



МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–14
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–14

Научная статья

УДК 517.98

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

Исследование некоторых классов почти периодических на бесконечности функций

И. А. Высоцкая^{1✉}, И. И. Струкова²

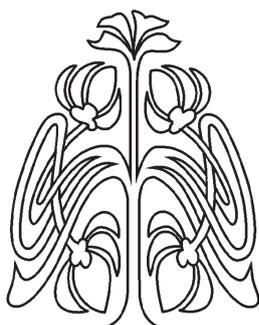
¹Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большеви́ков, д. 54А

²Воронежский государственный университет, Россия, 394036, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1

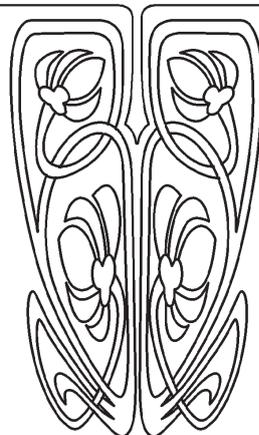
Высоцкая Ирина Алевтиновна, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математики, i.a.trishina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6521-9570>

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, irina.k.post@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2355-0091>

Аннотация. Статья посвящена исследованию непрерывных почти периодических на бесконечности функций, заданных на всей вещественной оси и со значениями в комплексном банаховом пространстве. Рассматриваются различные подпространства исчезающих на бесконечности функций, не обязательно стремящихся к нулю на бесконечности. Вводятся понятия медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Для почти периодических на бесконечности функций (относительно подпространства) приводятся четыре различных определения. Первое определение (аппроксимационное) основано на аппроксимационной теореме. В классическом варианте, для почти периодических функций, это равномерные замыкания тригонометрических многочленов. В нашем случае коэффициентами Фурье являются медленно меняющиеся на бесконечности функции. Второе определение, являющееся аналогом определения Г. Бора почти периодической функции, основывается на понятии ε -периода. Третье оп-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ределение соответствует критерию С. Бохнера почти периодичности функций. Четвертое определение приводится в терминах фактор-пространства. Благодаря использованию результатов теории почти периодических векторов в банаховых модулях доказывается, что все четыре определения эквивалентны. Кроме того, доказано, что введенные пространства медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно различных подпространств исчезающих на бесконечности функций совпадают с пространствами обычных медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций соответственно. Целесообразность рассмотрения почти периодических на бесконечности функций обусловлена тем, что решения некоторых важных классов дифференциальных и разностных уравнений являются почти периодическими на бесконечности. В статье рассматриваются дифференциальные уравнения с правой частью из различных подпространств исчезающих на бесконечности функций. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений классу почти периодических на бесконечности функций, и изучено асимптотическое представление решений.

Ключевые слова: почти периодические на бесконечности функции, медленно меняющиеся на бесконечности функции, дифференциальные уравнения

Благодарности: Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732 А).

Для цитирования: *Высоцкая И. А., Струкова И. И.* Исследование некоторых классов почти периодических на бесконечности функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–14. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

The research of some classes of almost periodic at infinity functions

I. A. Vysotskaya^{1✉}, I. I. Strukova²

¹Federal State Official Military Educational Institution of Higher Education “Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy”, 56A Starih Bolshevikov St., Voronezh 394064, Russia

²Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia

Irina A. Vysotskaya, i.a.trishina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6521-9570>

Irina I. Strukova, irina.k.post@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2355-0091>

Abstract. The article under consideration is devoted to continuous almost periodic at infinity functions defined on the whole real axis and with their values in a complex Banach space. We consider different subspaces of functions vanishing at infinity, not necessarily tending to zero at infinity. We introduce the notions of slowly varying and almost periodic at infinity functions with respect to these subspaces. For almost periodic at infinity functions (with respect to a subspace) we give four different definitions. The first definition (approximating) is based on the approximation theorem. In the classical version, for almost periodic functions, they are represented as uniform closures of trigonometric polynomials. In our case, the Fourier coefficients are slowly varying at infinity functions. The second definition, which is an analogue



of G. Bohr's definition of an almost periodic function, is based on the concept of an ε -period. The third definition meets S. Bochner's criterion for the almost periodicity of functions. The fourth definition is given in terms of factor space. With the help of the results of the theory of almost periodic vectors in Banach modules those four definitions are proved to be equivalent. In addition, it was proved that the introduced spaces of slowly varying and almost periodic at infinity functions with respect to different subspaces of functions vanishing at infinity coincide with the spaces of ordinary slowly varying and almost periodic at infinity functions, respectively. The feasibility of consideration of these functions is due to the fact that the solutions of some important classes of differential and difference equations are almost periodic at infinity. We consider differential equations whose right-hand side is a function vanishing at infinity and obtain necessary and sufficient conditions for their bounded solutions to be almost periodic at infinity functions. We also study an asymptotic representation of the solutions.

Keywords: almost periodic at infinity functions, slowly varying at infinity functions, differential equations

Acknowledgements: The second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732 A).

For citation: Vysotskaya I. A., Strukova I. I. The research of some classes of almost periodic at infinity functions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–14 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)