



УДК 629.78

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

М. С. Комарова

Саратовский государственный университет
E-mail: welecat@gmail.com

Реализован метод выбора параметров обратных связей газореактивных систем стабилизации спутников с упругими стержнями, основанный на минимизации среднеквадратичного отклонения вещественной частотной характеристики проектируемой системы относительно желаемой вещественной частотной характеристики. Приведены результаты анализа переходных функций ошибок стабилизации с учетом влияния времени запаздывания в газореактивных исполнительных органах систем стабилизации.

Ключевые слова: параметрический синтез, газореактивные системы стабилизации.

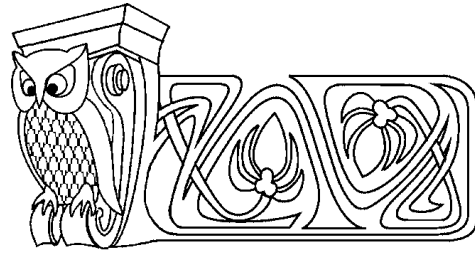
ВВЕДЕНИЕ

При решении задачи перенацеливания космического аппарата наблюдения особое место занимает проблема сокращения длительности этапа стабилизации, временные затраты на выполнение которого могут в несколько раз превышать затраты на угловой разворот [1]. Следовательно, особое значение приобретает задача параметрического синтеза газореактивной системы стабилизации, т.е. задача выбора значений параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов. Задачи стабилизации спутников с упругими стержнями рассматривались ранее в работах [2, 3]. В работе [4] выполнено детальное исследование областей устойчивости спутников с упругими стержнями в пространстве параметров обратных связей методами теории комбинированных динамических систем (КДС) [5] с учетом влияния времени запаздывания в газореактивных исполнительных органах. В работе [6] на примере гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой был предложен метод параметрического синтеза КДС, основанный на минимизации среднеквадратичного отклонения вещественной частотной характеристики проектируемой системы относительно желаемой вещественной частотной характеристики. В настоящей работе на примере газореактивных систем стабилизации спутников с упругими стержнями данный метод реализован применительно к стабилизируемым КДС с отрицательными интегральными обратными связями.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАБИЛИЗИРУЕМОГО СПУТНИКА С УПРУГИМ ТЕЛОМ И ЗАКРЕПЛЕННЫМ НА ЕГО КОНЦЕ СТЕРЖНЕМ

Аналогично [4], линеаризованные уравнения движения газореактивной системы стабилизации спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце телом в безразмерных переменных и параметрах представляются в виде

$$\begin{aligned}
 J_c \ddot{\alpha} &= L + M_0 - aP_0 - p_1 \dot{\alpha}(t - \tau) - p_2 \alpha(t - \tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} \alpha(\xi) d\xi, \\
 m_c \ddot{y}_c &= -P_0, \quad J_1(\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1) = -M_1, \quad m_1[\ddot{y}_c + \ddot{y}_1 + (1 + a)\ddot{\alpha}] = P_1, \\
 \ddot{u} + u'''' + \gamma u'''' + \ddot{y}_c + (a + x)\ddot{\alpha} &= 0, \quad (')' = \partial(\cdot)/\partial x, \\
 u(0, t) = u'(0, t) = 0, \quad u(1, t) = y_1(t), \quad u'(1, t) &= \alpha_1(t), \\
 M_0 = u''(0, t) + \gamma u''(0, t), \quad P_0 = u'''(0, t) + \gamma u'''(0, t), \\
 M_1 = u''(1, t) + \gamma u''(1, t), \quad P_1 = u'''(1, t) + \gamma u'''(1, t), \\
 \text{при } -\tau \leq t \leq 0 \quad \alpha(t) = \dot{\alpha}(t) &= 0, \\
 \alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = y_c(0) = \dot{y}_c(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$



Parametrical Synthesis of Stabilization Systems

M. S. Komarova

Method of feedback parameters selection for gas jet stabilization systems with elastic rods, based on minimizing the mean square deviation of the real frequency response of the designed system with respect to the real desired frequency response, was implemented. The results of analysis of transient errors stabilization functions, taking into account the effect of time delay in gas jet executive stabilization systems are given.

Key words: parametrical synthesis, gas jet stabilization systems.



Здесь α — угол отклонения спутника от орбитальной системы координат (ошибка системы стабилизации); \ddot{y}_c — ускорение возмущенного движения центра масс спутника; $u(x, t)$ — прогиб срединной линии стержня; $y_1(t)$ — смещение центра масс закрепленного тела; P_0, M_0, P_1 и M_1 — соответственно силы и момент сил реакции стержня в точках его заделки в спутнике; m_c, m_1, J_c, J_1 — характерные массы и моменты инерции спутника и закрепленного тела. Интегральное слагаемое и характерное время запаздывания τ в первом уравнении (1) обеспечены наличием пропорционально-интегрально-дифференцирующего регулятора в системе управления, а также наличием запаздывания в газореактивных двигателях.

