equation turbulence model for jet flows laden with vaporizing droplets // *International Journal of Multiphase Flow*. 1985. Vol. 11, iss. 4. P. 515–533. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(85\)90073-4](https://doi.org/10.1016/0301-9322(85)90073-4)
2. Mostafa A. A., Mongia H. C. On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus Lagrangian approach // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1987. Vol. 30, iss. 12. P. 2583–2593. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90139-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90139-6)
3. Пахомов М. А., Терехов В. И. Численное исследование турбулентной структуры полидисперсной двухфазной струи с испаряющимися каплями // *Математическое моделирование*. 2016. Т. 28, № 11. С. 64–78. EDN: XRIPKL
4. De S., Lakshmisha K. N. Simulations of evaporating spray jet in a uniform co-flowing turbulent air stream // *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*. 2009. Vol. 1, iss. 2. P. 169–198. DOI: <https://doi.org/10.1260/175682709788707459>
5. Wang J., Dalla Barba F., Picano F. Direct numerical simulation of an evaporating turbulent diluted jet-spray at moderate Reynolds number // *International Journal of Multiphase Flow*. 2021. Vol. 137. Art. 103567. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103567>
6. Вараксин А. Ю. Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (обзор) // *Теплофизика высоких температур*. 2020. Т. 58, № 4. С. 646–669. DOI: <https://doi.org/10.31857/S004036442004016X>, EDN: NBIXRZ
7. Вараксин А. Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков с твердыми частицами, каплями и пузырями // *Теплофизика высоких температур*. 2023. Т. 61, № 6. С. 926–948. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0040364423060169>, EDN: VCCAVW
8. Зуев Ю. В. Газокапельные турбулентные струи с фазовыми превращениями и соударениями капель // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2025. № 1. С. 146–160. DOI: <https://doi.org/10.31857/S1024708425010072>, EDN: DUXGPS
9. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред : в 2 ч. Ч. 1. Москва : Наука, 1987. 464 с.
10. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. Москва : Физматгиз, 1963. 680 с.
11. Стернин Л. Е., Шрайбер А. А. Многофазные течения газа с частицами. Москва : Машиностроение, 1994. 320 с.
12. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. Москва : Машиностроение, 1974. 212 с.
13. Fuchs N. A. Evaporation and droplet growth in gaseous media. London : Pergamon Press, 1959. 80 p.
14. Friedlander S. K. Smoke, dust and haze: Fundamentals of aerosol behavior. New York : Wiley and Sons, 1977. 317 p.
15. Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газовзвеси. Киев : Наукова думка, 1987. 240 с.
16. Yule A. J., Seng C. Ah., Felton P. G., Ungut A., Chigier N. A. A study of vaporizing fuel sprays by laser techniques // *Combustion and Flame*. 1982. Vol. 44, iss. 1–3. P. 71–84. DOI: [https://doi.org/doi:10.1016/0010-2180\(82\)90064-5](https://doi.org/doi:10.1016/0010-2180(82)90064-5)
17. Зуев Ю. В. О некоторых причинах немонотонного изменения концентрации дискретной фазы в двухфазной турбулентной струе // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2020. № 2. С. 51–60. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0568528120020152>, EDN: CGMDJX

References

1. Mostafa A. A., Elghobashi S. E. A two-equation turbulence model for jet flows laden with vaporizing droplets. *International Journal of Multiphase Flow*, 1985, vol. 11, iss. 4, pp. 515–533. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(85\)90073-4](https://doi.org/10.1016/0301-9322(85)90073-4)
2. Mostafa A. A., Mongia H. C. On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus



- Lagrangian approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1987, vol. 30, iss. 12, pp. 2583–2593. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90139-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90139-6)
3. Pakhomov M. A., Terekhov V. I. Numerical simulation of turbulent flow in a polydispersed two-phase jet with evaporating droplets. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2016, vol. 28, iss. 11, pp. 64–78 (in Russian). EDN: XRIPKL
 4. De S., Lakshmisha K. N. Simulations of evaporating spray jet in a uniform co-flowing turbulent air stream. *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*, 2009, vol. 1, iss. 2, pp. 169–198. DOI: <https://doi.org/10.1260/175682709788707459>
 5. Wang J., Dalla Barba F., Picano F. Direct numerical simulation of an evaporating turbulent diluted jet-spray at moderate Reynolds number. *International Journal of Multiphase Flow*, 2021, vol. 137, art. 103567. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103567>
 6. Varaksin A. Yu. Two-phase flows with solid particles, droplets, and bubbles: Problems and research results (review). *High Temperature*, 2020, vol. 58, iss. 4, pp. 595–614. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X20040161>, EDN: GWMWUD
 7. Varaksin A. Yu. Hydro- and gas dynamics of two-phase flows with solid particles, droplets, and bubbles (review). *High Temperature*, 2023, vol. 61, iss. 6, pp. 852–870. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0040364423060169>
 8. Zuev Yu. V. Gas-droplet turbulent jets with phase transitions and droplet collisions. *Fluid Dynamics*, 2025, vol. 60, art. 21. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462824603437>
 9. Nigmatulin R. I. *Dynamics of multiphase media*. Vol. 1. New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 507 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1987. 464 p.).
 10. Hinze J. O. *Turbulence. An introduction to its mechanism and theory*. New York, McGraw-Hill, 1959. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112061230266>
 11. Sternin L. E., Shrayber A. A. *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase gas-particle flows]. Moscow, Mashinostroenie, 1994. 320 p. (in Russian).
 12. Sternin L. E. *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase nozzle flows]. Moscow, Mashinostroenie, 1974. 212 p. (in Russian).
 13. Fuchs N. A. *Evaporation and droplet growth in gaseous media*. London, Pergamon Press, 1959. 80 p.
 14. Friedlander S. K. *Smoke, dust and haze: Fundamentals of aerosol behavior*. New York, Wiley and Sons, 1977. 317 p.
 15. Shrayber A. A., Gavin L. B., Naumov V. A., Yatsenko V. P. *Turbulentnye techeniya gazovzvesi* [Turbulent flows of a gas suspension]. Kyiv, Naukova dumka, 1987. 240 p. (in Russian).
 16. Yule A. J., Seng C. Ah., Felton P. G., Ungut A., Chigier N. A. A study of vaporizing fuel sprays by laser techniques. *Combustion and Flame*, 1982, vol. 44, iss. 1–3, pp. 71–84. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(82\)90064-5](https://doi.org/10.1016/0010-2180(82)90064-5)
 17. Zuev Yu. V. Some reasons for nonmonotonic variation of discrete-phase concentration in a turbulent two-phase jet. *Fluid Dynamics*, 2020, vol. 55, iss. 2, pp. 194–203. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462820020147>, EDN: WBTYZH

Поступила в редакцию / Received 19.06.2025

Принята к публикации / Accepted 18.12.2025

Опубликована / Published 01.06.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 236–250

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 236–250

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-236-250>

EDN: <https://elibrary.ru/PPRMVU>

Научная статья

УДК 517.98

Исследование гемодинамических характеристик течения в Виллизиевом круге с использованием реологических моделей крови

А. А. Любимова¹, А. Г. Кучумов^{1,2}✉

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский просп., д. 29

²Научно-технологический университет «Сириус», Россия, 354340, федеральная территория «Сириус», Олимпийский просп., д. 1

Любимова Александра Алексеевна, лаборант-исследователь лаборатории биожидкостей, sashal05@mail.ru, SPIN: 2226-6307, AuthorID: 1324238

Кучумов Алексей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, ¹заведующий лабораторией биожидкостей; ²руководитель научной группы, kuchumov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0466-175X>, SPIN: 5522-1565, AuthorID: 164889

Аннотация. Нарушения гемодинамики и геометрические особенности сосудов играют важную роль в возникновении и прогрессировании различных сосудистых патологий, например аневризм. Аневризмы сосудов головного мозга особенно опасны из-за специфической локализации. Экспериментальные и клинические методы часто не позволяют адекватно оценить текущее состояние гемодинамики пациента или предсказать прогрессирование заболевания *in vivo*. Численное моделирование гемодинамики может стать ключевым инструментом для оценки риска роста и разрыва церебральных аневризм. Точность таких моделей зависит от многих факторов, включая выбор реологической модели крови. Несмотря на распространенное использование ньютоновской модели, ее адекватность для церебральных артерий требует верификации в сравнении с более сложными неньютоновскими моделями, учитывающими зависимость вязкости от скорости сдвига. Целью данного исследования было провести сравнительный анализ влияния трех реологических моделей крови (ньютоновской, Carreau и Casson) на гемодинамические характеристики в восьми анатомических вариантах Виллизиева круга с аневризмами. В данном исследовании геометрия церебральных сосудов была получена путем сегментации КТ-изображений. Методами вычислительной гидродинамики (CFD) проведено моделирование кровотока. На входах задавались профили скорости, полученные на основе данных интракраниальной доплерографии, на выходах — трехэлементная модель Windkessel. Исследовались распределения скорости, давления, пристеночного касательного напряжения (WSS) и индекса его колебаний (OSI). Стенки сосудов считались жесткими. Было установлено, что в крупных артериях различия между реологическими моделями в расчетах скорости, давления, WSS и OSI являются незначительными. Все модели показали сходное систематическое отклонение от клинических данных доплерографии. Внутри куполов аневризм скорости тока крови низки, а профили для всех трех реологических моделей практически идентичны по форме, ньютоновская модель склонна завышать значения. Результаты показывают, что для моделирования гемодинамики в крупных сосудах Виллизиева круга использование ньютоновской модели является допустимым упрощением.

Ключевые слова: аневризма, Виллизиев круг, вычислительная гидродинамика, гемодинамика, моделирование, реологические модели

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2025-0001).



Для цитирования: Любимова А. А., Кучумов А. Г. Исследование гемодинамических характеристик течения в Виллизиевом круге с использованием реологических моделей крови // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 236–250. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-236-250>, EDN: PPRMVU
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The influence of the rheological models of blood on the hemodynamic characteristics of the flow in the Circle of Willis

A. A. Lyubimova¹, A. G. Kuchumov^{1,2}✉

¹Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Ave., Perm 614990, Russia

²Sirius University of Science and Technology, 1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia

Alexandra A. Lyubimova, sasha105@mail.ru, SPIN: 2226-6307, AuthorID: 1324238

Alexei G. Kuchumov, kyuchumov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0466-175X>, SPIN: 5522-1565, AuthorID: 164889

Abstract. Hemodynamic disturbances and the geometric features of blood vessels play an important role in the onset and progression of various vascular pathologies, such as aneurysms. Cerebral aneurysms are particularly dangerous due to their specific location. Experimental and clinical methods often fail to adequately assess a patient's current hemodynamic status or predict disease progression *in vivo*. Numerical modeling of hemodynamics can become a key tool for assessing the risk of growth and rupture of cerebral aneurysms. The accuracy of such models depends on many factors, including the choice of a rheological blood model. Despite the widespread use of the Newtonian model, its adequacy for cerebral arteries requires verification in comparison with more complex non-Newtonian models that account for shear-dependent viscosity. The aim of this study was to conduct a comparative analysis of the influence of three rheological blood models (Newtonian, Carreau, and Casson) on the hemodynamic characteristics in eight anatomical variants of the Circle of Willis with aneurysms. In this study, the geometry of the cerebral vasculature was obtained by segmenting CT images. Computational fluid dynamics (CFD) methods were used to simulate blood flow. Velocity profiles based on intracranial Doppler ultrasound data were set at the inlets, and a three-element Windkessel model was applied at the outlets. The distributions of velocity, pressure, wall shear stress (WSS), and its oscillatory shear index (OSI) were investigated. The vessel walls were considered rigid. It was found that in the large arteries, the differences between the rheological models in the calculations of velocity, pressure, WSS, and OSI are insignificant. All models showed a similar systematic deviation from clinical Doppler data. Inside the aneurysm domes, blood flow velocities are low, and the profiles for all three rheological models are practically identical in shape, with the Newtonian model tending to overestimate the values. The results indicate that for modeling hemodynamics in the large vessels of the Circle of Willis, the use of a Newtonian model is a permissible simplification.

Keywords: aneurysm, Circle of Willis, CFD, hemodynamics, simulation, rheological models

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSNM-2025-0001).

For citation: Lyubimova A. A., Kuchumov A. G. The influence of the rheological models of blood on the hemodynamic characteristics of the flow in the Circle of Willis. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 236–250 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-236-250>, EDN: PPRMVU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Аневризма сосудов головного мозга — это локальное растяжение и выпячивание стенки артерии [1]. Разрыв аневризмы вызывает субарахноидальное кровоизлияние или геморрагический инсульт [2, 3]. Несмотря на достижения в области хирургии и периперационном лечении, смертность, связанная с разрывом аневризмы, остается высокой. Догоспитальная летальность достигает 10–15%.

Пациентам с внутричерепными аневризмами предлагаются микрохирургические и эндоваскулярные методы лечения. Наиболее эффективным, а зачастую и единственным методом лечения аневризм является хирургическое вмешательство [4]. Однако риски, связанные с лечением аневризм, крайне высоки, и планирование лечения с учетом особенностей пациента имеет важное значение [5].

Принятие решения о наблюдении или лечении (клипирование, эндоваскулярная эмболизация, стентирование) неразрывавшейся аневризмы требует индивидуальной оценки риска разрыва, локализации, морфологии аневризмы, возраста и состояния здоровья пациента [5], с чем может помочь численное моделирование, позволяющее неинвазивно оценить индивидуальные параметры кровотока в аневризме и прилегающих сосудах, которые напрямую влияют на риск ее роста и разрыва [6–9].

Традиционно для упрощения расчетов кровь рассматривают как ньютоновскую жидкость с постоянной вязкостью [10], однако ее реальное поведение в сосудистом русле является более сложным, неньютоновская природа крови обусловлена поведением эритроцитов при разных скоростях сдвига [11].

Вопрос о том, насколько оправданно использование ньютоновской модели в различных областях сердечно-сосудистой системы, остается предметом дискуссий. Исследования показывают, что в крупных артериях, таких как аорта, где преобладают высокие скорости сдвига, ньютоновская модель часто оказывается приемлемым приближением, поскольку отклонения ключевых параметров, таких как пристеночные касательные напряжения, могут быть незначительными [12]. Это подтверждается работой [13], где на примере сосудов Виллизиева круга было показано, что использование ньютоновской модели дает удовлетворительный результат за исключением зон со сложной геометрией. Одновременно с этим для патологических областей (аневризмы, стенозы) или в сосудах малого диаметра, где скорости сдвига низкие, неньютоновские модели, такие как Carreau или Casson, становятся необходимыми для точного воспроизведения гемодинамики [13].

Статистические шкалы оценки риска, такие как PHASES, основанные преимущественно на популяционных данных, демографических и морфологических факторах [5, 14], демонстрируют ограниченную индивидуальную прогностическую способность, поскольку не учитывают фундаментальные патогенетические механизмы, связанные с воздействием гемодинамических сил на сосудистую стенку. В этом контексте вычислительная гидродинамика (CFD) предоставляет мощный инструмент для анализа таких гемодинамических характеристик, как распределение пристеночных касательных напряжений (WSS), индекса колебаний касательных напряжений (OSI), давление и скорости потока [15], которые напрямую влияют на эндотелиальную функцию сосудов, прогрессирование сосудистых заболеваний. Целью данной работы является исследование влияния реологических моделей крови (ньютоновская, Carreau, Casson) на гемодинамические характеристики ее течения в сосудах Виллизиева круга с аневризмами для выбора оптимальных параметров моделирования.

Проведенное сравнительное CFD-моделирование позволит оценить чувствительность ключевых гемодинамических показателей к выбору реологической модели в специфической геометрии Виллизиева круга и обеспечить основу для развития персонализированных моделей оценки риска развития аневризмы.



1. Материалы и методы

1.1. 3D-геометрии сосудов

В данной работе рассматривались восемь моделей сосудов Виллизиева круга с аневризмами, расположенными на местах их наиболее частого появления (в местах бифуркаций) [1].

Для получения модели 1 (рис. 1) пациенту была проведена многослойная компьютерная томография с внутривенным контрастным усилением. Полученные снимки представляют собой множество срезов в трех плоскостях. С помощью программы ИТК-Snap была создана трехмерная геометрия сосудов Виллизиева круга, после чего она дополнительно обрабатывалась в программе MeshMixer. Далее с помощью графического модуля SpaceClaim пакета прикладных программ ANSYS модель была подготовлена к численному моделированию (см. рис. 1).

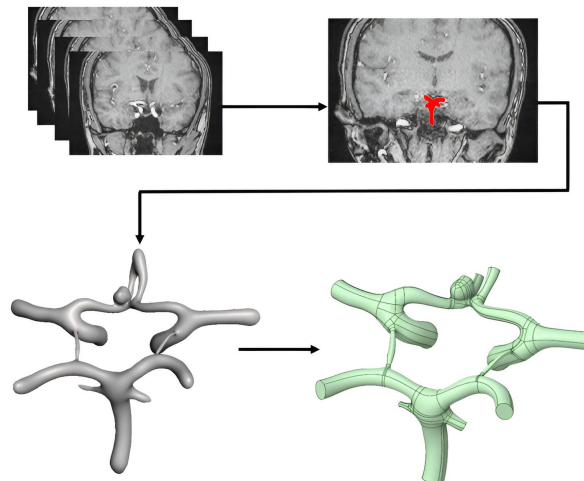


Рис. 1. Сегментация 3D-моделей для численного моделирования (цвет онлайн)

Fig. 1. Segmentation of 3D-models for numerical simulation (color online)

В случае первой модели аневризма располагалась в области передней соединительной артерии (ПСА). Все остальные модели являются модификациями первой, т. е. были созданы на основе клинических данных. Аневризмы располагались в местах соединений средних мозговых и задних соединительных артерий, задних мозговых и задних соединительных артерий.

1.2. Математическая постановка

Численное решение осуществлялось путем решения уравнения динамики жидкости

$$\nabla \cdot v = 0,$$

описывающего сохранение импульса, и уравнения неразрывности

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla * v) \right) = \nabla * \sigma,$$

описывающего сохранение массы, в каждом узле сетки [16]. Здесь ρ — постоянная плотность, v — вектор скорости, σ — тензор напряжений.

Тензор напряжений раскладывается на гидростатическую (шаровую) и девиаторную части:

$$\sigma = -pI + \kappa,$$

где p — давление, I — единичный тензор, κ — девиатор тензора напряжений, являющийся функцией тензора сдвига D ($\kappa = \mu(\dot{\gamma})D$), μ — динамическая вязкость крови, $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{ij} D_{ji}}$ — скорость сдвига, $D = 1/2 (\nabla v + \nabla v^T)$ — тензор скорости сдвига.

Стенки сосудов считались жесткими, и на всех поверхностях было задано условие прилипания, характеризующееся равенством нулю компонент скорости на границе раздела между потоком жидкости и твердой поверхностью:

$$v_\Gamma = 0.$$

Для учета влияния турбулентности была использована модель $k - \varepsilon$ [17]. Модель основана на решении двух уравнений переноса:

для кинетической энергии турбулентности k

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}}{\partial x_j} + P_k - \rho \varepsilon$$

и скорости ее диссипации ε

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(\mu + \mu_t / \sigma_\varepsilon \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}{\partial x_j} + C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k},$$

где k — кинетическая энергия турбулентности $\left(k = \frac{1}{2} v_i' v_j' \right)$, ε — скорость диссипации, μ_t — турбулентная вязкость $\left(\mu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right)$, P_k — генерация k градиентами средней скорости $\left(P_k = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$, $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $\sigma_k = 1$ — константы [18].

Для каждой расчетной модели на торцах входных артерий (I_n) (рис. 2) задавались профили скорости, полученные с помощью доплерографии на интракраниальном уровне (рис. 3). Для выходов (O_n) (см. рис. 2) использовалась зависимость давления от времени,

рассчитанная с помощью модели Windkessel [19, 20] (см. рис. 3).

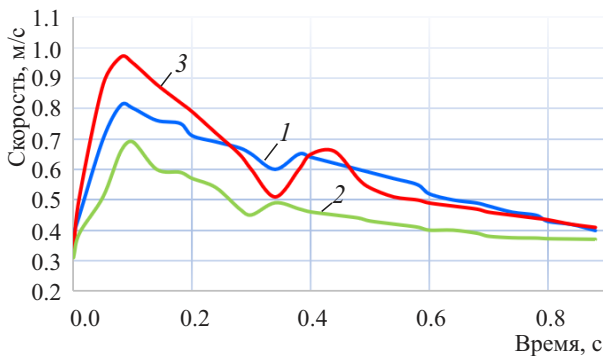


Рис. 2. Граничные условия для входных артерий: 1 — базилярная артерия; 2 — правая сонная артерия; 3 — левая сонная артерия

Fig. 2. Boundary conditions for entrance arteries: 1 — basilar artery; 2 — right carotid artery; 3 — left carotid artery

Кровь представляет собой сложную неньютоновскую суспензию, состоящую из плазмы (вязкой, почти ньютоновской жидкости) и форменных элементов, преимущественно эритроцитов. Реология крови изучает ее деформационные и текучие свойства под действием приложенных нагрузок [21]. Для описания сложного неньютоновского поведения крови в уравнениях гидродинамики при численном моделировании используются реологические модели.

Ньютоновская модель: $\mu = \text{const}$. Простая модель, применимая как первое приближение для течений с высокими скоростями сдвига в крупных артериях,

где влияние агрегации эритроцитов незначительно.

Модель Carreau [22]:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_i n f + (\mu_0 - \mu_i n f) \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right)^{(n-1)/2},$$

где μ_0 — вязкость при предельно малой скорости сдвига; $\mu_i n f$ — вязкость при предельно большой скорости сдвига; λ — параметр, определяющий скорость сдвига, при которой ньютоновское плато переходит в область снижения вязкости; n — безразмерный параметр, определяющий угол наклона кривой в зоне уменьшения вязкости.

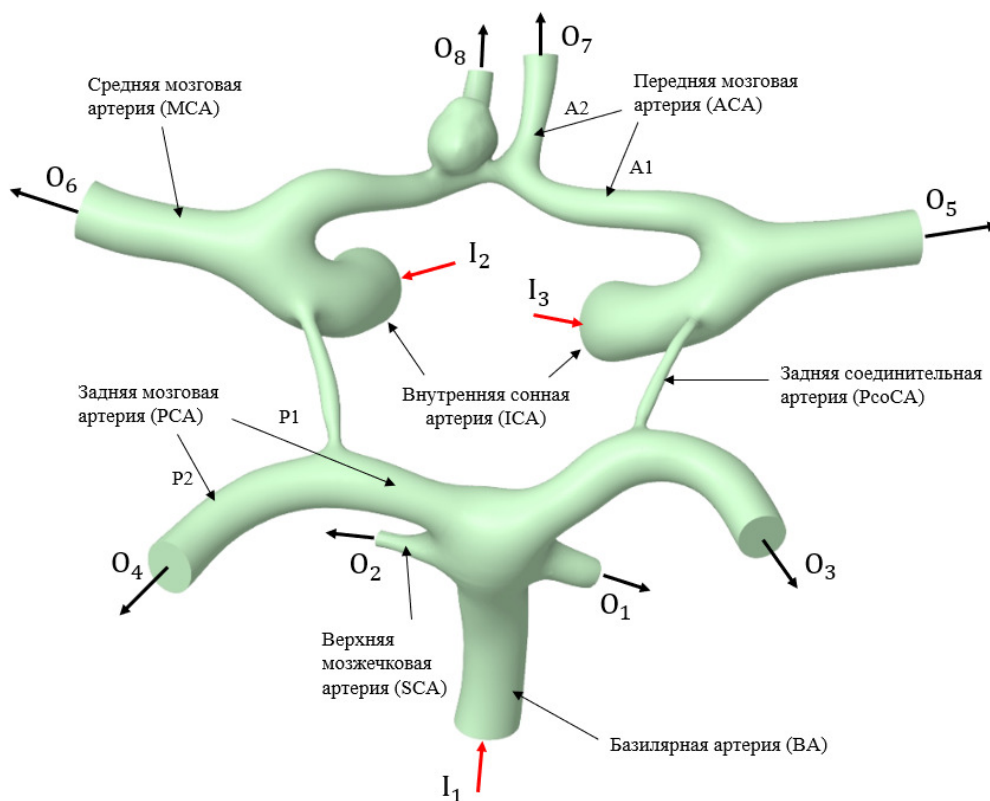


Рис. 3. Расположение входных (I_n) и выходных (O_n) отверстий и названия артерий Виллизиева круга (цвет онлайн)
 Fig. 3. Location of the input (I_n) and output (O_n) holes and names of the arteries of the Willis circle (color online)

Модель Casson [23]:

$$\begin{cases} \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu\dot{\gamma}} & \text{для } \tau \geq \tau_0, \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{для } \tau < \tau_0, \end{cases}$$

где τ — напряжение сдвига, τ_0 — предел текучести (минимальное значение напряжения, необходимое для начала течения), $\mu_i n f$ — вязкость при предельно большой скорости сдвига.

Модели Carreau и Casson являются двумя наиболее широко используемыми моделями, для сравнения результатов также была проведена серия расчетов с использованием ньютоновской модели крови (рис. 4).

1.3. Исследование сходимости сеточной модели

Для создания расчетной сетки области жидкости использовались инструменты Body Sizing и Inflation. Первый из них позволяет настраивать тип и размер элементов сетки и учитывать эффекты течения вблизи стенок сосудов (рис. 5).

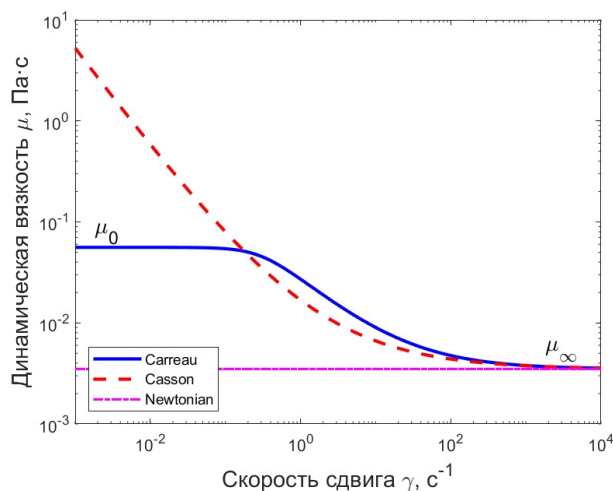


Рис. 4. Зависимость динамической вязкости от скорости сдвига для трех реологических моделей (цвет онлайн)
 Fig. 4. Dependence of dynamic viscosity on shear rate for three rheological models (color online)



Для оценки чувствительности к плотности сетки были выбраны пять различных размеров элементов. Анализ проводился на основе достижения относительной разницы $\varepsilon_{WSS} = 1.67\%$ между максимальными значениями пристеночных касательных напряжений (WSS), $\varepsilon_{press} = 0.39\%$ между максимальными значениями давления и между максимальными значениями скоростей $\varepsilon_{vel} = 1.98\%$ (см. рис. 5).

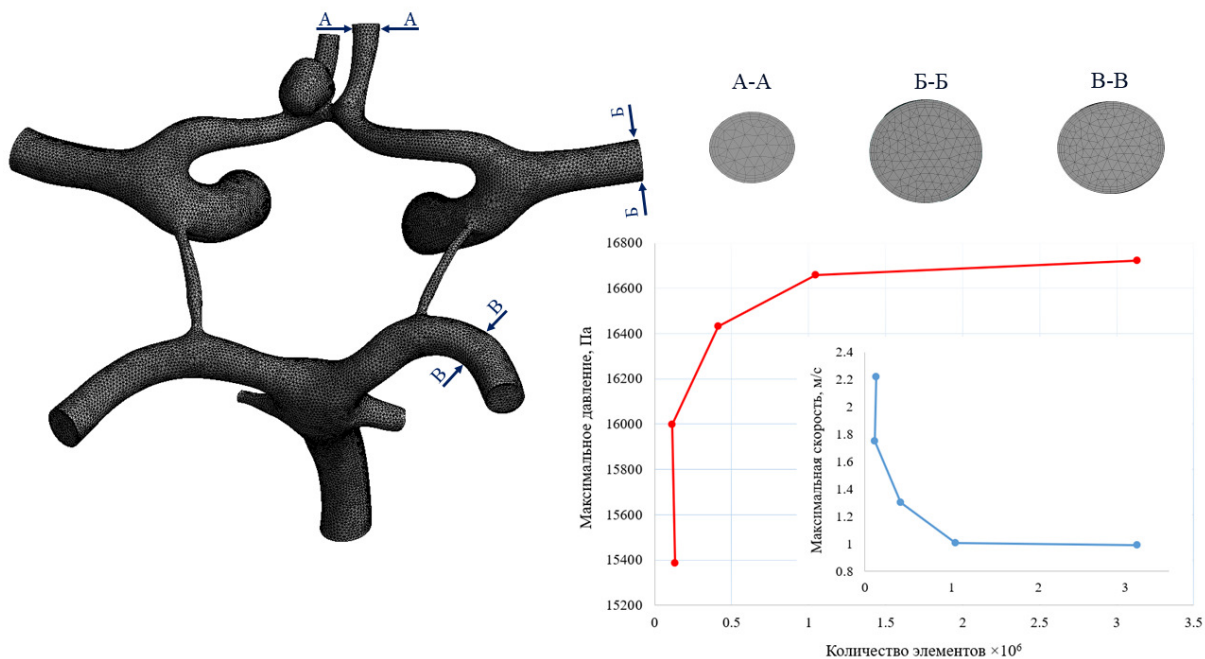
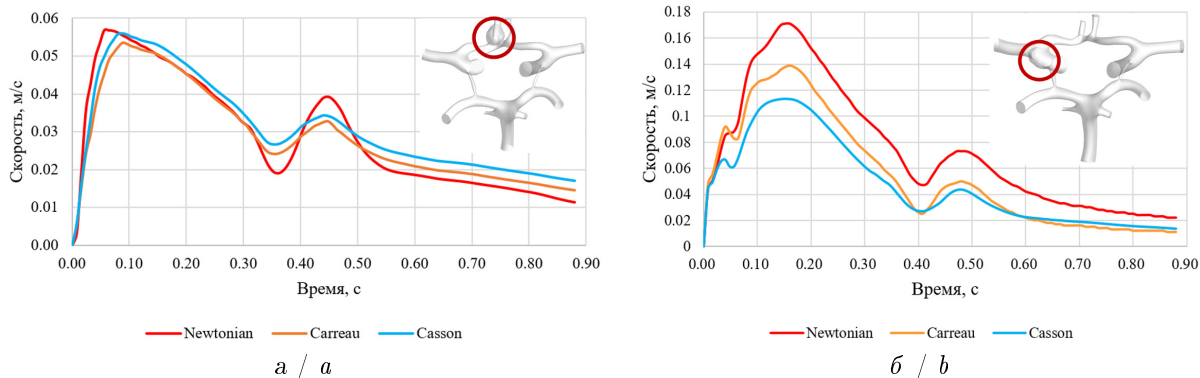


Рис. 5. Конечно-элементная сетка и сеточная сходимость
Fig. 5. Finite element mesh and mesh convergence

Можно видеть, что значения давления для грубой и мелкой сеток существенно отличаются. Однако поскольку значения относительной разницы малы, для дальнейших расчетов было решено использовать густую сетку с размером стороны треугольного конечного элемента, равным 0.2 мм.

2. Результаты

В данном разделе представлены ключевые результаты численного моделирования гемодинамики для одной из восьми исследованных геометрий Виллизиева круга с аневризмой. Выбранная конфигурация наглядно демонстрирует общие закономерности, характерные для всего набора исследуемых моделей. Визуализация распределений скоростей, давления, пристеночных касательных напряжений (WSS) и индекса колебаний касательных напряжений (OSI), а также сравнение профилей скорости с клиническими данными доплерографии приведены на рис. 6 и в таблице.



