



Библиографический список

1. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
2. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 232 с.
4. Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд., перераб. и доп. Самара : Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. 340 с.
5. Ziegler H. Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21, № 6. P. 853–863.
6. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М. : Мир, 1966. 134 с.
7. Ziegler H. Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50, № 3. P. 149–164.
8. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М. : Высш. шк., 1983. 399 с.
9. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

УДК 531.36

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДСТВИЙ ЗАКЛИНИВАНИЯ ТРОСА В ЗАДАЧЕ О ДОСТАВКЕ ГРУЗА С ОРБИТЫ

А. С. Ледков, Д. И. Дюков

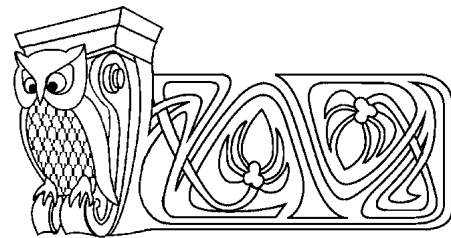
Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: ledkov@inbox.ru, dmitry_dyukov@mail.ru

В статье рассматривается нештатная ситуация заклинивания троса, которая может проявляться при решении задачи доставки груза с орбиты с помощью троса. Использована математическая модель на основе формализма Лагранжа, описывающая движение космической тросовой системы, состоящей из базового космического аппарата, троса и груза. При построении модели масса и демпфирующие свойства троса не учитывались, считалось, что базовый КА движется по круговой орбите. Для случая линейного закона развертывания троса было исследовано влияние заклинивания троса на движение системы. Была проведена серия численных расчетов для систем с различными параметрами. По ее результатам были построены диаграммы, позволяющие оценивать влияние параметров системы на последствия заклинивания (обрыв троса, столкновение троса с КА, намотка троса на КА). На основе анализа этих диаграмм были сформулированы некоторые общие выводы о влиянии параметров системы на последствия нештатной ситуации заклинивания троса.

Ключевые слова: космическая тросовая система, линейное развертывание, нештатная ситуация, уравнения Лагранжа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Космические тросовые системы являются важным элементом современной космонавтики. Одной из наиболее близкой к широкой практической реализации является задача доставки груза с орбиты [1]. К настоящему времени уже проведено несколько экспериментов, доказавших возможность осуществления этой транспортной операции (SEDS-1 в 1993 году [2] и YES-2 в 2007 [3]). В научной литературе этой задаче уделяется большое внимание, большинство работ посвящено исследованию динамики КТС, ее устойчивости и выбору закона развертывания троса [4, 5]. С практической точки зрения очень важным является вопрос моделирования нештатных ситуаций и прогнозирования их последствий. Нельзя сказать, что работы на эту тему отсутствуют. Довольно подробно исследован вопрос выживаемости КТС при столкновении троса с микрометеоритом [6]. Существуют работы, посвященные изучению влияния неправильной ориентации базового КА и отказа его системы управле-



Research of Consequences of Tether's Jamming in the Task of Payload Delivery from an Orbit

A. S. Ledkov, D. I. Dyukov

In article the off-normal situation of tether's jamming at the decision of the task of payload delivery from an orbit by means of a tether is considered. The mathematical model described the space tether system consisting of the basic space vehicle, the tether and the payload is used. At creation of model the mass and damping properties of the tether weren't considered. It is supposed that basic space vehicle moves on a circle orbit. For a case of the linear law of tether development an influence of jamming of a tether on system motion has been researched. A series of numerical calculations for systems with various parameters has been led. The charts allowing to estimate influence of system's parameters on jamming consequences (a tether breakaway, collision of a tether with basic space vehicle, tether winding on basic space vehicle) have been constructed. On the basis of the analysis of these charts some general conclusions about influence of system's parameters on consequences of this off-normal situation have been formulated.

Key words: space tether system, linear deployment, off-normal situation, Lagrange equations.