Производя прямое одностороннее интегральное преобразование Лапласа по времени t

$$\tilde{f}(\lambda) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt, \quad f(t) = L^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0 + i\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{\lambda t} d\lambda \quad (2)$$

в уравнениях (1), находим (символ « \sim » над изображениями Лапласа далее опущен)

$$\begin{aligned} J_c[\lambda^3 + e^{-\tau\lambda}(p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3)]\alpha(\lambda) &= \lambda[L(\lambda) + M_0(\lambda) - aP_0(\lambda)], \\ m_c\lambda^2 y_c(\lambda) &= -P_0(\lambda), \quad J_1\lambda^2(\alpha(\lambda) + \alpha_1(\lambda)) = -M_1(\lambda), \\ m_1\lambda^2[y_c(\lambda) + y_1(\lambda) + (1+a)\alpha(\lambda)] &= P_1(\lambda); \end{aligned} \quad (3)$$

$$u''''(x, \lambda) - k^4(\lambda)u(x, \lambda) = k^4(\lambda)[y_c(\lambda) + (a+x)\alpha(\lambda)], \quad k(\lambda) = [-\lambda^2/(1+\gamma\lambda)]^{1/4}; \quad (4)$$

$$u(0, \lambda) = u'(0, \lambda) = 0, \quad u(1, \lambda) = y_1(\lambda), \quad u'(1, \lambda) = \alpha_1(\lambda); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_0(\lambda) &= (1+\gamma\lambda)u''(0, \lambda), \quad P_0(\lambda) = (1+\gamma\lambda)u''''(0, \lambda), \\ M_1(\lambda) &= (1+\gamma\lambda)u''(1, \lambda), \quad P_1(\lambda) = (1+\gamma\lambda)u''''(1, \lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

Линейная краевая задача (4)–(5) допускает точное решение, которое после подстановки в (6) приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} M_0(\lambda) &= \lambda^2\mu_{11}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{12}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{13}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{14}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \\ P_0(\lambda) &= \lambda^2\mu_{21}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{22}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{23}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{24}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \\ M_1(\lambda) &= \lambda^2\mu_{31}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{32}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{33}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{34}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \\ P_1(\lambda) &= \lambda^2\mu_{41}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{42}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{43}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{44}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{\nu 1}(k) &= a\mu_{\nu 1}^{(1)}(k) + \mu_{\nu 1}^{(2)}(k), \quad \nu = 1, 2, 3, 4; \quad \mu_{11}^{(1)}(k) = \frac{\text{ch } k - \cos k - \text{sh } k \sin k}{k^2(\text{ch } k \cos k - 1)}, \\ \mu_{11}^{(2)}(k) &= \frac{k(\text{ch } k - \cos k) - \sin k(\text{ch } k - 1) + \text{sh } k(\cos k - 1)}{k^3(\text{ch } k \cos k - 1)}, \\ \mu_{12}(k) &= k \frac{\text{sh } k - \sin k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{13}(k) = -k^2 \frac{\text{ch } k - \cos k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{14}(k) = \mu_{11}^{(1)}(k), \quad \mu_{22}(k) = \mu_{13}(k), \\ \mu_{21}^{(1)}(k) &= \frac{\sin k(\text{ch } k - 1) + \text{sh } k(\cos k - 1)}{k(\text{ch } k \cos k - 1)}, \quad \mu_{23}(k) = k^3 \frac{\text{sh } k + \sin k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \\ \mu_{21}^{(2)}(k) &= \frac{\text{ch } k - \cos k - k(\text{sh } k + \sin k) + \text{sh } k \sin k}{k^2(\text{ch } k \cos k - 1)}, \quad \mu_{24}(k) = \mu_{21}^{(1)}(k), \quad \mu_{31}^{(1)}(k) = \mu_{11}^{(1)}(k), \\ \mu_{31}^{(2)}(k) &= -\frac{(1 - \text{ch } k) \sin k + (\cos k + k \sin k - 1) \text{sh } k}{k^3(\text{ch } k \cos k - 1)}, \quad \mu_{32}(k) = -k \frac{\text{ch } k \sin k - \text{sh } k \cos k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \\ \mu_{33}(k) &= k^2 \frac{\text{sh } k \sin k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{34}(k) = \mu_{11}^{(1)}(k), \quad \mu_{41}^{(1)}(k) = -\mu_{21}^{(1)}(k), \\ \mu_{41}^{(2)}(k) &= -\frac{\cos k - \text{ch } k + k \text{ch } k \sin k + (k \cos k - \sin k) \text{sh } k}{k^2(\text{ch } k \cos k - 1)}, \\ \mu_{42}(k) &= -\mu_{33}(k), \quad \mu_{43}(k) = k^3 \frac{\text{ch } k \sin k + \text{sh } k \cos k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{44}(k) = -\mu_{21}^{(1)}(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Функции $\mu_{\nu j}(k)$, $\nu, j = 1, 2, 3, 4$ аналитичны в окрестности точки $k = 0$ и имеют полюса лишь на действительной либо мнимой оси комплексной плоскости (k). Выбор любой ветви радикала в