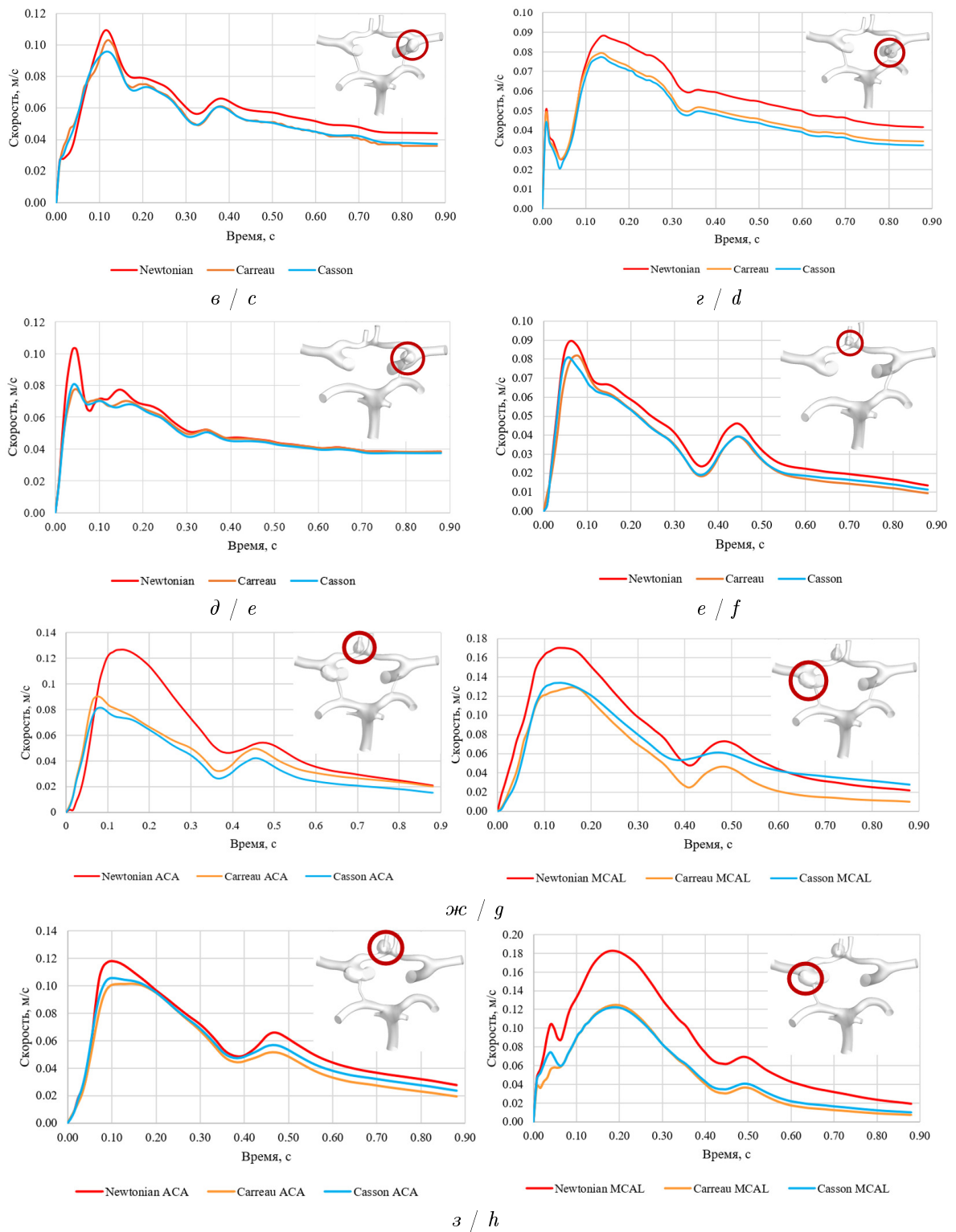
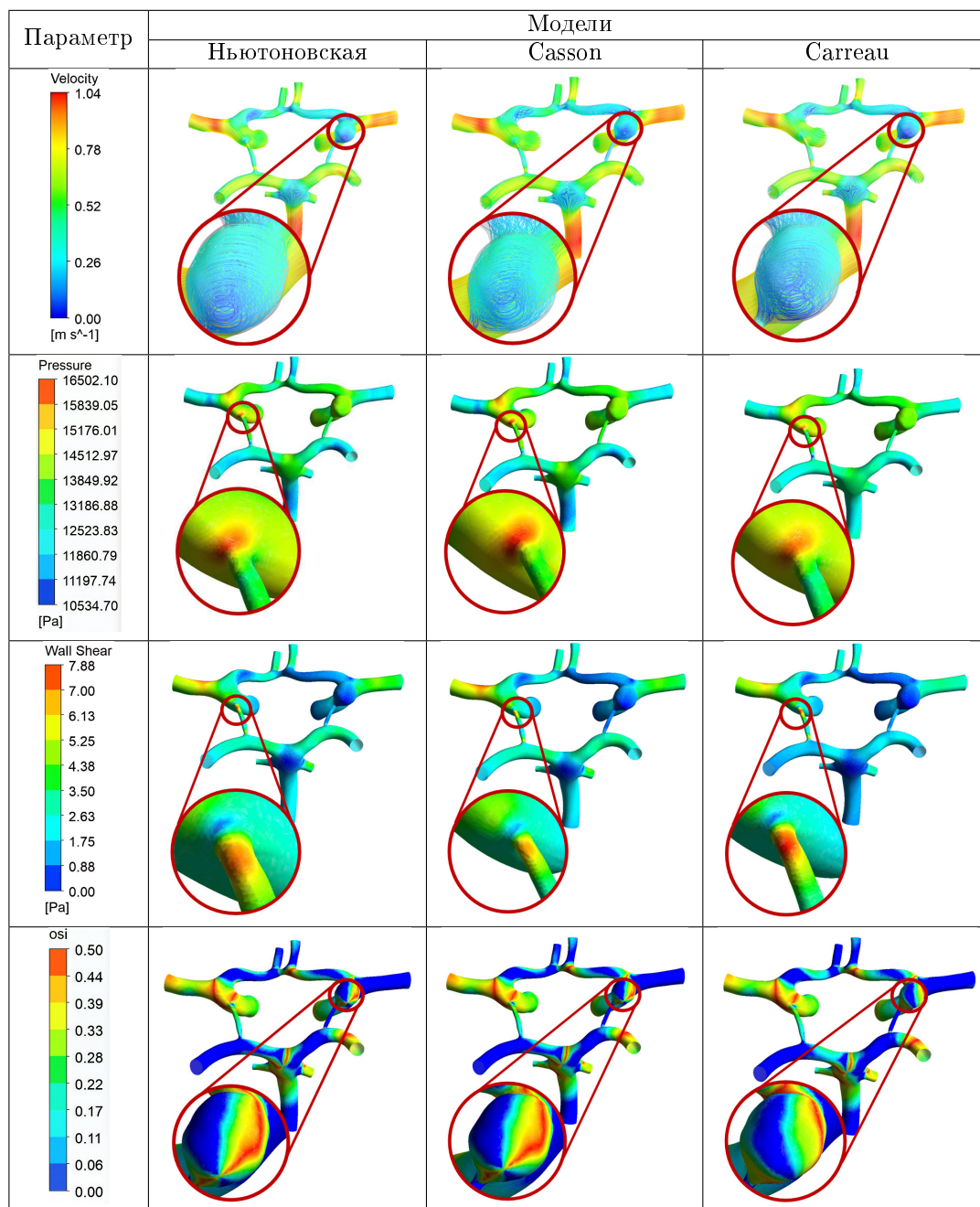


Рис. 6. Профили скорости в аневризмах при различных моделях крови: *a* — модель 1; *b* — модель 2; *в* — модель 3; *г* — модель 4; *д* — модель 5; *е* — модель 6; *жс* — модель 7; *з* — модель 8 (цвет онлайн)
 Fig. 6. Velocity profiles in aneurysms with different blood models: *a* is model 1; *b* is model 2; *c* is model 3; *d* is model 4; *e* is model 5; *f* is model 6; *g* is model 7; *h* is model 8 (color online)

Выводы, сделанные на основе анализа данной геометрии, справедливы и для остальных случаев, что подтверждается полученными численными данными.



Визуализация основных гемодинамических характеристик (цвет онлайн)
 Table. Visualization of the main hemodynamic characteristics (color online)



2.1. Основные гемодинамические характеристики

Пристеночные касательные напряжения (τ_w , WSS)

$$WSS = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) |_{n=0}$$

возникают при трении крови о стенки сосудов. Они могут быть связаны с эндотелиальной дисфункцией и повышенным риском тромбоза артерий [24]. Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ — градиент скорости, n — нормаль к поверхности стенки сосуда, μ — динамическая вязкость.

Карты распределения WSS для всех реологических моделей совпадают. Наибольшие



напряжения (до 7.9) наблюдаются на участках с высокой скоростью потока и малым диаметром сосуда, т.е. в области левой внутренней сонной и левой задней соединительной артерии. Минимальные значения WSS зафиксированы на куполе аневризмы и зонах застоя потока. Индекс колебаний касательных напряжений (OSI)

$$OSI = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\left| \int_0^T WSS dt \right|}{\int_0^T |WSS| dt} \right)$$

позволяет оценить характеристики потока крови внутри сосудов и представляет собой безразмерную величину, которая изменяется в диапазоне от 0 до 0.5 и отражает степень осцилляции потока крови в течение сердечного цикла [25]. Значение $OSI = 0$ соответствует однонаправленному потоку крови, тогда как $OSI = 0.5$ указывает на полностью осциллирующий поток [26], что может говорить об эндотелиальной дисфункции [27].

Значения OSI близки к нулю в прямых участках магистральных артерий. Повышенные значения OSI (желто-красный цвет, до 0.5) наблюдаются в областях сложной геометрии: на бифуркациях, в районе шейки и, что наиболее заметно, в дистальной части купола аневризмы. Визуальные паттерны OSI для трех моделей практически неразличимы.

По линиям тока крови видно, что во всех трех моделях наблюдается качественно и количественно сходная картина (см. таблицу). Максимальные значения скорости (до 1.04 м/с) локализованы в магистральных артериях (средних мозговых и в базилярной). В области бифуркаций и у шейки аневризмы наблюдаются зоны с умеренными скоростями. Внутри купола аневризмы и в зонах рециркуляции скорости тока крови минимальны. Поля распределения давления демонстрируют умеренные значения по всей модели Виллизиева круга. Область с повышенным давлением наблюдается в районе соединения левой внутренней сонной и левой задней соединительной артерий. Распределение и диапазон значений для ньютоновской и неньютоновских моделей визуально идентичны.

Результаты моделирования скорости тока крови внутри аневризм для различных реологических моделей представлены на рис. 6. Профили скорости были получены в контрольных точках, расположенных приблизительно в центрах куполов аневризм двух типов: в области передней мозговой артерии (АСА, рис. 6, а, е, ж, з) и в области средней мозговой артерии (МСА, рис. 6, б, в, д, ж, з). Во всех случаях кривые, соответствующие ньютоновской модели, модели Carreau и модели Casson, наложены друг на друга. Формы пульсовых волн совпадают для трех моделей крови в каждом рассмотренном случае. Расчетные скорости внутри аневризм на порядок ниже, чем в магистральных артериях (максимум 0.12–0.14 м/с для АСА и 0.08–0.17 м/с для МСА на представленных графиках). Поток носит выраженный пульсирующий характер, с четким следствием за сердечным циклом: резким систолическим подъемом и более плавным диастолическим спадом. Следует отметить, что амплитуда пульсации различается в зависимости от локализаций аневризм, что, вероятно, связано с особенностями локальной геометрии и гемодинамики.

2.2. Измерение скоростей в сосудах Виллизиева круга с помощью доплерографии *in vivo*

В ходе работы также было проведено экспериментальное измерение значений скоростей тока крови на участках правой и левой средних мозговых артерий (MCA Right, MCA Left) с помощью доплерографии на интракраниальном уровне (рис. 7).

Интракраниальная доплерография (ИКДГ) представляет собой специализированное ультразвуковое исследование, направленное на оценку параметров кровотока в артериях, расположенных непосредственно внутри полости черепа (интракраниальный уровень). В основе метода лежит эффект Доплера, при котором ультразвуковой луч, отражаясь от движущихся эритроцитов, изменяет свою частоту пропорционально скорости их движения.



Регистрируя эти сдвиги частоты, ИКДГ позволяет неинвазивно определять линейную скорость кровотока [28].

На рис. 7 представлены результаты сравнения численной модели с данными интракраниальной доплерографии (тонкие линии) путем сопоставления расчетных профилей скорости кровотока в правой и левой средних мозговых артериях. Затененные области соответствуют диапазонам скоростей, полученным в результате моделирования с использованием трех моделей крови во всех исследуемых моделях Виллизиева круга. Визуальный анализ показывает, что расчетные кривые для всех трех реологических моделей практически идентичны и образуют единый перекрывающийся диапазон. При этом наблюдается систематическое превышение расчетных значений скорости над экспериментальными данными на протяжении большей части сердечного цикла, в то время как соотношение систолических пиков и диастолических фаз воспроизводится корректно.

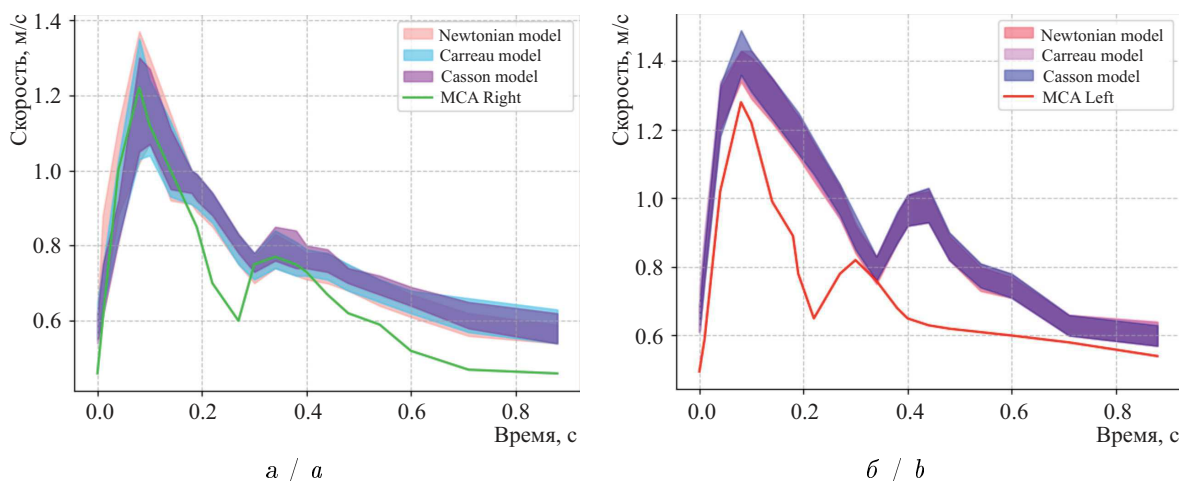


Рис. 7. Сравнение диапазона полученных численно профилей скорости крови с полученными экспериментально в трех артериях Виллизиева круга: *а* — левой средней мозговой (MCA Left); *б* — правой средней мозговой (MCA Right) (цвет онлайн)

Fig. 7. Comparison of the range of numerically obtained blood velocity profiles with those obtained experimentally in three arteries of the Circle of Willis: *a* shows left middle cerebral artery (MCA Left); *b* shows right middle cerebral artery (MCA Right) (color online)

3. Обсуждение

Проведенное сравнение расчетных профилей скорости, полученных с использованием трех реологических моделей, с клиническими данными интракраниальной доплерографии для правой и левой средних мозговых артерий дает важное представление о точности моделирования. Ключевым наблюдением является практически полное совпадение закрашенных областей, представляющих диапазоны скоростей среди исследуемых моделей Виллизиева круга, полученных при трех моделях крови (см. рис. 6). Это наглядно подтверждает, что в крупных сосудах, таких как средние мозговые артерии, где скорости сдвига высоки, влияние выбора конкретной реологической модели на распределение скорости является минимальным [13].

Различия между моделями находятся в пределах погрешности метода, что в целом обосновывает использование более простой ньютоновской модели для подобной постановки задачи. Это подтверждается и другими современными исследованиями, которые отмечают, что влияние реологических моделей на результаты CFD в крупных артериях является минимальным [9]. Наличие же систематического смещения расчетных кривых относительно данных доплерографии, а также завышение пиковых и средних значений скорости на протяжении большей части сердечного цикла может быть обусловлено основным ограничением данной работы, а именно предположением об абсолютно жестких сосудистых стенках.



Как показывают более ранние исследования с использованием Fluid-Structure Interaction (FSI) моделирования, учет упругих свойств сосудов может существенно влиять на гемодинамику, особенно в области аневризмы, меняя картину распределения напряжений [13, 29]. Игнорирование этого взаимодействия жидкости и структуры (FSI) в модели закономерно приводит к более высоким расчетным скоростям. Но несмотря на количественное расхождение, форма пульсовой волны, соотношение систолической и диастолической фаз успешно воспроизводится при моделировании кровотока. При идентичных граничных условиях результаты численных экспериментов вышли сходными для всех трех реологических моделей крови.

По полученным профилям скоростей внутри аневризм видно, что ньютоновская модель сильнее завышает значения, а модели Carreau и Casson остаются крайне близки (см. рис. 7). При этом важно отметить, что все модели одинаково хорошо улавливают пульсацию потока при малых скоростях, передаваемую от основного русла, демонстрируя совпадающие по фазе систолические пики и диастолические спады. Также стоит учитывать, что модель Casson гораздо более требовательна к настройкам конечно-элементной сетки и подбору параметров самой модели, что ощутимо увеличивает время моделирования, но при этом оказывает минимальное влияние на результат. Поэтому целесообразнее в условиях данной задачи отказаться от использования модели Casson в пользу, например, модели Carreau.

Заключение

В данном исследовании с помощью вычислительной гидродинамики (CFD) был проведен сравнительный анализ влияния трех реологических моделей крови (ньютоновской, Carreau и Casson) на основные гемодинамические параметры в восьми моделях Виллизиева круга с аневризмами. Результаты моделирования показали ожидаемые гемодинамические паттерны для всех исследуемых моделей. В артериях Виллизиева круга различия между ньютоновской моделью и моделями Carreau и Casson в расчетах скорости, давления, пристеночных касательных напряжений (WSS) и индекса колебаний касательных напряжений (OSI) оказались незначительными. Это физиологически обоснованно, поскольку высокие скорости сдвига в крупных сосудах, к которым относятся сосуды Виллизиева круга, нивелируют эффекты, связанные с агрегацией эритроцитов. Таким образом, для анализа общей гемодинамической картины в церебральных артериях использование ньютоновской модели допустимо. Основным ограничением исследования является допущение о жесткости сосудистой стенки, поэтому ключевыми перспективами являются переход к моделированию с учетом взаимодействия жидкости и твердого тела (FSI) и использование пациент-специфичных данных о механических свойствах сосудистой стенки для повышения прогностической точности моделей. Кроме того, для более полной оценки риска разрыва аневризмы целесообразно рассмотреть и другие параметры, характеризующие кровоток.

Список литературы

1. Крылов В. В. Хирургия аневризм головного мозга : в 3 т. Т. 1. Москва : ИП «Т. А. Алексева», 2011. 432 с.
2. Bjorkman J., Frosen J., Tahtinen O., Backes D., Huttunen T., Harju J., Huttunen J., Kurki M. I., von und zu Fraunberg M., Koivisto T., Manninen H., Jaaskelainen J. E., Lindgren A. E. Irregular shape identifies ruptured intracranial aneurysm in subarachnoid hemorrhage patients with multiple aneurysms // *Stroke*. 2017. Vol. 48, iss. 7. P. 1986–1989. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.117.017147>
3. Cebal J., Ollikainen E., Chung B. J., Mut F., Sippola V., Jahromi B. R., Tulamo R., Hernesniemi J., Niemela M., Robertson A., Frosen J. Flow conditions in the intracranial aneurysm lumen are associated with inflammation and degenerative changes of the aneurysm wall // *American Journal of Neuroradiology*. 2017. Vol. 38, iss. 1. P. 119–126. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.a4951>
4. Li H., Pan R., Wang H., Rong X., Yin Z., Milgrom D. P., Shi X., Tang Y., Peng Y. Clipping versus coiling for ruptured intracranial aneurysms: A systematic review and meta-analysis // *Stroke*. 2013. Vol. 44, iss. 1. P. 29–37. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.112.663559>
5. Brinjikji W., Pereira V. M., Khuntong R., Kostensky A., Tymianski M., Krings T., Radovano-



- vich I.* PHASES and ELAPSS scores are associated with aneurysm growth: A study of 431 unruptured intracranial aneurysms // *World Neurosurgery*. 2018. Vol. 114. P. 425–432. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2018.03.003>
6. *Доль А. В.* Биомеханика артерий шеи и головы: развитие аневризм и отрыв атеросклеротических бляшек при сочетанных патологиях // *Российский журнал биомеханики*. 2024. Т. 28, № 3. С. 25–38. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2024.3.02>, EDN: **HMCIМТ**
 7. *Kuchumov A. G., Nyashin Y. I., Samartsev V. A.* Modelling of peristaltic bile flow in the papilla ampoule with stone and in the papillary stenosis case: Application to reflux investigation // *IFMBE Proceedings. 7th WACBE World Congress on Bioengineering 2015* / eds. J. Goh, C. Lim. Cham : Springer, 2015. P. 158–161. (IFMBE Proceedings, vol. 52). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-19452-3_42
 8. *Кучумов А. Г., Гилев В. Г., Попов В. А., Самарцев В. А., Гаврилов В. А.* Экспериментальное исследование реологии патологической желчи // *Российский журнал биомеханики*. 2011. Т. 15, № 3. С. 52–60. EDN: **OJFBYL**
 9. *Brambila-Solorzano A., Mendez-Lavielle F., Naude J. L., Martinez-Sanchez G. J., Garcia-Rebolledo A., Hernandez B., Escobar-Del Pozo C.* Influence of blood rheology and turbulence models in the numerical simulation of aneurysms // *Bioengineering (Basel)*. 2023. Vol. 10, iss. 10. Art. 1170. DOI: <https://doi.org/10.3390/bioengineering10101170>
 10. *Zylka M., Gorski G., Zylka W., Gala-Bladzinski A.* Numerical analysis of blood flow in the abdominal aorta under simulated weightlessness and earth conditions // *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14. Art. 15978. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-66961-7>
 11. *Prokop V., Kozel K.* Numerical simulation of Newtonian and non-Newtonian flows in bypass // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2010. Vol. 80, iss. 8. P. 1725–1733. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2009.06.001>
 12. *Zhu Z., Ji S., Liang L., Wang H., Xia H., Tang P.* Hemodynamic study of blood flow in the aorta during the interventional robot treatment using fluid-structure interaction // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2023. Vol. 22, iss. 6. P. 1857–1872. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-023-01737-y>
 13. *Razavi S. E., Sahebjam R.* Numerical Simulation of the blood flow behavior in the circle of Willis // *Bioimpacts*. 2014. Vol. 4, iss. 2. P. 89–94. DOI: <https://doi.org/10.5681/bi.2014.008>
 14. *Backes D., Vergouwen M. D., Tiel Groenestege A. T., Bor A. S., Velthuis B.K., Greving J. P., Algra A., Wermer M. J., van Walderveen M. A., terBrugge K. G., Agid R., Rinkel G. J.* PHASES score for prediction of intracranial aneurysm growth // *Stroke*. 2015. Vol. 46, iss. 5. P. 1221–1226. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.114.008198>
 15. *Valen-Sendstad K., Steinman D. A.* Mind the gap: Impact of computational fluid dynamics solution strategy on prediction of intracranial aneurysm hemodynamics and rupture status indicators // *American Journal of Neuroradiology*. 2014. Vol. 35, iss. 3. P. 536–543. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.a3793>
 16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : в 10 т. Т. 6. Гидродинамика. Москва : Наука, 1986. 736 с.
 17. *Wilcox C. D.* Turbulence modeling for CFD. San Diego : Birmingham Press, Inc., 2006. 536 p.
 18. *Laundier B. E., Sharma B. I.* Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // *Letters in Heat and Mass Transfer*. 1974. Vol. 1, iss. 2. P. 131–138. DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-4548\(74\)90150-7](https://doi.org/10.1016/0094-4548(74)90150-7)
 19. *Westerhof N., Lankhaar J. W., Westerhof B. E.* The arterial Windkessel // *Medical and Biological Engineering and Computing*. 2009. Vol. 47. P. 131–141. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11517-008-0359-2>
 20. *Egnor M., Yang L., Mani R. M., Fiore S. M., Djuric P. M.* A quantitative model of the cerebral windkessel and its relevance to disorders of intracranial dynamics // *Journal of Neurosurgery: Pediatrics*. 2023. Vol. 32, iss. 3. P. 302–311. DOI: <https://doi.org/10.3171/2023.1.PEDS22372>
 21. *Chien S.* Rheology in the microcirculation in normal and low flow states // *Advances in Shock Research*. 1987. Vol. 8. P. 71–80.
 22. *Gijsen F. J. H., van de Vosse F. N., Janssen J. D.* The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: Steady flow in a carotid bifurcation model // *Journal of Biomechanics*. 1999. Vol. 32, iss. 6. P. 601–608. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0021-9290\(99\)00015-9](https://doi.org/10.1016/s0021-9290(99)00015-9)
 23. *Casson N.* A flow equation for pigment oil-suspensions of the printing ink type // *Rheology of Disperse Systems* / ed. by C. C. Mill. London : Pergamon Press, 1959. P. 84–104.
 24. *Wright J.* Calculate wall shear gradient from velocity gradient. URL: <https://www.jameswright.com>



[xyz/post/20200813/calculate_wall_shear_from_velocity_gradient/](#) (дата обращения: 23.08.2025).

25. Peiffer V., Sherwin S. J., Weinberg P. D. Computation in the rabbit aorta of a new metric—the transverse wall shear stress—to quantify the multidirectional character of disturbed blood flow // *Journal of Biomechanics*. 2013. Vol. 46, iss. 15. P. 2651–2658. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.08.003>
26. Zhao Y., Wang H., Chen W., Sun W., Yu X., Sun C., Hua G. Time-resolved simulation of blood flow through left anterior descending coronary artery: Effect of varying extent of stenosis on hemodynamics // *BMC Cardiovascular Disorders*. 2023. Vol. 23, iss. 1. Art. 156. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12872-023-03190-2>
27. Carvalho V., Rodrigues N., Ribeiro R., Costa P. F., Teixeira J. C. F., Lima R. A., Teixeira S. F. C. F. Hemodynamic study in 3D printed stenotic coronary artery models: Experimental validation and transient simulation // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2021. Vol. 24, iss. 6. P. 623–636. DOI: <https://doi.org/10.1080/10255842.2020.1842377>
28. Babikian V. L., Wechsler L. R. *Transcranial doppler ultrasonography*. St. Louis : Mosby-Year Book, 1993. 323 p.
29. Zheng R., Zhang S., Zhu C., Zhang C., Hong W. Impact of anatomical variations of the circle of Willis on the blood flow within unruptured intracranial aneurysm // *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*. 2025. Vol. 15, iss. 8. P. 6667–6681. DOI: <https://doi.org/10.21037/qims-2025-55>

References

1. Krylov V. V. *Khirurgiya anevrizm golovnogogo mozga* [Surgery of brain aneurysms. Vol. 1]. Moscow, IP “T. A. Alekseeva”, 2011. 432 p. (in Russian).
2. Bjorkman J., Frosen J., Tahtinen O., Backes D., Huttunen T., Harju J., Huttunen J., Kurki M. I., von und zu Fraunberg M., Koivisto T., Manninen H., Jaaskelainen J. E., Lindgren A. E. Irregular shape identifies ruptured intracranial aneurysm in subarachnoid hemorrhage patients with multiple aneurysms. *Stroke*, 2017, vol. 48, iss. 7, pp. 1986–1989. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.117.017147>
3. Czebral J., Ollikainen E., Chung B. J., Mut F., Sippola V., Jahromi B. R., Tulamo R., Hernesniemi J., Niemela M., Robertson A., Frosen J. Flow conditions in the intracranial aneurysm lumen are associated with inflammation and degenerative changes of the aneurysm wall. *American Journal of Neuroradiology*, 2017, vol. 38, iss. 1, pp. 119–126. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.a4951>
4. Li H., Pan R., Wang H., Rong X., Yin Z., Milgrom D. P., Shi X., Tang Y., Peng Y. Clipping versus coiling for ruptured intracranial aneurysms: A systematic review and meta-analysis. *Stroke*, 2013, vol. 44, iss. 1, pp. 29–37. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.112.663559>
5. Brinjikji W., Pereira V. M., Khumtong R., Kostensky A., Tymianski M., Krings T., Radovanovich I. PHASES and ELAPSS scores are associated with aneurysm growth: A study of 431 unruptured intracranial aneurysms. *World Neurosurgery*, 2018, vol. 114, pp. 425–432. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2018.03.003>
6. Dol A. V. Biomechanics of neck and head arteries: The development of aneurysms and the separation of atherosclerotic plaques with combined pathologies. *Russian Journal of Biomechanics*, 2024, vol. 28, iss 3, pp. 19–30. DOI: <https://doi.org/10.15593/rjbiomech/2024.3.02>, EDN: BWBEXL
7. Kuchumov A. G., Nyashin Y. I., Samartsev V. A. Modelling of peristaltic bile flow in the papilla ampoule with stone and in the papillary stenosis case: Application to reflux investigation. In: Goh J., Lim C. (eds.) *7th WACBE World Congress on Bioengineering 2015*. IFMBE Proceedings, vol. 52. Springer, Cham, 2015, pp. 158–161. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-19452-3_42
8. Kuchumov A. G., Gilyov V. G., Popov V. A., Samartsev V. A., Gavrillov V. A. Experimental study of the rheology of pathological bile. *Russian Journal of Biomechanics*, 2011, vol. 15, iss. 3, pp. 52–60 (in Russian). EDN: OJFBYL
9. Brambila-Solorzano A., Mendez-Lavielle F., Naude J. L., Martinez-Sanchez G. J., Garcia-Rebolledo A., Hernandez B., Escobar-Del Pozo C. Influence of blood rheology and turbulence models in the numerical simulation of aneurysms. *Bioengineering (Basel)*, 2023, vol. 10, iss. 10, art. 1170. DOI: <https://doi.org/10.3390/bioengineering10101170>
10. Zylka M., Gorski G., Zylka W., Gala-Bladzinsk A. Numerical analysis of blood flow in the abdominal aorta under simulated weightlessness and earth conditions. *Scientific Reports*, 2024, vol. 14, art. 15978. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-66961-7>
11. Prokop V., Kozel K. Numerical simulation of Newtonian and non-Newtonian flows in bypass. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2010, vol. 80, iss. 8, pp. 1725–1733. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2009.06.001>



12. Zhu Z., Ji S., Liang L., Wang H., Xia H., Tang P. Hemodynamic study of blood flow in the aorta during the interventional robot treatment using fluid-structure interaction. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2023, vol. 22, iss. 6, pp. 1857–1872. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-023-01737-y>
13. Razavi S. E., Sahebjam R. Numerical Simulation of the blood flow behavior in the circle of Willis. *Bioimpacts*, 2014, vol. 4, iss. 2, pp. 89–94. DOI: <https://doi.org/10.5681/bi.2014.008>
14. Backes D., Vergouwen M. D., Tiel Groenestege A. T., Bor A. S., Velthuis B.K., Greving J. P., Algra A., Wermer M. J., van Walderveen M. A., terBrugge K. G., Agid R., Rinkel G. J., PHASES score for prediction of intracranial aneurysm growth. *Stroke*, 2015, vol. 46, iss. 5, pp. 1221–1226. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.114.008198>
15. Valen-Sendstad K., Steinman D. A. Mind the gap: Impact of computational fluid dynamics solution strategy on prediction of intracranial aneurysm hemodynamics and rupture status indicators. *American Journal of Neuroradiology*, 2014, vol. 35, iss. 3, pp. 536–543. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.a3793>
16. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1986. 736 p. (in Russian).
17. Wilcox C. D. Turbulence modeling for CFD. San Diego, Birmingham Press, Inc., 2006. 536 p.
18. Launder B. E., Sharma B. I. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1974, vol. 1, iss. 2, pp. 131–138. DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-4548\(74\)90150-7](https://doi.org/10.1016/0094-4548(74)90150-7)
19. Westerhof N., Lankhaar J. W., Westerhof B. E. The arterial Windkessel. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 2009, vol. 47, pp. 131–141. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11517-008-0359-2>
20. Egnor M., Yang L., Mani R. M., Fiore S. M., Djuric P. M. A quantitative model of the cerebral windkessel and its relevance to disorders of intracranial dynamics. *Journal of Neurosurgery: Pediatrics*, 2023, vol. 32, iss. 3, pp. 302–311. DOI: <https://doi.org/10.3171/2023.1.PEDS22372>
21. Chien S. Rheology in the microcirculation in normal and low flow states. *Advances in Shock Research*, 1987, vol. 8, pp. 71–80.
22. Gijssen F. J. H., van de Vosse F. N., Janssen J. D. The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: Steady flow in a carotid bifurcation model. *Journal of Biomechanics*, 1999, vol. 32, iss. 6, pp. 601–608. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(99\)00015-9](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(99)00015-9)
23. Casson N. A flow equation for pigment oil-suspensions of the printing ink type. In: Mill C. C. (ed.) *Rheology of Disperse Systems*. London, Pergamon Press, 1959, pp. 84–104.
24. Wright J. Calculate wall shear gradient from velocity gradient. Available at: https://www.jameswright.xyz/post/20200813/calculate_wall_shear_from_velocity_gradient/ (accessed August 23, 2025).
25. Peiffer V., Sherwin S. J., Weinberg P. D. Computation in the rabbit aorta of a new metric — the transverse wall shear stress — to quantify the multidirectional character of disturbed blood flow. *Journal of Biomechanics*, 2013, vol. 46, iss. 15, pp. 2651–2658. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.08.003>
26. Zhao Y., Wang H., Chen W., Sun W., Yu X., Sun C., Hua G. Time-resolved simulation of blood flow through left anterior descending coronary artery: Effect of varying extent of stenosis on hemodynamics. *BMC Cardiovascular Disorders*, 2023, vol. 23, iss. 1, art. 156. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12872-023-03190-2>
27. Carvalho V., Rodrigues N., Ribeiro R., Costa P. F., Teixeira J. C. F., Lima R. A., Teixeira S. F. C. F. Hemodynamic study in 3D printed stenotic coronary artery models: Experimental validation and transient simulation. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2021, vol. 24, iss. 6, pp. 623–636. DOI: <https://doi.org/10.1080/10255842.2020.1842377>
28. Babikian V. L., Wechsler L. R. *Transcranial doppler ultrasonography*. St. Louis, Mosby-Year Book, 1993. 323 p.
29. Zheng R., Zhang S., Zhu C., Zhang C., Hong W. Impact of anatomical variations of the circle of Willis on the blood flow within unruptured intracranial aneurysm. *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*, 2025, vol. 15, iss. 8, pp. 6667–6681. DOI: <https://doi.org/10.21037/qims-2025-55>

Поступила в редакцию / Received 23.08.2025

Принята к публикации / Accepted 12.01.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Научная статья

УДК 531/534+577.354

Сравнение гиперупругих и формально определенных деформационных моделей сухожилия стременной мышцы среднего уха

С. А. Муслов¹, П. Ю. Сухочев²✉

¹Российский университет медицины, Россия, 127006, г. Москва, ул. Долгоруковская, д. 4

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

Муслов Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

Сухочев Павел Юрьевич, научный сотрудник лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем, ps@moids.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются некоторые нерешенные вопросы механических свойств органов среднего уха — его сухожилий, в частности сухожилия стременной мышцы (стременного сухожилия). Механические свойства биологических тканей являются центральной темой биомеханики и биоинженерии. Механические характеристики выступают важными параметрами при компьютерном моделировании органов и тканей в процессе их функционирования или при внешнем воздействии. Механические свойства стременного сухожилия среднего уха человека рассмотрены в рамках наиболее часто встречающихся в литературе гиперупругих, а также формально определенных деформационных моделей, позволяющих описать экспериментальную кривую с наименьшей погрешностью. Расчеты выполнены в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 с помощью специально разработанного функционала. Соответствие данных механических испытаний и модельных данных оценивали с помощью показателей описательной статистики. Результаты показали, что модели полиномиальная и Веронда–Вестманн, а также экспоненциальная являются наиболее точными в плане подгонки экспериментальных данных. Критерию Хилла–Друкера $E > 0$ и условию $\partial E / \partial \lambda > 0$ удовлетворяют модели Огдена, Йео, Веронда–Вестманн, Фанга и Гента, а также одна из формально определенных (экспоненциальная модель). Не рекомендовано применение 2-параметрической модели Муни–Ривлина в недеформированном состоянии и при небольших деформациях из-за потери моделью механической устойчивости в этом диапазоне λ . Полученные в работе результаты могут быть использованы в практических целях при создании физической модели и конечно-элементном моделировании среднего уха, а также в реконструктивно-восстановительной хирургии при подборе искусственных замещающих материалов для протезирования и пластики (стапедопластики).

Ключевые слова: гиперупругие модели, среднее ухо, сухожилие стременной мышцы

Благодарности: Авторы выражают признательность врачу оториноларингологу Шуебу Насру Габриловичу за консультации по вопросам анатомии органов среднего уха.

Для цитирования: *Муслов С. А., Сухочев П. Ю.* Сравнение гиперупругих и формально определенных деформационных моделей сухожилия стременной мышцы среднего уха // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 251–264. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-251-264>, EDN: PRWOZZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Comparison of hyperelastic and formally defined deformation models of the stapedius tendon of the middle ear

S. A. Muslov¹, P. Yu. Sukhochev²✉

¹Russian University of Medicine, 4 Dolgorukovskaya St., Moscow 127006, Russia

²Lomonosov Moscow State University, GSP-1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

Sergey A. Muslov, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

Pavel Yu. Sukhochev, ps@moids.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

Abstract. This article examines some unresolved issues concerning the mechanical properties of the middle ear organs — its tendons, in particular the stapedius tendon. The mechanical properties of biological tissues are a central topic in biomechanics and bioengineering. Mechanical characteristics are important parameters in computer modeling of organs and tissues during their functioning or under external influences. Mechanical properties of the stapedius tendon of the human middle ear are examined within the framework of the most commonly used hyperelastic models in the literature, as well as formally defined deformation models that allow for the description of the experimental curve with minimal error. The calculations were performed in the Mathcad 15.0 computer algebra system using specially developed functionality. The agreement between mechanical test data and model data was assessed using descriptive statistics. The results showed that the polynomial, Veronda–Westmann, and exponential models were the most accurate in terms of fitting the experimental data. The Hill–Drucker criterion $E > 0$ and the condition $\partial E/\partial \lambda > 0$ are satisfied by the Ogden, Yeoh, Veronda–Westmann, Fung, and Gent models, as well as one formally defined model (the exponential model). It is not recommended to use the 2-parameter Mooney–Rivlin model in the undeformed state and under small deformations due to the loss of mechanical stability of the model in this range λ . The results obtained in the work can be used for practical purposes in the creation of a physical model and finite element modeling of the middle ear, as well as in reconstructive surgery in the selection of artificial replacement materials for prosthetics and plastic surgery (stapedoplasty).

