



## Библиографический список

1. Каверин А. В., Буйских К. П., Семенов Г. Р., Борисов Ю. С., Задворный Е. А. Исследование термической долговечности покрытий для камер сгорания газовых турбин // Проблемы прочности. 1999. № 1. С. 60–67.
2. Лившиц М. Л. Технический анализ и контроль производства лаков и красок. М. : Высш. шк., 1980. 216 с.
3. Румиисский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента : справочное пособие. М. : Наука, 1971. 192 с.
4. Тимошенко С. П. Соппротивление материалов : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1965. 364 с.

УДК 539.374

# ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТРЕТЬЕГО ТИПА (GNIII)

В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев\*

Московский городской университет управления Правительства Москвы

E-mail: vlad\_koval@mail.ru

\*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

E-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

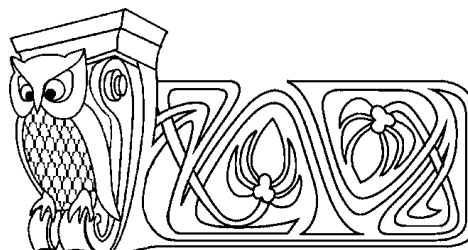
В представляемой работе в рамках модели термоупругого континуума Грина–Нахди GN третьего типа (GNIII, type-III thermoelasticity) получены нелинейные определяющие уравнения термодинамической (термомеханической) ортогональности в «пространстве» термодинамических сил: в связанных процессах термоупругого деформирования и теплопроводности твердых тел термодинамический поток (точнее, его необратимая составляющая), в роли которого выступает референциальный вектор потока энтропии, геометрически ортогонален в «пространстве» референциальных градиентов температурного смещения поверхности уровня потенциала рассеяния. Устанавливается нелинейный определяющий закон теплопроводности в теории GNIII, удовлетворяющий принципу ортогональности термодинамических потоков и сил. Рассматриваются также предельные варианты определяющих законов термоупругости третьего типа: GNI/CTE (type-I thermoelasticity) — стандартная термоупругость, основанная на законе теплопроводности Фурье; GNII (type-II thermoelasticity) — гиперболическая недиссипативная термоупругость, характеризующая нулевым внутренним производством энтропии в процессах теплопроводности и референциальным потоком энтропии, имеющим только обратимую составляющую.

**Ключевые слова:** термоупругость, принцип максимума, термодинамическая ортогональность, термодинамическая сила, термодинамический поток, определяющий закон.

## 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

К настоящему времени в ряде областей механики и физики были предприняты успешные попытки выйти за пределы классической линейной термодинамики необратимых процессов. Главная идея новых подходов (extended irreversible thermodynamics) в термодинамике необратимых процессов состоит в расширении числа переменных, представляющих состояние термодинамической системы. В качестве дополнительных переменных состояния при этом выступают обобщенные термодинамические потоки или в двойственных формулировках — обобщенные термодинамические силы<sup>1</sup>. В такой новой поста-

<sup>1</sup>Термодинамическая сила, как правило, определяется в форме пространственного (или отсчетного) градиента стандартной термодинамической переменной состояния. Поэтому расширение списка стандартных термодинамических переменных состояния происходит за счет добавления их градиентов. В этом случае предполагается, что в каждом данном состоянии значения термодинамической переменной состояния и ее градиента являются независимыми и в известном диапазоне произвольными.



## Thermomechanical Orthogonality in Nonlinear Type-III Thermoelasticity (GNIII)

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

The present paper is devoted to formulations of constitutive equations for the non-linear Green–Naghdi type-III thermoelastic continuum consistent with the principle of thermodynamic (or thermomechanical) orthogonality. The principle of thermodynamic orthogonality proposed by Ziegler as a generalization of the Onsager linear irreversible thermodynamics states that the irreversible constituent parts of thermodynamic currents (velocities) are orthogonal to the convex dissipation potential level surface in the space of thermodynamic forces for any process of heat transport in a solid. The principle of the thermomechanical orthogonality takes its origin from the von Mises maximum principle of the perfect plasticity, where it provides existence of a yield surface, its convexity, and the associated flow rule. Non-linear constitutive laws of heat propagation as of type-III thermoelasticity complying with the principle of thermomechanical orthogonality are discussed. Important for applied thermoelasticity cases covered by type-III theory are studied: GNI/CTE - conventional thermoelasticity based on the Fourier heat conduction law and GNII — dissipationless hyperbolic thermoelasticity. In the latter case the internal entropy production equals zero for any heat transport process having the form of the undamped thermoelastic wave propagating at finite speed.

**Key words:** thermoelasticity, von Mises maximum principle, thermodynamic orthogonality, thermodynamic force, thermodynamic flux, constitutive law.



новке энтропия термодинамической системы и термодинамические потенциалы состояния (например, свободная энергия Гельмгольца) также оказываются функциями дополнительных переменных состояния, приобретая совершенно новые, по сравнению со стандартными, аналитические формы. То же самое касается вектора потока энтропии и внутреннего производства энтропии.