выражении для $k = k(\lambda)$ приводит к тому, что функции $\mu_{\nu j}(k)$, $\nu, j = 1, 2, 3, 4$ не имеют особенностей в правой половине и на мнимой оси комплексной плоскости (λ). Подстановка (7) в (3) приводит к системе линейных уравнений относительно искомым изображений $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$, $y_1(\lambda)$, $y_c(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \phi_{11}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{12}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{13}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{14}(\lambda)y_c(\lambda) &= \lambda L(\lambda), \\ \phi_{21}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{22}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{23}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{24}(\lambda)y_c(\lambda) &= 0, \\ \phi_{31}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{32}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{33}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{34}(\lambda)y_c(\lambda) &= 0, \\ \phi_{41}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{42}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{43}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{44}(\lambda)y_c(\lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{11}(\lambda) &= [J_c + a\mu_{21}(k(\lambda)) - \mu_{11}(k(\lambda))]\lambda^3 + (p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3)e^{-\tau\lambda}, \\ \phi_{12}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\lambda[a\mu_{22}(k(\lambda)) - \mu_{12}(k(\lambda))], & \phi_{13}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\lambda[a\mu_{23}(k(\lambda)) - \mu_{13}(k(\lambda))], \\ \phi_{14}(\lambda) &= \lambda[a\mu_{24}(k(\lambda)) - \mu_{14}(k(\lambda))], & \phi_{21}(\lambda) &= \lambda^2\mu_{21}(k(\lambda)), & \phi_{22}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\mu_{22}(k(\lambda)), \\ \phi_{23}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\mu_{23}(k(\lambda)), & \phi_{24}(\lambda) &= m_c + \mu_{24}(k(\lambda)), & \phi_{31}(\lambda) &= \lambda^2[J_1 + \mu_{31}(k(\lambda))], \\ \phi_{32}(\lambda) &= J_1\lambda^2 + (1 + \gamma\lambda)\mu_{32}(k(\lambda)), & \phi_{33}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\mu_{33}(k(\lambda)), & \phi_{34}(\lambda) &= \mu_{34}(k(\lambda)), \\ \phi_{41}(\lambda) &= \lambda^2[m_1(1 + a) - \mu_{41}(k(\lambda))], & \phi_{42}(\lambda) &= -(1 + \gamma\lambda)\mu_{42}(k(\lambda)), \\ \phi_{43}(\lambda) &= m_1\lambda^2 - (1 + \gamma\lambda)\mu_{43}(k(\lambda)), & \phi_{44}(\lambda) &= m_1 - \mu_{44}(k(\lambda)). \end{aligned}$$

Решая систему линейных уравнений (9) относительно изображения ошибки стабилизации $\alpha(\lambda)$, находим

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \Phi(\lambda)L(\lambda), & \Phi(\lambda) &= Q(\lambda)/D(\lambda), \\ D(\lambda) &= \det\{\phi_{\nu j}(\lambda)\}, & \nu, j &= 1, 2, 3, 4; & Q(\lambda) &= \lambda \det\{\phi_{\nu j}(\lambda)\}, & \nu, j &= 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\Phi(\lambda)$ — передаточная функция ошибки системы стабилизации. Квазимногочлены $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны в правой комплексной полуплоскости (λ) и вблизи мнимой оси $Re\lambda = 0$, и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-7}D(\lambda) = m_c m_1 J_c J_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-5}Q(\lambda) = m_c m_1 J_1, \quad Re\lambda \geq 0.$$

Согласно теоремам об устойчивом квазимногочлене, а также об устойчивых, неустойчивых и асимптотически устойчивых квазирациональных дробях [5], система стабилизации будет асимптотически устойчива при выполнении условия

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = 7\pi/2 \tag{11}$$

и неустойчива в остальных случаях.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СПУТНИКА С ОДНИМ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

При $m_1 = J_1 = 0$ система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} J_c \ddot{\alpha} &= L + M_0 - aP_0 - p_1 \dot{\alpha}(t - \tau) - p_2 \alpha(t - \tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} \alpha(\xi) d\xi, & m_c \ddot{y}_c &= -P_0, \\ \ddot{u} + u'''' + \gamma u'''' + \ddot{y}_c + (a + x)\ddot{\alpha} &= 0, & (') &= \partial()/\partial x, \\ u(0, t) = u'(0, t) &= 0, & u''(1, t) = u'''(1, t) &= 0, \\ M_0 = u''(0, t) + \gamma u''(0, t), & & P_0 = u'''(0, t) + \gamma u''(0, t), & \end{aligned} \tag{12}$$

$\alpha(t) = \dot{\alpha}(t) = 0$ при $-\tau \leq t \leq 0$, $y_c(0) = \dot{y}_c(0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$. Передаточная функция $\Phi(\lambda)$ системы угловой стабилизации находится аналогично § 1 и имеет вид

$$\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda), \tag{13}$$



$$D(\lambda) = \{[J_c + \mu_0(k(\lambda))][m_c + \mu_3(k(\lambda))] - [a\mu_3 - \mu_1(k(\lambda))]^2\}\lambda^3 + [m_c + \mu_3(k(\lambda))](b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3)e^{-\tau\lambda},$$

$$Q(\lambda) = [m_c + \mu_3(k(\lambda))]\lambda,$$

$$\mu_0(k) = a^2\mu_3(k) - 2a\mu_1(k) - \mu_2(k), \quad \mu_1(k) = -k^{-2} \operatorname{sh} k \sin k / (1 + \operatorname{ch} k \cos k),$$

$$\mu_2 = k^{-3}(\operatorname{sh} k \cos k - \operatorname{ch} k \sin k) / (1 + \operatorname{ch} k \cos k),$$

$$\mu_3 = k^{-1}(\operatorname{ch} k \sin k + \operatorname{sh} k \cos k) / (1 + \operatorname{ch} k \cos k), \quad k(\lambda) = [-\lambda^2 / (1 + \gamma\lambda)]^{1/4}.$$

Аналогично § 1 система угловой стабилизации будет асимптотически устойчива, если

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = 3\pi/2, \quad (14)$$

и неустойчива в остальных случаях.

3. СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУТНИКА С ВЫНОСНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ НА УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Безразмерные уравнения возмущенного движения системы стабилизации спутника с двумя выносными газореактивными двигателями на упругих стержнях имеют вид [4]:

$$J_c \ddot{\alpha} = L + 2M_0 - 2aP_0, \quad J_1(\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1) = -M_1,$$

$$m_1[\ddot{y}_1 + (1+a)\ddot{\alpha}] = P_1 - p_1\dot{\alpha}(t-\tau) - p_2\alpha(t-\tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} \alpha(\xi) d\xi,$$

$$\ddot{u} + u'''' + \gamma u'''' + (a+x)\ddot{\alpha} = 0, \quad (')' = \partial(\cdot)/\partial x, \quad (15)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u(1, t) = y_1(t), \quad u'(1, t) = \alpha_1(t),$$

$$M_0 = u''(0, t) + \gamma u''(0, t), \quad P_0 = u'''(0, t) + \gamma u'''(0, t),$$

$$M_1 = u''(1, t) + \gamma u''(1, t), \quad P_1 = u'''(1, t) + \gamma u'''(1, t),$$

$\alpha(t) = \dot{\alpha}(t) = 0$ при $-\tau \leq t \leq 0$, $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$. Передаточные функции системы стабилизации находятся аналогично § 1:

$$\alpha(\lambda) = \Phi(\lambda)L(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda), \quad (16)$$

$$D(\lambda) = \det\{\psi_{\nu j}(\lambda)\}, \quad \nu, j = 1, 2, 3; \quad Q(\lambda) = \det\{\psi_{\nu j}(\lambda)\}, \quad \nu, j = 2, 3.$$

Здесь

$$\psi_{11}(\lambda) = \lambda^2[J_c + 2a\mu_{21}(k(\lambda)) - 2\mu_{11}(k(\lambda))], \quad \psi_{12}(\lambda) = 2(1 + \gamma\lambda)[a\mu_{22}(k(\lambda)) - \mu_{12}(k(\lambda))],$$

$$\psi_{13}(\lambda) = 2(1 + \gamma\lambda)[a\mu_{23}(k(\lambda)) - \mu_{13}(k(\lambda))], \quad \psi_{21}(\lambda) = \lambda^2[J_1 + \mu_{31}(k(\lambda))],$$

$$\psi_{22}(\lambda) = J_1\lambda^2 + (1 + \gamma\lambda)\mu_{32}(k(\lambda)), \quad \psi_{23}(\lambda) = (1 + \gamma\lambda)\mu_{33}(k(\lambda)), \quad (17)$$

$$\psi_{31}(\lambda) = [m_1(1 + a) - \mu_{41}(k(\lambda))]\lambda^3 + (p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3)e^{-\tau\lambda},$$

$$\psi_{32}(\lambda) = -\lambda(1 + \gamma\lambda)\mu_{42}(k(\lambda)), \quad \psi_{33}(\lambda) = m_1\lambda^3 - (1 + \gamma\lambda)\lambda\mu_{43}(k(\lambda)),$$

а функции $\mu_{\nu j}(k)$, $\nu = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$, определены согласно (8).

Аналогично § 1 система стабилизации асимптотически устойчива, если

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = 7\pi/2, \quad (18)$$

и неустойчива в остальных случаях. Как следует из выражений (17) для $\psi_{32}(\lambda)$ и $\psi_{33}(\lambda)$, все элементы второй строки определителя $Q(\lambda)$ явно содержат сомножитель λ . Другими словами, $Q(\lambda) = \lambda Q^*(\lambda)$, причем функция $Q^*(\lambda)$ аналитична в окрестности точки $\lambda = 0$.



4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

Передаточные функции системы стабилизации зависят от параметров обратных связей, т.е. $\Phi = \Phi(\lambda, p)$, $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Пусть $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^3$ — область устойчивости в пространстве параметров обратных связей $p \in \mathbb{R}^3$. Принадлежность набора параметров обратных связей p области устойчивости Ω_{st} достаточно быстро проверяется при помощи теорем об устойчивом квазимногочлене, а также об устойчивых, неустойчивых и асимптотически устойчивых квазирациональных дробях. Фактически требуется проверка условий (11), (14) либо (18).

Передаточной функции соответствует переходная функция $h(t) = L^{-1}[\Phi(\lambda, p)/\lambda]$, представляющая собой реакцию на входное возмущение в виде $1(t)$, где $1(t)$ — функция единичного скачка Хевисайда. Если система асимптотически устойчива, то для нахождения переходных функций достаточно знать лишь вещественную частотную характеристику $R(\omega, p) = \text{Re}\Phi(i\omega, p)$, поскольку в данном случае

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega, p) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (19)$$

Под параметрическим синтезом будем понимать процедуру подбора величин параметров обратных связей $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in \Omega_{st} \subset \mathbb{R}^3$ с целью обеспечения требуемого качества переходных функций. Пусть

$$R^*(\omega) = \text{Re}\Phi^*(i\omega) = [1 - (t_0\omega)^2]/[1 + (t_0\omega)^4] \quad (20)$$

— известная из теории автоматического управления так называемая «эталонная» вещественная частотная характеристика, которой соответствует переходная функция

$$h^*(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R^*(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = 1 - \sqrt{2} e^{-\frac{t}{t_0\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{t}{t_0\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (21)$$