Keywords: hyperelastic models, middle ear, stapedius tendon

Acknowledgements: The authors are grateful to Nasr Gairovich Shueb, an otorhinolaryngologist, for his advice on the anatomy of the middle ear organs.

For citation: Muslov S. A., Sukhochev P. Yu. Comparison of hyperelastic and formally defined deformation models of the stapedius tendon of the middle ear. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 251–264 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-251-264>, EDN: PRWOZZ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Ухо состоит из двух систем: слуховой системы, которая отвечает за слух, и вестибулярной системы, связанной с равновесием тела, ориентацией и балансом. Анатомически его можно разделить на три части: наружное, среднее и внутреннее ухо [1]. Внутреннее ухо отвечает за восприятие звуков и контроль равновесия. Полукружные каналы и волосковые клетки вестибулярной системы позволяют контролировать равновесие и координацию движений.

Среднее ухо содержит три небольшие косточки — слуховые косточки (молоточек, наковальня и стремя), которые передают звуковые колебания от барабанной перепонки к внутреннему уху. Эти слуховые косточки соединены с наружным ухом небольшими связками и



прикреплены к барабанной перепонке рукояткой молоточка, а основание стремени соединяется с внутренним ухом через овальное окно. Однако слуховые косточки могут подвергаться различным повреждениям, например отосклерозу, что требует применения механического протеза путем хирургического вмешательства. Для изучения возможности применения протеза очень важно достичь точного моделирования механического поведения среднего уха и знания его механических свойств [2].

Сухожилие стремени мышцы (*tendo musculi stapedis*) выполняет следующие функции: удерживает слуховые косточки в состоянии напряжения, наиболее благоприятного для проведения звука; ограничивает колебания стремени, уменьшая амплитуду колебаний слуховых косточек при высоких значениях звукового давления; предохраняет внутреннее ухо от чрезмерных колебаний; играет роль демпфера, гася избыточные колебания системы «наковальня — протез стремени» [3].

Среднее ухо, конечно, представляет собой нечто большее, чем просто механическая система: оно имеет физиологические аспекты, которые напрямую влияют на его механическое поведение. Однако даже при изучении только с механической точки зрения оно представляет значительные трудности. Во-первых, ухо имеет сложную и неправильную геометрию, включающую ряд различных структур, охватывающих широкий диапазон размеров. Его общие размеры находятся в диапазоне десятков миллиметров, но есть и размеры, измеряемые в микрометрах (например, толщина барабанной перепонки). Можно пойти еще дальше и рассмотреть размеры коллагеновых волокон, которые имеют важное значение для механики барабанной перепонки. Смещения, которые необходимо измерить для характеристики механики среднего уха, могут быть очень малыми, достигая нанометров в ответ на звуковое давление, но очень большими, достигая миллиметров в ответ на статическое давление. Временные масштабы механических реакций среднего уха варьируются от десятков микросекунд для высокочастотных звуков до десятков секунд для изменений статического давления. Кроме того, с точки зрения клеточной биологии структуры уха преобразуют механический стимул в электрохимическую активность за счет механотрансдукции. Эта форма сенсорной трансдукции отвечает за ряд чувств и физиологических процессов в организме, включая равновесие и слух. Основной механизм механотрансдукции заключается в преобразовании механических сигналов в электрические или химические сигналы [4].

Сложность задачи для наружного и среднего уха усугубляется наличием множества различных типов тканей, обладающих очень разными механическими свойствами: кость; фиброзная соединительная ткань с коллагеном, эластином и основным веществом; мышцы, как поперечнополосатые, так и гладкие; хрящ, как кальцифицированный, так и некальцифицированный, и синовиальная жидкость [5]. В некоторых случаях сухожилие стремени мышцы восстанавливают с помощью тендопластики. Однако открытым остается вопрос о свойствах замещающего материала трансплантата.

Авторы [6] указывают на большую неопределенность в свойствах жесткости барабанной перепонки, связок и сухожилий среднего уха. В [7] отмечают, что механические свойства тканей уха позволяют получить ценные сведения о различных патологиях уха и подчеркивают его потенциал для возможного клинического применения и в диагностических целях.

Конечно-элементное моделирование среднего уха было выполнено в работе [8]. Для этих целей представлено динамическое исследование с использованием программы ABAQUS. Соединение между слуховыми косточками было выполнено с использованием формулировки, учитывающей контактное взаимодействие тел.

Модель E.A.L.S. Martins et al. включала различные связки опорной структуры и учитывала гиперупругое поведение компонентов [9]. Авторы констатировали, что количественное понимание механического поведения наружного и среднего уха важно не только для улучшения диагностики и лечения кондуктивной тугоухости, но и в связи с другими аспектами слуха, зависящими от проводящих путей, а математическое моделирование полезно для достижения этого понимания.



В [10] была разработана конечно-элементная модель человеческого уха, учитывающая вязкоупругость и гиперупругость мягких тканей среднего уха. Учитывая, что в большинстве опубликованных моделей рассматривается только один тип свойств материала (гиперупругость или вязкоупругость), учет как вязкоупругости, так и гиперупругости помог создать точную модель человеческого уха.

Cheng Tao et al. утверждали, что в литературе отсутствуют данные об измерении механических свойств стремени сухожилия среднего уха человека [11]. В своей работе они использовали систему испытаний материалов для проведения одноосных испытаний на растяжение, релаксацию напряжений и разрушение образцов сухожилия. Авторы декларируют, что представленные в работе данные вносят вклад в механику уха человека, особенно в теоретический анализ функций уха. Зависимость напряжения от деформации, полученная в ходе экспериментов, была проанализирована с использованием гиперупругой модели Огдена. Материальные константы модели, вычисленные в MATLAB v.7.0, составили $\mu_1 = 0.05$ МПа, $\alpha_1 = 17.40$, коэффициент корреляции 0.98 (SD = 0.03). В качестве расчетного уравнения использовали соотношение

$$\sigma = \frac{2\mu_1}{\alpha_1} [\lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-(0.5\alpha_1+1)}],$$

где μ_1 и α_1 — материальные постоянные, $\mu_1\alpha_1 = \mu$ — модуль сдвига в исходном недеформированном состоянии, λ — коэффициент деформации [12].

В данной работе механические свойства стремени сухожилия рассмотрены в том числе в рамках других, наиболее часто встречающихся гиперупругих, а также формально определенных деформационных моделей (табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Рассмотренные деформационные модели
The deformation models considered

№	Модель	Математическая формулировка	Ссылка	
1	Гиперупругие модели	Неогуковская	$\sigma = 2\mu(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda})$	[13]
2		Муни – Ривлина	$\sigma = 2C_{10}(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}) + 2C_{01}(\lambda - \frac{1}{\lambda^3})$	[14]
3		Огдена	$\sigma = \sum_{p=1}^n \mu_p(\lambda^{\alpha_p} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_p})$	[15]
4		Полиномиальная	$\sigma = 2(\lambda - \lambda^{-2})[C_{10} + C_{01}\lambda^{-1} + 2C_{20}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + 2\lambda^{-1}C_{02}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3) + 3C_{11}(\lambda - 1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-2})]$	[16]
5		Йео	$\sigma = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}) \sum_{i=1}^n iC_i(I_1 - 3)^{i-1}$	[17]
6		Веронда – Вестманн	$\sigma = 2C_1C_2e^{C_2(\lambda^2+2\lambda^{-1}-3)}(\lambda - \lambda^{-2}) + 2C_3(1 - \lambda^{-3})$	[18]
7		Фанга	$\sigma(\lambda) = C(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})e^{\beta(I_1-3)}$	[19]
8		Арруда – Бойс	$\sigma = 2C_1(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})[\sum_{i=1}^5 i\alpha_i\beta^{i-1}I_1^{i-1}]$	[20]
9		Гента	$\sigma = (\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(\frac{\mu J_m}{J_m - I_1 + 3})$	[21]
10	Формально определенные модели	Экспоненциальная	$\sigma(\varepsilon) = a \cdot (\exp(b \cdot \varepsilon) - 1)$	[22, 23]
11		Линейная	$\sigma(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon$	
12		Билинейная	$\sigma(\varepsilon) = E_1 \cdot \varepsilon + E_2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \cdot \theta(\varepsilon - \varepsilon_{cr})$	
13		Трилинейная	$\sigma(\varepsilon) = E_1 \cdot \varepsilon + E_2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{cr1}) \cdot \theta(\varepsilon - \varepsilon_{cr1}) + E_3 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{cr2}) \cdot \theta(\varepsilon - \varepsilon_{cr2})$	



Здесь $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$ — первый инвариант тензора деформаций, свертка правого тензора деформации Коши–Грина \mathbf{C} , для одноосного растяжения и несжимаемых материалов равная $\lambda^2 + 2\lambda^{-1}$, θ — единичная функция Хэвисайда. Используются обозначения параметров, общепринятые в литературе.

Материалы и методы

Об исследовании биомеханических свойств образцов стременичного сухожилия из свежемороженых височных костей человека впервые было сообщено в работах Cheng Tao et al. [11] и Wang X et al. [24]. Средний возраст доноров (шесть мужчин и шесть женщин) составлял 71 год и варьировался от 51 до 92 лет. Эксперименты по одноосному растяжению образцов проводились с помощью прецизионной системы (MTS Systems Eden Prairie, MN). Средняя длина образцов составляла 0.99 ± 0.09 ($M \pm SD$) мм и измерялась цифровой камерой. В результате были получены кривые напряжение-деформация $\sigma - \lambda$.

Кривые были оцифрованы нами с помощью свободно распространяемого приложения WebPlotDigitizer (Automeris LLC). Дальнейшие расчеты производились в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 (PTS Inc.) с помощью специально разработанного функционала [25]. Для расчета параметров моделей использовали функцию подгонки `genfit`, для оценки соответствия модельных данных экспериментальным применяли функцию корреляции `corr`. В качестве моделей рассматривали феноменологические: неогуксовскую, 2-параметрическую Муни–Ривлина, Отдена, полиномиальную 2-го порядка, Йео, Веронда–Вестманн, Фанга, а также микромеханические Арруда–Бойс и Гента, зарекомендовавшие себя как одни из самых популярных гиперупругих моделей в литературе [26, 27].

Для сравнения рассматривали также формально определенные алгебраические модели — экспоненциальную, линейную, а также кусочно-линейные (билинейную и трилинейную) модели. Как принято, под формально определенными понимали модели, основанные на внешнем сходстве экспериментальной кривой с графическим изображением той или иной алгебраической функции [28].

Соответствие модельных данных и данных механических испытаний оценивали с помощью показателей описательной статистики, которые ранжировали с помощью функции РАНГ Microsoft Excel. Рейтинг моделей затем определяли по среднему значению всех показателей.

Результаты и их обсуждение

В качестве выходных данных были рассчитаны:

- материальные параметры моделей (табл. 2);
- показатели отклонений модельных значений напряжений от экспериментальных данных (точность аппроксимации) (табл. 3);
- упругие характеристики — начальные, минимальные, средние и максимальные значения модуля Юнга моделей (табл. 4), его коэффициент вариации.

В рамках рассмотренных моделей были получены деформационные кривые $\sigma - \lambda$ (рис. 1, а) и $E - \lambda$ (рис. 1, б и рис. 3).

Параметры деформационных моделей представлены в табл. 2.

На рис. 1 представлены исходные данные и кривые напряжение-деформация, рассчитанные в рамках рассмотренных моделей. Видно, что большинство моделей адекватно описывают механическое поведение сухожилия. Исключение составляют модели 1-параметрическая неогуксовская, микромеханическая Арруда–Бойс и линейная с единственным параметром E (модуль Юнга). Также следует отметить, что 2-параметрическая модель Муни–Ривлина в недеформированном состоянии и при малых деформациях (λ от 1 до 1.06) испытывает механическую нестабильность $\partial\sigma/\partial\varepsilon < 0$, не свойственную биологическим тканям, а при λ от 1 до $-C_{01}/C_{10} = 1.13$ $\sigma(\lambda) < 0$.



Обсудим сравнительную точность аппроксимационных моделей. Согласно табл. 3 по совокупности показателей модели полиномиальная ($SD = 0.00188$ МПа, $\Delta = 0.00899$ МПа, $\delta = 0.00993\%$, $R = 0.99998$) и Огдена ($SD = 0.00343$ МПа, $\Delta = 0.00789$ МПа, $\delta = 0.00871\%$, $R = 0.99995$) среди гиперупругих, а также экспоненциальная ($SD = 0.00327$ МПа, $\Delta = 0.00747$ МПа, $\delta = 0.00824\%$, $R = 0.99994$) среди формально определенных моделей являются наиболее точными в плане подгонки экспериментальных данных. Наихудшие результаты аппроксимации ожидаемо показала простая неогуковская модель ($SD = 0.175$ МПа, $\Delta = 0.39571$ МПа, $\delta = 0.43701\%$, $R = 0.86173$). Условный показатель точности подгонки у гиперупругих моделей оказался равным 6.44, у формально определенных — 7.50, т.е. ниже, но ненамного (за счет хороших показателей у экспоненциальной модели).

Таблица 2 / Table 2

Параметры деформационных моделей
Parameters of deformation models

Модель	Параметры, МПа						
	μ, C_1, C, a, E, E_1	$\alpha, \beta, \beta/p, J_m, E_2$	C_{10}, C_1, E_3	C_{01}, C_2	C_{20}, C_3	C_{02}	C_{11}
Неогуковская μ	0.31	–	–	–	–	–	–
Муни – Ривлина C_{10}, C_{01}	–	–	2.76	–3.13	–	–	–
Огден a, μ, α	0.00527	16.82	–	–	–	–	–
Полиномиальная $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{02}, C_{11}$	–	–	–2.47	2.59	53.63	79.64	–128.4
Йео C_1, C_2, C_3	–	–	0.06	-0.04	1.72	–	–
Веронда – Вестманн C_1, C_2, C_3	–	–	0.01	6.14	–0.06	–	–
Фанга C, β	0.11	7.34	–	–	–	–	–
Арруда – Бойс C_1, β	0.11	–3.08	–	–	–	–	–
Гента μ, J_m	0.24	0.39	–	–	–	–	–
Экспоненциальная a, b	0.00987	12.67	–	–	–	–	–
Линейная E	1.52	–	–	–	–	–	–
Билинейная E_1, E_2	3.948×10^{-7}	11.688	–	–	–	–	–
Трилинейная E_1, E_2, E_3	3.948×10^{-7}	3.279	11.688	–	–	–	–

Представляет интерес поведение упругих модулей, предсказываемое моделями. Из данных рис. 1, б следует, что оно крайне вариабельно. Наименьший коэффициент вариации CV (не считая, естественно, линейной модели, для которой $CV = 0$) у модели неогуковской (0.53) и Арруда – Бойс (0.72), а наибольший (8.05) — у микромеханической модели Гента. Эта модель также демонстрирует наибольшее значение E_{max} , равное 23.07 МПа (в исследованном интервале деформаций).



В норме упругие модули мягких биологических тканей положительны $E > 0$ (критерий Хилла – Друкера) и инкрементальны, т. е. монотонно возрастают с деформацией $\partial E / \partial \lambda > 0$. Этот феномен обусловлен эластин-коллагеновым механизмом деформаций в тканях, когда относительно жесткие и изначально волнистые волокна коллагена, растянувшись, постепенно «включаются» в процесс деформирования (начиная с некоторого критического значения λ_{cr}). До этого момента «работает» только податливый эластиновый матрикс [29]. В этом случае график $\sigma(\lambda)$ имеет характерный *J*-вид.

Таблица 3 / Table 3

Параметры деформационных моделей
Parameters of deformation models

Модель	Показатели				Место				Среднее	Рейтинг
	SD	Δ	δ	R	SD	Δ	δ	R		
Неогуковская	0.175	0.39571	0.43701	0.86173	13	13	13	13	13	13
Муни – Ривлина	0.07073	0.15792	0.1744	0.96953	9	9	9	8	8.75	9
Огдена	0.00343	0.00789	0.00871	0.99995	3	2	2	2	2.25	3
Полиномиальная	0.00188	0.00899	0.00993	0.99998	1	3	3	1	2	2
Йео	0.00385	0.00937	0.01035	0.99991	5	4	4	5	4.5	4
Веронда – Вестманн	0.00371	0.01025	0.01132	0.99992	4	5	5	4	4.5	4
Фанга	0.0094	0.02468	0.02726	0.99954	6	6	6	6	6	6
Арруда – Бойс	0.13826	0.30146	0.33292	0.92876	11	10	10	10	10.25	10
Гента	0.03996	0.08364	0.09236	0.92876	7	7	7	10	7.75	7
Экспоненциальная	0.00327	0.00747	0.00824	0.99994	2	1	1	3	1.75	1
Линейная	0.1597	0.35936	0.39686	0.89027	12	12	12	12	12	12
Трилинейная	0.04169	0.09751	0.10769	0.99556	8	8	8	7	7.75	7
Билинейная	0.12533	0.32876	0.36307	0.95256	10	11	11	9	10.25	10

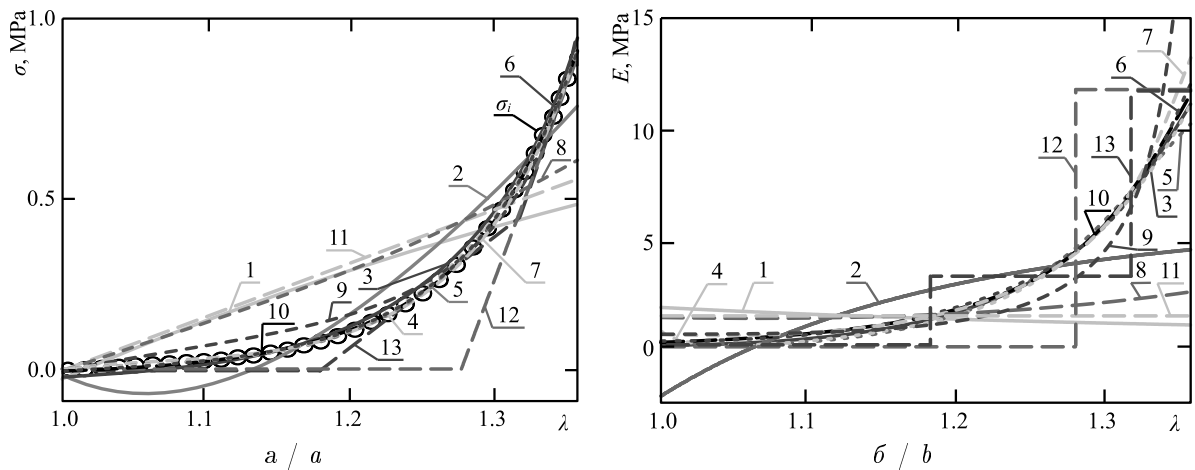


Рис. 1. Деформационные кривые $\sigma - \lambda$ (а) и $E - \lambda$ (б): σ_i – экспериментальные данные; 1 – неогуковская модель; 2 – модель Муни–Ривлина; 3 – модель Огдена; 4 – полиномиальная модель; 5 – модель Йео; 6 – модель Веронда–Вестманн; 7 – модель Фанга; 8 – модель Арруда–Бойс; 9 – модель Гента; 10 – экспоненциальная модель; 11 – линейная модель; 12 – билинейная модель; 13 – трилинейная модель

Fig. 1. Deformation curves $\sigma - \lambda$ (a) and $E - \lambda$ (b): σ_i shows experimental data; 1 shows neo-Hookean model; 2 shows Mooney–Rivlin model; 3 shows Ogden model; 4 shows polynomial model; 5 shows Yeoh model; 6 shows Veronda–Westmann model; 7 shows Fung model; 8 shows Arruda–Boyce model; 9 shows Gent model; 10 shows exponential model; 11 shows linear model; 12 shows bilinear model; 13 shows trilinear model

Как видно из данных, представленных на рис. 1, б и рис. 2, 3, неравенствам $E > 0$ и $\partial E / \partial \lambda > 0$ удовлетворяют не все модели. Лежат в верхней полуплоскости, монотонно идут вверх кривые $E(\lambda)$, соответствующие гиперупругим моделям Огдена, Веронда – Вестманн, Фанга и Гента, а также одной из формально определенной (экспоненциальной) модели. Другие модельные кривые либо идут вниз $\partial E / \partial \lambda < 0$ (неогуковская), либо выходят из отрицательной области значений $E < 0$ (Муни – Ривлина), либо меняют направление изменения, имея локальный минимум $\partial E / \partial \lambda = 0$, $\partial^2 E / \partial \lambda^2 > 0$ (модели полиномиальная, Йео и Арруда – Бойс). Модули упругости кусочно-линейных моделей (би- и трилинейной) возрастают при деформации, но ступенчато, испытывая разрывы, поскольку производная от функции Хэвисайда θ описывается δ -функцией. Модуль упругости линейной модели постоянен по величине $E = const$, не убывает и не возрастает.

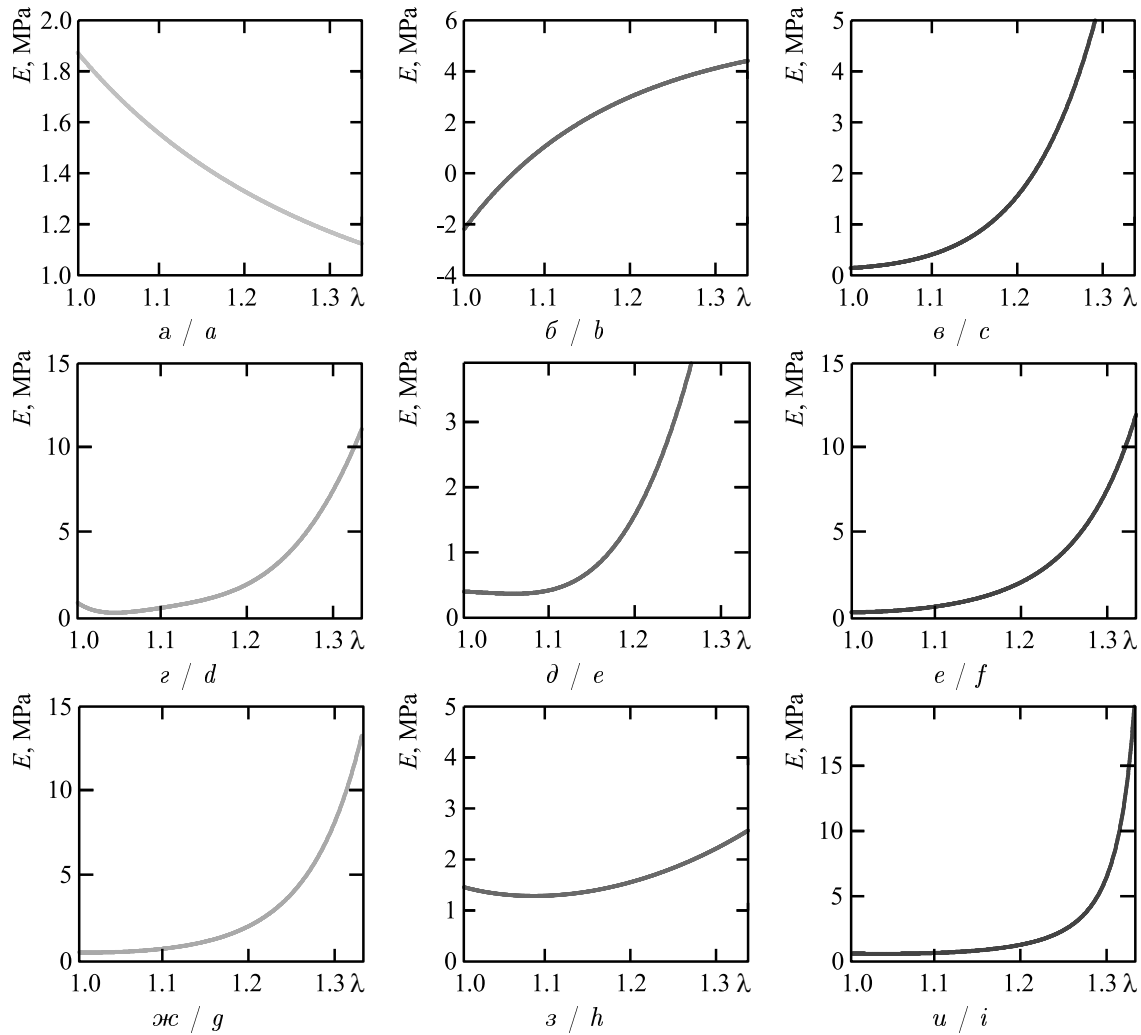


Рис. 2. Упругие модули гиперупругих моделей: а – неогуковская модель; б – модель Муни – Ривлина; в – модель Огдена; г – полиномиальная модель; д – модель Йео; е – модель Веронда – Вестманн; ж – модель Фанга; з – модель Арруда – Бойс; и – модель Гента. Здесь и на рис. 3 λ – коэффициент растяжения

Fig. 2. Elastic moduli of the PL models: a shows neo-Hookean model; b shows Mooney – Rivlin model; c shows Ogden model; d shows polynomial model; e shows Yeoh model; f shows Veronda – Westmann model; g shows Fung model; h shows Arruda – Boyce model; i shows Gent model. Here and in Fig. 3 λ is the stretching coefficient

Ненадолго вернемся к модели Муни – Ривлина. Для нее начальный модуль Юнга $E_0 = 6(C_{01} + C_{10}) = -2.20 \text{ МПа} < 0$ и критерий устойчивости Хилла – Друкера $E = \partial \sigma / \partial \varepsilon > 0$



[30, 31], накладывающий ограничение на материальные константы моделей, во всем интервале деформаций не выполняется. Это ограничивает применение данной модели сухожилия малыми деформациями.

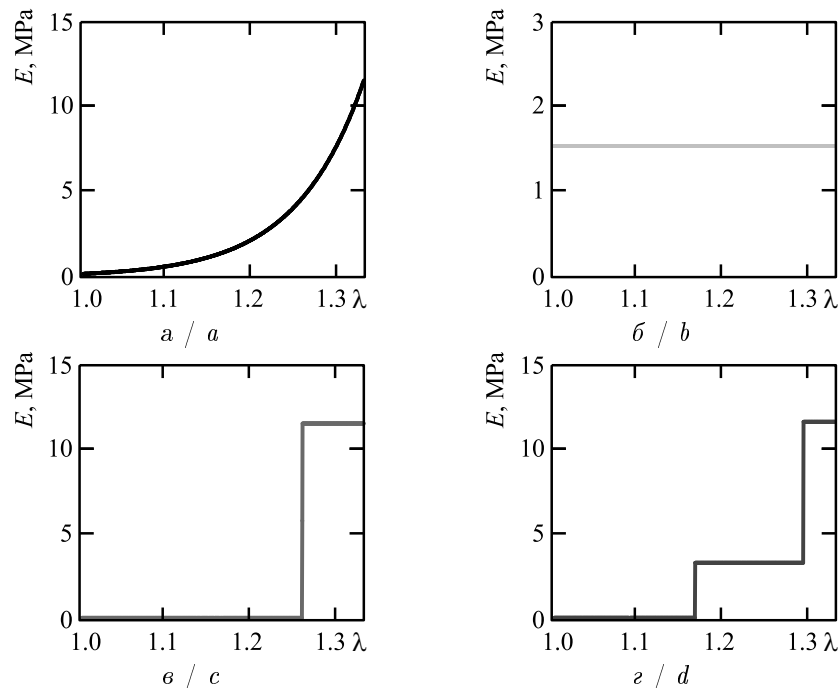


Рис. 3. Упругие модули формально определенных моделей: *a* — экспоненциальная модель; *b* — линейная модель; *в* — билинейная модель; *г* — трилинейная модель

Fig. 3. Elastic modules of formally defined models: *a* shows exponential model; *b* shows linear model; *c* shows bilinear model; *d* shows trilinear model

Также были вычислены и сведены в одну таблицу характерные значения упругих модулей моделей: начальное E_0 , минимальное E_{min} , максимальное E_{max} , среднее E_{mean} , а также коэффициент вариации CV (табл. 4).

Рассчитанные на основе данных табл. 4 значения начальных модулей сдвига $G_0 = E_0/3$ ниже определенного Т. Cheng et al. в [11] с помощью MATLAB значения $\mu = 0.87$ МПа. Наименьшие отличия от данного значения наблюдаются у гиперупругой неогуксовской модели ($G_0 = 0.62$ МПа). Усредненный упругий модуль E_{mean} рассмотренных моделей мало меняется от модели к модели, а $\langle E_{mean} \rangle = (2.31 \pm 0.46)$ МПа ($M \pm SD$) с коэффициентом вариации $CV = 0.20$.

В заключение остановимся на вопросе, который был поднят Х. Wang et al. в своей работе [24]. Кривые зависимости напряжения от деформации показали, что связки/сухожилия среднего уха обладают нелинейными и вязкоупругими свойствами. Для определения модуля упругости ткани при статической деформации модуль упругости $\partial\sigma/\partial\lambda$ может быть выражен как

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} = \alpha(\sigma + \beta),$$

α и β — две константы [22]. Используя этот метод, авторы [11] сообщили об установленной ими эмпирической зависимости модуля упругости от напряжения *tendo musculi stapedis* в двух соседних диапазонах напряжений

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} = \begin{cases} E^*(\sigma) & 23.03\sigma + 0.33 \quad (0 < \sigma \leq 0.1 \text{ МПа}) \\ E^{**}(\sigma) & 10.52\sigma + 1.33 \quad (0.1 < \sigma \leq 0.15 \text{ МПа}) \end{cases} \quad (1)$$

Таблица 4 / Table 4

Характеристические значения упругих модулей, МПа
Characteristic values of elastic modules, MPa

Модель	E_0	E_{min}	E_{max}	E_{mean}	CV
Неогуковская	1.874	1.123	1.874	1.418	0.53
Муни – Ривлина	-2.201	-2.201	4.412	2.131	3.10
Огдена	0.133	0.133	11.218	2.56	4.33
Полиномиальная	0.735	0.137	11.043	2.553	4.27
Йео	0.338	0.304	10.493	2.538	4.01
Веронда – Вестманн	0.144	0.144	11.961	2.581	4.58
Фанга	0.333	0.328	13.148	2.62	4.89
Арруда – Бойс	1.458	1.358	2.572	1.689	0.72
Гента	0.705	0.677	23.077	2.782	8.05
Экспоненциальная	0.125	0.125	11.652	2.573	4.48
Линейная	1.524	1.524	1.524	1.524	0.00
Билинейная	3.948×10^{-7}	1.974×10^{-7}	11.688	2.575	4.54
Трилинейная	3.948×10^{-7}	1.974×10^{-7}	11.688	2.575	4.54

Для экспоненциальной модели

$$\sigma = \mu \cdot (\exp \alpha \cdot (\lambda - 1) - 1)$$

можно в явной форме получить выражение для модуля упругости E через напряжение σ в общем виде:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = E(\sigma) = \alpha(\sigma + \mu),$$

а также используя полученные численные данные из табл. 2:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = 12.67\sigma + 0.12. \quad (2)$$

В итоге кусочно-линейная зависимость (1) может быть заменена гладкой линейной (2) (рис. 4).

В результате уравнение (2) предсказывает изменение модуля упругости тканей среднего уха в зависимости от уровня статического напряжения, полученное из экспериментальных кривых во всем диапазоне деформаций.

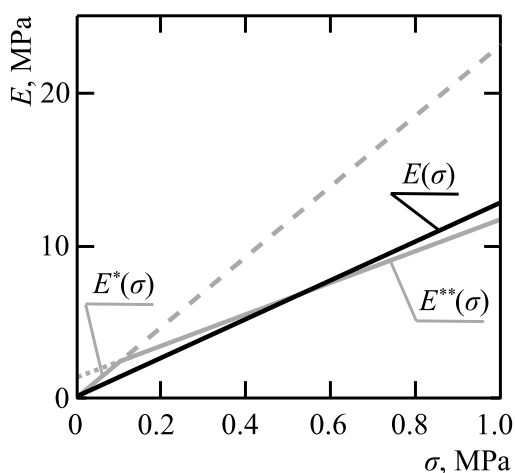


Рис. 4. Расчетные зависимости модулей упругости сухожилия стремени мышцы
Fig. 4. Calculated dependences of elastic moduli of the stapedius tendon

Выводы

1. Рассчитаны параметры гиперупругих феноменологических и микромеханических, а также формально определенных моделей сухожилия стремени мышцы среднего уха человека.

2. С точки зрения способности аналитически характеризовать механическое поведение тканей сухожилия стремени мышцы рекомендованы гиперупругая модель Огдена, а также формально определенная экспоненциальная модель.

3. Из-за потери механической устойчивости не рекомендуется применять 2-параметрическую гиперупругую модель Муни – Ривлина в недеформированном состоянии и при небольших деформациях.



4. Типичный для биотканей характер зависимостей модулей упругости биологических тканей от деформации демонстрируют модели Огдена, Веронда – Вестманн, Фанга и Гента, а также экспоненциальная модель.

5. Предложено ранжирование деформационных моделей по точности аппроксимации на основании показателей описательной статистики, при этом учитывать поведение $E(\lambda)$.

6. В рамках экспоненциальной модели установлена связь модуля упругости *tendo musculi stapedis* и растягивающего напряжения с параметрами, полученными из экспериментальных данных.

7. Описанные в работе результаты могут быть использованы в практических целях при создании физических моделей и конечно-элементном моделировании органов среднего уха, а также для подбора замещающих материалов при протезировании и пластике (стапедопластике).