Как известно, *стандартные* термодинамические переменные состояния относятся к числу «медленных» переменных. Их использование, например, при построении теорий транспорта тепла в твердых деформируемых телах в качестве переменных состояния вместе с законами сохранения приводит к ряду противоречий: бесконечной скорости распространения тепла и ненулевому внутреннему производству энтропии во всех без исключения термодинамических процессах, связанных с передачей тепла. Учет дополнительных переменных состояния («быстрых» переменных) позволяет дать формулировку теории в форме дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа. В частности, следуя по этому пути, можно получить гиперболические теории теплопроводности и гиперболические уравнения транспорта тепла, обладающие решениями в форме распространяющихся с конечной скоростью тепловых волн «второго звука» незатухающей амплитуды.

Теория связанной термоупругости Грина–Нахди (А. Е. Green, Р. М. Naghdi) [1, 2] в полной мере отвечает принципам новой термодинамики необратимых процессов. В этой теории в качестве основной термической «медленной» переменной выступает температурное смещение, а его референциальный градиент — в качестве «быстрой» переменной. Однако в нелинейной теории Грина–Нахди по-прежнему остается достаточно широкий спектр теоретически допустимых определяющих уравнений, сузить который до практически приемлемого диапазона нельзя без дальнейшего развития теории. Одним из важных инструментов, пригодных для этой цели, является принцип термодинамической ортогональности, появление которого исторически связано с построением математической теории пластичности.

## 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Принцип, аналогичный принципу ортогональности термодинамических потоков и сил, первоначально возник в математической теории пластичности (там он известен как принцип максимума Мизеса (R. von Mises)) и выступал (и в настоящее время выступает) в качестве ее основополагающего принципа, из которого следовали геометрическая выпуклость в «пространстве» напряжений поверхности текучести  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  ( $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши) и в действительном процессе пластического течения ортогональность приращения пластической деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  поверхности текучести в гладких ее точках. Условие, выражающее геометрическую ортогональность в «пространстве» напряжений свободного вектора поверхности текучести, представляющего тензор  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ , является основным определяющим законом математической теории пластичности — ассоциированным с условием пластичности  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  законом пластического течения:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad df(\boldsymbol{\sigma}) = 0), \quad (1)$$

где  $d\lambda \geq 0$  — неопределенный множитель, выступающий в качестве множителя Лагранжа при решении экстремальной задачи, соответствующей принципу максимума<sup>2</sup>. Уравнения в (1), заключенные в круглые скобки, представляют собой признаки активного нагружения идеально пластического тела, выполнение которых указывает на наличие необратимого термодинамического потока  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  только тогда, когда действительные напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  находятся на пределе текучести и, кроме того, при малом догружении  $d\boldsymbol{\sigma}$  напряжения  $\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$  также *будут* находиться на пределе текучести, т.е.  $f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) = 0$ .

Таким образом, ассоциированный закон пластического течения (1) устанавливает геометрическую ортогональность в «пространстве» напряжений термодинамического потока, в роли которого в данном случае выступает приращение пластической деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ , поверхности текучести в геометрическом месте, определяемом действительным напряжением  $\boldsymbol{\sigma}$ . Сдвиговая природа пластического течения

<sup>2</sup>Неопределенность множителя  $d\lambda$  в теории идеальной пластичности проявляется в том, что он не рассматривается как предзаданная функция термодинамических переменных состояния и, следовательно, для него не может быть сформулировано специальное определяющее уравнение.



металлов и горных пород прекрасно отображается решениями гиперболических уравнений математической теории пластичности с определяющим уравнением в форме ассоциированного закона течения и критерием текучести в форме Кулона–Треска.

Принцип максимума Мизеса как исходный принцип математической теории пластичности и ассоциированный закон пластического течения обсуждаются практически во всех монографиях, посвященных математическим теориям идеальной пластичности (см., например [3, 4]).

Не подлежит никакому сомнению, что принцип максимума Мизеса является одним из фундаментальных принципов механики деформируемого твердого тела, а в широком смысле — всеобъемлющим принципом современного естествознания. В сочетании с критерием текучести Кулона–Треска он дает возможность сформулировать математическую теорию пластичности с помощью дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа.

Рассмотрим более подробно формулировку принципа максимума Мизеса и связанные с ним вопросы. Нам потребуются геометрические представления в так называемом «пространстве» напряжений. Тензору  $d\varepsilon^P$  в этом «пространстве» соответствует свободный вектор  $\vec{RQ}$ ; тензору напряжений  $\sigma$  — связанный вектор  $\vec{OS}$ . Уравнение замкнутой поверхности текучести идеально пластического тела в «пространстве» напряжений примем в форме

$$f(\sigma) = 0, \tag{2}$$

предполагая все точки поверхности регулярными, что позволит вести речь об однозначно определенной нормали к поверхности текучести.