имеющая экспоненциальный характер затухания переходного процесса с характерным временем не более $3t_0$. Для того, чтобы проектируемая система по своим свойствам в наименьшей степени отличалась от системы с эталонной вещественной частотной характеристикой (20), выполняем минимизацию функции

$$F(p) \rightarrow \min \quad (22)$$

$$F(p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{R_A^2(0, p)} + \frac{1}{R_A^2(0, p_0)} \right) \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^2 c_j \left[\frac{d^j}{d\omega^j} (R_A(\omega, p) - R_A(0, p)R_A^*(\omega)) \right]^2 d\omega, & p \in \Omega_{st}, \\ \text{const} \gg 1, & p \notin \Omega_{st}, \end{cases}$$

$$R_A(\omega, p) = \sqrt{1 + \omega^2} \text{Re}\Psi(i\omega, p), \quad \Psi(\lambda, p) = \Phi(\lambda, p)/\lambda, \quad R_A^*(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2} R^*(\omega).$$

Здесь $c_0 = 1$, p_0 — значения параметров обратных связей в момент начала процедуры параметрического синтеза, а малые поправочные коэффициенты $c_1 = 0.01 - 0.03$, $c_2 = 0.003 - 0.001$ позволяют избежать возникновения узких пиков конечной высоты действительной частотной характеристики. Поскольку слагаемые, содержащие производные частотных характеристик, несут поправочный характер, значения $dR_A(\omega, p)/d\omega$ и $d^2R_A(\omega, p)/d\omega^2$ можно оценивать разностными аппроксимациями. Минимизация функции $F(p)$ проводится методом, не требующим вычисления градиента целевой функции (Нелдера–Мида). Для выполнения параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации области устойчивости, необходимо лишь, чтобы начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости $p = p_0 \in \Omega_{st}$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Как следует из результатов работы [4], при отсутствии времени запаздывания $\tau = 0$ области устойчивости в пространстве параметров обратных связей $p = (p_1, p_2, p_3)^T$ газореактивной системы стабилизации спутника с одним упругим стержнем, а также газореактивной системы стабилизации спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце телом в плоскости (p_3, p_2) ограничены снизу и не имеют предела в направлении координаты p_2 . При $\tau \neq 0$ области устойчивости становятся ограниченными и достаточно быстро уменьшаются при возрастании времени запаздывания τ . Напро-



тив, система стабилизации орбитальной конструкции с выносными двигателями на упругих стержнях, даже при отсутствии времени запаздывания $\tau = 0$, имеет ограниченные и весьма малые области устойчивости, которые быстро исчезают с ростом τ .

Предположим, что на спутник действует возмущающий момент в форме функции Хевисайда $L(t) = 1(t)$. Так как $\tilde{L}(\lambda) = 1/\lambda$, переходная функция ошибки стабилизации любой из рассмотренных систем стабилизации выражается через интеграл Меллина (2)

$$\alpha(t) = L^{-1} \left[\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0 + i\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \geq 0, \quad \xi_0 > 0, \quad (23)$$

вычисление которого проводилось при помощи эффективного алгоритма [7]. На рис. 1–5 пунктиром показаны переходные функции до выполнения параметрического синтеза при начальных значениях $p = p_0$ параметров обратных связей, соответствующие работе [4]. Сплошной линией показаны переходные функции после выполнения параметрического синтеза согласно (22).

Рассмотрим сначала динамическую модель спутника с одним упругим стержнем (§ 2) типа Geos 2 с параметрами $J_c = 0.07442$, $m_c = 34.75$, $a = 0.05$, $\gamma = 0.01$. При $\tau = 0$ переходные функции системы стабилизации до выполнения параметрического синтеза (представлены на рис. 1 пунктиром) характеризуются относительно быстрым уменьшением. При выполнении параметрического синтеза принято $t_0 = 1$, а переходные функции после выполнения параметрического синтеза показаны на рис. 1 сплошной линией.

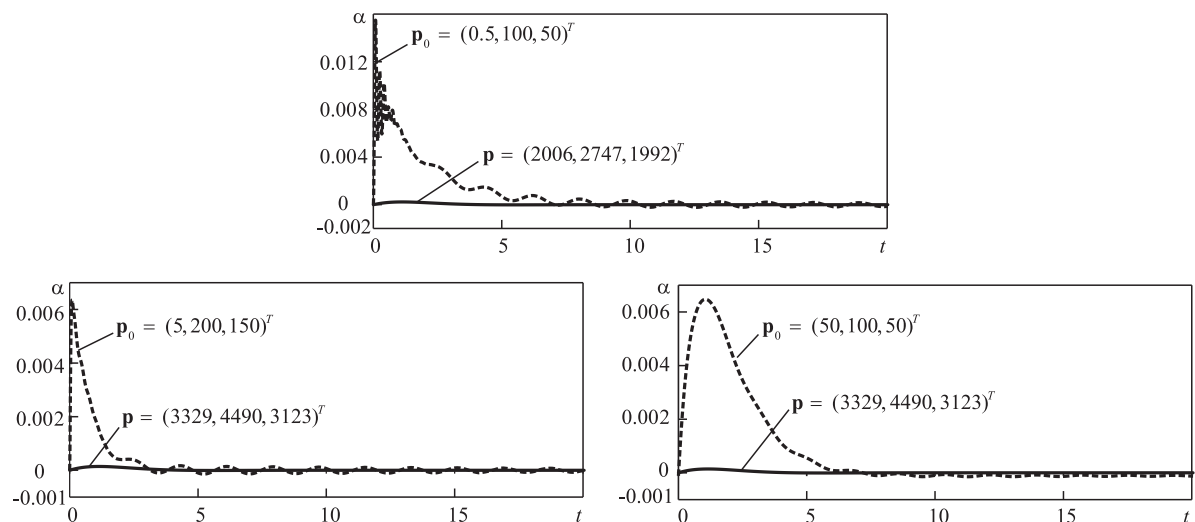


Рис. 1. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с одним упругим стержнем при $\tau = 0$, $t_0 = 1$

Поскольку области устойчивости в данном случае являются неограниченными, выполнение параметрического синтеза позволяет значительно улучшить качество переходных процессов.