Список литературы

1. Батуев А. С. Физиология высшей нервной деятельности и сенсорных систем. Москва : Питер, 2012. 316 с. EDN: [QKUHPPV](#)
2. Prendergast E. J., Ferris E., Rice H. J., Blayney A. W. Vibro-acoustic modeling of the outer and middle ear using the finite element method // *Audiol Neurootol*. 1999. Vol. 4. P. 185–191. DOI: <https://doi.org/10.1159/000013839>
3. Селянинов А. А., Еловиков А. М., Чарничева О. В., Еловиков В. А. Биомеханическое моделирование функционирования стремени среднего уха человека // *Российский журнал биомеханики*. 2016. Т. 20, № 4. С. 358–367. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomekh/2016.4.08>, EDN: [XXMNZN](#)
4. Howard J., Roberts W. M., Hudspeth A. J. Mechanoelectrical transduction by hair cells // *Annual Review of Biophysics and Biophysical Chemistry*. 1988. Vol. 17. P. 99–124. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.bb.17.060188.000531>
5. Funnell W. R. J., Maftoon N., Decraemer W. F. Modeling of middle ear mechanics // *The Middle Ear* / eds. S. Puria, R. Fay, A. Popper. New York : Springer Handbook of Auditory Research, 2013. P. 171–210. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6591-1_7
6. Lobato L. C., Paul S., Cordioli J. A. Statistical analysis of the human middle ear mechanical properties // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2022. Vol. 151, iss. 3. Art. 2043. DOI: <https://doi.org/10.1121/10.0009890>
7. Ebrahimian A., Mohammadi H., Maftoon N. Material characterization of human middle ear using machine-learning-based surrogate models // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2024. Vol. 153. Art. 106478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2024.106478>
8. Gentil F., Natal Jorge R., Ferreira A. J. M., Parente M. P. L., Martins P. A. L. S., Almeida E. Biomechanical simulation of middle ear using hyperelastic models // *Journal of Biomechanics*. 2006. Vol. 39, iss. 1. P. S388–S389. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(06\)84569-0](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(06)84569-0)
9. Martins P. A. L. S., Jorge R. M. N., Ferreira A. J. M., Figueiredo M., Fernandes R. A. A., Figueiredo M., Silva R. Modelling the mechanical behavior of soft tissues using hyperelastic constitutive models // *International Conference on Computational Bioengineering (ICCB2005)* / eds. H. Rodrigues [et al.]. Lisbon, Portugal, 2005. P. 403–410.
10. Zhang J., Jiao C., Zou D., Ta N., Rao Z. Assigning viscoelastic and hyperelastic properties to the middle-ear soft tissues for sound transmission // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2020. Vol. 19, iss. 3. P. 957–970. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-019-01263-w>
11. Cheng T., Gan R. Z. Mechanical properties of stapelial tendon in human middle ear // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2007. Vol. 129, iss. 6. P. 913–918. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2800837>
12. Wang B., Lu H., Kim G. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials // *Mechanics of Materials*. 2002. Vol. 34, iss. 8. P. 475–483. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00175-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00175-8)
13. Шмурак М. И., Кучумов А. Г., Воронова Н. О. Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // *Master's Journal*. 2017. № 1. С. 230–243. EDN: [YUOPFB](#)
14. Иванов Д. В., Фомкина О. А. Определение постоянных для моделей Нео-Гука и Муни–Ривлина по результатам экспериментов на одноосное растяжение // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та*, 2008. Вып. 10. С. 114–117. EDN: [UIRZIV](#)



15. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data // *Computational Mechanics*. 2004. Vol. 34, iss. 6. P. 484–502. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y>
16. Rackl M. Material testing and hyperelastic material model curve fitting for Ogden, polynomial and Yeoh models // *Proceedings of the ScilabTEC, 7th International Scilab Users Conference At: Paris, France, May 2015*. DOI: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29552.25600/1>
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1993. Vol. 66, iss. 5. P. 754–771. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538343>
18. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations // *Journal of Biomechanics*. 1970. Vol. 3, iss. 1. P. 111–124. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
19. Bone A., Kaoye M. B.-A. L., Baidi B. B., Samon J.-B. Comparison of hyperelastic models for analysis of human and pig skins behavior // *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2025. Vol. 13, iss. 6. P. 2045–2062. DOI: <https://doi.org/10.4236/jamp.2025.136114>
20. Arruda E. M., Boyce M. C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41, iss. 2. P. 389–412. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90013-6)
21. Gent A. N. A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1996. Vol. 69, iss. 1. P. 59–61. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538357>
22. Fung Y.-C. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. New York : Springer, 1993. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
23. Муслов С. А., Перцов С. С., Арутюнов С. Д. Физико-механические свойства биологических тканей / под ред. О. О. Янушевича. Москва : Практическая медицина, 2023. 456 с. DOI: <https://doi.org/10.17513/np.594>, EDN: MNOSIQ
24. Wang X., Cheng T., Gan R. Z. Finite-element analysis of middle-ear pressure effects on static and dynamic behavior of human ear // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007. Vol. 122, iss. 2. P. 906–917. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2749417>
25. Муслов С. А., Никущенко А. Н., Перцов С. С. Калькулятор параметров гиперупругих моделей биотканей. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2025613849, 17.02.2025. Заявка № 2025611314 от 30.01.2025. EDN: SJTYQQ
26. Wex C., Arndt S., Stoll A., Bruns C., Kupriyanova Yu. Isotropic incompressible hyperelastic models for modelling the mechanical behaviour of biological tissues: A review // *Biomedical Engineering / Biomedizinische Technik*. 2015. Vol. 60, iss. 6. P. 577–592. DOI: <https://doi.org/10.1515/bmt-2014-0146>
27. Муслов С. А., Арутюнов С. Д., Маев И. В., Золотницкий И. В., Солодов А. А., Раснер П. И. Гиперупругие свойства биологических тканей / под ред. С. С. Перцова, С. В. Панина. Москва : Практическая медицина, 2025. 232 с. EDN: BPALJZ
28. Голубинский А. Н. Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей // *Вестник Воронежского института МВД России*. 2007. № 2. С. 138–143. EDN: JXUUNF
29. Муслов С. А., Гветадзе Р. Ш., Арутюнов С. Д., Корнеев А. А., Чистяков М. В., Зайцева Н. В., Сузочев П. Ю. К вопросу о билинейной модели, механизмах деформации и параметрах эластин-коллагенового перехода в биологических тканях // *Молекулярная медицина*. 2025. Т. 23, № 2. С. 48–58. DOI: <https://doi.org/10.29296/24999490-2025-02-08>, EDN: UAALC
30. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1958. Vol. 6, iss. 3. P. 236–249. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
31. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material // *Journal of Applied Mechanics*. 1959. Vol. 26, iss. 1. P. 101–195. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011929>

References

1. Batuev A. S. *Fiziologiya vysshej nervnoj deyatel'nosti i sensorykh sistem* [Physiology of higher nervous activity and sensory systems]. Moscow, Piter, 2012. 316 p. (in Russian). EDN: QKUHVP
2. Prendergast E. J., Ferris E., Rice H. J., Blayney A. W. Vibro-acoustic modeling of the outer and middle ear using the finite element method. *Audiol Neurootol*, 1999, vol. 4, pp. 185–191. DOI: <https://doi.org/10.1159/000013839>
3. Selyaninov A. A., Elovikov A. M., Charntseva O. V., Elovikov V. A. Biomechanical modeling of the functioning of the stapes of the human middle ear. *Russian Journal of Biomechanics*, 2016, vol. 20, iss. 4, pp. 358–367 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2016.4.08>, EDN: XXMNZN



4. Howard J., Roberts W. M., Hudspeth A. J. Mechanicoelectrical transduction by hair cells. *Annual Review of Biophysics and Biophysical Chemistry*, 1988, vol. 17, pp. 99–124 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.bb.17.060188.000531>
5. Funnell W. R. J., Maftoon N., Decraemer W. F. Modeling of middle ear mechanics. In: Puria S., Fay R., Popper A. (eds.) *The Middle Ear*. New York, Springer Handbook of Auditory Research, 2013, pp. 171–210. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6591-1_7
6. Lobato L. C., Paul S., Cordioli J. A. Statistical analysis of the human middle ear mechanical properties. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2022, vol. 151, iss. 3, art. 2043. DOI: <https://doi.org/10.1121/10.0009890>
7. Ebrahimian A., Mohammadi H., Maftoon N. Material characterization of human middle ear using machine-learning-based surrogate models. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2024, vol. 153, art. 106478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2024.106478>
8. Gentil F., Natal Jorge R., Ferreira A. J. M., Parente M. P. L., Martins P. A. L. S., Almeida E. Biomechanical simulation of middle ear using hyperelastic models. *Journal of Biomechanics*, 2006, vol. 39, iss. 1, pp. S388–S389. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(06\)84569-0](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(06)84569-0)
9. Martins E. A. L. S., Jorge R. M. N., Ferreira A. J. M., Figueiredo M., Fernandes R. A. A., Figueiredo M., Silva R. Modelling the mechanical behavior of soft tissues using hyperelastic constitutive models. In: Rodrigues H. et al. (eds.) *International Conference on Computational Bioengineering (ICCB2005)*. Lisbon, Portugal, 2005, pp. 403–410.
10. Zhang J., Jiao C., Zou D., Ta N., Rao Z. Assigning viscoelastic and hyperelastic properties to the middle-ear soft tissues for sound transmission. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2020, vol. 19, iss. 3, pp. 957–970. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-019-01263-w>
11. Cheng T., Gan R. Z. Mechanical properties of stapedial tendon in human middle ear. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2007, vol. 129, iss. 6, pp. 913–918. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2800837>
12. Wang B., Lu H., Kim G. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials. *Mechanics of Materials*, 2002, vol. 34, iss. 8, pp. 475–483. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00175-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00175-8)
13. Shmurak M. I., Kuchumov A. G., Voronova N. O. Hyperelastic models analysis for description of soft human tissues behavior. *Master's Journal*, 2017, iss. 1, pp. 230–243 (in Russian). EDN: YUOPFB
14. Ivanov D. V., Fomkina O. A. Determination of constants for the neo-Hookean and Mooney–Rivlin models based on the results of experiments on uniaxial tension. *Mathematics. Mechanics*. Saratov, Saratov State University Publ., 2008, iss. 10, pp. 114–117 (in Russian). EDN: UIRZIV
15. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 2004, vol. 34, iss. 6, pp. 484–502. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y>
16. Rackl M. Material testing and hyperelastic material model curve fitting for Ogden, polynomial and Yeoh models. *Proceedings of the ScilabTEC, 7th International Scilab Users Conference*. At: Paris, France, May 2015. DOI: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29552.25600/1>
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 1993, vol. 66, iss. 5, pp. 754–771. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538343>
18. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 1970, vol. 3, iss. 1, pp. 111–124. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
19. Bone A., Kaoye M. B.-A. L., Baidi B. B., Samon J.-B. Comparison of hyperelastic models for analysis of human and pig skins behavior. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2025, vol. 13, iss. 6, pp. 2045–2062. DOI: <https://doi.org/10.4236/jamp.2025.136114>
20. Arruda E. M., Boyce M. C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, vol. 41, iss. 2, pp. 389–412. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90013-6)
21. Gent A. N. A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 1996, vol. 69, iss. 1, pp. 59–61. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538357>
22. Fung Y.-C. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. New York, Springer, 1993. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
23. Muslov S. A., Pertsov S. S., Arutyunov S. D. Fiziko-mekhanicheskie svojstva biologicheskikh tkanej [Physico-mechanical properties of biological tissues]. Moscow, Practical Medicine, 2023. 456 p. (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17513/np.594>, EDN: MNOSIQ
24. Wang X., Cheng T., Gan R. Z. Finite-element analysis of middle-ear pressure effects on static and dynamic behavior of human ear. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, vol. 122, iss. 2, pp. 906–917. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2749417>



25. Muslov S. A., Nikishenko A. N., Pertsov S. S. Calculator of parameters of hyperelastic models of biological tissues. Patent RU 2025613849 (in Russian). EDN: [SJTYQQ](#)
26. Wex C., Arndt S., Stoll A., Bruns C., Kupriyanova Yu. Isotropic incompressible hyperelastic models for modelling the mechanical behaviour of biological tissues: A review. *Biomedical Engineering / Biomedizinische Technik*, 2015, vol. 60, iss. 6, pp. 577–592. DOI: <https://doi.org/10.1515/bmt-2014-0146>
27. Muslov S. A., Arutyunov S. D., Maev I. V., Zolotnitsky I. V., Solodov A. A., Rasner P. I. *Giperuprugie svoystva biologicheskikh tkanej* [Hyperelastic properties of biological tissues]. Moscow, Practical Medicine, 2025. 232 p. (in Russian). EDN: [BPALJZ](#)
28. Golubinsky A. N. Methods of approximating experimental data and constructing models. *Vestnik of Voronezh Institute of the Ministry of Interior of Russia*, 2007, iss. 2, pp. 138–143 (in Russian). EDN: [JXUUHF](#)
29. Muslov S. A., Gvetadze R. Sh., Arutyunov S. D., Korneev A. A., Chistyakov M. V., Zaitseva N. V., Sukhochev P. Yu. On the bilinear model, deformation mechanisms and parameters of the elastin-collagen transition in biological tissues. *Molecular Medicine*, 2025, vol. 23, iss. 2, pp. 48–58 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.29296/24999490-2025-02-08>, EDN: [UAOALC](#)
30. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1958, vol. 6, iss. 3, pp. 236–249. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
31. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, vol. 26, iss. 1, pp. 101–195. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011929>

Поступила в редакцию / Received 26.09.2023

Принята к публикации / Accepted 02.03.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 265–279

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 265–279

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-265-279>

EDN: <https://elibrary.ru/QTUOJ>

Научная статья

УДК 539.376:621.787

Метод расчёта релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочнённых цилиндрах с надрезами при комбинированном нагружении крутящим моментом и растягивающей силой в условиях высокотемпературной ползучести

В. П. Радченко, В. Е. Глебов[✉]

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

Радченко Владимир Павлович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, radchenko.vp@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, SPIN: 1823-0796, AuthorID: 113673

Глебов Виктор Евгеньевич, аспирант, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, glebov.ve@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4841-9786>, SPIN: 8660-9105, AuthorID: 1142418

Аннотация. На основе метода конечных элементов предложен метод решения задачи релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочнённых цилиндрах с надрезами различного профиля: полукруглого, квадратного, V-образного, и в цилиндрах с серией периодически расположенных полукруглых надрезов. В соответствии с методом опережающего поверхностного пластического деформирования надрезы наносились на предварительно упрочнённый гладкий образец. Предложенная методика заключается в последовательном применении аналитической математической модели для реконструкции остаточного напряжённо-деформированного состояния в гладком цилиндре, метода расчёта по начальным деформациям для цилиндров с надрезами, метода шагов во времени для решения задачи релаксации остаточных напряжений в условиях ползучести. Корректность применения расчёта по первоначальным деформациям проиллюстрирована в частном случае гладкого образца сравнением решений реконструкции напряжённо-деформированного состояния по аналитической математической модели и по методу конечных элементов, которые практически совпадают. Аналогично при решении задачи релаксации остаточных напряжений в условиях ползучести установлено полное соответствие данных расчёта по методу конечных элементов и по методу сеток из независимых источников для гладкого упрочнённого образца. Установлено, что для надрезов с высокой концентрацией напряжений (V-образный надрез и надрез с квадратным профилем) задачу реконструкции начального напряжённо-деформированного состояния необходимо решать в упруго-пластической постановке. На основе разработанного численного метода решён ряд задач релаксации остаточных напряжений для цилиндров с широким спектром геометрических параметров надрезов. Выполнен анализ влияния концентраторов на кинетику остаточных напряжений. Приведены результаты многочисленных вариативных расчётов.

Ключевые слова: цилиндр, поверхностное пластическое упрочнение, надрезы, остаточные напряжения, ползучесть, релаксация

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00434, Самарский государственный технический университет).



Для цитирования: Радченко В. П., Глебов В. Е. Метод расчёта релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочнённых цилиндрах с надрезами при комбинированном нагружении крутящим моментом и растягивающей силой в условиях высокотемпературной ползучести // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 265–279. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-265-279>, EDN: QTCUOJ
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

A method for calculating the relaxation of residual stresses in surface-hardened cylinders with incisions under combined torque and tensile force loading under conditions of high-temperature creep

V. P. Radchenko, V. E. Glebov[✉]

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

Vladimir P. Radchenko, radchenko.vp@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, SPIN: 1823-0796, AuthorID: 113673

Victor E. Glebov, glebov.ve@samgtu.ru, <https://orcid.org/000-0003-4841-9786>, SPIN: 8660-9105, AuthorID: 1142418

Abstract. Based on the finite element method, a method is proposed for solving the problem of residual stress relaxation in surface-hardened cylinders with incisions of various profiles: semicircular, square, V-shaped, and in cylinders with a series of periodically arranged semicircular incisions. In accordance with the method of advanced surface plastic deformation the incisions were applied to a pre-hardened smooth sample. The proposed technique consists in the sequential application of an analytical mathematical model for reconstructing the residual stress-strain state in a smooth cylinder, a method for calculating initial deformations for cylinders with incisions, and a time step method for solving the problem of relaxation of residual stresses under creep conditions. The correctness of applying the calculation based on initial deformations is illustrated in the special case of a smooth sample by comparing solutions for reconstructing the stress-strain state using an analytical mathematical model and the finite element method, which practically coincide. Similarly, when solving the problem of relaxation of residual stresses under creep conditions, a complete correspondence was established between the calculation data using the finite element method and the grid method from independent sources for a smooth hardened sample. It is established that for incisions with a high stress concentration (V-shaped incision and incision with a square profile), the task of reconstructing the initial stress-strain state must be solved in an elastoplastic formulation. Based on the developed numerical method, a number of residual stress relaxation problems have been solved for cylinders with a wide range of geometric parameters of the incisions. The effect of concentrators on the kinetics of residual stresses is analyzed. The results of numerous variable calculations are presented.

Keywords: cylinder, surface plastic hardening, incisions, residual stresses, creep, relaxation

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00434, Samara State Technical University).

For citation: Radchenko V. P., Glebov V. E. A method for calculating the relaxation of residual stresses in surface-hardened cylinders with incisions under combined torque and tensile force loading under conditions of high-temperature creep. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 265–279 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-265-279>, EDN: QTCUOJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

В публикациях [1–3] разработан метод расчёта полей остаточных напряжений (ОН) во вращающихся упрочнённых цилиндрах с надрезами различного профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД) в условиях высокотемпературной ползучести при термоэкспозиции. В настоящей работе указанный метод обобщается на аналогичные цилиндры на случай сложного напряжённого состояния: совместного действия кручения и осевого растяжения. Отметим, что наряду с ОППД — одним из видов упрочняющей обработки поверхности деталей машин и элементов конструкций — можно выделить и другие технологии упрочнения: химико-термическая, лазерная обработка, плазменное напыление, кавитационное упрочнение. Всеми этими методами достигается существенное улучшение механических, трибологических, прочностных и коррозионных характеристик конструктивных элементов [4–13], что является следствием формирования полей сжимающих ОН в тонком поверхностном слое, «разгружающих» поверхность детали при её эксплуатации и препятствующих раскрытию различного рода микротрещин и других микродефектов [14–18].

Необходимость разработки метода расчёта релаксации ОН обусловливается тем, что назначение большого количества производимых деталей предполагает их эксплуатацию при высоком уровне температуры и различных видах квазистатического нагружения. Повышение температуры влечет за собой проявление ползучести материала, а значит, релаксацию сжимающих ОН, а различного рода нагрузки зачастую интенсифицируют этот процесс. Более того, поверхность деталей может быть «ослаблена» предварительно нанесёнными или приобретёнными в процессе эксплуатации дефектами — надрезами, канавками, галтелями и др. И если методам расчёта релаксации ОН в деталях с регулярной («гладкой») поверхностью посвящено множество исследований, в которых рассмотрены различные подходы к моделированию процесса ползучести [19–23], то разработке аналогичных методов в деталях с поверхностными дефектами уделено внимание лишь в единичных публикациях [1–3, 24].

Настоящая работа, являясь логическим продолжением работ [1–3], развивает изложенный в них метод расчёта релаксации ОН применительно к упрочнённому цилиндру из сплава ЖС6КП с концентраторами напряжений для случая нагружения крутящим моментом и растягивающей силой.

1. Постановка задачи

В стандартной цилиндрической системе координат $O\theta z$ рассматривается цилиндр из сплава ЖС6КП радиуса a и длиной L при температуре T , один торец которого ($z = 0$) закреплён консольно, а на другом приложен крутящий момент M и растягивающая сила F в осевом направлении (рис. 1, а). На боковую поверхность цилиндра ($r = a$) после ОППД нанесён надрез одной из форм, представленных на рис. 1, б–д. Механические характеристики сплава ЖС6КП следующие: модуль Юнга $E_0 = 200$ ГПа при $T_0 = 20$ °С, $E_1 = 149.2$ ГПа при $T_1 = 800$ °С, $E_2 = 136.4$ ГПа при $T_2 = 900$ °С; коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$ полагается не зависящим от температуры. Геометрические параметры цилиндра и надрезов (см. рис. 1) следующие: $a = 3.76$ мм; $L = 20$ мм; радиус полукруглого надреза $\rho = \{0.1, 0.2\}$ мм; сторона надреза квадратного профиля $d = \{0.1, 0.2\}$ мм; глубина V-образного надреза $c = 0.15$ мм, угол раскрытия $\varphi = 10^\circ$, радиус скругления «углов» в квадратном и V-образном надрезе составил порядка 5 мкм. Количество надрезов в цилиндре с серией периодически расположенных полукруглых надрезов $n = \{3, 5\}$, шаг между полукруглыми надрезами $\delta = 50$ мкм (рис. 1, д). Величина прикладываемого крутящего момента $M = 12.525$ Н·м, осевой силы $F = 4441.5$ Н. Расчётное время ползучести образцов полагается равным 100 ч. Дальнейшей целью настоящей работы является детальное исследование процесса релаксации ОН в упрочнённых цилиндрах в условиях высокотемпературной ползучести (при температуре

$T_1 = 800^\circ\text{C}$ или $T_2 = 900^\circ\text{C}$) при наличии указанных выше концентраторов напряжений.

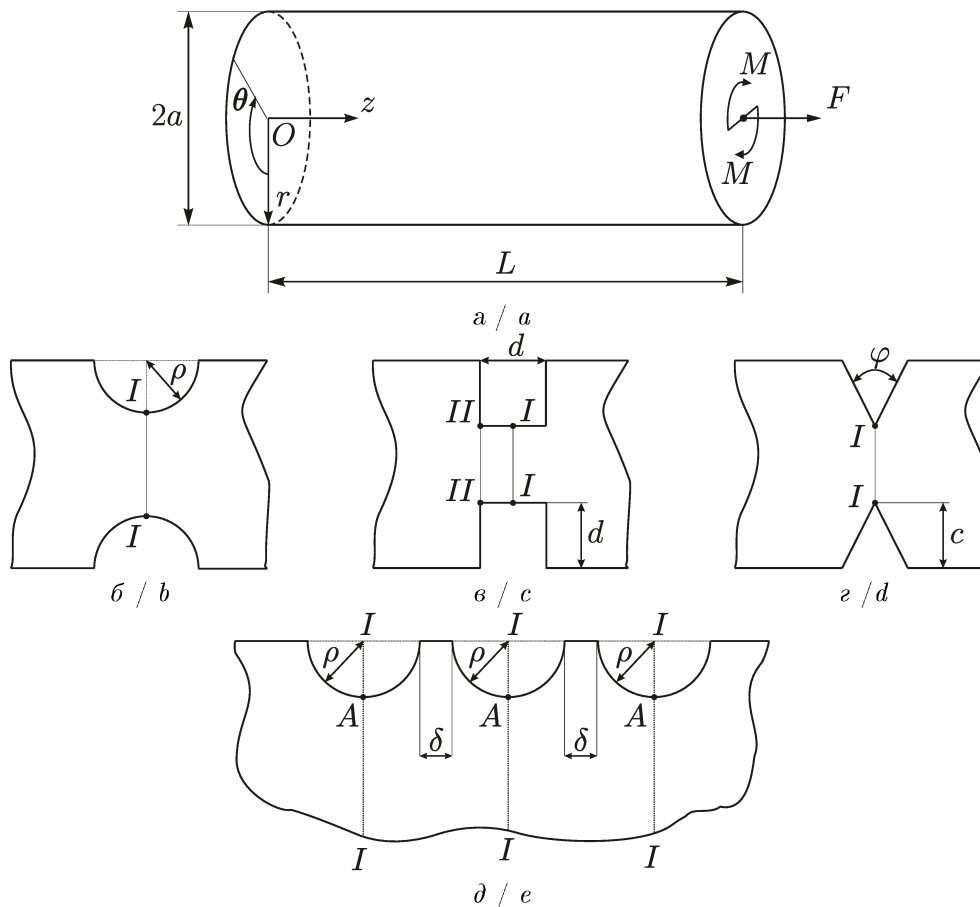


Рис. 1. Схематическое изображение гладкого цилиндра и надрезов, наносимых на его поверхность после процедуры упрочнения: а — консольно закреплённый на одном торце и нагруженный осевой силой и крутящим моментом на другом гладкий цилиндр; б — полукруглый надрез; в — квадратный надрез; г — V-образный надрез; д — серия периодически расположенных полукруглых надрезов при $n = 3$

Fig. 1. Schematic representation of a smooth cylinder and the incisions applied to its surface after the hardening procedure: a — a smooth cylinder cantilevered on one end and loaded with axial force and torque on the other; b — a semicircular incision; c — a square incision; d — a V-shaped incision; e — a series of periodically arranged semicircular incisions at $n = 3$

2. Реконструкция остаточного напряжённо-деформированного состояния в цилиндрах

Поскольку при процедуре ОПДД поверхностное упрочнение предваряет нанесение надреза, опишем сначала процедуру реконструкции полей ОН и пластических деформаций (ПД) после упрочнения в гладком бездефектном цилиндре. Для этого используется феноменологический метод [24], согласно которому выражения для компонент (ненулевых) тензора ОН и ПД с использованием стандартных обозначений ($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ — радиальная, окружная и осевая компоненты тензора ОН после упрочнения, q_r, q_θ, q_z — радиальная, окружная и осевая компоненты тензора ПД) имеют вид:

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{b^2}\right), \quad (1)$$

$$\sigma_r(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \frac{b\sqrt{\pi}}{2r} \left[\operatorname{erf}(a/b) - \operatorname{erf}\left(\frac{a-r}{b}\right) \right], \quad (2)$$



$$q_\theta(r) = \frac{1 - 2\mu}{E_0(1 + \mu)r^{\frac{3}{1+\mu}}} \int_0^r z^{\frac{2-\mu}{1+\mu}} [\sigma_r(z) + 2\sigma_\theta(z)] dz - \frac{1}{E_0} [(1 - \mu)\sigma_\theta(r) - \mu\sigma_r(r)], \quad (3)$$

$$q_z = q_\theta, \quad q_r = -2q_\theta, \quad (4)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a r \left\{ q_z(r) - \frac{\mu}{E_0} [\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)] \right\} dr, \quad (5)$$

$$\sigma_z(r) = E_0(\varepsilon_z^0 - q_z(r)) + \mu(\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)), \quad r \in [0, a], \quad (6)$$

где $\sigma_0 = 22.55$ МПа; $\sigma_1 = 1027.45$ МПа; $b = 0.093$ мм – параметры аппроксимации (1), процедура идентификации параметров которой выполнена путём минимизации функционала квадратичной ошибки для осевой компоненты тензора ОН от соответствующей экспериментальной эпюры сплава ЖС6КП [24] (рис. 2), а величина $\text{erf}(x)$ вычисляется по формуле

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Следующим этапом является сведение задачи реконструкции напряжённо-деформированного состояния (НДС) к задаче термоупругости или, при необходимости, термоупругопластичности для реализации КЭ-решения. Для этого используется метод расчёта по первоначальным деформациям [25–27, 1–3], который позволяет определённые на предыдущем этапе по формулам (3) и (4) ПД смоделировать температурными в неоднородном стационарном температурном поле $T = T(r)$ с использованием соотношений

$$q_i(r) = \alpha_i(T(r))(T(r) - T_0), \quad 0 \leq r \leq a \quad (i = r, \theta, z), \quad (7)$$

где $T_0 = \text{const}$ – некоторое начальное значение температуры. Из соотношений (7) определяются коэффициенты температурного расширения, которые затем вводятся как свойство материала при решении задачи методом конечных элементов (МКЭ) в вычислительном пакете (в данной работе – ANSYS), что сводит обратную краевую задачу реконструкции остаточного НДС к корректной задаче фиктивной термоупругости (или термоупругопластичности), обладающей единственным решением.

Финальным этапом решения задачи реконструкции остаточного НДС является построение КЭ-сетки и решение краевой задачи фиктивной термоупругости (термоупругопластичности) МКЭ. Для этого используется тороидальный элемент SOLID273, с использованием которого учитывается осесимметричность задачи, а также все необходимые свойства материала: термоупругость, пластичность и ползучесть. Отметим, что для учёта высоких градиентов окружных и осевых ОН создаётся достаточно мелкая сетка с линейным размером КЭ порядка 3–10 мкм в области сжатия материала (160–200 мкм).

На рис. 2 в качестве примера приведены экспериментальные, расчётные по аналитическому методу (1)–(6) и расчётные по МКЭ данные для осевой компоненты тензора ОН, при этом расчётные данные по обоим методам практически совпадают, что свидетельствует об адекватности МКЭ.

Решение задачи реконструкции полей НДС в цилиндрах с надрезами после ОППД несколько отличается от решения аналогичной задачи для гладкого цилиндра. Во-первых,

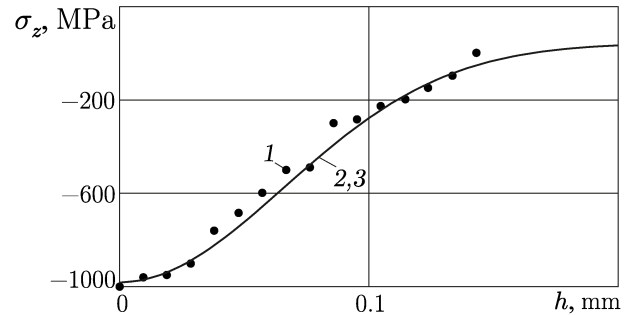


Рис. 2. Экспериментальные (точки-маркеры 1), расчётные по аналитической модели (1)–(6) (кривая 2) и по МКЭ (кривая 3) данные для компоненты $\sigma_z(h)$ после процедуры упрочнения; $h = a - r$ мм
Fig. 2. Experimental (marker-points 1), calculated using the analytical model (1)–(6) (curve 2) and FEM (curve 3) data for the component $\sigma_z(h)$ after the hardening procedure; $h = a - r$ mm



используется другая КЭ-сетка, в которой часть материала, соответствующая области надреза, удаляется, при этом в оставшейся части (в соответствии с технологией ОППД) распределение температур для моделирования ПД фиктивными термоупругими полагается таким же, как в гладком цилиндре. Во-вторых, при некоторых геометрических конфигурациях надрезов возникают области местной высокой концентрации напряжений в цилиндрах, уровень которых физически нереализуем при оценке прочности для сплава ЖС6КП. Такая ситуация имеет место при глубине надреза 0.1 мм и менее для всех рассматриваемых видов надрезов, а для квадратного и V-образного — и при больших величинах глубины надреза. Поэтому для решения задачи реконструкции ОН и ПД в указанных ситуациях использовалась упругопластическая постановка задачи. Для этого требовалась диаграмма упругопластического деформирования для сплава ЖС6КП при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$, которой в открытых научных источниках не имеется. Поэтому использовались данные по пластическому деформированию сплава IN-738С с аналогичным ЖС6КП составом и областью применения, по всей видимости, более подверженного пластическому деформированию. Аппроксимация зависимости напряжений $\sigma = Ae_p^n$ от деформации пластичности e_p была построена по данным из [28, табл. 6] по двум точкам: $e_p^{(1)} = 0.002$, $\sigma^{(1)} = 951.48$ МПа; $e_p^{(2)} = 0.055$, $\sigma^{(2)} = 1096.27$ МПа, откуда $A = 1240.99$, $n = 0.0427$. Полученная зависимость, представленная на рис. 3 кривой 1, и используется в качестве диаграммы пластического деформирования при решении задачи реконструкции НДС после упрочнения.

На рис. 4 в качестве примера приведены данные для компоненты $\sigma_z = \sigma_z(h)$ в сечении II-II цилиндра с квадратным надрезом при $d = 0.1$ мм, полученные при решении задачи реконструкции НДС в упругой и упругопластической постановках. Здесь и далее для цилиндра с полукруглым надрезом (или их серией) величина $h = a - \rho - r$, с квадратным — $h = a - d - r$, с V-образным — $h = a - c - r$ (см. рис. 1).

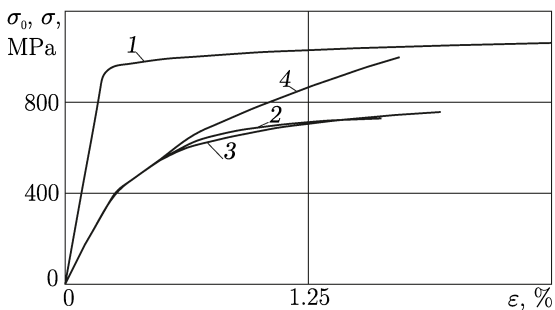


Рис. 3. Диаграммы упругопластического деформирования: экспериментальные данные для сплава IN-738С при $T_0 = 20^\circ\text{C}$ (кривая 1) [28] и для ЖС6КП [29] при $T_2 = 900^\circ\text{C}$ (кривая 2); расчётные для ЖС6КП зависимости номинального (кривая 3) и истинного (кривая 4) напряжений при $T_2 = 900^\circ\text{C}$

Fig. 3. Elastic plastic deformation diagrams: experimental data for IN-738C alloy at $T_0 = 20^\circ\text{C}$ (curve 1) [28] and for ZhS6KP [29] at $T_2 = 900^\circ\text{C}$ (curve 2); calculated dependences of nominal (curve 3) and true (curve 4) stresses for ZhS6KP at $T_2 = 900^\circ\text{C}$

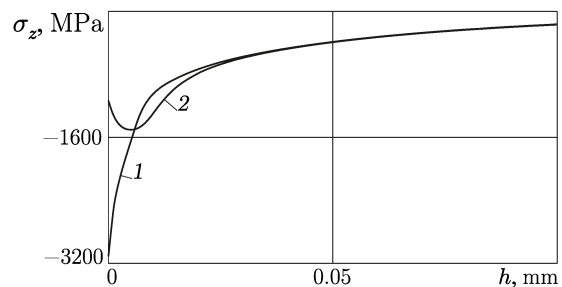


Рис. 4. Расчётные по МКЭ данные для компоненты $\sigma_z(h)$ в сечении II-II цилиндра с квадратным надрезом при $d = 0.1$ мм: 1 — упругое решение, 2 — упругопластическое решение

Fig. 4. Calculated FEM data for the component $\sigma_z(h)$ in the section II-II of a cylinder with a square incision at $d = 0.1$ mm: 1 — elastic solution, 2 — elastoplastic solution

Из представленных на рис. 4 данных следует, что решение в термоупругой постановке даёт физически не реализуемые значения для компоненты $\sigma_z = \sigma_z(h)$, поэтому для последу-



ющей задачи релаксации ОН для цилиндра с квадратным надрезом с приведёнными выше параметрами в качестве начального НДС необходимо использовать решение в упругопластической постановке. Аналогичная ситуация имеет место и для цилиндра с V-образным надрезом.

3. Методика расчёта релаксации остаточных напряжений в гладком цилиндре и в цилиндрах с надрезами

С целью проверки сходимости и адекватности численного МКЭ при решении задач релаксации ОН в цилиндрах с надрезами предварительно аналогичная задача решалась и методом сеток для гладкого цилиндра, к которому на свободном торце приложена распределённая нагрузка величиной $\sigma_0 = \{150; 250\}$ МПа. Основы метода сеток заложены в [20], а в [21] этот метод применён для случая одноосного растяжения цилиндра из сплава ЖС6КП при температуре $T_1 = 800^\circ\text{C}$.