Действительные напряжения  $\sigma$  и приращения пластической деформации  $d\varepsilon^P$  должны удовлетворять следующим уравнениям ( $\nabla$  — пространственный оператор Гамильтона,  $d\lambda \geq 0$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= \mathbf{0}, & f(\sigma) &\leq 0, \\ d\varepsilon^P &= (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \sigma} & (f(\sigma) = 0, \quad df(\sigma) = 0), \\ d\varepsilon^P &= \mathbf{0} & (f(\sigma) = 0, \quad df(\sigma) < 0; \quad \text{или} \quad f(\sigma) < 0), \\ \nabla \times (d\varepsilon^P) \times \nabla &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3}$$

последнее из которых есть уравнение совместности полных приращений деформаций.

Необратимая часть приращения работы при пластическом течении вычисляется для действительных состояний согласно

$$dW_p = \operatorname{tr}(\sigma \cdot d\varepsilon^P) \tag{4}$$

и удовлетворяет (для действительных состояний) неравенству необратимости

$$dW_p \geq 0. \tag{5}$$

Это неравенство выражает также неотрицательность внутреннего производства энтропии в процессах атермического пластического течения.

Допустим, что действительное напряженное состояние  $\sigma$  находится на пределе текучести: изображающая в пространстве напряжений действительное напряжение  $\sigma$  точка  $S$  располагается на поверхности текучести (2). Наряду с действительными напряжениями  $\sigma$  рассмотрим напряжения сравнения  $\sigma^*$ , подчинив их единственному ограничению<sup>3</sup>: изображающая точка  $S^*$  может располагаться либо внутри, либо на поверхности текучести, т. е. должно удовлетворяться неравенство

$$f(\sigma^*) \leq 0. \tag{6}$$

Для действительного приращения пластической деформации  $d\varepsilon^P$  введем функцию

$$dW_p^* = \operatorname{tr}(\sigma^* \cdot d\varepsilon^P), \tag{7}$$

определенную на множестве напряжений сравнения, и исследуем ее на наличие максимума. Следуя геометрическим представлениям математической теории пластичности, запишем  $dW_p^*$  в виде скалярного произведения:  $dW_p^* = \vec{OS}^* \cdot \vec{RQ}$ , где связанный вектор  $\vec{OS}^*$  представляет в «пространстве»

<sup>3</sup>Ясно, что тензор напряжений сравнения  $\sigma^*$  будет предполагаться симметричным.



напряжений напряжение сравнения  $\sigma^*$ , а свободный вектор  $\overrightarrow{RQ}$  — действительное приращение пластической деформации  $d\varepsilon^P$ .

Очевидно, что максимум функции  $dW_p^*$  всегда положительный<sup>4</sup>, и к тому же он не может достигаться в точках, расположенных строго внутри поверхности текучести. В самом деле, если бы такая точка  $S_0^*$  нашлась, то, выпустив луч из точки  $S_0^*$  параллельно вектору  $\overrightarrow{RQ}$  и определив точку  $S_1^*$  пересечения этого луча с поверхностью текучести, очевидно, получим  $\overrightarrow{OS_1^*} \cdot \overrightarrow{RQ} > \overrightarrow{OS_0^*} \cdot \overrightarrow{RQ}$ , что противоречит неравенству  $\overrightarrow{OS_0^*} \cdot \overrightarrow{RQ} \geq \overrightarrow{OS_1^*} \cdot \overrightarrow{RQ}$ .

Таким образом, поиск максимума следует ограничить тем условием, что точка  $S^*$  может располагаться только на самой поверхности текучести. Вводя неопределенный множитель Лагранжа  $d\lambda$  для определения экстремальных значений функции  $dW_p^*$ , имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^*} [\text{tr}(\sigma^* \cdot d\varepsilon^P) - f(\sigma^*)d\lambda] = 0.$$

Следовательно, экстремальные напряжения сравнения  $\sigma^*$  должны быть такими, чтобы совместно удовлетворялись уравнения

$$d\varepsilon^P = d\lambda \frac{\partial f(\sigma^*)}{\partial \sigma^*}, \quad f(\sigma^*) = 0. \quad (8)$$

Докажем, что если поверхность текучести замкнутая, гладкая и геометрически строго выпуклая<sup>5</sup>, то решение системы уравнений (8) существует и единственно, и, если обозначить указанное решение через  $\sigma$ , что оправдано, поскольку на основании (3) действительные напряжения  $\sigma$  должны совместно удовлетворять уравнениям (8), функция  $dW_p^*$  достигает при  $\sigma^* = \sigma$  глобального строгого максимума на множестве напряжений сравнения.