Увеличение характерного времени запаздывания τ приводит к тому, что области устойчивости становятся ограниченными и достаточно быстро исчезают с ростом τ . В связи с этим в некоторых случаях требуется выбирать относительно малые значения характерного времени t_0 . Тем не менее, как следует из результатов, представленных на рис. 2, выполнение параметрического синтеза и в данном случае позволяет значительно улучшить качество переходных процессов.

Рассмотрим далее динамическую модель системы стабилизации спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце абсолютно жестким телом (§ 1) с параметрами $J_c = 0.07442$, $m_c = 34.75$, $m_1 = 3$, $J_1 = 0.007$, $a = 0.05$, $\gamma = 0.01$. На рис. 3, а изображены переходные функции соответственно при $\tau = 0.001$, 0.005 , 0.01 . Параметрический синтез выполнялся при значении характерного времени $t_0 = 1$. Быстрое сокращение областей устойчивости при возрастании времени запаздывания τ несколько ограничивает возможности параметрического синтеза, но не препятствует значительному улучшению качества переходных функций.

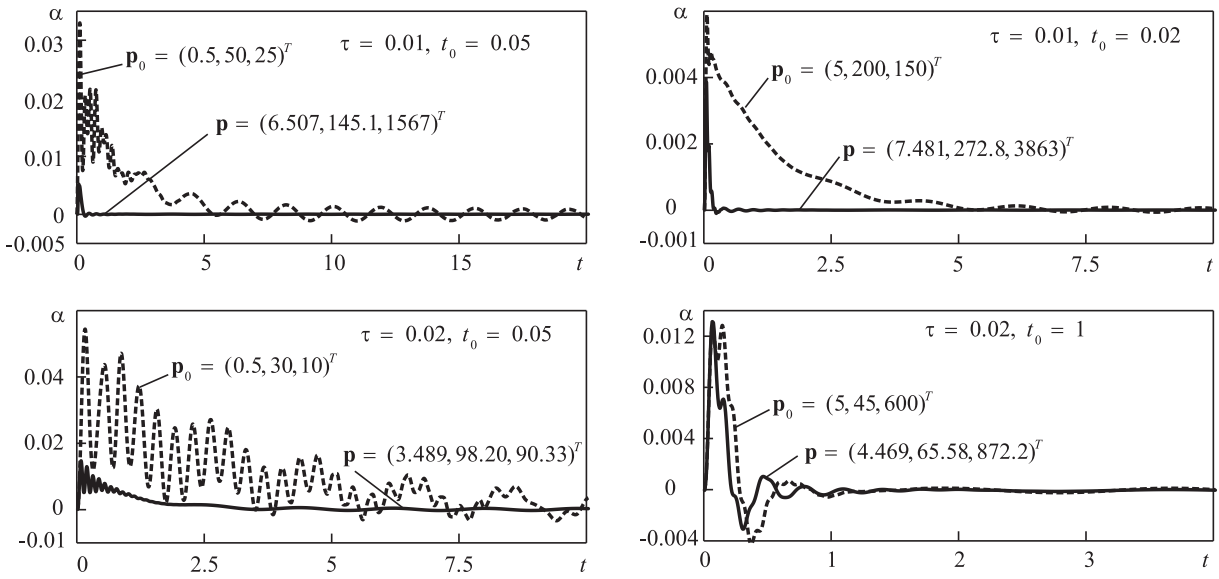


Рис. 2. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с одним упругим стержнем при различных значениях τ и t_0