Алгоритм решения этой задачи в вычислительном пакете на основе МКЭ состоит из следующих этапов: 1) реконструкция полей ОН и ПД после упрочнения при $T_0 = 20^\circ\text{C}$; 2) температурная нагрузка от $T_0 = 20^\circ\text{C}$ до $T_1 = 800^\circ\text{C}$; 3) силовое нагружение — приложение осевой распределённой нагрузки величиной σ_0 ; 4) расчёт шагами во времени с помощью МКЭ релаксации полей ОН при ползучести в течение заданного времени t^* ч; 5) силовая разгрузка; 6) температурная разгрузка от $T_1 = 800^\circ\text{C}$ до $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Учёт температурной нагрузки на втором шаге осуществлялся путём повторного решения задачи реконструкции ОН методом расчёта по первоначальным деформациям, но с другим модулем упругости $E_1 = 149.2$ ГПа, соответствующим температуре $T_1 = 800^\circ\text{C}$. Учёт же температурной разгрузки производился в предположении, что разгрузка происходит в упругой области, поэтому финишные значения полей ОН масштабировались на величину E_0/E_1 .

На рис. 5 представлены данные для осевой компоненты тензора ОН: экспериментальные [21], расчётные по методу сеток и по изложенному выше алгоритму после упрочнения и после полной температурно-силовой разгрузки, следующей за ползучестью в течение $t^* = 50$ ч. Отметим, что линии расчётных данных по обоим методам (сплошная и пунктирная) практически совпадают.

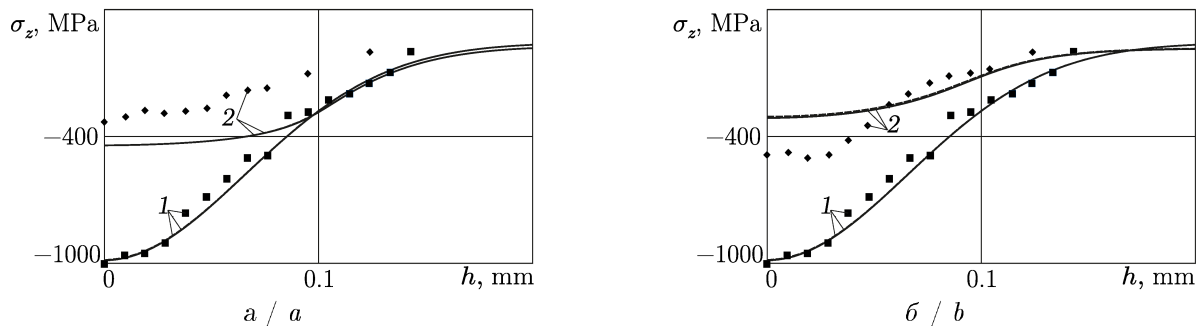


Рис. 5. Экспериментальные (маркеры) [21], расчётные по аналитическому методу и методу сеток (пунктирные линии) и по МКЭ (сплошные линии) распределения компоненты $\sigma_z(h)$ тензора ОН для гладкого цилиндра: 1 — после процедуры упрочнения, 2 — после температурно-силовой разгрузки и ползучести в течение 50 ч при температуре $T_1 = 800^\circ\text{C}$ и действии осевой растягивающей нагрузки: $a - \sigma_0 = 150$ МПа; $b - \sigma_0 = 250$ МПа

Fig. 5. Experimental (markers), calculated using the analytical method and the grid method (dashed lines) and FEM (solid lines) distributions of the $\sigma_z(h)$ component of the residual stress tensor for a smooth cylinder: 1 — after the hardening procedure, 2 — after temperature-force unloading and creep for 50 h at a temperature of $T_1 = 800^\circ\text{C}$ and an axial tensile load: $a - \sigma_0 = 150$ МПа; $b - \sigma_0 = 250$ МПа

Для описания ползучести использовались квазилинейные уравнения установившейся ползучести:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} c S^{m-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad i, j, k = r, \theta, z, \quad (8)$$



где p_{ij} – компоненты тензора деформации ползучести, σ_{ij} – компоненты тензора ОН, $\sigma_{kk} = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$, δ_{ij} – символ Кронекера, S – интенсивность напряжений. Параметры модели c и m для сплава ЖС6КП при температуре $T_1 = 800^\circ\text{C}$ взяты из [24]. Их численные значения: $c = 5.454 \cdot 10^{-29} \text{ (МПа)}^{-m}$, $m = 9.815$.

Наблюдается удовлетворительное соответствие расчётных по аналитическому методу, по МКЭ и экспериментальных данных при обоих режимах нагружения, при этом практически полное совпадение пунктирных и сплошных линий иллюстрирует адекватность МКЭ.

Проверка работоспособности разработанного КЭ-метода была выполнена и в условиях комбинированного нагружения осевой силой и крутящим моментом для гладкого цилиндра путём сравнения результатов с расчётными данными по методу сеток. Расчёты проводились для цилиндра из сплава ЖС6КП при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$ в течение 100 ч при комбинированном нагружении осевой силой величиной $F = 4441.5 \text{ Н}$ и крутящим моментом величиной $M = 12.525 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Параметры (8) при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$ численно равны $c = 1.5 \cdot 10^{-20} \text{ (МПа)}^{-m}$, $m = 6.62$ [24]. Результаты, полученные по МКЭ и методу сеток, приведены на рис. 6, где наблюдается хорошее соответствие расчётных данных.

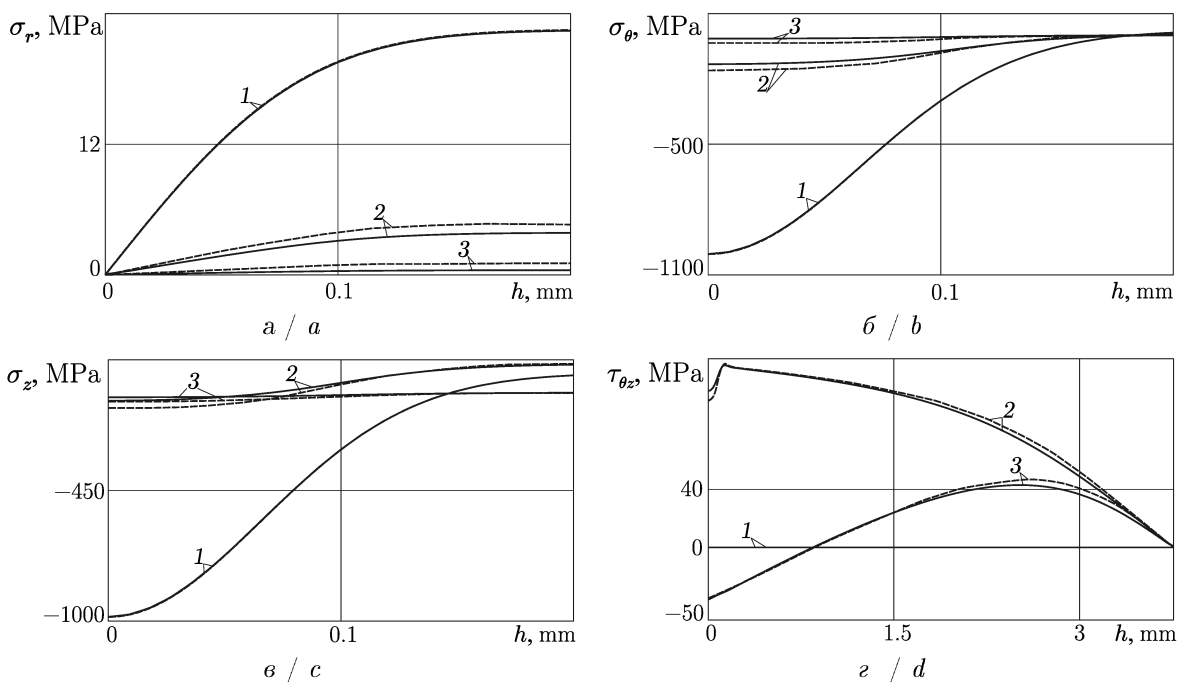


Рис. 6. Расчётные по методу сеток (пунктирные линии) и по МКЭ (сплошные линии) данные по кинетике полей ОН в процессе ползучести при $T_2 = 900^\circ\text{C}$ в гладком цилиндре при нагружении осевой силой величиной $F = 4441.5 \text{ Н}$ и крутящим моментом величиной $M = 12.525 \text{ Н}\cdot\text{м}$: а – $\sigma_r(h)$; б – $\sigma_\theta(h)$; в – $\sigma_z(h)$; г – $\tau_{\theta z}(h)$; 1 – после упрочнения, 2 – после ползучести в течение 20 ч, 3 – после ползучести в течение 100 ч и полной температурно-силовой разгрузки

Fig. 6. Calculated using the grid method (dashed lines) and FEM (solid lines) data on the kinetics of residual stresses fields during creep at $T_2 = 900^\circ\text{C}$ in a smooth cylinder loaded with an axial force of $F = 4441.5 \text{ N}$ and a torque of $M = 12.525 \text{ N}\cdot\text{m}$: a – $\sigma_r(h)$; b – $\sigma_\theta(h)$; c – $\sigma_z(h)$; d – $\tau_{\theta z}(h)$; 1 – after hardening, 2 – after creep for 20 hours, 3 – after creep for 100 hours and full temperature and force unloading

После удовлетворительного результата сходимости по КЭ-методу и методу сеток решалась задача и для цилиндров с надрезами (см. рис. 1) в условиях нагружения осевой силой и крутящим моментом при тех же численных значениях, что и для гладких образцов и при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$. Методика расчёта аналогична случаю гладкого образца, но в качестве начального использовалось НДС цилиндра с надрезами, методика построения которого изложена в разделе 2 настоящей статьи. Отметим, что второй шаг предложен-



ного метода — учёт температурной нагрузки от $T_0 = 20^\circ\text{C}$ до $T_2 = 900^\circ\text{C}$ — для надрезов квадратного и V-образного профиля выполнялся с использованием диаграммы упругопластического деформирования сплава ЖС6КП при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$, график которой изображён кривой 4 на рис. 3. Температурная разгрузка производилась так же, как и для гладкого цилиндра.

4. Анализ результатов расчётов

На рис. 7–9 приведены типичные расчётные по МКЭ данные для различных компонент тензора ОН в цилиндрах с полукруглым надрезом радиуса $\rho = 0.2$ мм, с квадратным надрезом при $d = 0.1$ мм и с V-образным надрезом при $c = 0.15$ мм, $\varphi = 10^\circ$.

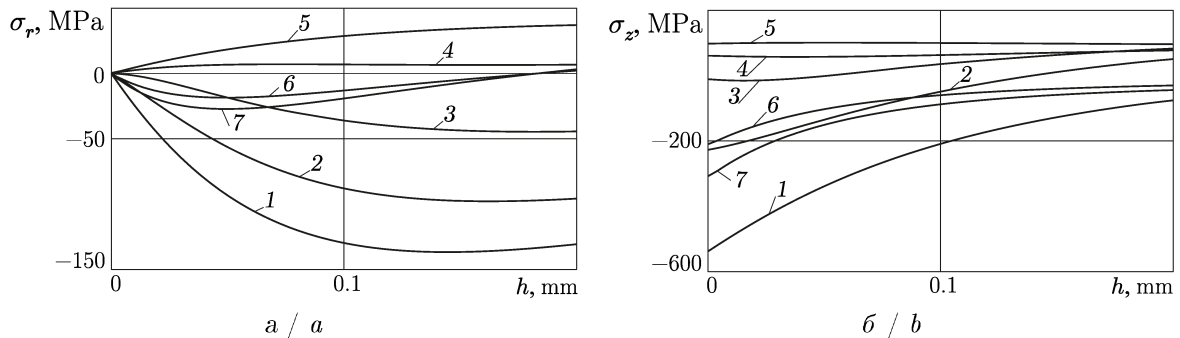


Рис. 7. Расчётные по МКЭ данные релаксации компонент $\sigma_r(h)$ (а) и $\sigma_z(h)$ (б) в сечении I–I цилиндра с полукруглым надрезом при $\rho = 0.2$ мм: 1 — после упрочнения при $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 2 — после силового нагружения осевой растягивающей силой величиной $F = 4441.5$ Н и крутящим моментом величиной $M = 12.525$ Н·м, 3 — после температурной нагрузки от $T_0 = 20^\circ\text{C}$ до $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 4 — после ползучести в течение 10 ч при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 5 — после ползучести в течение 100 ч при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 6 — после силовой разгрузки, 7 — после полной температурно-силовой разгрузки

Fig. 7. Calculated FEM data of the relaxation of the components $\sigma_r(h)$ (a) and $\sigma_z(h)$ (b) in the section I–I of the cylinder with a semicircular incision at $\rho = 0.2$ mm: 1 — after hardening at $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 2 — after force loading with an axial tensile force of $F = 4441.5$ N and a torque of $M = 12.525$ N·m, 3 — after a temperature load from $T_0 = 20^\circ\text{C}$ to $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 4 — after creep for 10 hours at a temperature of $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 5 — after creep for 100 h at a temperature of $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 6 — after force unloading, 7 — after full temperature and force unloading

Анализ данных расчётов, представленных на этих графиках, показывает следующее. Во-первых, релаксация ОН протекает наиболее интенсивно в первые часы, после чего её скорость существенно уменьшается: так, например, на рис. 9, б распределения компоненты $\tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(h)$ после ползучести в течение 10 ч и после 100 ч достаточно близки. Аналогичный вывод можно сделать и для всех остальных распределений компонент тензора ОН, для чего достаточно сравнить графики 4 и 5 на рис. 7–9. Во-вторых, после полной температурно-силовой нагрузки, соответствующей финишу цикла «эксплуатации» цилиндров, на дне надрезов наблюдаются значимые уровни сжимающих ОН, как нормальных, так и касательных, что особенно характерно для цилиндров с V-образным надрезом: значения осевых ОН на дне V-образного надреза после температурно-силовой разгрузки больше (по модулю) соответствующих значений для других типов надрезов в 3–6 раз, что свидетельствует об эффективности ОППД и для данных конфигураций цилиндров с V-образными надрезами из рассматриваемого сплава на временном интервале в 100 ч (в рамках теории установившейся ползучести).

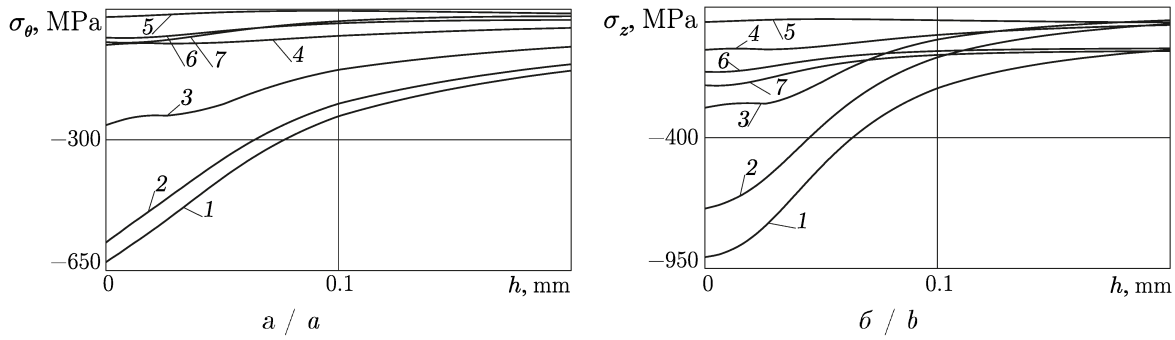


Рис. 8. Расчётные по МКЭ данные релаксации компонент $\sigma_\theta(h)$ (а) и $\sigma_z(h)$ (б) в сечении I-I цилиндра с квадратным надрезом при $d = 0.1$ мм: 1—после упрочнения при $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 2—после силового нагружения осевой растягивающей силой величиной $F = 4441.5$ Н и крутящим моментом величиной $M = 12.525$ Н·м, 3—после температурной нагрузки от $T_0 = 20^\circ\text{C}$ до $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 4—после ползучести в течение 10 ч при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 5—после ползучести в течение 100 ч при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 6—после силовой разгрузки, 7—после полной температурно-силовой разгрузки

Fig. 8. Calculated FEM data of the relaxation of components $\sigma_\theta(h)$ (a) and $\sigma_z(h)$ (b) in the section I-I of the cylinder with a square incision at $d = 0.1$ mm: 1—after hardening at $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 2—after force loading with an axial tensile force of $F = 4441.5$ N and a torque of $M = 12.525$ N·m, 3—after a temperature load from $T_0 = 20^\circ\text{C}$ to $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 4—after creep for 10 hours at a temperature of $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 5—after creep for 100 h at a temperature of $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 6—after force unloading, 7—after full temperature and force unloading

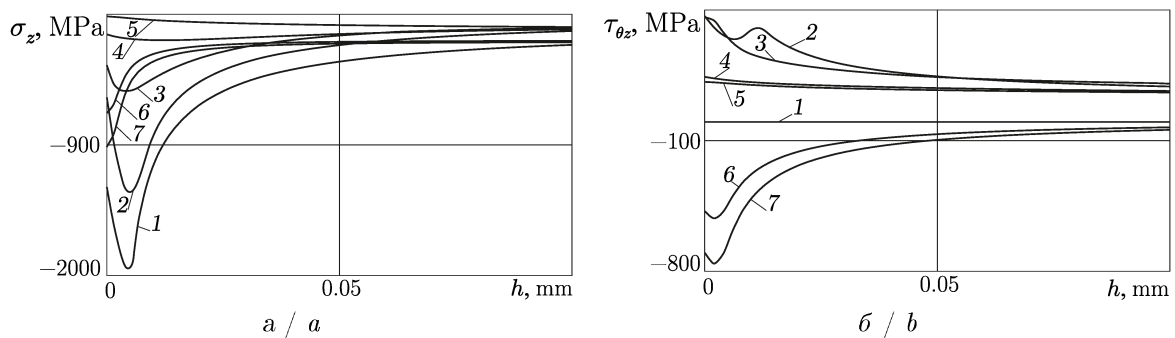


Рис. 9. Расчётные по МКЭ данные релаксации компонент $\sigma_z(h)$ (а) и $\tau_{\theta z}(h)$ (б) в сечении I-I цилиндра с V-образным надрезом при $c = 0.15$ мм, $\varphi = 10^\circ$: 1—после упрочнения при $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 2—после силового нагружения осевой растягивающей силой величиной $F = 4441.5$ Н и крутящим моментом величиной $M = 12.525$ Н·м, 3—после температурной нагрузки от $T_0 = 20^\circ\text{C}$ до $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 4—после ползучести в течение 10 ч при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 5—после ползучести в течение 100 ч при температуре $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 6—после силовой разгрузки, 7—после полной температурно-силовой разгрузки

Fig. 9. Calculated FEM data of the relaxation of components $\sigma_z(h)$ (a) and $\tau_{\theta z}(h)$ (b) in the section I-I of the cylinder with a V-shaped incision at $c = 0.15$ mm, $\varphi = 10^\circ$: 1—after hardening at $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 2—after force loading with an axial tensile force of $F = 4441.5$ N and a torque of $M = 12.525$ N·m, 3—after a temperature load from $T_0 = 20^\circ\text{C}$ to $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 4—after creep for 10 hours at a temperature of $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 5—after creep for 100 h at a temperature of $T_2 = 900^\circ\text{C}$, 6—after force unloading, 7—after full temperature and force unloading

На рис. 10 приведены расчётные по МКЭ данные по релаксации окружной и осевой компонент тензора ОН в цилиндре с серией из пяти периодически расположенных полукруглых надрезов радиуса $\rho = 0.1$ мм. Анализ данных, представленных на рис. 10, свидетельствует о том, что если после процедуры упрочнения наблюдается определённая симметрия в НДС в цилиндре — распределения ОН практически неотличимы в первом и пятом и во втором и четвертом надresaх (нумерация надрезов на рис. 1, d — слева направо), — то в процессе пол-



зучести в цилиндре устанавливается НДС достаточно сложного вида, что можно объяснить несимметричными граничными условиями на торцах цилиндрического образца.

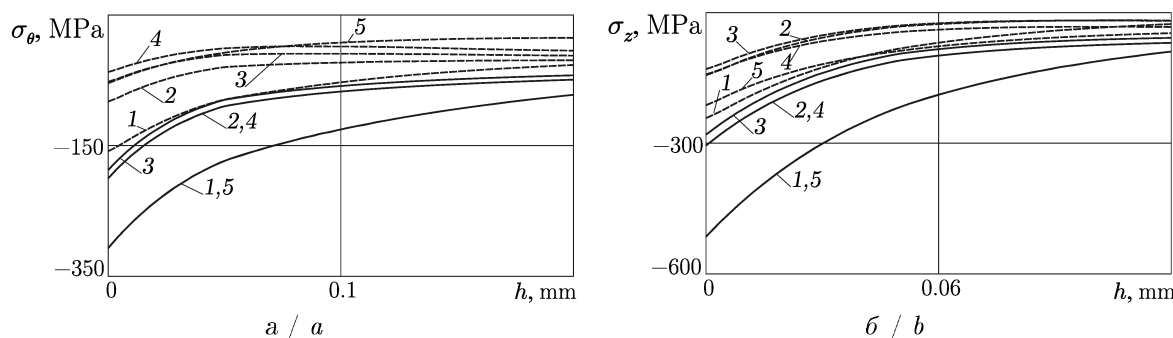


Рис. 10. Расчётные по МКЭ данные для компонент $\sigma_\theta(h)$ (а) и $\sigma_z(h)$ (б) цилиндра с серией периодически расположенных полукруглых надрезов радиуса $\rho = 0.1$ мм при количестве надрезов $n = 5$ в сечении I–I: сплошные линии — данные после процедуры ОППД, пунктирные — после полной температурно-силовой разгрузки; номер графика соответствует номеру надреза, считая от незакрепленного торца

Fig. 10. The calculated FEM data for the components $\sigma_\theta(h)$ (a) and $\sigma_z(h)$ (b) for a cylinder with a series of periodically arranged semicircular incisions of radius $\rho = 0.1$ mm with the number of incisions $n = 5$ in section I–I: solid lines — data after the procedure of advanced surface plastic deformation, dashed lines — after complete temperature and force unloading; graph numbers correspond to the incision number, counting from the loose end

Заключение

В работе предложен и реализован численный метод расчёта релаксации ОН на основе МКЭ в упрочнённых цилиндрах с надрезами различной формы, подвергнутых комбинированному нагружению: растяжению и кручению в условиях высокотемпературной ползучести. В частном случае гладкого образца (без надрезов) выполнена проверка адекватности значений, рассчитанных по предложенному методу, экспериментальным данным и установлено их полное соответствие с представленными решениями и рассчитанными по методу сеток. Возможности метода проиллюстрированы на упрочнённых ОППД цилиндрах с полукруглым, квадратным и V-образным надрезами, а также с серией периодически расположенных полукруглых надрезов. Для всех рассмотренных геометрических начальных параметрах надрезов в них за цикл «температурно-силовая нагрузка — ползучесть в течение 100 часов — температурно-силовая разгрузка» сохраняются сжимающие ОН после процесса их релаксации, что является позитивным фактом, свидетельствующим об эффективности ОППД и при высоких температурах.

Список литературы

1. Radchenko V., Glebov V. A method for calculating the relaxation of residual creep stresses in a surface-hardened cylinder with a series of periodically arranged semicircular incisions under thermal exposure conditions // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59. P. 3735–3746. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424606293>
2. Радченко В. П., Глебов В. Е. Влияние геометрической формы надреза на релаксацию остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре при термоэкспозиции // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 391–405. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-391-405>, EDN: MQEXGM
3. Радченко В. П., Глебов В. Е. Релаксация остаточных напряжений во вращающихся цилиндрах с надрезами различной формы в условиях ползучести // *Прикладная математика и механика*. 2025. Т. 89, № 6. С. 1057–1072. DOI: <https://doi.org/10.7868/S3034575825060139>, EDN: TQCLAU
4. Рамазанов К. Н., Рамазанов И. С. Ионное азотирование титанового сплава ВТ6 в тлеющем разряде с эффектом полого катода // *Вестник УГАТУ*. 2014. Т. 18, № 2 (63). С. 41–46.



5. *Maytorena-Sánchez A., Hernández-Torres J., López-Huerta F., Hernández-Campos M. A., Zamora-Peredo L., Pacio-Castillo M., Serrano-De la Rosa L. E., García-González L.* Analysis of the hardness and tribological properties of grade 2 titanium using the thermal oxidation process at different temperatures // *Materials Letters*. 2021. Vol. 282. Art. 128679. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2020.128679>
6. You C., Achintha M., He B. Y., Reed P. A. S. A numerical study of the effects of shot peening on the short crack growth behaviour in notched geometries under bending fatigue tests // *International Journal of Fatigue*. 2017. Vol. 103. P. 99–111. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.05.023>
7. *Soyama H.* Comparison between shot peening, cavitation peening and laser peening by observation of crack initiation and crack growth in stainless steel // *Metals*. 2019. Vol. 10, iss. 1. Art. 63. DOI: <https://doi.org/10.3390/met100110063>
8. *Wei Guo, Hao Wang, Peng Peng, Binwen Song, Hongqiang Zhang, Tianwei Shao, Heng Huan, Hongchao Qiao, Guanda Qu, Dezhi Zhu, Jianfeng Yan.* Effect of laser shock processing on oxidation resistance of laser additive manufacture Ti6Al4V titanium alloy // *Corrosion Science*. 2020. Vol. 170. Art. 108655. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.corsci.2020.108655>
9. *Dan-Jae Lin, Lih-Jyh Fuh, Cheng-Yu Chen, Wen-Cheng Chen, Jiin-Huey Chern Lin, Chiung-Chang Chen.* Rapid nano-scale surface modification on micro-arc oxidation coated titanium by microwave-assisted hydrothermal process // *Materials Science and Engineering: C*. 2019. Vol. 95. P. 236–247. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msec.2018.10.085>
10. *Yitian Zhao, Mingyuan Lu, Zhiqi Fan, Shuiquan Huang, Han Huang.* Laser deposition of wear-resistant titanium oxynitride/titanium composite coatings on Ti-6Al-4V alloy // *Applied Surface Science*. 2020. Vol. 531. Art. 147212. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2020.147212>
11. *Harjit Singh, Sunpreet Singh, Chander Prakash* Experimental Investigation and parametric optimization of HA-TiO₂ plasma spray coating on phase titanium alloy // *Materials Today: Proceedings*. 2020. Vol. 28, iss. 3. P. 1340–1344, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.665>
12. *Fernandes B. B., Oliveira R. M., Ueda M., Mariano S. F. M., Ramos A. S., Vieira M. S., Lourenço de Melo F. C., de Oliveira G.* Effects of high temperature plasma immersion ion implantation on wear resistance of Ti-Si-B sintered alloys // *Surface and Coatings Technology*. 2013. Vol. 228. P. 195–200, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2013.04.029>
13. *Столяров В. В.* Ультразвуковое выглаживание титановых сплавов // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2018. № 6. С. 66–72. DOI: <https://doi.org/10.31857/S023571190002563-0>, EDN: [PJSYLW](https://doi.org/10.31857/S023571190002563-0)
14. *Биргер И. А.* Остаточные напряжения. Москва : Машгиз. 1963. 232 с.
15. *Гринченко И. Г.* Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов. Москва : Машиностроение, 1971. 120 с.
16. *Сулума Г. Н., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д.* Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин. Москва : Машиностроение. 1988. 240 с.
17. *Иванов С. И., Шатунов М. П., Павлов В. Ф.* Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом // *Вопросы прочности элементов авиационных конструкций* / отв. ред. Х. С. Хазанов. Вып. 1. Куйбышев : КуАИ, 1974. С. 88–95.
18. *Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулук В. С.* Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям. Самара : Изд-во СЦН РАН, 2012. 125 с.
19. *Колотникова О. В.* Эффективность упрочнения методами поверхностного пластического деформирования деталей, работающих при повышенных температурах // *Проблемы прочности*. 1983. № 2. С. 112–114.
20. *Радченко В. П., Саушкин М. Н.* Прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочнённом изделии цилиндрической формы при ползучести // *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, № 6. С. 90–99. EDN: [NRCYUX](https://doi.org/10.1016/j.pmf.2009.06.001)
21. *Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А.* Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177. DOI: <http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20150217>
22. *Радченко В. П., Либерман А. Е., Блохин О. Л.* Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном вращающемся цилиндре в условиях ползучести // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2022. Т. 26, № 1. С. 119–139. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1884>



23. Радченко В. П., Цветков В. В., Саушкин М. Н. Релаксация остаточных напряжений в упрочненном цилиндре в условиях ползучести при нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61, № 4. С. 96–107. DOI: <http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20200412>
24. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. Москва : Машиностроение-1, 2005. 226 с. EDN: PXLJLN
25. Сазанов В. П., Семенова О. Ю., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. Математическое моделирование первоначальных деформаций в поверхностно упрочненных деталях при выборе образца-свидетеля // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 3. С. 31–37.
26. Павлов В. Ф., Столяров А. К., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. Расчет остаточных напряжений в деталях с концентраторами напряжений по первоначальным деформациям. Самара : Изд-во СЦН РАН, 2008. 124 с.
27. Радченко В. П., Шликин Д. М., Саушкин М. Н. Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии поверхностно упрочненного призматического образца с надрезом V-образного профиля в упругой и упругопластической постановках // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 491–508. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2017>
28. ALLOY IN-738 TECHNICAL DATA. URL: https://nickel institute.org/media/4690/ni_inco_497_alloy738.pdf (дата обращения: 02.01.2026).
29. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. Москва : Машиностроение-1, 2004. 265 с.

References

1. Radchenko V., Glebov V. A method for calculating the relaxation of residual creep stresses in a surface-hardened cylinder with a series of periodically arranged semicircular incisions under thermal exposure conditions. *Mechanics of Solids*, 2024, vol. 59, pp. 3735–3746. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424606293>
2. Radchenko V. P., Glebov V. E. The effect of the geometric shape of the incision on the relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder during thermal exposure. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 391–405 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-391-405>, EDN: MQEXGM
3. Radchenko V. P., Glebov V. E. Relaxation of residual stresses in rotating cylinders with incisions of various shapes under creep conditions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, vol. 89, iss. 6, pp. 1057–1072 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.7868/S3034575825060139>, EDN: TQCLAU
4. Ramazanov K. N., Ramazanov I. S. Ion nitriding of VT6 titanium alloy in glow discharge with hollow cathode effect. *Bulletin of USATU*, 2014, vol. 18, iss. 2 (63), pp. 41–46 (in Russian).
5. Maytorena-Sánchez A., Hernández-Torres J., López-Huerta F., Hernández-Campos M. A., Zamora-Peredo L., Pacio-Castillo M., Serrano-De la Rosa L. E., García-González L. Analysis of the hardness and tribological properties of grade 2 titanium using the thermal oxidation process at different temperatures. *Materials Letters*, 2021, vol. 282, art. 128679. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2020.128679>
6. You C., Achintha M., He B. Y., Reed P. A. S. A numerical study of the effects of shot peening on the short crack growth behaviour in notched geometries under bending fatigue tests. *International Journal of Fatigue*, 2017, vol. 103, pp. 99–111. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.05.023>
7. Soyama H. Comparison between shot peening, cavitation peening and laser peening by observation of crack initiation and crack growth in stainless steel. *Metals*, 2019, vol. 10, iss. 1, art. 63. DOI: <https://doi.org/10.3390/met100110063>
8. Wei Guo, Hao Wang, Peng Peng, Binwen Song, Hongqiang Zhang, Tianwei Shao, Heng Huan, Hongchao Qiao, Guanda Qu, Dezhi Zhu, Jianfeng Yan. Effect of laser shock processing on oxidation resistance of laser additive manufacture Ti6Al4V titanium alloy. *Corrosion Science*, 2020, vol. 170, art. 108655. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.corsci.2020.108655>
9. Dan-Jae Lin, Lih-Jyh Fuh, Cheng-Yu Chen, Wen-Cheng Chen, Jiin-Huey Chern Lin, Chiing-Chang Chen. Rapid nano-scale surface modification on micro-arc oxidation coated titanium by microwave-assisted hydrothermal process. *Materials Science and Engineering: C*, 2019, vol. 95, pp. 236–247. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msec.2018.10.085>



10. Yitian Zhao, Mingyuan Lu, Zhiqi Fan, Shuiquan Huang, Han Huang. Laser deposition of wear-resistant titanium oxynitride/titanium composite coatings on Ti-6Al-4V alloy. *Applied Surface Science*, 2020, vol. 531, art. 147212. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2020.147212>
11. Harjit Singh, Sunpreet Singh, Chander Prakash. Experimental investigation and parametric optimization of HA-TiO₂ plasma spray coating on phase titanium alloy. *Materials Today: Proceedings*, 2020, vol. 28, iss. 3, pp. 1340–1344. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.665>
12. Fernandes B. B., Oliveira R. M., Ueda M., Mariano S. F. M., Ramos A. S., Vieira M. S., Lourenço de Melo F. C., de Oliveira G. Effects of high temperature plasma immersion ion implantation on wear resistance of Ti-Si-B sintered alloys. *Surface and Coatings Technology*, 2013, vol. 228, pp. 195–200. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2013.04.029>
13. Stolyarov V. V. Ultrasonic smoothing of titanium alloys. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2018, iss. 6, pp. 66–72. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618818060110>, EDN: **OLPSYH**
14. Birger I. A. *Ostatochnye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963. 232 p. (in Russian).
15. Grinchenko I. G. *Uprochnenie detaley iz zharoprochnykh i titanovykh splavov* [Hardening of parts made of heat-resistant and titanium alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1971. 120 p. (in Russian).
16. Sulima G. N., Shuvalov V. A., Yagodkin Yu. D. *Poverkhnostnyj sloy i ekspluatatsionnye svoystva detaley mashin* [Surface layer and performance properties of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 240 p. (in Russian).
17. Ivanov S. I., Shatunov M. P., Pavlov V. F. The effect of residual stresses on the endurance of incised samples. *Voprosy prochnosti elementov aviatsionnykh konstruktsiy* [Khazanov Kh. S., (ed.) Problems of strength of elements of aircraft structures]. Vol. 1. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Institute Publ., 1974, pp. 88–95 (in Russian).
18. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovaniye soprotivleniya ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detaley po ostatochnym napryazheniyam* [Prediction of surface fatigue resistance, hardened parts by residual stress]. Samara, SCN RAS Publ., 2012. 125 p. (in Russian).
19. Kolotnikova O. V. Effectiveness of hardening by methods of plastic surface deformation of components operating at high temperatures. *Strength of Materials*, 1983, vol. 15, pp. 292–295. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01523487>
20. Radchenko V. P., Saushkin M. N. Direct method of solving the boundary-value problem of relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, vol. 50, iss. 6, pp. 989–997. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0133-8>, EDN: **UZQMFB**
21. Radchenko V. P., Kocherov E. P., Saushkin M. N., Smyslov V. A. Experimental and theoretical study of the effect of tensile load on the relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical sample under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, iss. 2, pp. 169–177 (in Russian). DOI: <http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20150217>
22. Radchenko V. P., Liberman A. E., Blohin O. L. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened rotating cylinder under creep conditions. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, iss. 1, pp. 119–139 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1884>
23. Radchenko V. P., Cvetkov V. V., Saushkin M. N. Relaxation of residual stresses in a hardened cylinder under creep conditions under loading by axial force, torques and internal pressure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 61, iss. 4, pp. 96–107 (in Russian). DOI: <http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20200412>
24. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napryazhenij v uprochnennykh konstruktsiyakh* [Creep and relaxation of residual stresses in strengthened structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005. 226 p. (in Russian). EDN: **RXLJLN**
25. Sazanov V. P., Semyonova O. Yu., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. Mathematical modeling of initial deformations in surface-hardened parts when selecting a witness sample. *Vestnik UGATU* [Bulletin of USATU], 2016, vol. 20, iss. 3, pp. 31–37 (in Russian).
26. Pavlov V. F., Stolyarov A. K., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Raschet ostatochnykh napryazheniy v detalyakh s kontsentratorami napryazheniy po pervonachal'nyim deformatsiyam* [Calculation of residual stresses in parts with stress concentrators according to initial deformations]. Samara, SCN RAS Publ., 2008. 124 p. (in Russian).