ния на процесс развертывания троса [7], оценке возможности доставки груза на Землю при преждевременном разрыве троса [8]. Не менее опасной нештатной ситуацией является заклинивание механизма развертывания троса. Ее последствиями могут стать обрыв троса, намотка троса на КА, столкновения груза и базового КА в результате отскока. Целью данной работы является исследование этой нештатной ситуации и ее последствий.

2. ОПЕРАЦИЯ ДОСТАВКИ ГРУЗА

Для спуска груз на Землю необходимо перевести его на орбиту, перигей которой пересекается с плотными слоями атмосферы. Традиционно для решения этой задачи используются реактивные двигатели, при этом рабочее тело, выброшенное из сопла при торможении груза, безвозвратно теряется. Альтернативным подходом, лишенным этого недостатка, является использование космического троса. С его помощью на орбите образуется временная связка, состоящая из базового КА, троса и груза, которая позволяет без потерь передавать энергию и момент количества движения от одного связанного тела другому [4]. Груз отделяется от КА с небольшой относительной скоростью, порядка нескольких метров в секунду, и опускается на тросе в направлении Земли на несколько десятков километров. Установленный на базовом КА механизм развертывания постоянно удерживает трос в натянутом состоянии, что делает КА, груз и трос единой механической системой, центр масс которой движется по орбите, близкой к исходной орбите базового КА. При этом в процессе выпуска троса скорость и высота орбиты КА увеличиваются по сравнению с исходными значениями, а скорость и высота орбиты груза — уменьшаются. Происходит перераспределение энергии между элементами системы. После разрыва троса груз оказывается на более низкой эллиптической орбите, пересекающей с атмосферой, что делает возможным его спуск на Землю.

Известно два принципиально разных способа развертывания троса при решении задачи доставки груза. Первый способ, называемый статическим развертыванием, подразумевает медленный выпуск троса, когда груз все время находится в окрестности местной вертикали. Второй способ — динамическое развертывание, подразумевает раскачку троса за счет действующей на него силы Кориолиса и использование возвратного колебания для дополнительного гашения скорости груза, в результате требуемое уменьшение перигея орбиты может быть достигнуто с помощью троса значительно меньшей длины [7].

Поскольку система доставки груза является вспомогательной, ее функционирование не должно препятствовать и угрожать работе базового КА. Важно заранее предвидеть возможные нештатные ситуации, оценивать их последствия и разрабатывать стратегию поведения. В рамках данной работы рассматривается одна из потенциально возможных нештатных ситуаций — заклинивание троса в процессе развертывания.

При заклинивании длина троса перестает увеличиваться, при этом груз продолжает двигаться, растягивая трос. Сила натяжения резко возрастает, что, с одной стороны, может привести к обрыву троса (рис. 1, а), а с другой — к раскачке и закручиванию базового КА, что, в свою очередь, приведет к наматыванию троса на КА (рис. 1, б). Если трос выдержит растяжение, то через некоторое время начнется обратное колебательное движение, в результате которого груз будет двигаться в направлении КА и может с ним столкнуться (рис. 1, в). В случае, если ни один из перечисленных сценариев не реализуется, будет наблюдаться серия отскоков груза, когда фазы связанного и свободного движения будут сменять друг друга.

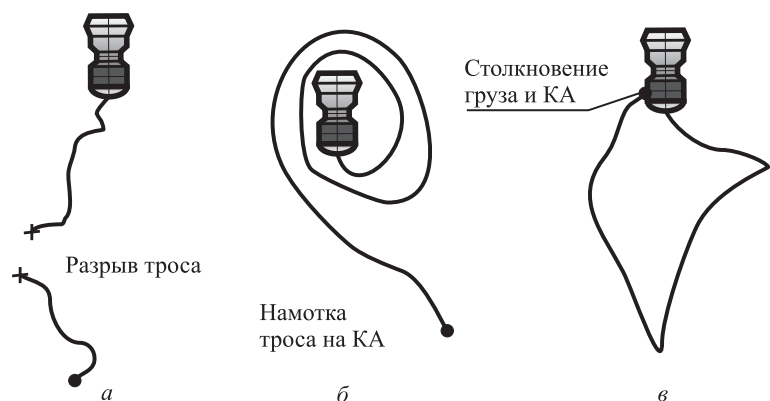


Рис. 1. Последствия заклинивания троса



3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из базового КА, невесомого упругого троса и груза (рис. 2). КА представляет собой твердое тело массой m_1 с центром масс в точке D_1 , а груз – материальную точку D_2 массой m_2 . A, B, C – главные моменты инерции КА [9].