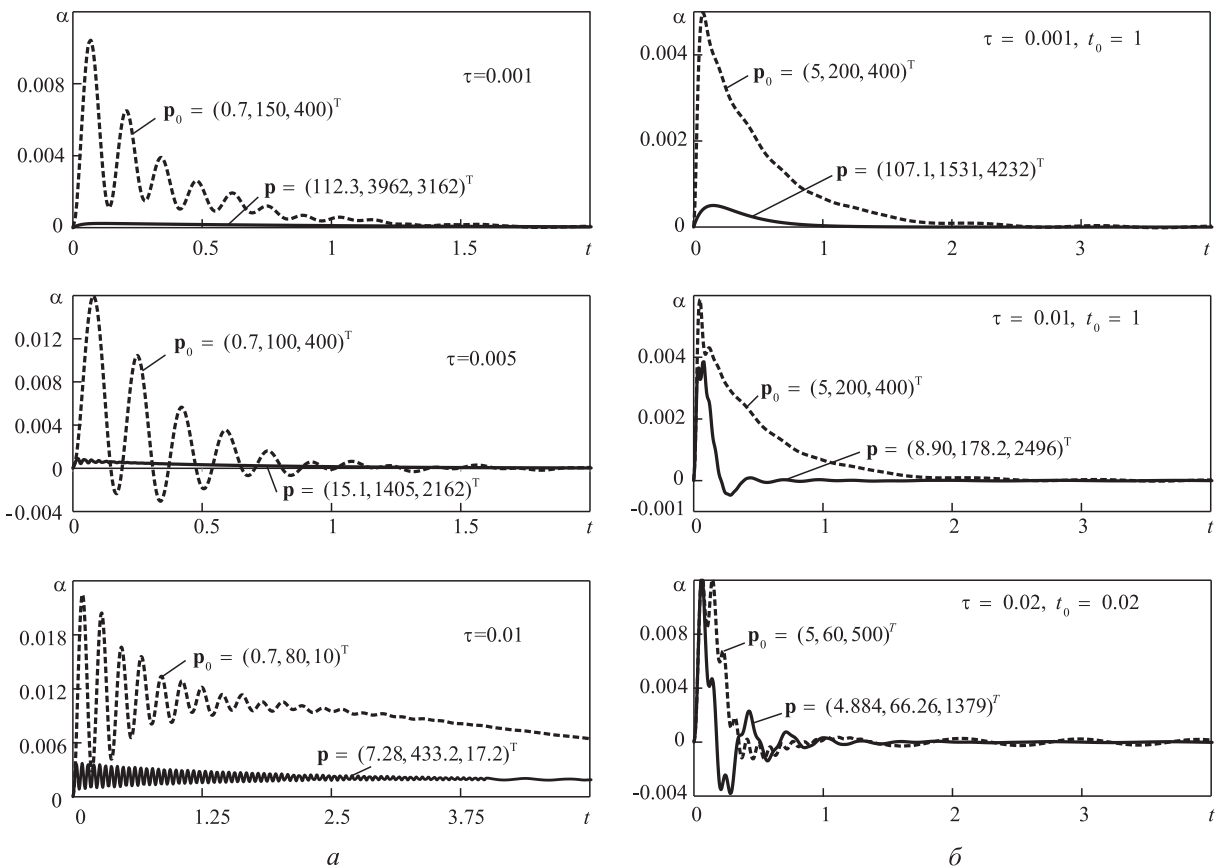


Рис. 3. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце твердым телом: а — $m_1 = 3, m_c = 34.75, J_1 = 0.007, J_c = 0.07442$; б — $m_1 = m_c = 34.75, J_1 = J_c = 0.07442$



Как следует из результатов [4], увеличение массы m_1 и момента инерции J_1 закрепленного на конце стержня абсолютно жесткого тела приводит к тому, что области устойчивости в пространстве параметров обратных связей могут оказаться более протяженными и существуют при несколько больших значениях характерного времени запаздывания τ . Переходные функции для случая $m_1 = m_c = 34.75$ и $J_1 = J_c = 0.07442$ при $\tau = 0.001, 0.01, 0.02$ приведены на рис. 3, б. Выполнение параметрического синтеза при $\tau = 0.001$ и $\tau = 0.01$ приводит к существенному улучшению качества переходных функций. При $\tau = 0.02$ до проведения параметрического синтеза переходная функция газореактивной системы стабилизации достаточно быстро уменьшается на интервале $(0, 2)$, однако при $t > 2$ продолжают малоамплитудные колебания с весьма малым затуханием. После параметрического синтеза переходная функция несколько интенсивнее осциллирует в начальные моменты времени на интервале $(0, 1)$, однако гораздо более быстро затухает при $t \geq 2$.

На рис. 4 приведены переходные функции газореактивной системы стабилизации спутника с двумя выносными двигателями на упругих стержнях (см. § 3) с параметрами $m_c = 34.75, J_c = 0.07442, m_1 = 3, J_1 = 0.007, a = 0.05, \gamma = 0.01$. Как следует из [4], система стабилизации орбитальной конструкции с выносными двигателями на упругих стержнях имеет ограниченные и весьма малые области устойчивости, которые быстро исчезают с ростом времени запаздывания τ . Видно, что в данном случае переходные функции носят колебательный характер с малым затуханием, однако выполнение параметрического синтеза при $t_0 = 1$ позволяет улучшить качество переходных процессов.