27. Radchenko V. P., Shishkin D. M., Saushkin M. N. Numerical solution of the problem of the stress-strain state of a surface-hardened prismatic sample with a V-shaped incision in elastic and elastoplastic formulations. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2023, vol. 27, iss. 3, pp. 491–508 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2017>
28. *ALLOY IN-738 TECHNICAL DATA*. Available at: https://nickelinstitute.org/media/4690/nico_497_alloy738.pdf (accessed January 2, 2026).
29. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksiy* [Rheological deformation and destruction of materials and structural elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004. 265 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 28.01.2026

Принята к публикации / Accepted 20.02.2026

Опубликована / Published 01.06.2026

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 280–295

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 280–295

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-280-295>

EDN: <https://elibrary.ru/RDHJQE>

Научная статья

УДК 519.2

Модели зависимостей между приборами в системах массового обслуживания типа split-merge. Случай экспоненциального обслуживания

А. В. Горбунова¹✉, А. В. Лебедев²

¹Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Россия, 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, стр. 2

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

Горбунова Анастасия Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, avgorbunova@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9183-0426>, SPIN: 5354-0834, AuthorID: 851308

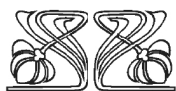
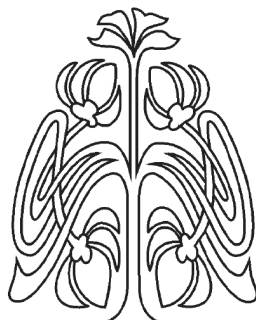
Лебедев Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей, avlebed@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9258-0588>, AuthorID: 16748

Аннотация. Рассматривается система с разделением заявок типа split-merge с двумя приборами, времена обслуживания на которых одинаково распределены и зависимы в соответствии с различными копулами. Изучается влияние зависимости времен обслуживания на среднее время пребывания заявки в системе: получены выражения для математического ожидания времени отклика системы, анализируется его поведение для различных значений коэффициентов корреляции Кендалла и Бломквиста, а также получены формулы для границ среднего времени отклика в зависимости от значения коэффициента Бломквиста.

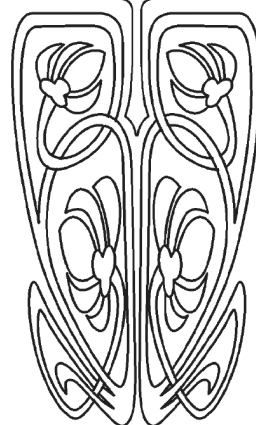
Ключевые слова: система массового обслуживания, система типа split-merge, зависимые времена обслуживания, копула, время пребывания

Для цитирования: Горбунова А. В., Лебедев А. В. Модели зависимостей между приборами в системах массового обслуживания типа split-merge. Случай экспоненциального обслуживания // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 280–295. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-280-295>, EDN: RDHJQE

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





Article

Servers dependency models in split-merge queueing systems. The case of exponential service

A. V. Gorbunova¹✉, A. V. Lebedev²

¹V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia

²Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

Anastasia V. Gorbunova, avgorbunova@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9183-0426>, SPIN: 5354-0834, AuthorID: 851308

Alexey V. Lebedev, avlebed@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9258-0588>, AuthorID: 16748

Abstract. A split-merge queueing system with two servers, the service times of which are identically distributed and dependent according to different copulas, is considered. The influence of service time dependence on the average sojourn time of a request in the system is studied. Expressions are derived for the expected value of the system response time, its behavior is analyzed for various values of the Kendall and Blomquist correlation coefficients, and formulas are derived for the bounds of the average response time depending on the value of the Blomqvist coefficient.

Keywords: queueing system, split-merge system, dependent service times, copula, sojourn time

For citation: Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Servers dependency models in split-merge queueing systems. The case of exponential service. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 280–295 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-280-295>, EDN: RDHJQE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком постоянной интенсивности, двумя обслуживающими приборами с одинаковым распределением времени обслуживания и накопителем неограниченной емкости. Поступающие заявки обслуживаются в порядке поступления. Перед началом обслуживания каждая заявка разделяется на две подзаявки, которые обслуживаются на двух приборах параллельно. Когда обслуживание обеих подзаявок заканчивается, заявка считается обслуженной.

Заметим, что в подобных системах (с разделением заявок) возможны различные дисциплины обращения с подзаявками. Основными из них являются следующие: либо подзаявки от разных заявок обслуживаются независимо друг от друга и образуются две параллельные очереди, каждая к своему прибору (fork-join), либо обслуживание подзаявок следующей заявки не начинается, пока не будут обслужены все подзаявки текущей (split-merge). Возможны и другие варианты.

Так, например, в [1] исследуется открытая сеть массового обслуживания с отдельной обработкой фрагментов заявок. Мы будем рассматривать системы типа split-merge. Такие системы фактически сводятся к системам $M|G|1$, в которых времена обслуживания заявок формируются как максимумы времен обслуживания их подзаявок на соответствующих приборах.

Системы типа split-merge и их обобщения исследуются, в частности, в работах [2–7].

Системы с разделением заявок могут иметь приложения в медицине, делопроизводстве, торговле, информатике и др. В общем случае возможно разделение заявок на произвольное фиксированное число $N \geq 2$ или даже случайное число подзаявок, а времена обслуживания на различных приборах могут иметь разное распределение, однако здесь мы ограничимся простейшим случаем $N = 2$ и однородными приборами.



Обычно времена обслуживания на приборах считаются независимыми. Настоящая же работа мотивирована статьей [6], где времена обслуживания полагаются зависимыми. В отличие от нашей работы, в [6] при этом рассматривается дисциплина cancel-on-finish, согласно которой заявка считается обслуженной, если обслужена хотя бы одна из ее подзаявок, т. е. времена обслуживания заявок формируются как минимумы, а не максимумы времен обслуживания подзаявок. Однако это различие не принципиально. По поводу механизма возникновения зависимости в [6] говорится, что во многих ситуациях, когда один прибор (фактически, возможно, человек) работает быстрее (или медленнее), это мотивирует второй прибор также работать быстрее (или медленнее). Это положительная зависимость между приборами.

В некоторых других ситуациях, если один прибор работает в спокойном темпе, другому приходится работать быстрее, чтобы сбалансировать нагрузку, это является примером отрицательной зависимости между приборами. Добавим от себя, что зависимость может быть также связана со случайной неравномерностью разделения работы (когда одна подзаявка оказывается больше, а другая меньше) или неоднородностью заявок по объему работ (когда обе подзаявки оказываются одновременно больше или меньше).

Для описания зависимости используется современная теория копул. В качестве учебника по ней можно указать [8]. Любое совместное распределение случайных величин можно разложить на его копулу и частные распределения. При этом выбор известных копул весьма широк.

Далее мы рассмотрим нашу систему при показательном распределении времен обслуживания для трех различных копул. Во всех случаях найдены средние времена пребывания заявок (времена отклика), изучено поведение коэффициентов корреляции Кендалла и Бломквиста, а также получены выражения для границ среднего времени отклика системы.

1. Математическая модель системы типа split-merge

В данном разделе более детально опишем исследуемую систему (рис. 1).

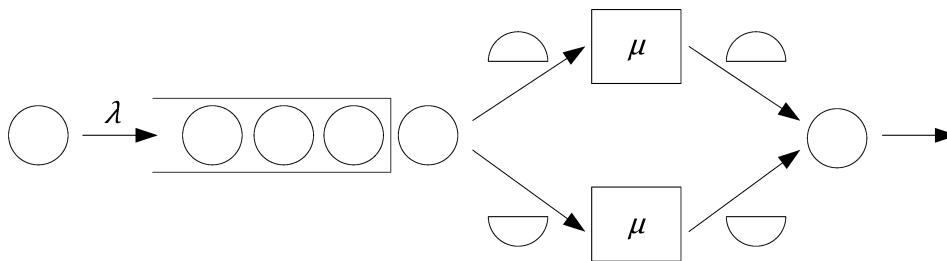


Рис. 1. Модель split-merge системы массового обслуживания с двумя подсистемами типа $M|M|1$

Fig. 1. Split-merge model of a queueing system with two subsystems of type $M|M|1$

Итак, рассматривается система массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком с параметром λ , двумя зависимыми между собой обслуживающими приборами и накопителем неограниченной емкости. Заявка перед поступлением на обслуживание разделяется на две подзаявки, каждая из которых обслуживается на своем приборе. При этом подзаявка может покинуть свой прибор только одновременно со второй заявкой, т. е. только после того, как обслужится вторая подзаявка, поступившая одновременно с ней на обслуживание. Таким образом, время обслуживания всей заявки определяется выражением

$$X_{2:2} = \max\{X_1, X_2\},$$

где X_i — это случайное время обслуживания подзаявки на i -м приборе, $i = 1, 2$. Среднее время ожидания начала обслуживания и среднее время пребывания заявки в данной системе



фактически определяется выражениями для среднего времени ожидания начала обслуживания и среднего времени пребывания заявки в системе $M|G|1$, а именно

$$E[W] = \frac{\lambda E[X_{2:2}^2]}{2(1 - \lambda E[X_{2:2}])}, \tag{1}$$

$$E[V] = E[W] + E[X_{2:2}], \tag{2}$$

где (1) представляет собой известную формулу Поллачека – Хинчина.

Предположим, что времена обслуживания подзаявок имеют экспоненциальную функцию распределения:

$$F_{Exp}(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

Приборы, а соответственно, и времена обслуживания на них являются зависимыми. Далее рассмотрим несколько вариантов моделей зависимостей между приборами, которые опишем с помощью трех типов копула-функций.

Согласно определению с помощью, например, двумерной копулы можно представить функцию распределения двумерной случайной величины

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

где $F_i(x)$ — это частные функции распределения одномерных случайных величин, составляющих исходную двумерную. В том случае, когда частные распределения совпадают $F_1(x) = F_2(x) = F(x)$, имеем

$$F(x_1, x_2) = C(F(x_1), F(x_2)) = C(u_1, u_2), \quad 0 \leq u_1, u_2 \leq 1.$$

Обозначим через

$$F_{2:2}(x) = F_{X_{2:2}}(x) = P(X_{2:2} < x) = P(\max\{X_1, X_2\} < x)$$

функцию распределения для случайной величины времени обслуживания заявки на приборах, тогда, учитывая, что времена обслуживания являются одинаково распределенными случайными величинами, можем записать

$$F_{2:2}(x) = P(\max\{X_1, X_2\} < x) = P(X_1 < x, X_2 < x) = C(F(x), F(x)) = \delta(F(x)),$$

где $\delta(u)$ называется диагональным сечением копулы.

Для моделирования зависимостей между временами обслуживания на приборах используются следующие виды копул: копула Гумбеля, копула Фарли – Гумбеля – Моргенштерна и копула Тапа – Чжао, предложенная в работе [6].

2. Копулы и среднее время пребывания в СМО

Для экспоненциального распределения времени обслуживания на приборах рассмотрим три модели зависимостей между приборами и, соответственно, временами обслуживания на них.

2.1. Копула Гумбеля

Двумерная копула Гумбеля имеет следующий вид:

$$C(u_1, u_2) = \exp\{-((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\}, \quad 0 \leq u_1, u_2 \leq 1, \quad \theta \geq 1.$$

Данная копула, в частности, использовалась авторами в [9] для приближения зависимости времен пребывания в системе с разделением заявок типа fork-join.

Случай $\theta = 1$ соответствует независимости случайных величин, а в пределе при $\theta \rightarrow \infty$ получаем совершенную положительную зависимость (комонотонность).

Для копулы Гумбеля диагональное сечение ($u_1 = u_2 = u$) определяется как

$$\delta(u) = C(u, u) = u^{2^{1/\theta}}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad \theta \geq 1.$$

Тогда функция распределения времени обслуживания заявки примет вид

$$F_{2:2}(x) = \delta(F_{Exp}(x)) = (1 - e^{-\mu x})^{2^{1/\theta}}, \quad x \geq 0,$$

а ее плотность распределения, соответственно,

$$f_{2:2}(x) = F'_{2:2}(x) = 2^{1/\theta} \mu e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{2^{1/\theta}-1}, \quad x \geq 0.$$

Далее можно рассчитать первый и второй моменты времени обслуживания:

$$E[X_{2:2}] = \int_0^\infty 2^{1/\theta} \mu x e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{2^{1/\theta}-1} dx,$$

$$E[X_{2:2}^2] = \int_0^\infty 2^{1/\theta} \mu x^2 e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{2^{1/\theta}-1} dx,$$

вычислив представленные интегралы.

Для произвольной случайной величины η , имеющей обобщенное экспоненциальное распределение с функцией распределения вида [10]

$$F(x) = (1 - e^{-\frac{x}{\beta}})^\alpha, \quad x \geq 0,$$

математическое ожидание и дисперсия определяются с помощью дигамма-функции $\psi(x)$:

$$E[\eta] = \beta[\psi(\alpha + 1) - \psi(1)],$$

$$Var[\eta] = \beta^2[\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)],$$

которая, в свою очередь, является производной от натурального логарифма гамма-функции

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x),$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Таким образом, с помощью дигамма-функции можем вычислить полученные интегралы, а именно для математического ожидания имеем

$$E[X_{2:2}] = \frac{1}{\mu} [\psi(2^{\frac{1}{\theta}} + 1) - \psi(1)],$$

а для второго момента будет справедливо

$$E[X_{2:2}^2] = \frac{1}{\mu^2} [\psi'(1) - \psi'(2^{\frac{1}{\theta}} + 1) + (\psi(2^{\frac{1}{\theta}} + 1) - \psi(1))^2].$$

Далее по (1),(2) вычисляем $E[V]$ (формула не приводится из-за ее громоздкости).

На рис. 2 приведены графики среднего времени пребывания заявки в системе при $\mu = 1$ и разных θ . Видно, что чем больше θ , тем ниже проходит график (меньше среднее).

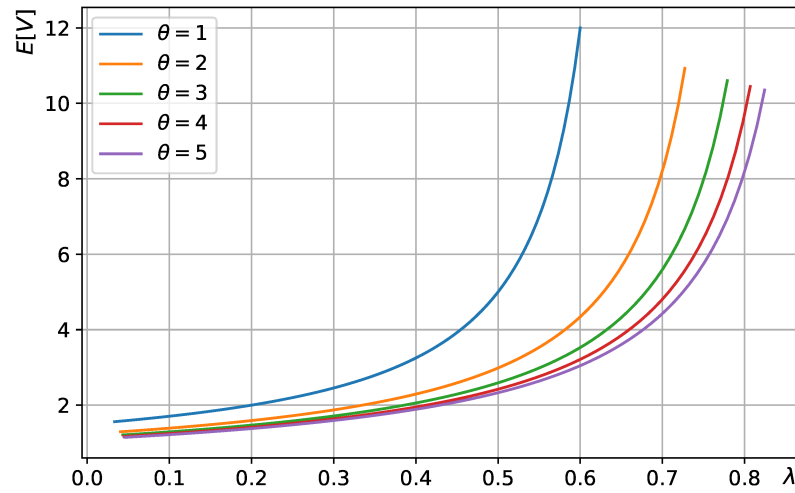


Рис. 2. Среднее время пребывания заявки в СМО для случая копулы Гумбеля (цвет онлайн)
 Fig. 2. Average sojourn time of a request in the system for the case with Gumbel copula (color online)

2.2. Копула Фарли – Гумбеля – Morgenstern

Копула-функция имеет в этом случае следующий вид:

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \theta(1 - u_1)(1 - u_2)), \quad 0 \leq u_1, u_2 \leq 1, \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Случай $\theta = 0$ соответствует независимости, $\theta < 0$ – отрицательной зависимости, а $\theta > 0$ – положительной зависимости (но совершенная зависимость не достигается при $\theta = \pm 1$).

Диагональное сечение определяется выражением

$$\delta(u) = C(u, u) = u^2(1 + \theta(1 - u^2)).$$

Далее определим выражение для функции и плотности распределения времени обслуживания

$$F_{2:2}(x) = \delta(F_{Exp}(x)) = 1 - 2e^{-\mu x} + (1 + \theta)e^{-2\mu x} - 2\theta e^{-3\mu x} + \theta e^{-4\mu x},$$

$$f_{2:2}(x) = F'_{2:2}(x) = 2\mu e^{-\mu x} - 2\mu(1 + \theta)e^{-2\mu x} + 6\mu\theta e^{-3\mu x} - 4\mu\theta e^{-4\mu x}.$$

Тогда

$$E[X_{2:2}] = \int_0^\infty x f_{2:2}(x) dx = \frac{18 - \theta}{12\mu},$$

$$E[X_{2:2}^2] = \int_0^\infty x^2 f_{2:2}(x) dx = \frac{252 - 13\theta}{72\mu^2}.$$

Следовательно,

$$Var[X_{2:2}] = \frac{\theta(10 - \theta) + 180}{144\mu^2} = \frac{10\theta - \theta^2 + 180}{144\mu^2}.$$

Теперь можем вычислить среднее время ожидания начала обслуживания и среднее время пребывания заявки в системе, подставив соответствующие выражения в общие формулы:

$$E[W] = \frac{\lambda(252 - 13\theta)}{12\mu(12\mu - \lambda(18 - \theta))},$$

$$E[V] = \frac{12\mu(18 - \theta) - \lambda(\theta^2 - 23\theta + 72)}{12\mu(12\mu - \lambda(18 - \theta))}.$$

На рис. 3 представлены графики среднего времени пребывания заявки в системе при $\mu = 1$ и разных θ . Видно, что чем больше θ , тем ниже проходит график (меньше среднее).

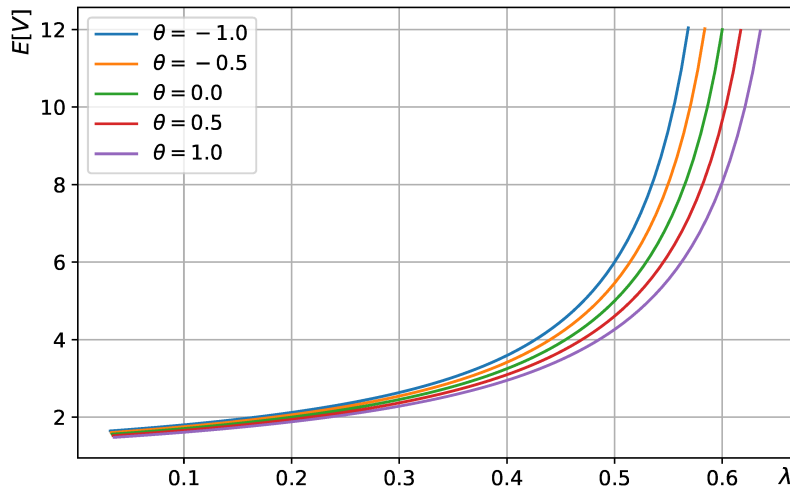


Рис. 3. Среднее время пребывания заявки в СМО для случая копулы Фарли–Гумбеля–Моргенштерна (цвет онлайн)
 Fig. 3. Average sojourn time of a request in the system for the case with Farlie–Gumbel–Morgenstern copula (color online)

2.3. Копула Тапа – Чжао

Далее рассмотрим двумерную копулу, предложенную в работе [6]. Она имеет вид

$$C(u_1, u_2) = (1 - \theta^2)u_1u_2 + \frac{\theta}{4} \left[(1 + \theta)^2 \min(u_1, u_2) - (1 - \theta)^2 \max(u_1 + u_2 - 1, 0) \right], \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Случаю $\theta = 0$ соответствует независимость, $\theta = -1$ – совершенная отрицательная зависимость (контрамонотонность), $\theta = 1$ – совершенная положительная зависимость (комонотонность).

Диагональное сечение определяется следующим выражением:

$$\delta(u) = C(u, u) = (1 - \theta^2)u^2 + \frac{\theta}{4} \left[(1 + \theta)^2 u - (1 - \theta)^2 \max(2u - 1, 0) \right].$$

Следовательно, функция распределения времени обслуживания равна

$$F_{2:2}(x) = \delta(F_{Exp}(x)) = (1 - \theta^2)(1 - 2e^{-\mu x} + e^{-2\mu x}) + \frac{\theta}{4} \left[(1 + \theta)^2 (1 - e^{-\mu x}) - (1 - \theta)^2 \max(1 - 2e^{-\mu x}, 0) \right], \quad x \geq 0,$$

а ее плотность распределения равна

$$f_{2:2}(x) = (1 - \theta^2)(2\mu e^{-\mu x} - 2\mu e^{-2\mu x}) + \frac{\theta}{4} \left[(1 + \theta)^2 \mu e^{-\mu x} - (1 - \theta)^2 2\mu e^{-\mu x} \mathbf{I}(x \geq \frac{1}{\mu} \ln 2) \right], \quad x \geq 0.$$

Для удобства запишем плотность распределения как

$$f_{2:2}(x) = \begin{cases} g(x), & 0 \leq x < \frac{1}{\mu} \ln 2, \\ g(x) - \frac{\theta}{4}(1 - \theta)^2 2\mu e^{-\mu x}, & x \geq \frac{1}{\mu} \ln 2, \end{cases}$$

где

$$g(x) = (1 - \theta^2)(2\mu e^{-\mu x} - 2\mu e^{-2\mu x}) + \frac{\theta}{4}(1 + \theta)^2 \mu e^{-\mu x}.$$



Теперь вычислим первый и второй моменты времени обслуживания:

$$\begin{aligned}
 E[X_{2:2}] &= \int_0^\infty x f_{2:2}(x) dx = \int_0^{\frac{1}{\mu} \ln 2} x g(x) dx + \int_{\frac{1}{\mu} \ln 2}^\infty x [g(x) - \frac{\theta}{4}(1-\theta)^2 2\mu e^{-\mu x}] dx = \\
 &= \int_0^\infty x g(x) dx - \frac{\theta}{4}(1-\theta)^2 \int_{\frac{1}{\mu} \ln 2}^\infty 2x\mu e^{-\mu x} dx = \\
 &= (1-\theta^2) \frac{3}{2\mu} + \frac{\theta}{4} \cdot \frac{1}{\mu} \left[(1+\theta)^2 - (1-\theta)^2(1+\ln 2) \right], \\
 E[X_{2:2}^2] &= \int_0^\infty x^2 f_{2:2}(x) dx = \int_0^\infty x^2 g(x) dx - \frac{\theta}{4}(1-\theta)^2 \int_{\frac{1}{\mu} \ln 2}^\infty 2x^2 \mu e^{-\mu x} dx = \\
 &= (1-\theta^2) \frac{7}{2\mu^2} + \frac{\theta(1+\theta)^2}{2\mu^2} - \frac{\theta(1-\theta)^2}{4\mu^2} \left[\ln^2 2 + 2 \ln 2 + 2 \right].
 \end{aligned}$$

Далее уже можем определить среднее время ожидания начала обслуживания и среднее время пребывания заявки в системе, подставляя полученные выражения в соответствующие формулы. В результате для среднего времени ожидания начала обслуживания получим

$$E[W] = \frac{\lambda(14 - 6\theta^2 - \theta(1-\theta)^2(\ln^2 2 + 2 \ln 2))}{2\mu(4\mu - 6\lambda + \theta\lambda(2\theta + \ln 2(1-\theta)^2))}.$$

На рис. 4 приведены графики среднего времени пребывания заявки в системе при $\mu = 1$ и разных θ . Видно, что чем больше θ , тем ниже проходит график (меньше среднее).

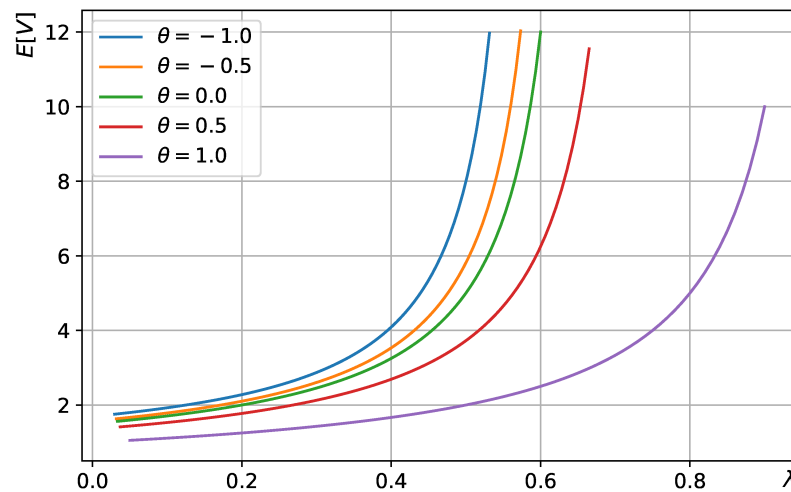


Рис. 4. Среднее время пребывания заявки в СМО для случая копулы Тапа – Чжао (цвет онлайн)

Fig. 4. Average sojourn time of a request in the system for the case with Thapa – Zhao copula (color online)

3. Сравнительный анализ с учетом коэффициентов корреляции

У каждой из рассмотренных копул свой параметр θ , имеющий разный смысл, поэтому результаты для них нельзя сравнивать непосредственно. Чтобы провести сравнение, необходимо параметризовать копулы единым образом. Это можно сделать с помощью различных мер зависимости, однозначно определяемых копулами, такими как коэффициенты корреляции Спирмена, Кендалла и Бломквиста [8, гл. 5].

К сожалению, для копулы Гумбеля коэффициент корреляции Спирмена не выражается в явном виде, поэтому ограничимся коэффициентами Кендалла и Бломквиста.



3.1. Коэффициент корреляции Кендалла

Коэффициент корреляции Кендалла случайных величин X_1 и X_2 определяется формулой

$$\tau = E[\text{sign}(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2)],$$

где $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ — независимая вероятностная копия (X_1, X_2) .

Коэффициент корреляции Кендалла для произвольной копула-функции $C(u_1, u_2)$ рассчитывается по формуле [8, теорема 5.1.3]

$$\tau = 4E[C(u_1, u_2)] - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$$

и принимает значения от -1 до 1 .

Соответственно, для копулы Гумбеля он находится как [8, пример 5.4.]

$$\tau_G = 1 - 1/\theta, \quad \theta \geq 1,$$

для копулы Фарме – Гумбеля – Моргенштерна [8, пример 5.2] —

$$\tau_{FGM} = \frac{2}{9}\theta, \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

а для копулы Тапа – Чжао [6, теорема 2.2] —

$$\tau_{TCh} = \frac{\theta(8 - 3\theta + 12\theta^2 + 6\theta^3 + 4\theta^4 - 3\theta^5)}{24}, \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

На рис. 5 представлена зависимость среднего времени отклика системы от значения коэффициента корреляции Кендалла для всех рассматриваемых трех типов копул при $\mu = 1$ и $\lambda = 1/2$ (при этих значениях параметров все средние времена пребывания конечны).

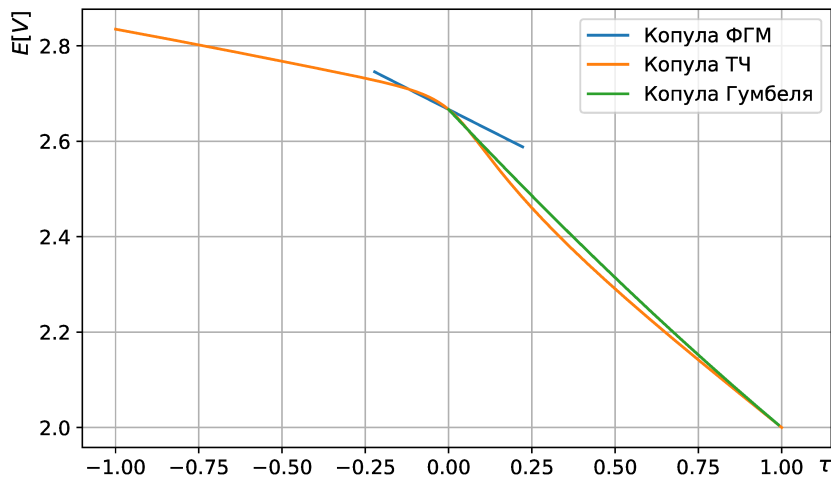


Рис. 5. Среднее время пребывания заявки в СМО в зависимости от коэффициента корреляции Кендалла, рассчитанного для трех типов копул, $\mu = 1$, $\lambda = 1/2$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Average sojourn time of a request in the system depending on the Kendall correlation coefficient, calculated for three types of copulas, $\mu = 1$, $\lambda = 1/2$ (color online)

Как ясно из аналитических формул и представленных на рис. 5 графиков, наиболее широкий диапазон значений коэффициента корреляции Кендалла позволяет получить модель копулы Тапа – Чжао, т. е. весь спектр возможных значений от -1 до 1 , на втором месте стоит копула Гумбеля с положительными значениями от 0 до 1 и, наконец, копула Фарли – Гумбеля – Моргенштерна со значениями коэффициента корреляции в диапазоне от $-2/9$ до $2/9$.



Видно, что все три графика пересекаются при $\tau = 0$ (случай независимости), при $\tau < 0$ копулы Фарли – Гумбеля – Моргенштерна и Тапа-Чжао дают близкие значения средних времен пребывания (и их графики имеют еще одну точку пересечения), при $\tau > 0$ копулы Гумбеля и Тапа – Чжао дают близкие значения и сходятся в точке $\tau = 1$ (случай совершенной положительной зависимости), а копула Фарли – Гумбеля – Моргенштерна дает сильное расхождение с остальными.

3.2. Коэффициент корреляции Бломквиста

Коэффициент корреляции Бломквиста случайных величин X_1 и X_2 определяется формулой

$$\beta = E[(X_1 - \text{med}X_1)(X_2 - \text{med}X_2)],$$

где $\text{med}X$ – медиана X .

Коэффициент корреляции Бломквиста для копула-функции $C(u_1, u_2)$ рассчитывается по формуле [8, (5.1.27)]

$$\beta = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1$$

и принимает значения от -1 до 1 .

Таким образом, для копулы Гумбеля имеем

$$\beta_G = 2^{2-2^{1/\theta}} - 1, \quad \theta \geq 1,$$

для копулы Фарли – Гумбеля – Моргенштерна –

$$\beta_{FGM} = \frac{3}{4}\theta, \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

а для копулы Тапа – Чжао [6, теорема 2.2] –

$$\beta_{TCh} = \frac{\theta(\theta^2 + 1)}{2}, \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

На рис. 6 представлена зависимость среднего времени отклика системы от значения коэффициента корреляции Бломквиста также для всех рассматриваемых трех типов копул.

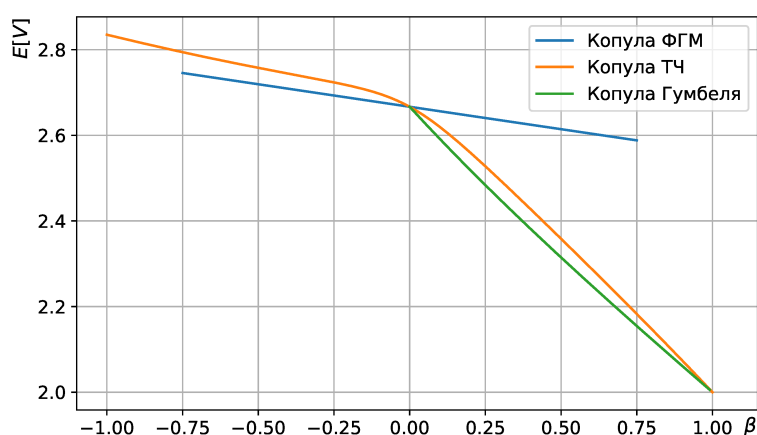


Рис. 6. Среднее время пребывания заявки в СМО в зависимости от коэффициента корреляции Бломквиста, рассчитанного для трех типов копул, $\mu = 1, \lambda = 1/2$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Average sojourn time of a request in the system depending on the Blomqvist correlation coefficient, calculated for three types of copulas, $\mu = 1, \lambda = 1/2$ (color online)



Так же как и в предыдущем случае, исходя из аналитических формул и представленных на рис. 6 графиков, наиболее широкий диапазон значений коэффициента корреляции Бломквиста от -1 до 1 позволяет получить именно модель копулы Тапа – Чжао, далее следует копула Гумбеля с положительными значениями от 0 до 1 и затем копула Фарли – Гумбеля – Моргенштерна со значениями коэффициента корреляции в диапазоне от $-3/4$ до $3/4$ (что значительно шире, чем у коэффициента Кендалла).

Видно, что все три графика пересекаются при $\beta = 0$ (случай независимости), при $\beta < 0$ копулы Фарли – Гумбеля – Моргенштерна и Тапа – Чжао дают близкие значения средних времен пребывания (но больше точек пересечения нет), при $\beta > 0$ копулы Гумбеля и Тапа – Чжао дают близкие значения и сходятся в точке $\beta = 1$ (случай совершенной положительной зависимости), а копула Фарли – Гумбеля – Моргенштерна дает сильное расхождение с остальными.

4. Верхняя и нижняя границы для среднего времени отклика

Мы рассмотрели три класса известных копул, однако этот выбор в значительной степени произволен. Можно задаться вопросом, каковы вообще верхние и нижние границы для среднего времени отклика для любых копул, но с известными коэффициентами корреляции?

В [8] приведена теорема 5.1.16, дающая верхние и нижние (поточечные) границы для копул с известными коэффициентами корреляции Спирмена, Кендалла и Бломквиста. При этом сами границы также являются копулами, что наводит на мысль рассчитать соответствующие средние времена отклика. К сожалению, в явном виде это получается только в случае коэффициента Бломквиста.

Для этого обратимся к выражениям для верхних и нижних границ копул с известным значением коэффициента корреляции Бломквиста β , который, напомним, принимает значения в диапазоне от -1 до 1 включительно:

$$\begin{aligned} \underline{B}(u_1, u_2) &= \max \left(W(u_1, u_2), \frac{\beta + 1}{4} - \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)^+ - \left(u_2 - \frac{1}{2}\right)^+ \right), \\ \overline{B}(u_1, u_2) &= \min \left(M(u_1, u_2), \frac{\beta + 1}{4} + \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)^+ + \left(u_2 - \frac{1}{2}\right)^+ \right), \end{aligned}$$

где $W(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$, $M(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$, $x^+ = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

Теперь выразим границы для диагонального сечения $\delta_\beta(u)$ копулы $C(u_1, u_2)$ в зависимости от значения β , т. е. когда $u_1 = u_2 = u$, тогда нижняя граница для диагонального сечения примет вид

$$\delta_\beta(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq \frac{3-\beta}{8}, \\ 2u - 1 + \frac{\beta+1}{4}, & \frac{3-\beta}{8} \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\beta+1}{4}, & \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{5+\beta}{8}, \\ 2u - 1, & \frac{5+\beta}{8} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

а верхняя, соответственно,

$$\overline{\delta}_\beta(u) = \begin{cases} u, & 0 \leq u \leq \frac{\beta+1}{4}, \\ \frac{\beta+1}{4}, & \frac{\beta+1}{4} \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ 2u - 1 + \frac{\beta+1}{4}, & \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3-\beta}{4}, \\ u, & \frac{3-\beta}{4} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Далее воспользуемся полученными выражениями для определения верхней и нижней границы для среднего времени пребывания заявки в системе. Для этого выразим соответствующие функции и плотности распределения времени обслуживания заявки (частей заявки) на обоих приборах.