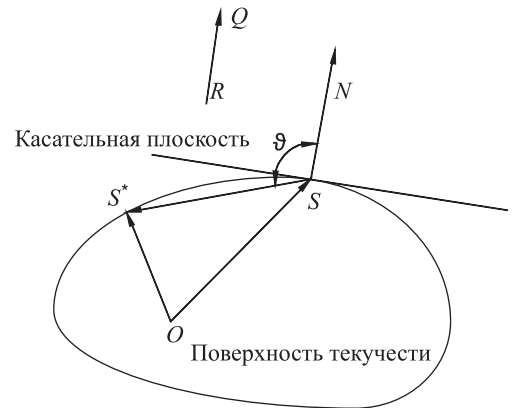
Доказательство можно провести с помощью следующих простых геометрических рассуждений. Точка  $S^*$  в силу (8) такова, что нормаль к поверхности текучести в точке  $S^*$  должна быть параллельна заданному направлению  $\overrightarrow{RQ}$ . Очевидно, что такая точка  $S^*$  существует и будет единственной, если поверхность текучести замкнутая и строго выпуклая. Обозначим далее указанную точку через  $S$ : для  $S^* = S$ , т. е. при выполнении равенства  $\sigma^* = \sigma$ , удовлетворяются оба уравнения (8). Далее оценим разность  $dW_p^* - dW_p$ . Для этого снова воспользуемся геометрическими представлениями. В результате находим

$$dW_p^* - dW_p = \overrightarrow{SS^*} \cdot \overrightarrow{RQ} < 0 \quad (S \neq S^*),$$

так как угол  $\vartheta$  между векторами  $\overrightarrow{SS^*}$  и  $\overrightarrow{RQ}$  всегда тупой в силу строгой выпуклости поверхности нагружения (рисунок). Тем самым доказываются все высказанные выше положения.

Заметим, что если поверхность текучести выпуклая, но не строго, то решение системы уравнений (8) не будет единственным. Функция  $dW_p^*$  от напряжений сравнения и в этом случае также достигает при  $\sigma^* = \sigma$  глобального максимума, но этот максимум не строгий, по крайней мере, для некоторых приращений  $d\varepsilon^P$ .

Проведенные выше рассуждения можно полностью обратить, приняв в качестве исходного положения принцип максимума: функция  $dW_p^* = \text{tr}(\sigma^* \cdot d\varepsilon^P)$  от напряжений сравнения  $\sigma^*$ , где  $d\varepsilon^P$  — действительные приращения пластических деформаций, достигает строгого глобального максимума на множестве напряжений сравнения на действительных напряжениях, т. е. когда  $\sigma^* = \sigma$ . В этом случае следствием того, что экстремум функции  $dW_p^*$  есть строгий (не строгий) максимум, является строгая (не строгая) геометрическая выпуклость поверхности текучести и ассоциированный закон пластического течения.



Отрицательность скалярного произведения  $\overrightarrow{SS^*} \cdot \mathbf{N}$  для любой точки  $S^* \neq S$  на замкнутой геометрически строго выпуклой поверхности текучести

<sup>4</sup>Это следует из неравенства необратимости (5).

<sup>5</sup>Т. е. всегда расположена по одну сторону от касательной плоскости и пересекается с ней только в одной точке.



Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в «пространстве» напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщения принципа максимума и ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой были предложены Койтером, 1953 (W. T. Koiter). Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа  $p$  гладких поверхностей текучести  $f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ; каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Таким образом, предположение о гладкости поверхности текучести не является обязательным. Если точка  $S$  — угловая точка поверхности текучести, то из принципа максимума Мизеса следует, что вектор  $\overrightarrow{RQ}$  должен располагаться внутри конуса, образованного в «пространстве» напряжений нормальными к поверхности текучести в точке  $S$ .

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется следующими признаками:

$$f_\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad df_\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad f_\kappa(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad df_\kappa(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \quad \text{или} \quad f_\kappa(\boldsymbol{\sigma}) < 0,$$

где индексы  $\omega$  и  $\kappa$  различны, и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса  $\gamma = 1, 2, \dots, p$ , причем индекс  $\omega$  пробегает непустое множество значений.

Полное приращение  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  есть сумма соответствующих всем индексам  $\omega$  приращений  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)}$ :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_{\omega} d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)},$$

где каждое приращение  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)}$  вычисляется согласно ассоциированному закону течения с регулярной функцией текучести  $f_\omega$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)} = \frac{\partial f_\omega(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\omega,$$

а величины  $d\lambda_\omega$  должны быть положительными. Множители  $d\lambda_\omega$  неопределены в том смысле, что они не могут быть вычислены на основании определяющих уравнений и произвольны до такой степени, в какой это допускается условиями совместности полных деформаций, краевыми условиями и условиями сопряжения на поверхностях, ограничивающих пластическую зону.