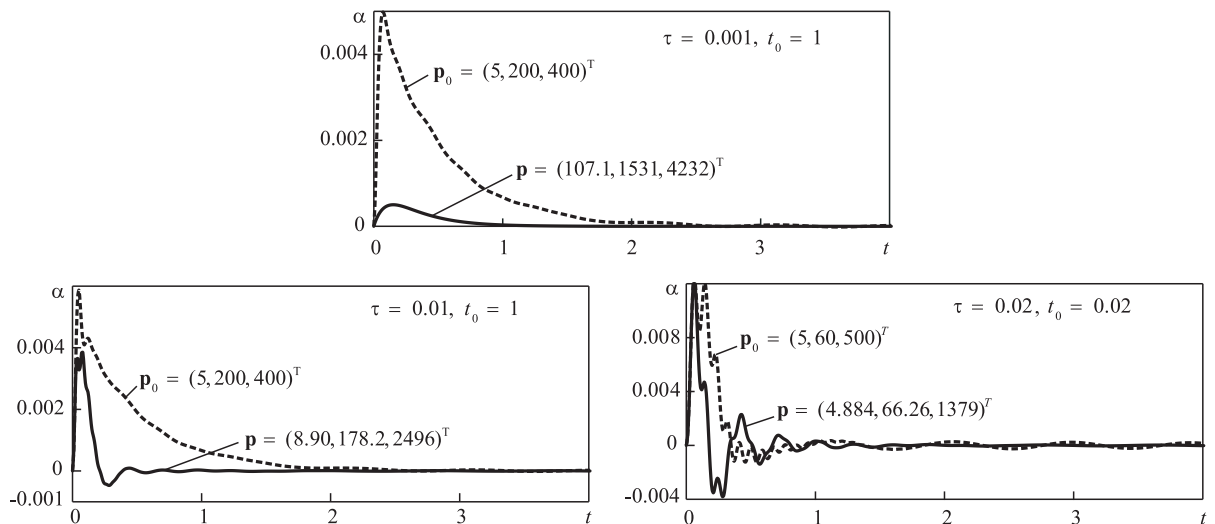


Рис. 4. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с двумя выносными двигателями на упругих стержнях при различных значениях τ и t_0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод параметрического синтеза управляемых комбинированных динамических систем, функционирующих в режиме стабилизации и содержащих отрицательные интегральные обратные связи. Выполнен параметрический синтез газореактивной системы стабилизации спутников с упругими стержнями. В случаях, когда осциллирующие переходные функции слабо затухают, предложенный метод позволяет значительно улучшить качество переходных процессов в проектируемой системе. Для выполнения параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации областей устойчивости в пространстве параметров обратных связей, необходимо лишь, чтобы начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости.

Библиографический список

1. Мануйлов Ю. С., Новиков Е. А., Кравцов А. Н. Синтез и исследование оптимального регулятора угловой стабилизации космического аппарата наблюдения нежесткой конструкции // Авиакосмическое приборостроение. 2011. № 1. С. 16–25.
2. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О стабилизации



спутника с гибкими стержнями. I // Космические исследования. 1989. Т. 27, вып. 5. С. 643–651.

3. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О стабилизации спутника с гибкими стержнями. II // Космические исследования. 1991. Т. 29, вып. 6. С. 828–839.

4. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 6. С. 150–163.

5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории

комбинированных динамических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 3. С. 54–69.

6. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 4. С. 76–89.

7. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 1030–1044.

УДК 531.36; 534.1

ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОЛЧКА СО СМЕЩЁННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

Д. А. Лосякова

Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: Losjakova@termech.ru

Изучено движение твёрдого тела с малым смещением центра масс с оси динамической симметрии. Получены аналитические условия для существования гиперболической особой точки на фазовом портрете системы и аналитическое решение для сепаратрис. Под действием малого возмущения, вызванного асимметрией, тело совершает хаотическое движение вблизи сепаратрис. С помощью численного моделирования, основанного на методе Мельникова в интерпретации Холмса–Масдена, получено условие существования хаотического движения, которое проиллюстрировано серией сечений Пуанкаре.

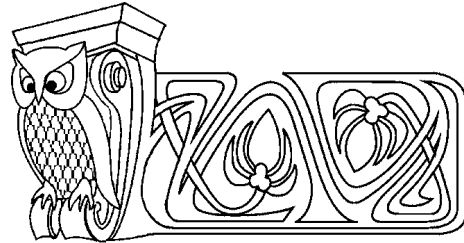
Ключевые слова: нелинейная система, периодические возмущения, хаос, гомоклинические орбиты, метод Мельникова, сечения Пуанкаре.

ВВЕДЕНИЕ

Изучается пространственное движение твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа под действием момента, действующего в нутационной плоскости. Задача усложняется, если рассматривать малую динамическую асимметрию, связанную со смещением центра масс с оси динамической симметрии. В этом случае появляется ещё одна позиционная координата — угол собственного вращения, что, при определённых условиях, может приводить к возможности возникновения хаоса.

Целью работы является изучение возможности возникновения хаотических движений тяжёлого твёрдого тела с малым смещением центра масс с оси динамической симметрии. Поставленная цель достигается путём выявления условий, при которых существует гиперболическая точка на фазовом портрете невозмущённой системы при отсутствии асимметрии; приведения уравнений движения к виду, допускающему использование метода Мельникова непосредственно или в интерпретации Холмса–Масдена; построения гомоклинической траектории невозмущённой системы; получения функции Мельникова и построения сечений Пуанкаре, подтверждающих существование хаоса. Подобные задачи были рассмотрены в [1], но при асимметрии, связанной с неравенством экваториальных моментов инерции $A \neq B$; в [2, 3] рассмотрен случай действия бигармонического момента $a \cos \theta + b \sin 2\theta$.

Результаты работы имеют практическое применение, например, движение космического аппарата относительно собственного центра масс при спуске в атмосфере описывается уравнениями, близкими к уравнениям Лагранжа. При разработке таких космических аппаратов, как правило, стремятся



Chaotic Motion of Top with Displaced Mass Center

D. A. Losyakova

The motion of solid body with a small displacement mass center from the axis of dynamic symmetry has been studied. Analytical conditions for the existence of a hyperbolic singular point in the phase portrait of the system and the analytical solution for the separatrices have been obtained. Body makes a chaotic motion near separatrices under the influence of small perturbations caused by the asymmetry of the body. Using the numerical simulation based on the Melnikov method in interpretation of Holmes–Marsden confirmation of the chaotic motion system has been received. This has been illustrated by a series of Poincare sections.

Key words: non-linear system, periodic perturbations, chaos, homoclinic orbits, Melnikov method, Poincare section.