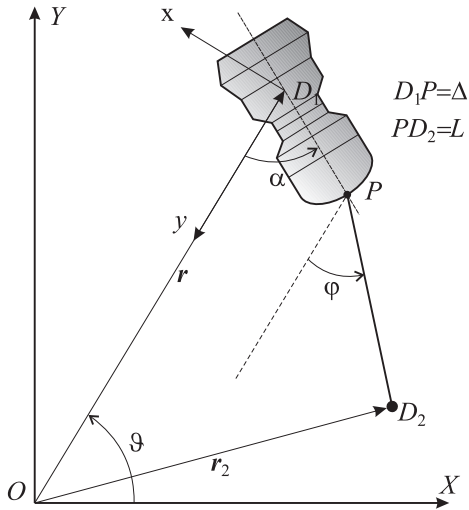


Рис. 2. Космическая тросовая система

Будем считать, что центр масс КА движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu r^{-3}}$, где μ – гравитационный параметр, r – геоцентрическое расстояние. В процессе движения на КА действует только гравитационный момент и момент от силы натяжения троса. Будем пренебрегать демпфирующими свойствами троса.

Получим уравнения движения механической системы, воспользовавшись формализмом Лагранжа. В качестве обобщенных координат выберем угол отклонения оси КА от местной вертикали α , угол отклонения троса от местной вертикали спутника φ , длину троса l . Получим функцию Лагранжа для рассматриваемой КТС:

$$L = T - W = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы, W – потенциальная энергия, $\mathbf{q} = \{\alpha, \varphi, l\}$ – вектор обобщенных координат, t – время. Кинетическая энергия КТС складывается из кинетической энергии КА T_1 и кинетической энергии груза T_2 .

$$T_1 = \frac{m_1 r^2 \omega^2}{2} + \frac{1}{2} C (\dot{\alpha} + \omega)^2, \quad T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2}, \quad (2)$$

где $V_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}$ – абсолютная скорость груза, x_2, y_2 – координаты груза в инерциальной системе координат OXY :

$$x_2 = r \cos \vartheta - \Delta \cos(\alpha + \vartheta) - l \cos(\varphi + \vartheta), \quad y_2 = r \sin \vartheta - \Delta \sin(\alpha + \vartheta) - l \sin(\varphi + \vartheta),$$

$\vartheta = \omega t$ – угол истинной аномалии центра масс КА.

Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальной энергии гравитационного поля W_G [10] и потенциальной энергии упругого троса W_E :

$$W_G = -\frac{\mu m_1}{r} - \frac{\mu m_2}{r_2} + \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} (A - B) \cos^2 \alpha, \quad W_E = \frac{c}{2} (l - l_0)^2, \quad (3)$$

где c – жесткость троса, l_0 – длина недеформированного троса, r_2 – радиус-вектор точки D_2 . Отметим, что длина l_0 является функцией времени и изменяется в процессе движения КТС в соответствии с заданным законом развертывания. Сила упругости возникает только при растяжении троса. Если в процессе движения КТС длина l становится меньше l_0 , то сила упругости пропадает, и КА с грузом движутся как два независимых тела. Такое поведение системы можно учесть, если рассматривать жесткость c как кусочно-заданную функцию длины троса:

$$c = \begin{cases} ESl_0^{-1}, & l > l_0, \\ 0, & l \leq l_0, \end{cases}$$

E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения троса.