Окончательно *обобщенный* ассоциированный закон течения принимает следующий вид:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial f_\gamma(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\gamma, \tag{9}$$

$$d\lambda_\gamma > 0 \quad (f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad df_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0),$$

$$d\lambda_\gamma = 0 \quad (f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad df_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) < 0; \quad \text{или} \quad f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) < 0).$$

Геометрически обобщенный ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформаций в «пространстве» напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям  $f_\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  в указанной точке векторов, причем ни абсолютная величина, ни направление указанного вектора в угловой точке поверхности текучести обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируются, а остаются неопределенными.

### 3. ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ В ПРОЦЕССАХ ТРАНСПОРТА ТЕПЛА В ТЕРМОУПРУГИХ СРЕДАХ

Принцип максимума может быть распространен на процессы транспорта тепла в твердых деформируемых телах с целью построения таких определяющих уравнений термоупругости, которые исключали бы присущие классической теории теплопроводности Фурье (СТЕ) недостатки: уравнения



СТЕ предсказывают конечную скорость распространения упругой волны и — бесконечную для теплового импульса. Заметим, что, как показывает анализ научной литературы работы, в этом направлении ранее по-видимому не выполнялись.

В последние годы было предложено достаточно много различных обобщений теории связанной термоупругости с тем, чтобы устранить парадокс бесконечной скорости распространения тепла и допустить возможность волнового характера транспорта тепла в форме *незатухающих* волн «второго звука». В начале 90-х гг. XX в. Грином и Нахди [1, 2] была разработана теория связанной обобщенной термоупругости (GN-theory). Предложенная ими теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и недиссипативной термоупругости, предполагающей отсутствие внутреннего производства энтропии в процессах транспорта тепла в твердых деформируемых телах и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трех различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и GNIII. В линейном приближении первый вариант (GNI) приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности; второй (GNII) — устанавливает, что распространение тепла есть волновой недиссипативный процесс (dissipationless thermoelasticity), не сопровождающийся внутренним производством энтропии, и приводит к *гиперболическому* уравнению транспорта тепла; третий (GNIII) — наиболее общий из рассматриваемых — включает GNI/СТЕ и GNII в качестве предельных случаев. Именно по этой причине GN-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, связанных с переносом тепла, по сравнению с теорией Фурье. Ниже приводится расчет внутреннего производства энтропии для процессов транспорта тепла и с помощью концепции потенциала рассеяния формулируются определяющие уравнения термодинамической ортогональности в обобщенной термоупругости третьего типа GNIII.

Для представления деформации термоупругого тела воспользуемся классическим лагранжевым отсчетным описанием: «конечная» деформация описывается «конечным» преобразованием отсчетной конфигурации в актуальную

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (10)$$

где  $\mathbf{x}$  — пространственное положение точки, которая занимала место  $\mathbf{X}$  в отсчетном положении.

В дальнейшем изложении систематически будет использоваться отсчетный оператор Гамильтона  $\nabla_{\mathbf{R}}$ , ассоциированный с лагранжевой переменной  $\mathbf{X}$ . «Конечные» тензоры деформации конструируются, исходя из (10), с помощью градиента деформации:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}. \quad (11)$$

Система основных соотношений нелинейной связанной термоупругости третьего типа (GNIII) состоит из:

— уравнения баланса массы

$$\left. \frac{\partial \rho_{\mathbf{R}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = 0; \quad (12)$$

— уравнения баланса импульса

$$\rho_{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}$  — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа,  $J = \det \mathbf{F}$  — якобиан деформации,  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши;

— уравнения баланса внутренней энергии

$$\dot{e} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{R}} + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}}) + \varepsilon, \quad (14)$$

где  $e$  — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии  $\mathbf{R}$ ) внутренней энергии,  $\mathbf{h}_{\mathbf{R}}$  — референциальный вектор потока тепла (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии),  $\varepsilon$  — плотность объемных источников тепла (radiant heat, лучистое тепло);

— уравнения баланса энтропии

$$\dot{s} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \sigma + \xi, \quad (15)$$



где  $s$  — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии),  $\mathbf{j}_R$  — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии),  $\sigma$  — внешнее производство энтропии,  $\xi \geq 0$  — внутреннее производство энтропии.

Внутреннее производство энтропии должно удовлетворять неравенству необратимости:

$$\xi \geq 0. \quad (16)$$

Уравнение баланса энтропии (15) играет центральную роль в термодинамике необратимых процессов.

В качестве основной термической переменной в теории Грина–Нахди GN используется температурное смещение  $\vartheta$ . В теории третьего типа GNIII полный термодинамический базис состоит из следующих термодинамических переменных состояния:

$$\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}. \quad (17)$$

Перечисленные переменные состояния считаются термодинамически независимыми и в этом смысле образуют термодинамический базис. Выбор термодинамического базиса чрезвычайно важен и решающим образом сказывается на построении математической модели тех процессов, для исследования которых он собственно и используется.