При этом необходимо отметить, что нижняя граница копул дает верхнюю границу среднего времени пребывания, а верхняя граница копул — нижнюю границу среднего времени пребывания. Действительно, большие значения копулы ведут к большим значениям функции распределения (как большей вероятности, что случайная величина меньше заданного уровня), т. е. к стохастически меньшим временам обслуживания, имеющим меньшие средние и средние квадраты (в силу неотрицательности случайных величин), что приводит к меньшим средним временам ожидания и пребывания по формулам (1) и (2).

Через \bar{F} и \underline{F} обозначим функции распределения для нахождения верхней и нижней границ среднего времени пребывания, тогда

$$\underline{F}_{\beta,2:2}(x) = \bar{\delta}_{\beta}(F(x)), \quad \bar{F}_{\beta,2:2}(x) = \underline{\delta}_{\beta}(F(x)), \quad F(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0,$$

в результате получаем следующие формулы для искомых функций распределения:

$$\underline{F}_{\beta,2:2}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & 0 \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{4}, \quad x \geq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{\beta+1}{4}, \quad \beta \neq -1, \\ \frac{\beta+1}{4}, & -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{4} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2}, \\ 1 - 2e^{-\mu x} + \frac{\beta+1}{4}, & -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{\beta+1}{4}, \quad \beta \neq -1, \end{cases}$$

причем для частного случая $\beta = -1$ имеем

$$\underline{F}_{-1,2:2}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\mu} \ln 2, \\ 1 - 2e^{-\mu x}, & x \geq \frac{1}{\mu} \ln 2, \end{cases}$$

$$\bar{F}_{\beta,2:2}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{5+\beta}{8}, \\ 1 - 2e^{-\mu x} + \frac{\beta+1}{4}, & -\frac{1}{\mu} \ln \frac{5+\beta}{8} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2}, \\ \frac{\beta+1}{4}, & -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{8}, \\ 1 - 2e^{-\mu x}, & x \geq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{8}, \end{cases}$$

и для плотностей распределения справедливо

$$\underline{f}_{\beta,2:2}(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{4} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2}, \\ 2\mu e^{-\mu x}, & -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{\beta+1}{4}, \\ \mu e^{-\mu x}, & 0 \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{4}, \quad x \geq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{\beta+1}{4}, \end{cases}$$

причем для $\beta = -1$ получаем $\underline{f}_{-1,2:2}(x) = 2\mu e^{-\mu x}, \quad x \geq \frac{1}{\mu} \ln 2,$

$$\bar{f}_{\beta,2:2}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{5+\beta}{8}, \quad -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{8}, \\ 2\mu e^{-\mu x}, & -\frac{1}{\mu} \ln \frac{5+\beta}{8} \leq x \leq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2}, \quad x \geq -\frac{1}{\mu} \ln \frac{3-\beta}{8}. \end{cases}$$

Далее, используя функции плотностей, находим нижние и верхние границы для первого и второго момента времени обслуживания соответственно.

В итоге для нижней границы имеем следующие выражения:

$$E[\underline{X}_{\beta,2:2}] = \frac{1}{\mu} \left[\frac{3-\beta}{4} \left(\ln \frac{3-\beta}{4} - 1 \right) + \frac{1+\beta}{4} \left(\ln \frac{1+\beta}{4} - 1 \right) + \ln 2 + 2 \right], \quad \beta \neq -1,$$

$$E[\underline{X}_{-1,2:2}] = \frac{1 + \ln 2}{\mu},$$

$$E[\underline{X}_{\beta,2:2}^2] = \frac{1}{\mu^2} \left[\ln^2 2 + 2 \ln 2 + 4 - \frac{3-\beta}{4} \left(\ln^2 \frac{3-\beta}{4} - 2 \ln \frac{3-\beta}{4} + 2 \right) - \frac{1+\beta}{4} \left(\ln^2 \frac{1+\beta}{4} - 2 \ln \frac{1+\beta}{4} + 2 \right) \right], \quad \beta \neq -1,$$



$$E[X_{-1,2;2}^2] = \frac{\ln^2 2 + 2 \ln 2 + 2}{\mu^2},$$

которые при подстановке в общую формулу для среднего времени ожидания начала обслуживания

$$E[W_\beta] = \frac{\lambda E[X_{\beta,2;2}^2]}{2(1 - \lambda E[X_{\beta,2;2}])}$$

и среднего времени пребывания заявки в системе

$$E[V_1] = E[V_\beta] = E[W_\beta] + E[X_{\beta,2;2}]$$

позволят определить нижние границы этих величин в зависимости от значения коэффициента корреляции Бломквиста.

Соответственно, для верхних границ среднего времени ожидания начала обслуживания и среднего времени пребывания заявки в системе справедливо

$$E[\bar{W}_\beta] = \frac{\lambda E[\bar{X}_{\beta,2;2}^2]}{2(1 - \lambda E[\bar{X}_{\beta,2;2}])}, \quad E[V_2] = E[\bar{V}_\beta] = E[\bar{W}_\beta] + E[\bar{X}_{\beta,2;2}],$$

где

$$E[\bar{X}_{\beta,2;2}] = \frac{1}{\mu} \left[\frac{3-\beta}{4} \left(1 - \ln \frac{3-\beta}{8} \right) + \frac{5+\beta}{4} \left(1 - \ln \frac{5+\beta}{8} \right) - \ln 2 - 1 \right],$$

$$E[\bar{X}_{\beta,2;2}^2] = \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{3-\beta}{4} \left(\ln^2 \frac{3-\beta}{8} - 2 \ln \frac{3-\beta}{8} + 2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{5+\beta}{4} \left(\ln^2 \frac{5+\beta}{8} - 2 \ln \frac{5+\beta}{8} + 2 \right) - \ln^2 2 - 2 \ln 2 - 2 \right].$$

На рис. 7 представлены графики зависимостей для нижних и верхних границ среднего времени пребывания заявки в системе в зависимости от значения коэффициента корреляции Бломквиста β при $\mu = 1$.

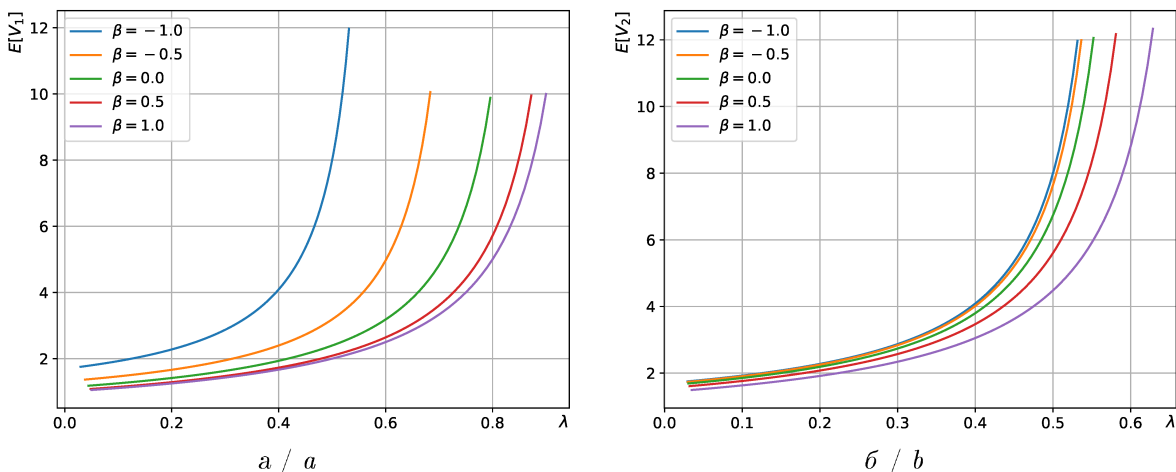


Рис. 7. Зависимость границы среднего времени пребывания заявки в системе от интенсивности входящего потока λ : а – нижней; б – верхней (цвет онлайн)

Fig. 7. Dependence of the limit of the average sojourn time of a request in the system on the arrival rate λ : a is lower; b is upper (color online)

На рис. 8 можно увидеть, как расположены значения среднего времени пребывания заявки в системе, моделируемые тремя типами копул для различных значений коэффициента корреляции Бломквиста при $\mu = 1$, $\lambda = 1/2$. Полученные верхняя и нижняя границы для



среднего времени пребывания очень широкие, причем они сходятся при $\beta = -1$ (случай совершенной отрицательной зависимости), но не сходятся при $\beta = 1$ (поскольку это значение коэффициента Бломквиста не задает однозначно совершенную положительную зависимость по нижней границе копул). Таким образом, для получения более узких границ нужно либо опираться на другие меры зависимости, либо накладывать дополнительные ограничения на возможные копулы.

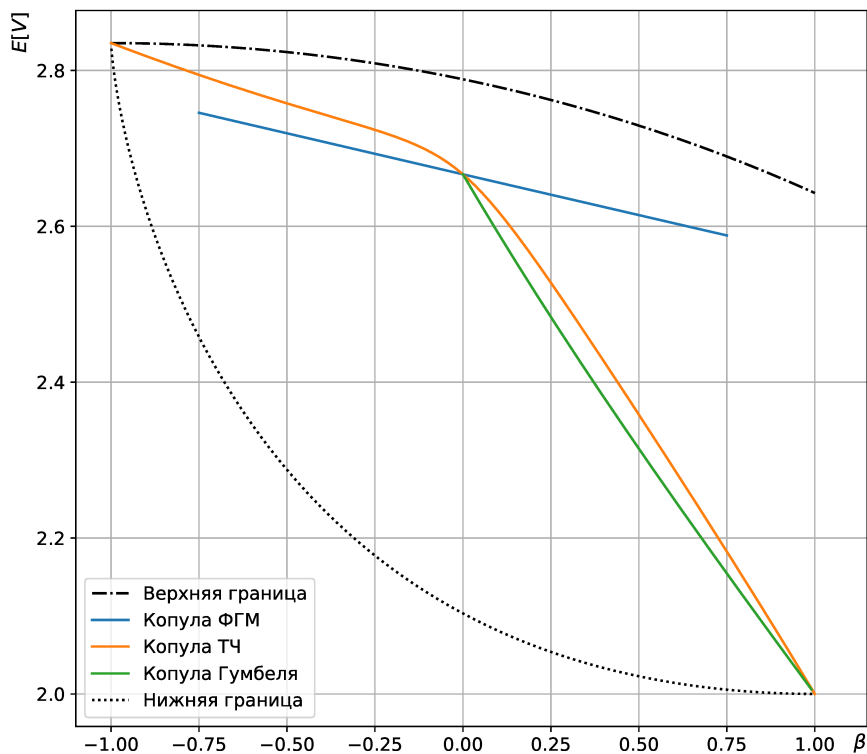


Рис. 8. Расположение среднего времени пребывания заявки в СМО в зависимости от коэффициента корреляции Бломквиста, рассчитанного для трех типов копул, относительно верхней и нижней границ (цвет онлайн)

Fig. 8. The location of the average sojourn time relative to the upper and lower bounds, depending on the Blomqvist correlation coefficient calculated for three types of copulas (color online)

Заключение

В результате исследования получены выражения для среднего времени пребывания в системах с разделением заявок типа split-merge с двумя приборами и зависимыми временами обслуживания на них, с показательным распределением. Разобраны три типа копул, описывающих зависимость: Гумбеля, Фарли – Гумбеля – Моргенштерна и Тапа – Чжао. Во всех случаях выведены формулы для первых двух моментов времени обслуживания заявки и среднего времени пребывания заявки (времени отклика).

Проведен сравнительный анализ с учетом коэффициентов корреляции Кендалла и Бломквиста. В обоих случаях при отрицательной корреляции копулы Фарли – Гумбеля – Моргенштерна и Тапа – Чжао дают близкие значения средних времен пребывания, при положительной корреляции копулы Гумбеля и Тапа – Чжао дают близкие значения, а копула Фарли – Гумбеля – Моргенштерна дает сильное расхождение с остальными.

Получены верхние и нижние границы для среднего времени пребывания для любых



копул при известном коэффициенте корреляции Бломквиста. Эти границы оказываются очень широкими. Для получения более узких границ нужно либо опираться на другие меры зависимости, либо накладывать дополнительные ограничения на возможные копулы.

Представленный подход может быть распространен на другие распределения времен обслуживания подзаявок (в том числе с тяжелыми хвостами) и на системы с разделением на $N > 2$ подзаявок с использованием многомерных копул.

Список литературы

1. Постнова О. С., Тананко И. Е., Рогачко Е. С. Приближенный анализ длительности пребывания требований в сети массового обслуживания с делением и слиянием требований // Управление большими системами. 2025. Вып. 115. С. 33–51.
2. Fiorini P. M., Lipsky L. Exact analysis of some split-merge queues // ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review. 2015. Vol. 43, iss. 2. P. 51–53. DOI: <https://doi.org/10.1145/2825236.2825257>
3. Harrison P., Zertal S. Queueing models with maxima of service times // Computer Performance Evaluation. Modelling Techniques and Tools / eds. P. Kemper, W. H. Sanders. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2003. P. 152–168. (TOOLS 2003. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2794). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45232-4_10
4. Joshi G., Soljanin E., Wornell G. Efficient redundancy techniques for latency reduction in cloud systems // ACM Transactions on Modeling and Performance Evaluation of Computing Systems (TOMPECS). 2017. Vol. 2, iss. 2. P. 1–30. DOI: <https://doi.org/10.1145/3055281>
5. Румянцев А. С., Долгалева Д. С., Головин А. С. Исследование стационарных характеристик многосерверных моделей с избыточностью // Программные системы: теория и приложения. 2023. Т. 14, № 1. С. 55–94. DOI: <https://doi.org/10.25209/2079-3316-2023-14-1-55-94>
6. Thapa S., Zhao Y. Q. Construction of new copulas with queueing application. 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12401>
7. Tsimashenka I., Knottenbelt W. J., Harrison P. G. Controlling variability in split-merge systems and its impact on performance // Annals of Operations Research. 2016. Vol. 239. P. 569–588. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-014-1560-3>
8. Nelsen R. B. An introduction to copulas. New York : Springer, 2006. 276 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0>
9. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Copulas and quantiles in fork-join queueing systems // Advances in Systems Science and Applications. 2024. Vol. 24, iss. 1. P. 1–19. DOI: <https://doi.org/10.25728/assa.2024.24.1.1585>
10. Gupta R. D., Kundu D. Theory & methods: Generalized exponential distributions // Australian and New Zealand Journal of Statistics. 1999. Vol. 41. P. 173–188. DOI: <https://doi.org/10.1111/1467-842X.00072>

References

1. Postnova O. S., Tananko I. E., Rogachko E. S. An approximation for the response time in fork-join queueing networks. *Large-Scale Systems Control*, 2025, iss. 115, pp. 33–51 (in Russian).
2. Fiorini P. M., Lipsky L. Exact analysis of some split-merge queues. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 51–53. DOI: <https://doi.org/10.1145/2825236.2825257>
3. Harrison P., Zertal S. Queueing models with maxima of service times. In: Kemper P., Sanders W. H. (eds.) *Computer Performance Evaluation. Modelling Techniques and Tools*. TOOLS 2003. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2794. Berlin, Heidelberg, Springer, 2003, pp. 152–168. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45232-4_10
4. Joshi G., Soljanin E., Wornell G. Efficient redundancy techniques for latency reduction in cloud systems. *ACM Transactions on Modeling and Performance Evaluation of Computing Systems (TOMPECS)*, 2017, vol. 2, iss. 2, pp. 1–30. DOI: <https://doi.org/10.1145/3055281>



5. Rumyantsev A. S., Dolgaleva D. S., Golovin A. S. Steady-state performance analysis of multiserver queueing models with redundancy. *Program Systems: Theory and Applications*, 2023, vol. 14, iss. 1, pp. 55–94 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.25209/2079-3316-2023-14-1-55-94>
6. Thapa S., Zhao Y. Q. *Construction of new copulas with queueing application*. 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12401>
7. Tsimashenka I., Knottenbelt W. J., Harrison P. G. Controlling variability in split-merge systems and its impact on performance. *Annals of Operations Research*, 2016, vol. 239, pp. 569–588. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-014-1560-3>
8. Nelsen R. B. *An introduction to copulas*. New York, Springer, 2006. 276 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0>
9. Gorbunova A. V., Lebedev, A. V. Copulas and quantiles in fork-join queueing systems. *Advances in Systems Science and Applications*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 1–19. DOI: <https://doi.org/10.25728/assa.2024.24.1.1585>
10. Gupta R. D., Kundu D. Theory & methods: Generalized exponential distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 1999, vol. 41, pp. 173–188. DOI: <https://doi.org/10.1111/1467-842X.00072>

Поступила в редакцию / Received 20.01.2026

Принята к публикации / Accepted 20.02.2026

Опубликована / Published 01.06.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 296–301

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 296–301

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-296-301>

EDN: <https://elibrary.ru/RYRBIP>

Article

Stochastic framework for macroeconomic scenario forecasting using sparse graph optimization and CIR++ simulations

A. S. Podgornyi

Far Eastern Federal University, 10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok 690922, Russia

Andrei S. Podgornyi, podgornyy_as@dvfu.ru, <https://orcid.org/0009-0005-4211-4633>, SPIN: 2675-7756, AuthorID: 1155133

Abstract. The article presents a comprehensive methodology for forecasting macroeconomic indicators for long-term planning in project finance. The purpose of the research is to develop a system of stochastic simulations capable of generating plausible scenarios of economic development, taking into account the relationships between various economic parameters. The methodology includes two key components: an algorithm for selecting significant predictors based on sparse graphs and the minimum Steiner tree, and a system of stochastic simulations integrating the CIR++ model with the Monte Carlo method. The author has developed an efficient algorithm for building regression models that takes into account structural relationships between economic indicators. The research material consisted of historical data on a wide range of Russia's macroeconomic indicators: GDP, inflation, interest rates, real estate price indices, and loan delinquency rates. The results of applying the methodology demonstrate high accuracy of forecasting on historical data and intuitively understandable behavior in the long term. Model validation is based on conceptual validity, systematic output analysis, and business logic verification rather than traditional point forecast metrics, which is appropriate for long-term scenario generation. PCST hyperparameter calibration methodology and extreme scenario modeling for tail risk assessment are presented. The system is capable of generating probabilistic scenarios with a horizon of up to 30 years, which allows assessing various aspects of risks, including extreme scenarios. The modular architecture of the system provides flexibility and adaptability to various economic conditions. The results of the research have practical significance for risk management in financial institutions and strategic planning in project finance.

Keywords: graph sparsity, feature selection, prize-collecting Steiner forest, regression, Monte Carlo method, Cox–Ingersoll–Ross Model, project finance

For citation: Podgornyi A. S. Stochastic framework for macroeconomic scenario forecasting using sparse graph optimization and CIR++ simulations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 296–301. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-296-301>, EDN: RYRBIP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 004.942:330.43

Стохастическая модель прогнозирования макроэкономических сценариев с использованием оптимизации разреженных графов и симуляций CIR++

А. С. Подгорный

Дальневосточный федеральный университет, Россия, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, д. 10



Подгорный Андрей Сергеевич, старший преподаватель департамента математики Института математики и компьютерных технологий, podgornyy_as@dvfu.ru, <https://orcid.org/0009-0005-4211-4633>, SPIN: 2675-7756, AuthorID: 1155133

Аннотация. В статье представлена комплексная методология прогнозирования макроэкономических показателей для долгосрочного планирования в проектном финансировании. Целью исследования является разработка системы стохастических симуляций, способной генерировать правдоподобные сценарии экономического развития с учетом взаимосвязей различных экономических параметров. Методология включает два ключевых компонента: алгоритм выбора значимых предикторов на основе разреженных графов и минимального дерева Штейнера, а также систему стохастических симуляций, интегрирующую модель CIR++ с методом Монте-Карло. Автором разработан эффективный алгоритм построения регрессионных моделей, учитывающий структурные взаимосвязи экономических показателей. Материалом исследования послужили исторические данные по широкому спектру макроэкономических показателей России: ВВП, инфляция, процентные ставки, индексы цен на недвижимость, показатели просроченной задолженности по кредитам. Результаты применения методологии демонстрируют высокую точность прогнозирования на исторических данных и интуитивно понятное поведение в долгосрочной перспективе. Валидация моделей основана на концептуальной обоснованности, системном анализе выходных данных и проверке бизнес-смысла, что соответствует специфике генерации долгосрочных сценариев. Представлена методика калибровки гиперпараметров алгоритма PCST и описано моделирование экстремальных сценариев для оценки хвостовых рисков. Система способна генерировать вероятностные сценарии с горизонтом до 30 лет, что позволяет оценивать различные аспекты рисков, включая экстремальные сценарии. Модульная архитектура системы обеспечивает гибкость и адаптивность к различным экономическим условиям. Результаты исследования имеют практическую значимость для управления рисками в финансовых институтах и стратегического планирования в проектном финансировании.

Ключевые слова: разреженность графов, отбор признаков, дерево Штейнера с призмами, регрессия, метод Монте-Карло, модель Кокса–Ингерсолла–Росса, проектное финансирование

Для цитирования: Podgornyi A. S. Stochastic framework for macroeconomic scenario forecasting using sparse graph optimization and CIR++ simulations [Подгорный А. С. Стохастическая модель прогнозирования макроэкономических сценариев с использованием оптимизации разреженных графов и симуляций CIR++] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 296–301. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-296-301>, EDN: RYRBIP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Project finance necessitates decision-making based on long-term macroeconomic forecasts. Existing models frequently fail to account for the complex interdependencies between diverse economic indicators, leading to significant forecasting errors over extended horizons [1]. This research aims to overcome these limitations by developing an integrated approach that synthesizes machine learning techniques with economic modeling. Classical regression models and ARIMA frameworks exhibit inherent constraints when applied to long-term forecasting, as they inadequately accommodate unexpected economic shifts and are insufficient to model the uncertainty and volatility characteristic of macroeconomic factors [2, 3].

1. Research objective

The primary research objective is the development of a flexible and scalable forecasting system for macroeconomic indicators capable of incorporating structural relationships between variables and generating probabilistic scenarios for long-term risk analysis.



The following specific tasks were defined to achieve this objective:

- 1) developing a methodology for selecting significant predictors utilizing sparse graphs and the Steiner tree algorithm;
- 2) integrating regression models into a stochastic simulation system employing the CIR++ (Cox–Ingersoll–Ross) model and Monte Carlo methods;
- 3) evaluating the efficacy of the proposed approach using data from the Russian economy, including simulations for GDP, inflation, and interest rates.

1.1. Materials and research methods

This research presents an integrated approach to constructing a forecasting system. This approach encompasses a methodology for selecting macroeconomic predictors via sparse graph analysis, followed by their utilization within a stochastic simulation system designed to generate probabilistic economic scenarios. Scenario generation is based on the CIR++ model [4–6] and Monte Carlo methods applied to macroeconomic indicators such as interest rates, housing price indices, mortgage rates, and other variables, explicitly incorporating their correlational dependencies. The methodology combines model calibration to market data, stochastic simulation with monthly discretization [7, 8], and regression relationships between variables. The coefficients of these regression relationships are optimally determined using the Steiner tree algorithm on sparse graphs.

Utilizing an implementation of the minimum Steiner tree algorithm (henceforth also referred to as PCST – Prize-Collecting Steiner Tree) [9] for feature selection [10], we identify a subgraph that maximizes the aggregate prize of selected vertices while minimizing the total cost of selected edges. The algorithm identifies a subgraph minimizing the cost function:

$$C(T) = \sum_{v_i \in V \setminus V_T} p_i + \sum_{e_{ij} \in E_T} w_{ij}, \tag{1}$$

where V_T denotes the set of selected vertices, and E_T denotes the set of selected edges.

As a practical implementation of the proposed method, regressions were employed for forecasting macroeconomic indicators.

1.2. Research results and discussion

In all the aforementioned models, the PCST algorithm was successfully applied for feature selection, ensuring the incorporation of both the individual significance of variables and their interdependencies. This enabled the creation of stable and accurate models with high explanatory power, suitable for scenario modeling and forecasting macroeconomic indicators. The application of the PCST algorithm enhanced model quality by integrating feature interdependencies, thereby improving the reliability and interpretability of the results.

Visualization of the regression of the key rate on the 1-month zero-coupon yield spread is shown in Fig. 1.

Based on the pre-constructed regression models, a comprehensive system for stochastic macroeconomic simulation was developed (experimental code: https://github.com/andreypodgorny10/macro_sims). The architecture of the system consists of four interconnected modules.

1. *Interest rate modeling module (CIR++)*. Interest rates are simulated using the stochastic CIR++ model, modified to align with the observed market yield curve. The latent short rate $x(t)$ follows the stochastic differential equation

$$dx_t = a(\theta - x_t) dt + \sigma\sqrt{x_t} dW_t, \tag{2}$$

and the observable short rate is computed as

$$r_t = x_t + \varphi(t), \tag{3}$$

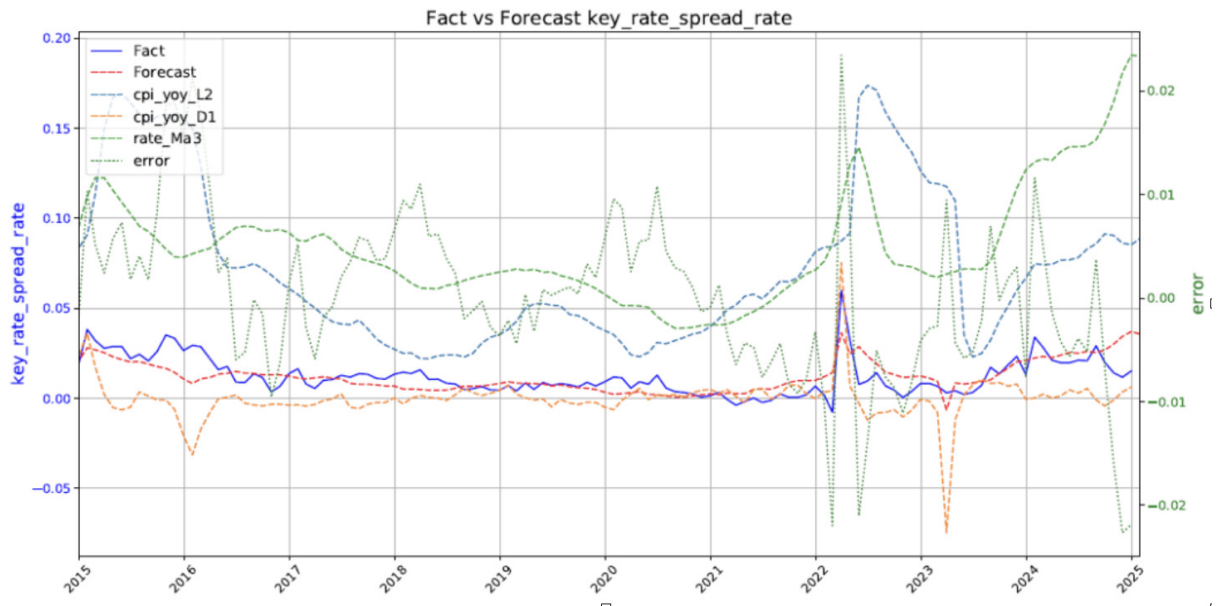


Fig. 1. Example implementation of PCST for key rate to 1-month zero-coupon yield spread forecasting. Compiled by the article author (color online)

where $\varphi(t)$ is a deterministic shift function calibrated to match the market forward curve. The model is discretized using the Euler–Maruyama scheme with a monthly step size $\Delta t = 1/12$:

$$x_{t+1} = x_t + [a\theta_0 - (a + B_{T-t}\sigma^2 \mathbf{1}_{T\text{-measure}})x_t]\Delta t + \sigma\sqrt{x_t}\varepsilon_t. \quad (4)$$

The functions B_{T-t} and $\varphi(t)$ are computed analytically during the calibration stage based on the forward rate curve.

2. *Module for generating correlated stochastic shocks* [11]. A correlation matrix R between macroeconomic variables is constructed from historical data. Cholesky decomposition is used to simulate correlated shocks: $L = \text{chol}(R)$. Independent standard normal vectors $Z \sim \mathcal{N}(0, I)$ are transformed into correlated vectors $\varepsilon = LZ$. The resulting shocks are simultaneously applied to all variables within the regression models, ensuring internally consistent scenario paths.

3. *Regression modeling module for macroeconomic variables*. Each macroeconomic variable is modeled using a stochastic regression that includes lag terms, differences, moving averages, and interaction effects. The general structure of the regression model for a variable Y_t is

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_{i,t-\ell_i} + \sum_{j=1}^m \gamma_j (Z_{j,t} - Z_{j,t-d_j}) + \sum_{p=1}^n \delta_p Y_{t-p} + \sigma \varepsilon_t, \quad (5)$$

where $X_{i,t-\ell_i}$ are lagged explanatory variables; $(Z_{j,t} - Z_{j,t-d_j})$ are first- or higher-order differences; Y_{t-p} are autoregressive terms; and $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ represents correlated shocks per Module 2.

4. *Simulation orchestration*. Summary statistics include Value-at-Risk (VaR), Expected Shortfall (ES), median-based scenario aggregates, and confidence intervals (e.g., 5th and 95th percentiles). The Monte Carlo method [12] is employed to generate the distribution of possible future states for each macroeconomic variable. Correlations are incorporated via Cholesky decomposition. The final implementation element is the visualization module. Examples of the visualization module output are presented in Fig. 2.

1.3. Numerical validation and performance assessment

Model validation focuses on conceptual validity, systematic output analysis, and business logic verification rather than traditional point forecast metrics, which is appropriate for long-term scenario generation. Conceptual validity confirms economic interpretability (e.g., inflation

and monetary policy relationships) and the mean-reversion and non-negativity properties of the CIR++ model. Output analysis checks preservation of correlation structure, absence of implausible discontinuities or explosive behavior over 30-year horizons, and convergence of long-term mean values to economically reasonable equilibria. Business logic verification confirms that HPI, mortgage spreads, and GDP dynamics are consistent with market behavior and development stages. A hyperparameter calibration strategy for PCST (threshold $\tau = 0.3$, sparsity bounds, cluster count, and adaptive step sizes) was validated via sensitivity tests; $\pm 20\%$ changes produced $< 5\%$ variation in performance metrics. Extreme scenarios are captured via CIR++ dynamics, correlation propagation, and $N = 10,000$ Monte Carlo paths, enabling VaR/ES estimation and coverage of historical stress events within the probabilistic envelope.

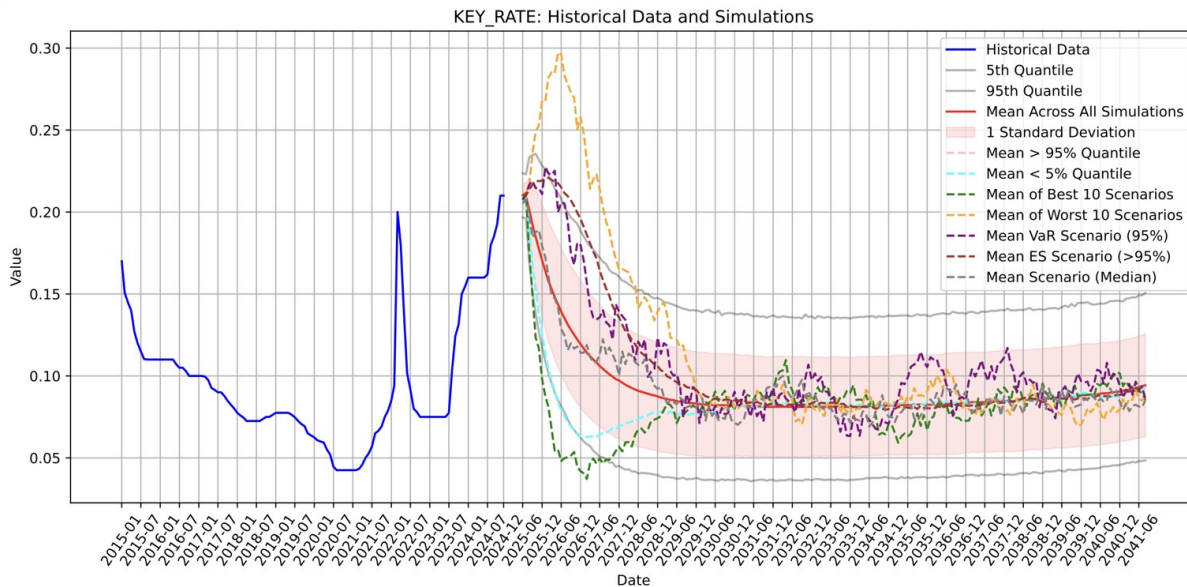


Fig. 2. Example implementation of the visualization module for the key rate. Compiled by the article author (color online)

Conclusion

The results of this research demonstrate the effectiveness of the proposed approach in forecasting macroeconomic indicators while accounting for their interdependencies and stochastic nature. The key advantages are flexibility, scalability, and adaptability to diverse economic conditions. The approach enables better risk assessment for long-term residential real estate projects and improves financial planning accuracy.