Поскольку центр масс КА движется по круговой орбите, $\mu = \omega^2 r^3$ и W_G можно записать в виде

$$W_G = -\omega^2 r^2 m_1 - \frac{m_2 \omega^2 r^3}{r_2} + \frac{3}{2} \omega^2 (A - B) \cos^2 \alpha. \quad (4)$$



Используя (1)–(4), запишем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

разрешая их относительно старших производных, получим:

$$\ddot{\alpha} = \frac{3}{2} \omega^2 \frac{(A-B)}{C} \sin 2\alpha - \frac{\Delta c}{C} (l-l_0) \sin(\alpha-\varphi), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{l} = & (\Delta \cos(\alpha-\varphi) - r \cos \varphi + l) \omega^2 + (2l\dot{\varphi} + 2\Delta\dot{\alpha} \cos(\alpha-\varphi)) \omega + \\ & + \Delta\dot{\alpha}^2 \cos(\alpha-\varphi) + l\dot{\varphi}^2 + c(l-l_0) \left[\frac{\Delta^2(\cos(2\alpha-2\varphi)-1)}{2C} - \frac{1}{m_2} \right] + \\ & + \frac{3\Delta\omega^2(A-B) \sin 2\alpha \sin(\alpha-\varphi)}{2C} - \frac{\omega^2 r^3 (\Delta \cos(\alpha-\varphi) - r \cos \varphi + l)}{(r^2 + \Delta^2 + l^2 - 2r\Delta \cos \alpha - 2rl \cos \varphi + 2\Delta l \cos(\alpha-\varphi))^{3/2}}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & \frac{\omega^2 r \sin \varphi}{l} + \frac{-2\dot{l}(\omega + \dot{\varphi}) + (\omega + \dot{\alpha})^2 \Delta \sin(\alpha-\varphi)}{l} + \frac{\Delta^2 c}{2lC} (l-l_0) \sin(2\alpha-2\varphi) - \\ & - \frac{3\Delta\omega^2(A-B) \sin 2\alpha \cos(\alpha-\varphi)}{2lC} - \frac{(r \sin \varphi + \Delta \sin(\alpha-\varphi)) \omega^2 r^3}{l(r^2 + \Delta^2 + l^2 - 2r\Delta \cos \alpha - 2rl \cos \varphi + 2\Delta l \cos(\alpha-\varphi))^{3/2}}. \quad (7) \end{aligned}$$

Уравнения (5)–(7) описывают динамику КТС в случае движения базового КА по круговой орбите и являются частным случаем уравнений, приведенных в [9].

При моделировании процесса развертывания будем использовать линейный закон изменения длины троса. Под заклиниванием будем понимать ситуацию, когда длина недеформированного троса мгновенно перестает изменяться, то есть l_0 определяется выражением

$$l_0(t) = \begin{cases} kt + b, & t < t_*, \\ kt_* + b, & t \geq t_*, \end{cases} \quad (8)$$

где t_* — время заклинивания троса, k, b — постоянные коэффициенты.

После заклинивания груз продолжит движение, растягивая трос. Это приведет к резкому возрастанию силы натяжения троса $T = c(l-l_0)$. Если при этом будет превышено граничное значение $T_* = \sigma_* S$, где σ_* — предел прочности, то трос оборвется. Если трос не оборвется, то через некоторое время груз начнет возвратное движение под действием силы натяжения, которое в конечном итоге может привести к столкновению груза и КА. Под столкновением будем понимать ситуацию, когда расстояние между грузом и центром масс КА станет меньше, чем некоторое расстояние Δ .