Далее полагается, что допустимы лишь такие процессы, когда выполняется уравнение баланса энтропии (15) с неотрицательным внутренним производством энтропии (16) при дифференциальных ограничениях (12)–(14). Возможная двойственная формулировка: выполняется уравнение баланса энергии (14) при ограничениях (12), (13), (15). Исходная и двойственная формулировки выступают как проявление принципа непротиворечивости уравнений термомеханики: баланс энтропии (энергии) не должен нарушать баланса массы, импульса, энергии (энтропии), т.е. уравнение баланса энтропии (энергии) должно удовлетворяться тождественно для всех термодинамически допустимых процессов в силу выполнения всех оставшихся уравнений баланса.

Ограничения в форме дифференциальных уравнений (12)–(14) учитываются с помощью множителей Лагранжа. В результате можно получить соотношения ( $\theta$  — абсолютная температура, обратное значение которой («холодность») выступает в качестве множителя Лагранжа)

$$\theta \mathbf{j}_R = \mathbf{h}_R, \quad \theta \sigma = \varepsilon. \quad (18)$$

На основании уравнений (12)–(15) и соотношений (18) выводится приведенное уравнение баланса энергии:

$$-(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) - \mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \theta = \theta \xi, \quad (19)$$

где  $\psi = e - s\theta$  — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) свободной энергии Гельмгольца.

Дифференциальные уравнения термоупругости должны быть дополнены определяющими уравнениями. Определяющие уравнения связанного термоупругого поля обязаны иметь форму

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \mathbf{h}_R &= \mathbf{h}_R(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \mathbf{S} &= \mathbf{S}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ s &= s(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \xi &= \xi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \theta &= \theta(\dot{\vartheta}). \end{aligned} \quad (20)$$

В такой общей форме определяющие уравнения термоупругости мало пригодны в прикладных вопросах. Дальнейшие ограничения на форму определяющих уравнений (20) могут быть получены следующим образом. Приведенное уравнение баланса энергии (19) с неотрицательным внутренним производством энтропии (16) должно удовлетворяться для всех термодинамически допустимых процессов в силу выполнения всех оставшихся уравнений баланса. Выполнив подстановку определяющих зависимостей (20) в уравнение (19) и замечая, что коэффициенты при  $\dot{\vartheta}$ ,  $\nabla_R \dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\mathbf{F}}$  должны обращаться в нуль, заключаем, что свободная энергия в действительности не может зависеть от переменной состояния  $\nabla_R \dot{\vartheta}$ , т.е.

$$\psi = \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F});$$



кроме того, должны выполняться следующие равенства:

$$s = -\frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta}} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad (21)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}. \quad (22)$$

Для внутреннего производства энтропии, следовательно, остается выражение

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}\right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}. \quad (23)$$

Предполагая, что определяющие уравнения не содержат *явных* вхождений температурного смещения  $\vartheta$ , находим

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}\right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}. \quad (24)$$

#### 4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ В ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ GNIII

Принцип термодинамической ортогональности и его двойственная формулировка были предложены Циглером (H. Ziegler) в ряде публикаций начиная с 1958 г., как обобщение линейной теории Онсагера (L. Onsager), восходящей к 1931 г. (см. [5–7]; соответствующий круг вопросов обсуждается также в [8]).

Следуя принципу термодинамической ортогональности, введем потенциал рассеяния (точнее говоря, сопряженный потенциал рассеяния) согласно

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) \quad (25)$$

и будем рассматривать его как функцию от термодинамической силы  $-\nabla_R \dot{\vartheta}$ , приходим к определяющему уравнению в форме соотношения термодинамической ортогональности в пространстве термодинамических сил необратимой составляющей термодинамического потока  $\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}$  поверхности уровня потенциала рассеяния  $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) = \text{const}$ . В гладких точках поверхности уровня имеем следующее уравнение градиентальности:

$$\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} = -\lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}, \quad (26)$$

или

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} - \lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (27)$$

Множитель  $\lambda^*$  в уравнении (26) вычисляется на основании определяющего потенциал рассеяния  $\mathcal{D}$  равенства

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \lambda^* (\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}},$$

откуда сразу же следует, что

$$\lambda^* = \frac{1}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \mathcal{D}. \quad (28)$$

Таким образом, подставляя (28) в уравнение (27), закон теплопроводности в теории термоупругости типа GNIII с учетом принципа термодинамической ортогональности будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} - \frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (29)$$

Выполнение неравенства  $\xi \geq 0$  обеспечивается выпуклостью поверхностей уровня  $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) = \text{const}$  в пространстве термодинамических сил.





Полученное выше уравнение (29) устанавливает определяющий закон теплопроводности в GNII теории, основанный на принципе ортогональности термодинамических потоков и сил. Очевидно, что термодинамически корректен и такой вариант, когда процесс термоупругого деформирования не сопровождается внутренним производством энтропии. В этом случае  $\mathcal{D} = 0$  и закон теплопроводности приобретает форму

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}, \quad (30)$$

характерную для теории GNII. Это определяющее уравнение для вектора потока энтропии — одно из самых замечательных в термомеханике континуума, поскольку поток энтропии, а следовательно, и поток тепла определяются согласно (30) заданием свободной энергии.