References

1. Bekaert G., Engstrom E., Xu N. R. The time variation in risk appetite and uncertainty. *Management Science*, 2022, vol. 68, iss. 6, pp. 3975–4004. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.2021.4068>
2. Antolín-Díaz J., Petrella I., Rubio-Ramírez J. F. Structural scenario analysis with SVARs. *Journal of Monetary Economics*, 2021, vol. 117, pp. 798–815. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2020.06.001>
3. Kaushik M., Giri A. *Forecasting foreign exchange rate: A multivariate comparative analysis between traditional econometric, contemporary machine learning & deep learning techniques*. 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.10247>
4. Akhtari B., Li H. The Cox–Ingersoll–Ross process under volatility uncertainty. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2024, vol. 531, iss. 1, pt. 1, art. 127867. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127867>
5. Bayraktar E., Clément E. Estimation of a pure-jump stable Cox–Ingersoll–Ross process. *Bernoulli*, 2025, vol. 31, iss. 1, pp. 484–508. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.02386>



6. Chen R.-R., Scott L. Multi-Factor Cox–Ingersoll–Ross models of the term structure: Estimates and tests from a Kalman filter model. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 2003, vol. 27, pp. 143–172. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024736903090>
7. Pognard B., Asai M. High-dimensional sparse multivariate stochastic volatility models. *Journal of Time Series Analysis*, 2022, vol. 44, iss. 1, pp. 4–22. DOI: <https://doi.org/10.1111/jtsa.12647>
8. van Rhijn J., Oosterlee C. W., Grzelak L. A., Liu S. Monte Carlo simulation of SDEs using GANs. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2023, vol. 40, pp. 1359–1390. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13160-022-00534-x>
9. Hegde C., Indyk P., Schmidt L. A nearly-linear time framework for graph-structured sparsity. *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning*, 2015, vol. 37, pp. 928–937.
10. Yu G., Liu Y. Sparse regression incorporating graphical structure among predictors. *Journal of the American Statistical Association*, 2016, vol. 111, iss. 514, pp. 707–720. DOI: <https://doi.org/10.1080/01621459.2015.1034319>
11. Fernández-Villaverde J., Guerrón-Quintana P. A. Uncertainty shocks and business cycle research. *Review of Economic Dynamics*, 2020, vol. 37, pp. 118–146. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.red.2020.06.005>
12. Hull J. C. *Options, futures, and other derivatives*. Moscow, Williams Publ. House LLC, 2014. 1072 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.10.2025

Принята к публикации / Accepted 25.11.2025

Опубликована / Published 01.06.2026



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 302–311

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 302–311

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-302-311>

EDN: <https://elibrary.ru/UEEHGG>

Научная статья

УДК 001.891.573

Математическая модель процесса эвакуации социальных групп из помещений с несколькими выходами

А. А. Силинская¹✉, А. С. Богомолов^{1,2,3}, В. А. Кушников^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр Российской академии наук», Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

³Институт прикладной математики и механики, Россия, 283048, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74

Силинская Анна Александровна, магистрант кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, asilinskaya@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-8624-6279>, SPIN: 6033-8317, AuthorID: 1296737

Богомолов Алексей Сергеевич, доктор технических наук, ¹профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук; ²ведущий научный сотрудник; ³ведущий научный сотрудник отдела теории управляющих систем, alexbogomolov@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

Кушников Вадим Алексеевич, доктор технических наук, ¹профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук; ²главный научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, kushnikoff@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

Аннотация. В работе предложена модель для симуляции многоагентной эвакуации с использованием алгоритма Multi-Agent Proximal Policy Optimization (MAPPO). Модель учитывает наличие нескольких эвакуационных выходов с разным временем открытия, нескольких типов агентов, влияние паники на движение и социальные взаимодействия типа «лидер – последователь». Уделено внимание использованию гибридного пространства действий (дискретный выбор выхода, непрерывное движение). Обучение проводилось по принципу «curriculum learning» с постепенным повышением числа агентов для улучшения обобщающей способности модели и адаптации к разному числу агентов. Модель дополнена рядом усовершенствований: использованием dropout-слоев для предотвращения переобучения, экспоненциальным затуханием исследования для плавного перехода к точным действиям, нормализацией наград для стабилизации обучения. Обучение модели проводилось в среде 15 × 20 м с заданным количеством выходов определенной ширины (три выхода шириной 1.5 м, интервал открытия 6 с). Предусмотрена логика распространения информации о выходах. Лидеры знают обо всех выходах с самого начала симуляции. Индивидуальные агенты узнают о выходах в радиусе 5 м и передают информацию соседям в радиусе 2 м. Социальные группы имеют правила поведения: пожилые агенты получают бонус к скорости, а лидеры принимают стратегические решения. Результаты вычислительных экспериментов для сценариев с 50 агентами показали, что наличие социальных групп и лидеров ускоряет процесс эвакуации, особенно для пожилых агентов. Наибольшая эффективность достигалась при наличии двух лидеров, тогда как сценарий с одним лидером приводил к заторам, увеличению времени эвакуации и уровню паники. Таким образом, предложенная модель демонстрирует перспективность применения методов обучения с подкреплением для анализа и оптимизации эвакуации в помещениях сложной конфигурации. Разработанная математическая модель предназначена для использования при создании цифровых двойников процессов имитации и оптимизации потоков людей, а также вычислительных экспериментов по расчету эффективного времени и путей выхода.



Ключевые слова: многоагентная модель, эвакуация, обучение с подкреплением, MAPPO, социальные группы, гибридное пространство действий, возрастные категории

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № FEM-2026-0006).

Для цитирования: Силинская А. А., Богомолов А. С., Кушников В. А. Математическая модель процесса эвакуации социальных групп из помещений с несколькими выходами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 302–311. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-302-311>, EDN: UEEHGG
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

A mathematical model of social group evacuation from buildings with multiple exits

A. A. Silinskaya¹✉, A. S. Bogomolov^{1,2,3}, V. A. Kushnikov^{1,2}

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Federal Research Centre “Saratov Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences”, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

³Institute of Applied Mathematics and Mechanics, 74 Rosa Luxemburg St., Donetsk 283048, Russia

Anna A. Silinskaya, asilinskaya@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-8624-6279>, SPIN: 6033-8317, AuthorID: 1296737

Aleksey S. Bogomolov, alexbogomolov@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

Vadim A. Kushnikov, kushnikoff@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

Abstract. This paper introduces a computational model for simulating multi-agent evacuation dynamics based on the Multi-Agent Proximal Policy Optimization (MAPPO) algorithm. The proposed framework incorporates multiple evacuation exits with varying opening times, heterogeneous agent types, panic-induced behavioral modifications, and social interactions of the leader–follower type. A hybrid action space is employed, combining discrete exit selection with continuous movement control. Training is performed under a curriculum learning paradigm, gradually increasing the number of agents to enhance generalization and adaptability to different population sizes. Several methodological refinements were implemented to improve training stability and efficiency: dropout layers to mitigate overfitting, exponential exploration decay to enable a smooth shift toward precise actions, and reward normalization to stabilize policy updates. Simulations were conducted in a 15 × 20 m environment with three exits (each 1.5 m wide, opening sequentially every 6 seconds). The model also incorporates mechanisms of information dissemination: leaders are aware of all exits from the start of the simulation, while individual agents detect exits within a 5 m radius and propagate this knowledge to neighbors within 2 m. Social groups follow predefined behavioral rules, such as granting elderly agents a speed adjustment and assigning leaders strategic decision-making roles. Computational experiments with scenarios involving 50 agents demonstrated that the presence of social groups and leaders significantly accelerates evacuation, particularly benefiting elderly agents. Optimal performance was observed in settings with two leaders, whereas scenarios with a single leader led to bottlenecks, longer evacuation times, and higher levels of panic. These findings highlight the potential of reinforcement learning–based approaches for analyzing and optimizing evacuation processes in complex indoor environments. The developed mathematical model is intended for use in the creation of digital twins for simulating and optimizing human flow processes, as well as for conducting computational experiments to calculate efficient evacuation times and routes.



Keywords: multi-agent model, evacuation, reinforcement learning, MAPPO, social groups, hybrid action space, age categories

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment (project No. FREM-2026-0006).

For citation: Silinskaya A. A., Bogomolov A. S., Kushnikov V. A. A mathematical model of social group evacuation from buildings with multiple exits. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 302–311 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-302-311>, EDN: UEEHGG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В настоящее время множество международных исследований посвящено вопросам разработки и использования математических моделей для представления процессов эвакуации людей из помещений при возникновении опасных ситуаций. Агентно-ориентированный подход [1, 2] позволяет учесть индивидуальное и групповое поведение, но ограничен в адаптации к изменяющимся условиям. Геоинформационные системы [3] визуализируют пути, игнорируя поведение в толпе.

В [4–6] предложены многоагентные модели эвакуации с учетом столкновений и сложной геометрии помещений. В [5] интегрируется моделирование пожара и эвакуации с использованием модели частично упругого удара, в [6] — спонтанная эвакуация с механикой обгона. Однако эти работы не учитывают физические различия агентов, социальные взаимодействия и панику. В [7] на основе методик МЧС России моделируются возрастные группы с их характеристиками и механизм ожидания при заторах, но без паники и социальных связей.

Значительный прогресс в моделировании достигнут с применением глубокого обучения с подкреплением (DRL). Работы [8–10] используют DRL для оптимизации путей в реальном времени, но не учитывают столкновения, панику или социальные группы. Лидер-ориентированные модели [11] на основе алгоритма PPO (Proximal Policy Optimization) ускоряют эвакуацию за счет координации агентов, но упрощают их поведение.

Рассмотренные работы имеют ограничения: статичность среды, игнорирование индивидуальных характеристик, социального взаимодействия и адаптивности к сложным помещениям с множеством выходов. Это обуславливает актуальность новых подходов.

Задачей данной работы является разработка многоагентной модели эвакуации, учитывающей: агентов трех возрастных категорий с разными физическими характеристиками; уровень паники и ее влияние на движение; социальные взаимодействия типа «лидер – последователь»; наличие нескольких выходов, открывающихся в разное время.

1. Математические модели для симуляции поведения агентов

Для симуляции поведения агентов при эвакуации была разработана модель на основе алгоритма MAPPO (Multi-Agent Proximal Policy Optimization) [12]. MAPPO является расширением алгоритма PPO для многоагентных систем. Алгоритм предполагает использование двух нейросетей — актора и критика, где актор определяет стратегию агента, а критик оценивает ценность его действий, используя глобальную информацию. Применяется подход CTDE (Centralized Training, Decentralized Execution), где обучение агентов происходит централизованно (например, с использованием общей информации о состоянии), но после обучения каждый агент действует независимо, используя собственные локальные наблюдения. Это позволяет решать проблему нестационарности среды и распределения награды.

Для решения поставленной задачи модель была разработана путем внедрения некоторых модификаций. Используется гибридное пространство действий, включающее в себя дискретный выбор действия и непрерывное движение. Этот подход позволяет отобразить реалии



эвакуации, где агенты принимают стратегические решения о цели (подходящем выходе) и тактически маневрируют в толпе. Подобные гибридные пространства действий показали свою эффективность в задачах с иерархическим управлением [13]. Для повышения обобщающей способности модели используются dropout-слои в акторской сети. Это позволяет предотвратить переобучение модели при большой размерности данных и вариативности сценариев [14, 15]. Реализован механизм затухания исследования за счет экспоненциального уменьшения стандартного отклонения непрерывных действий. Этот подход позволяет обеспечить переход от активного исследования среды к точным движениям, что поддерживается практиками управления исследованием в обучении с подкреплением [16, 17]. Награды агентов нормализуются по стандартному отклонению. Это позволяет стабилизировать обучение, когда награды имеют высокую вариативность [18]. Также для улучшения обобщающей способности используется принцип curriculum learning [16, 19] с постепенным повышением числа агентов в среде в процессе обучения. Этот подход позволяет агентам сначала обучиться простым сценариям, где взаимодействия друг с другом минимальны, а основная цель — движение к выходу. Затем, по мере роста, агенты учатся более тонко маневрировать в толпе.

2. Обучение математической модели

Обучение модели проводилось в двумерной среде 15×20 м (площадь 300 м^2) с тремя выходами шириной 1.5 м. Один из выходов открыт с самого начала симуляции, считается основным, поэтому известен всем агентам (расположен справа на рис. 1). Другие выходы открываются с интервалом 6 с. Агенты узнают о новых выходах в радиусе 5 м и передают информацию другим участникам в радиусе 2 м. Лидер узнает об открытии выхода вне зависимости от расстояния. Такая конфигурация помещения характерна для таких общественных помещений, как учебные аудитории, торговые залы, рестораны или офисы. Согласно своду правил системы противопожарной защиты¹ для помещений с одновременным пребыванием более 50 человек требуется не менее двух выходов, а минимальная ширина эвакуационного выхода при пребывании в помещении более 15 человек должна быть не меньше 1.2 м.

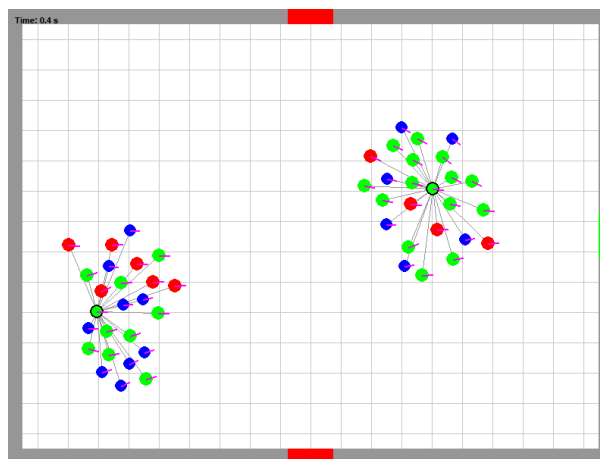


Рис. 1. Среда с 50 агентами и 2 лидерами
Fig. 1. Environment with 50 agents and 2 leaders

Предусмотрено три типа агентов разных возрастных категорий, которые инициализируются в среде в фиксированной пропорции: «подросток» — 30%, «взрослый» — 50%, «пожилой» — 20%. Они различаются своими скоростью, маневренностью и радиусом проекции. Лидерами могут быть только взрослые агенты. Для повышения обобщающей способности модели во время обучения их число случайным образом варьируется от двух до половины общего числа агентов. При инициализации среды для сценариев с социальными группами группы считались заранее организованными, поэтому размещались кластером (см. рис. 1). Как одиночные агенты, так и группы размещались в среде случайно.

В модели предусмотрено влияние паники на маневренность агентов, предполагая, что по мере ее роста агенты становятся менее маневренными [20]. Ее рост зависит от близости других агентов и удаленности от выхода [21], при этом у агентов, организованных в группы,

¹Об утверждении свода правил СП 1.13130 «Системы противопожарной защиты. Эвакуационные пути и выходы»: Приказ МЧС России от 19.03.2020 г. № 194. Москва : МЧС России, 2020. 47 с.

уровень паники растёт медленнее [22]. Уровень паники зависит от скученности агентов, времени с начала эвакуации и удаленности от выхода. Уровень паники принимает значения на отрезке $[0; 1]$. Увеличение паники определяется как

$$\text{panic_increase} = \sum_{\text{nearby_agents}} w_{\text{type}} + d_{\text{exit}} f_{\text{type}},$$

где $w_{\text{type}} = 0.1$ для одиночных агентов, 0.03 — для агентов, принадлежащих данной группе, 0.06 — для агентов, принадлежащих другой группе, d_{exit} — нормализованное расстояние до ближайшего открытого выхода, $f_{\text{type}} = 0.2$ для одиночных или 0.1 для групповых агентов, nearby_agents — число агентов в радиусе 1.5 м. Затем уровень паники на каждом шаге симуляции обновляется по формуле

$$\text{panic_level}_{t+1} = \max(0, \min(1, \text{panic_level}_t + 0.1 \cdot \text{panic_increase} - \text{decay_rate})),$$

где $\text{decay_rate} = 0.01$ для одиночных агентов, 0.02 для агентов в группе.

Эксперименты в [22] показали, что при эвакуации лидер может управлять скоростью агентов, в том числе оказывать помощь в передвижении. В связи с этим при эвакуации в социальных группах пожилые агенты, будучи уязвимыми участниками движения, получают бонус к скорости при следовании за лидером.

В сценариях с группами лидер выбирает выход, вычисляя среднее расстояние всех своих последователей до него. Последователи, находящиеся к другому выходу значительно ближе, чем к лидеру, могут отделяться от группы. Такое решение принимается, когда расстояние до альтернативного выхода оказывается меньше, чем расстояние до выхода, выбранного лидером, и при этом разница между этими расстояниями превышает половину расстояния до лидера. Однако это правило не распространяется на пожилых агентов: они остаются с лидером, чтобы отразить их большую зависимость от лидеров в стрессовых ситуациях.

Обучение для сценариев с социальными группами и без них проводилось отдельно.

Модель обучалась и тестировалась на помещении фиксированной конфигурации. Текущая программная реализация потребует переобучения для помещений с другой геометрией, с иным количеством или расположением выходов. Интервал открытия выходов можно изменять перед проведением симуляции, однако механизма для установки времени открытия в процессе симуляции в текущей реализации не предусмотрено.

Асимптотическая сложность обучения модели оценивается как

$$O(E_{\text{обуч}} T_{\text{шаг}} N^2 + E_{\text{обуч}} T_{\text{шаг}} N H_{\text{скр}}^2 + U E_{\text{обуч}} E_{\text{обнов}} V_{\text{кол}} V_{\text{разм}} H_{\text{скр}}^2),$$

где N — количество агентов, $E_{\text{обуч}}$ — количество эпизодов обучения, $T_{\text{шаг}}$ — максимальное число шагов на эпизод, $V_{\text{разм}}$ — размер батча, $E_{\text{обнов}}$ — количество эпох обновления РРО, $H_{\text{скр}}$ — размер скрытого слоя нейросети, $V_{\text{кол}}$ — количество батчей в буфере, U — количество обновлений за эпизод. В текущей реализации ключевым ограничением производительности является квадратичная зависимость от количества агентов, что ограничивает масштабируемость на сценарии с числом агентов более 100. Это связано с тем, что модель вычисляет взаимодействия для каждого отдельного агента. Далее для адаптации системы к большим масштабам мы будем использовать разбиение пространства на ячейки.

3. Итоги вычислительных экспериментов и выводы

Симуляция с использованием обученной модели проводилась для 50 агентов для сценариев с группами и без них. Число лидеров социальных групп изменялось от 1 до 6. Для каждого сценария проводилось 50 эпизодов, полное и среднее время эвакуации всех агентов представлено на рис. 2.

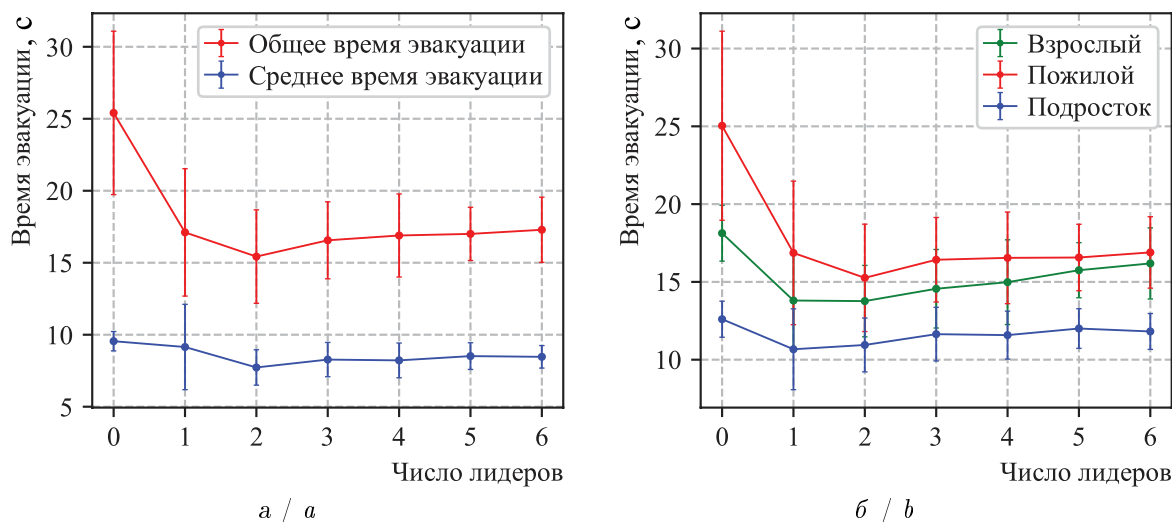


Рис. 2. Сравнение общего времени эвакуации 50 агентов: а — со средним временем эвакуации; б — по типам агентов (цвет онлайн)

Fig. 2. Comparison of total evacuation time for 50 agents: a is with average evacuation time; b by agent type (color online)

Результаты экспериментов дают основание предполагать, что эвакуация в социальных группах происходит быстрее, особенно в случае наличия пожилых агентов. При этом эвакуация с одним лидером занимает наибольшее время и имеет наибольшее стандартное отклонение. Полагаем, что такой результат связан с тем, что лидер ведет своих последователей к одному выходу, из-за чего образуются заторы. Также из-за случайного размещения агентов в среде группы могли расположиться изначально как на большом, так и на малом расстоянии от выходов. Эта особенность способствовала повышению стандартного отклонения для сценариев с малым числом лидеров. В свою очередь, при одиночной эвакуации высокое стандартное отклонение объясняется общей нескоординированностью агентов. Пожилые агенты вносят наибольший вклад в продолжительность эвакуации, поэтому их случайное размещение в среде относительно выходов также может оказывать значительное влияние на общее время. В рассматриваемых условиях для более оперативной эвакуации рекомендуется наличие двух лидеров.

Число столкновений было наибольшим в сценарии с одним лидером, в остальных случаях разницу можно считать незначительной. Полагаем, что уровень паники также снижается по мере роста числа лидеров.

Согласно Приложению № 6 Приказа МЧС №1140² время эвакуации определяется как

$$t_{э} = t_{нэ} + \max_i \left(\frac{L_i}{v_i} \right),$$

где $t_{нэ}$ — время начала эвакуации (в нашем случае 0, так как агенты начинают движение к выходу с начала симуляции), L_i — расстояние до ближайшего выхода для i -го человека, v_i — скорость движения i -го человека, $L_{max} = 27.5$ м — это максимально возможное манхэттенское расстояние агента до правого выхода, открытого изначально, $v_{min} = 0.8$ м/с для пожилых агентов в сценариях без групп, $v_{min} = 1.2$ м/с для взрослых или пожилых в сценариях с группами. Таким образом, время эвакуации без групп $t_{э} = 34.4$ с, с группами — $t_{э} = 22.9$ с. Расхождение результатов вычислительных экспериментов с расчетами по этой методике в меньшую сторону может быть объяснено тем, что методика МЧС не

²Об утверждении методики определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и пожарных отсеках различных классов функциональной пожарной опасности: Приказ МЧС России от 14.11.2022 г. № 1140. Москва : МЧС России, 2022. 65 с.



предполагает динамическую смену предпочтительного выхода агентами, распространение информации и координацию лидеров.

Заключение

В работе предложено использование обучения с подкреплением для моделирования процесса эвакуации на основе алгоритма MAPPO. Особенностью разработанной модели является способность учитывать наличие нескольких выходов с открытием в разное время, агентов нескольких разных типов, социальных взаимодействий типа «лидер – последователь», влияния паники на движение. Паника измеряется показателем со значениями на отрезке $[0; 1]$, по мере роста которого снижается маневренность агентов. Рост показателя паники агента зависит от близости других агентов, выхода и времени с начала эвакуации. Вычислительные эксперименты показали, что наличие лидеров способствует более быстрой и эффективной эвакуации, при этом в рассматриваемых условиях наибольшая эффективность наблюдалась при двух лидерах.

Таким образом, предложенная в статье математическая модель позволяет конструктивно воспроизвести поведение людей в условиях чрезвычайных ситуаций, учитывая их взаимодействие и ограниченные параметры пространства. Среди целей исследования — оптимизация маршрутов и распределения потоков, сокращение времени эвакуации и минимизация заторов при эвакуации в сложных архитектурных условиях.

Список литературы

1. Коткова Е. А., Матвеев А. В., Нефедьев С. А., Таранцев А. А. Агентное моделирование процесса эвакуации людей при пожарах в зданиях: обзор подходов и исследований // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 10. С. 55–62. DOI: <https://doi.org/10.17513/snt.39791>, EDN: CZHEJY
2. Zia K., Ferscha A. An agent-based model of crowd evacuation: combining individual, social and technological aspects // Proceedings of the 2020 ACM SIGSIM Conference on Principles of Advanced Discrete Simulation. New York : Association for Computing Machinery, 2020. P. 129–140. DOI: <https://doi.org/10.1145/3384441.3395973>
3. Суханов В. О., Кузьмин А. И., Скорыходов Д. В. Геоинформационная система поддержки принятия решений на эвакуацию населения // Современные технологии обеспечения гражданской обороны и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций. 2019. № 1 (10). С. 411–413. EDN: WNCRRV
4. Цвиркун А. Д., Резчиков А. Ф., Самарцев А. А., Богомолов А. С., Иващенко В. А., Кушников В. А., Филимонок Л. Ю. Интегрированная модель динамики распространения опасных факторов пожара в помещениях и эвакуации из них // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 2 (176). С. 47–54. DOI: <https://doi.org/10.14489/vkit.2019.02.pp.047-054>, EDN: ZACMDZ
5. Цвиркун А. Д., Резчиков А. Ф., Самарцев А. А., Иващенко В. А., Богомолов А. С., Кушников В. А., Филимонок Л. Ю. Система интегрированного моделирования распространения опасных факторов пожара и эвакуации людей из помещений // Автоматика и телемеханика. 2022. № 5. С. 26–42. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0005231022050038>, EDN: ABHDTO
6. Samartsev A., Ivaschenko V., Rezchikov A., Kushnikov V., Filimonyuk L., Bogomolov A. Multiagent model of people evacuation from premises while emergency // Advances in Systems Science and Applications. 2019. Vol. 19, iss. 1. P. 98–115. DOI: <https://doi.org/10.25728/assa.2019.19.1.558>, EDN: JJSDFW
7. Гамаюнова В. О., Богомолов А. С., Кушников В. А., Иващенко В. А. Мультиагентное моделирование эвакуации из помещений с учетом столкновений агентов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 106–115. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-106-115>, EDN: TLQGGD
8. Rosa A. C., Falqueiro M. C., Bonacin R., De Mendonça F. L. L., Filho G. P. R., Gonçalves V. P. EvacuAI: An analysis of escape routes in indoor environments with the aid of reinforcement learning // Sensors. 2023. Vol. 23, iss. 21. Art. 8892. DOI: <https://doi.org/10.3390/s23218892>



9. Ünal A. E., Gezer C., Pak B. K., Güngör V. Ç. Generating emergency evacuation route directions based on crowd simulations with reinforcement learning // 2022 Innovations in Intelligent Systems and Applications Conference (ASYU). Antalya : IEEE, 2022. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/ASYU56188.2022.9925560>
10. Xu D., Huang X., Mango J., Li X., Li Z. Simulating multi-exit evacuation using deep reinforcement learning // Transactions in GIS. 2021. Vol. 25, iss. 3. P. 1542–1564. DOI: <https://doi.org/10.1111/tgis.12738>
11. Sinpan N., Sasithong P., Chaudhary S., Poomrittigul S., Leelawat N., Wuttisittikulki L. Simulative investigations of crowd evacuation by incorporating reinforcement learning scheme // ICACS '22: Proceedings of the 6th International Conference on Algorithms, Computing and Systems. New York : Association for Computing Machinery, 2022. P. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1145/3564982.3564983>
12. Yu C., Velu A., Vinitzky E., Gao J., Wang Y., Bayen A., Wu Y. The surprising effectiveness of PPO in cooperative multi-agent games // Advances in Neural Information Processing Systems. 2022. Vol. 35. P. 24611–24624.
13. Xiong J., Wang Q., Yang Z., Sun P., Han L., Zheng Y., Fu H., Zhang T., Liu J., Liu H. Parametrized deep Q-networks learning: Reinforcement learning with discrete-continuous hybrid action space // arXiv preprint arXiv:1810.06394. 2018. DOI: <https://doi.org/10.48550/arxiv.1810.06394>
14. Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A., Sutskever I., Salakhutdinov R. Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting // Journal of Machine Learning Research. 2014. Vol. 15. P. 1929–1958.
15. Gal Y., Ghahramani Z. Dropout as a Bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning // Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning. New York, USA : PMLR, 2016. P. 1050–1059.
16. Sutton R. S., Barto A. Reinforcement learning: An introduction. Cambridge : The MIT Press, 2020. 552 p.
17. Lillicrap T. P., Hunt J. J., Pritzel A., Heess N., Erez T., Tassa Y., Silver D., Wierstra D. Continuous control with deep reinforcement learning // arXiv preprint arXiv:1509.02971. 2015. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.02971>
18. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal policy optimization algorithms // arXiv preprint arXiv:1707.06347. 2017. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.06347>
19. Narvekar S., Peng B., Leonetti M., Sinapov J., Taylor M. E., Stone P. Curriculum learning for reinforcement learning domains: A framework and survey // Journal of Machine Learning Research. 2020. Vol. 21, iss. 1. P. 181:1–181:50.
20. Wang L., Zheng J.-H., Zhang X.-S., Zhang J.-L., Wang Q.-Z., Zhang Q.-Zh. Pedestrians' behavior in emergency evacuation: Modeling and simulation // Chinese Physics B. 2016. Vol. 25, iss. 11. Art. 118901. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/25/11/118901>
21. Trivedi A., Rao S. Agent-based modeling of emergency evacuations considering human panic behavior // IEEE Transactions on Computational Social Systems. 2018. Vol. 5, iss. 1. P. 277–288. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCSS.2017.2783332>
22. Ding N., Sun C. Experimental study of leader-and-follower behaviours during emergency evacuation // Fire Safety Journal. 2020. Vol. 117. Art. 103189. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2020.103189>

References

1. Kotkova E. A., Matveev A. V., Nefedev S. A., Tarantsev A. A. Agent modeling of the process of people evacuation during fire in buildings: A review of approaches and research. *Modern High Technologies*, 2023, iss. 10, pp. 55–62. DOI: <https://doi.org/10.17513/snt.39791>, EDN: CZHEJY
2. Zia K., Ferscha A. An agent-based model of crowd evacuation: combining individual, social and technological aspects. *Proceedings of the 2020 ACM SIGSIM Conference on Principles of Advanced Discrete Simulation*. New York, Association for Computing Machinery, 2020, pp. 129–140. DOI: <https://doi.org/10.1145/3384441.3395973>



3. Sukhanov V. O., Kuzmin A. I., Skorokhodov D. V. Geoinformation system support decision-making on evacuation of the population. *Sovremennye tekhnologii obespecheniya grazhdanskoj oborony i likvidatsii posledstviy chrezvychaynykh situatsiy* [Modern Technologies for Civil Defense and Emergency Response], 2019, iss. 1 (10), pp. 411–413 (in Russian). EDN: [WNCRRV](#)
4. Tsvirkun A. D., Rezhnikov A. F., Samartsev A. A., Bogomolov A. S., Ivashchenko V. A., Kushnikov V. A., Filimonyuk L. Yu. Integrated model of the fire dangerous factors dynamics in premises and the evacuation. *Herald of Computer and Information Technologies. Scientific, Technical and Production Monthly Journal*, 2019, iss. 2 (176), pp. 47–54 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14489/vkit.2019.02.pp.047-054>, EDN: [ZACMDZ](#)
5. Tsvirkun A. D., Rezhnikov A. F., Filimonyuk L. Y., Samartsev A. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Kushnikov V. A. System of integrated simulation of spread of hazardous factors of fire and evacuation of people from indoors. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, iss. 5, pp. 692–705. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117922050034>, EDN: [POZSHW](#)
6. Samartsev A., Ivaschenko V., Rezhnikov A., Kushnikov V., Filimonyuk L., Bogomolov A. Multiagent model of people evacuation from premises while emergency. *Advances in Systems Science and Applications*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 98–115. DOI: <https://doi.org/10.25728/assa.2019.19.1.558>, EDN: [JJSDFW](#)
7. Gamayunova V. O., Bogomolov A. S., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A. Multi-agent modeling of evacuation from premises with consideration of agent collisions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 106–115 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-106-115>, EDN: [TLQGGD](#)
8. Rosa A. C., Falqueiro M. C., Bonacin R., De Mendonça F. L. L., Filho G. P. R., Gonçalves V. P. EvacuAI: An analysis of escape routes in indoor environments with the aid of reinforcement learning. *Sensors*, 2023, vol. 23, iss. 21, art. 8892. DOI: <https://doi.org/10.3390/s23218892>
9. Ünal A. E., Gezer C., Pak B. K., Güngör V. Ç. Generating emergency evacuation route directions based on crowd simulations with reinforcement learning. *2022 Innovations in Intelligent Systems and Applications Conference (ASYU)*. Antalya, IEEE, 2022, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/ASYU56188.2022.9925560>
10. Xu D., Huang X., Mango J., Li X., Li Z. Simulating multi-exit evacuation using deep reinforcement learning. *Transactions in GIS*, 2021, vol. 25, iss. 3, pp. 1542–1564. DOI: <https://doi.org/10.1111/tgis.12738>
11. Sinpan N., Sasithong P., Chaudhary S., Poomrittigul S., Leelawat N., Wuttisittikulij L. Simulative investigations of crowd evacuation by incorporating reinforcement learning scheme. *ICACS '22: Proceedings of the 6th International Conference on Algorithms, Computing and Systems*. New York, Association for Computing Machinery, 2022, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1145/3564982.3564983>
12. Yu C., Velu A., Vinitsky E., Gao J., Wang Y., Bayen A., Wu Y. The surprising effectiveness of PPO in cooperative multi-agent games. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2022, vol. 35, pp. 24611–24624.
13. Xiong J., Wang Q., Yang Z., Sun P., Han L., Zheng Y., Fu H., Zhang T., Liu J., Liu H. Parametrized deep Q-networks learning: Reinforcement learning with discrete-continuous hybrid action space. *arXiv preprint arXiv:1810.06394*, 2018. DOI: <https://doi.org/10.48550/arxiv.1810.06394>
14. Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A., Sutskever I., Salakhutdinov R. Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting. *Journal of Machine Learning Research*, 2014, vol. 15, pp. 1929–1958.
15. Gal Y., Ghahramani Z. Dropout as a Bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning. *Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning*. New York, USA, PMLR, 2016, pp. 1050–1059.
16. Sutton R. S., Barto A. *Reinforcement learning: An introduction*. Cambridge, The MIT Press, 2020. 552 p.
17. Lillicrap T. P., Hunt J. J., Pritzel A., Heess N., Erez T., Tassa Y., Silver D., Wierstra D. Continuous control with deep reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv:1509.02971*, 2015. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.02971>

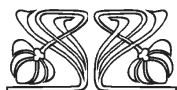
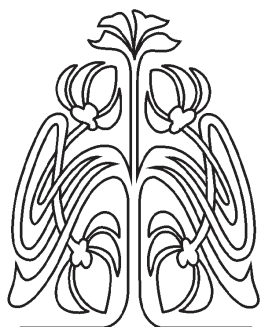


18. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal policy optimization algorithms. *arXiv preprint arXiv:1707.06347*, 2017. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.06347>
19. Narvekar S., Peng B., Leonetti M., Sinapov J., Taylor M. E., Stone P. Curriculum learning for reinforcement learning domains: A framework and survey. *Journal of Machine Learning Research*, 2020, vol. 21, iss. 1, pp. 181:1–181:50.
20. Wang L., Zheng J.-H., Zhang X.-S., Zhang J.-L., Wang Q.-Z., Zhang Q.-Zh. Pedestrians' behavior in emergency evacuation: Modeling and simulation. *Chinese Physics B*, 2016, vol. 25, iss. 11, art. 118901. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/25/11/118901>
21. Trivedi A., Rao S. Agent-based modeling of emergency evacuations considering human panic behavior. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 2018, vol. 5, iss. 1, pp. 277–288. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCSS.2017.2783332>
22. Ding N., Sun C. Experimental study of leader-and-follower behaviours during emergency evacuation. *Fire Safety Journal*, 2020, vol. 117, art. 103189. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2020.103189>

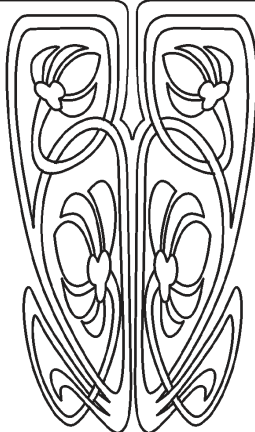
Поступила в редакцию / Received 12.11.2025

Принята к публикации / Accepted 29.11.2025

Опубликована / Published 01.06.2026



ПОДПИСКА



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 36017.
Оформить подписку на печатную версию
можно в интернет-каталоге
ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89
Факс: +7(845-2) 27-85-29
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54
E-mail: mmi@sgu.ru
Website: <https://mmi.sgu.ru>



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026.
Том 26, выпуск 2

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

- Серия: Акмеология образования. Психология развития
- Серия: История. Международные отношения
- Серия: Математика. Механика. Информатика**
- Серия: Науки о Земле
- Серия: Социология. Политология
- Серия: Физика
- Серия: Филология. Журналистика
- Серия: Философия. Психология. Педагогика
- Серия: Химия. Биология. Экология
- Серия: Экономика. Управление. Право