Теория связанной термоупругости GNI/СТЕ основывается на допущении о независимости свободной энергии  $\psi$  от температурного смещения  $\vartheta$  и градиента температурного смещения  $\nabla \vartheta$ . Поэтому следует полагать, что  $\psi = \psi(\vartheta, \mathbf{F})$ . В результате внутреннее производство энтропии вычисляется как  $\theta \xi = -\mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}$ . Уравнение термодинамической ортогональности, обобщающее закон теплопроводности Фурье, имеет форму

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (31)$$

Итак, в теории GNIII, дополненной принципом термодинамической ортогональности, вектор потока энтропии определяется, как следует из уравнения (29), через два потенциала: свободную энергию  $\psi$  и потенциал рассеяния  $\mathcal{D}$ . Он естественным образом распадается на две составляющих:

$$\text{обратимую } -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}} \text{ и необратимую } -\frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}.$$

## 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ GNIII

На практике обычно применяются линеаризованные уравнения термоупругости. Не вдаваясь в дальнейшие подробности, приведем замкнутую систему уравнений линейной теории термоупругости третьего типа (GNIII).

В линейном приближении GNIII термоупругое поведение тела подчиняется определяющему закону Дюгамеля–Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha(\theta - \theta_0)) \mathbf{I}, \quad (32)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор малых деформаций,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор; мы по-прежнему используем следующие обозначения:  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе;  $\alpha$  — термомеханическая постоянная ( $\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$ );  $\beta^*$  — коэффициент объемного теплового расширения (coefficient of thermal expansion);  $\theta$  — абсолютная температура;  $\theta_0$  — отсчетная (равновесная) температура. (Отметим, что при температуре, равной  $\theta_0$ , отсутствуют деформации и напряжения.)

Линейная теория GNIII-термоупругости характеризуется тем, что вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  линейно зависит как от градиента температуры, так и от градиента температурного смещения:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta - \Lambda \nabla \vartheta, \quad (33)$$

$\Lambda_*$  — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity),  $\Lambda$  — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate).

Уравнение (33) получается как следствие (29) при условии, что свободная энергия квадратично зависит от градиента температурного смещения  $\nabla \vartheta$ , а потенциал рассеяния — от градиента температуры  $\nabla \theta$ , и, следовательно, не противоречит принципу термодинамической ортогональности.

Заметим, что внутреннее производство энтропии в модели GNII-термоупругости исчезает  $\xi = 0$  в силу  $\mathbf{j} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta}$ .

Классическая связанная термоупругость GNI/СТЕ основывается на допущении о независимости свободной энергии  $\psi$  от температурного смещения  $\vartheta$  и градиента температурного смещения  $\nabla \vartheta$ , в силу чего внутреннее производство энтропии вычисляется как  $\theta \xi = -\mathbf{j} \cdot \nabla \theta$ .



Кроме того, полная система соотношений линейной GNIII-теории включает уравнения движения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (34)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\rho$  — плотность; уравнение баланса энтропии:

$$\dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma + \xi, \quad (35)$$

где  $s$  — плотность (на единицу объема) энтропии,  $\mathbf{j}$  — вектор потока энтропии,  $\sigma$  — внешнее производство энтропии,  $\xi \geq 0$  — внутреннее производство энтропии, или

$$\theta \dot{s} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot \nabla \theta + \theta(\sigma + \xi); \quad (36)$$

и уравнение баланса энергии, которое мы примем в форме

$$-\left(\dot{\psi} + s\dot{\theta}\right) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta} = \theta \xi, \quad (37)$$

где  $\psi$  — плотность (на единицу объема) свободной энергии Гельмгольца. Здесь необходимо учесть, что вектор потока тепла и вектор потока энтропии связаны уравнением

$$\mathbf{h} = \theta \mathbf{j}, \quad (38)$$

а для внутреннего производства энтропии справедливо соотношение

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta}\right) \cdot \nabla \dot{\vartheta}. \quad (39)$$

Приведем также соотношения Коши, связывающие тензор малых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и градиент вектора перемещения  $\nabla \otimes \mathbf{u}$ :

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T. \quad (40)$$

Заключая, запишем линейные связанные уравнения движения и теплопроводности термоупругости GNIII в той форме, в которой они обычно применяются при решении прикладных задач термоупругости [9]:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \Delta \theta + \Lambda_* \Delta \dot{\theta} - \kappa \ddot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (41)$$

В этих уравнениях:  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения;  $\theta$  — абсолютная температура, точнее, ее превышение (инкремент) над отсчетной (референциальной) температурой  $\theta_0$ ;  $\kappa$  — теплоемкость (на единицу объема) при нулевой постоянной деформации<sup>6</sup>;  $\nabla$  — трехмерный оператор Гамильтона;  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  — оператор Лапласа.

Таким образом, уравнения GNIII для связанных (сопряженных) перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного и сопряженного ему скалярного связанных дифференциальных уравнений в частных производных. Их связанность проявляется через определяющую термомеханическую постоянную  $\alpha$  в слагаемом с градиентом температуры  $\nabla \theta$  в векторном уравнении системы (41). Очевидно, что связанность уравнений GNIII-теории обуславливается (так же как и в классической теории термоупругости СТЕ) взаимным влиянием нагрева (охлаждения) и объемной деформации тела, проявляется, как уже указывалось, через определяющую постоянную  $\alpha$  и является следствием принципов термодинамики.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00184-а).*

<sup>6</sup>Поскольку рассматривается линейная теория, теплоемкость  $\kappa$  не зависит от температуры для ее значений в окрестности референциальной температуры  $\theta_0$ .



## Библиографический список

1. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
2. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 232 с.
4. Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд., перераб. и доп. Самара : Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. 340 с.
5. Ziegler H. Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21, № 6. P. 853–863.
6. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М. : Мир, 1966. 134 с.
7. Ziegler H. Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50, № 3. P. 149–164.
8. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М. : Высш. шк., 1983. 399 с.
9. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

УДК 531.36

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДСТВИЙ ЗАКЛИНИВАНИЯ ТРОСА В ЗАДАЧЕ О ДОСТАВКЕ ГРУЗА С ОРБИТЫ

А. С. Ледков, Д. И. Дюков

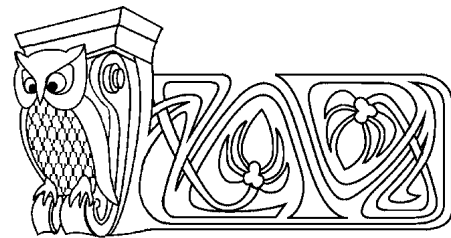
Самарский государственный аэрокосмический университет  
E-mail: ledkov@inbox.ru, dmitry\_dyukov@mail.ru

В статье рассматривается нештатная ситуация заклинивания троса, которая может проявляться при решении задачи доставки груза с орбиты с помощью троса. Использована математическая модель на основе формализма Лагранжа, описывающая движение космической тросовой системы, состоящей из базового космического аппарата, троса и груза. При построении модели масса и демпфирующие свойства троса не учитывались, считалось, что базовый КА движется по круговой орбите. Для случая линейного закона развертывания троса было исследовано влияние заклинивания троса на движение системы. Была проведена серия численных расчетов для систем с различными параметрами. По ее результатам были построены диаграммы, позволяющие оценивать влияние параметров системы на последствия заклинивания (обрыв троса, столкновение троса с КА, намотка троса на КА). На основе анализа этих диаграмм были сформулированы некоторые общие выводы о влиянии параметров системы на последствия нештатной ситуации заклинивания троса.

**Ключевые слова:** космическая тросовая система, линейное развертывание, нештатная ситуация, уравнения Лагранжа.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Космические тросовые системы являются важным элементом современной космонавтики. Одной из наиболее близкой к широкой практической реализации является задача доставки груза с орбиты [1]. К настоящему времени уже проведено несколько экспериментов, доказавших возможность осуществления этой транспортной операции (SEDS-1 в 1993 году [2] и YES-2 в 2007 [3]). В научной литературе этой задаче уделяется большое внимание, большинство работ посвящено исследованию динамики КТС, ее устойчивости и выбору закона развертывания троса [4, 5]. С практической точки зрения очень важным является вопрос моделирования нештатных ситуаций и прогнозирования их последствий. Нельзя сказать, что работы на эту тему отсутствуют. Довольно подробно исследован вопрос выживаемости КТС при столкновении троса с микрометеоритом [6]. Существуют работы, посвященные изучению влияния неправильной ориентации базового КА и отказа его системы управле-



## Research of Consequences of Tether's Jamming in the Task of Payload Delivery from an Orbit

A. S. Ledkov, D. I. Dyukov

In article the off-normal situation of tether's jamming at the decision of the task of payload delivery from an orbit by means of a tether is considered. The mathematical model described the space tether system consisting of the basic space vehicle, the tether and the payload is used. At creation of model the mass and damping properties of the tether weren't considered. It is supposed that basic space vehicle moves on a circle orbit. For a case of the linear law of tether development an influence of jamming of a tether on system motion has been researched. A series of numerical calculations for systems with various parameters has been led. The charts allowing to estimate influence of system's parameters on jamming consequences (a tether breakaway, collision of a tether with basic space vehicle, tether winding on basic space vehicle) have been constructed. On the basis of the analysis of these charts some general conclusions about influence of system's parameters on consequences of this off-normal situation have been formulated.

**Key words:** space tether system, linear deployment, off-normal situation, Lagrange equations.