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕШТАТНОЙ СИТУАЦИИ

Проведем численное моделирование процесса развертывания троса. Исследуем влияние параметров системы и времени заклинивания t_* на движение системы. Проведем серию численных расчетов, отслеживая в каждом из них ситуации обрыва троса, столкновения КА и груза и наматывания троса на КА. Будем рассматривать системы, параметры которой лежат в следующих диапазонах: $m_2 \in [10, 300]$ кг, $A = [1000, 15000]$ кг·м², $B = C = 1.5 \cdot 10^4$ кг·м², высота орбиты базового КА $H = [250, 750]$ км, $E = [50, 200]$ ГПа, $\sigma_* = 3$ ГПа, толщина троса $d = 0.5$ мм, расстояние $\Delta = 2$ м. Отметим, что диапазон изменения модуля упругости троса выбран с учетом существующих в настоящее время материалов. Развертывание происходит по линейному закону с коэффициентами $k = [0.5, 5]$ м/с, $b = \Delta$. В качестве начальных условий для всех расчетов примем

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad l = 2 \text{ м}, \quad \dot{l} = 1 \text{ м/с}.$$

В ходе исследования было выполнено около миллиона расчетов. Полученные результаты позволяют осуществить выбор параметров, обеспечивающих наиболее безопасный режим работы системы. В качестве примера исследуем влияние массы груза и времени заклинивания на движение КТС с параметрами $E = 150$ ГПа, $A = 1000$ кг·м², $H = 500$ км, $k = 1$ м/с. На рис. 3 показана диаграмма, на которой по оси абсцисс отложено время заклинивания, а по оси ординат — масса груза.



Каждая точка диаграммы соответствует расчету. Светло серыми точками обозначены траектории, заканчивающиеся разрывом троса; черными точками — столкновением груза и базового КА; серыми — наматыванием троса на базовый КА; белыми — безопасные траектории, на которых груз совершает серию отскоков, не приводящих ни к одному из описанных выше опасных последствий заклинивания. При построении диаграммы параметры m_2 и t_* менялись с шагом 1 кг и 5 с соответственно.

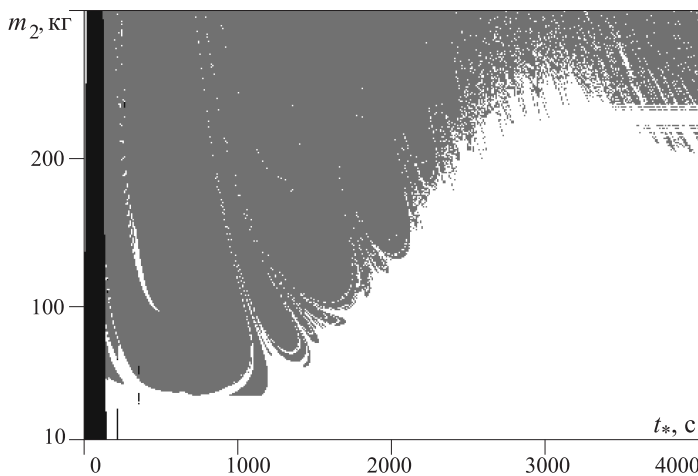


Рис. 3. Диаграмма последствий заклинивания троса

Из рис. 3 видно, что независимо от массы груза заклинивание на начальном этапе приводит к столкновению груза и КА. Разрыв троса наблюдается только при массе груза большей 143 кг при заклинивании в первые несколько десятков секунд. При использовании груза массой менее 42 кг заклинивание не приводит к наматыванию троса на базовый КА.

На рис. 4, 5 показаны графики зависимостей длины троса и углов α , φ от времени (сплошной линией показаны кривые, соответствующие точке $m_2 = 100$ кг, $t_* = 1000$ с, а пунктирной — точке $m_2 = 100$ кг, $t_* = 3000$ с). В первом случае заклинивание троса приводит к тому, что базовый КА переходит во вращение (см. рис. 4), при этом трос продолжает колебаться около местной вертикали. В результате происходит наматывание троса на КА. Во втором случае заклинивание не приводит к переходу во вращательный режим. В обоих случаях после возникновения нештатной ситуации происходит серия отскоков (см. рис. 5), не приводящих к обрыву троса и столкновению груза с базовым КА. То есть заклинивание на поздних стадиях развертывания троса не несет опасности для базового КА. Подобная ситуация наблюдалась в эксперименте SEDS-1, где к моменту окончания развертывания не удалось погасить скорость выпуска троса до нуля. Груз совершил серию отскоков, но в результате его удалось успешно доставить на Землю [2].

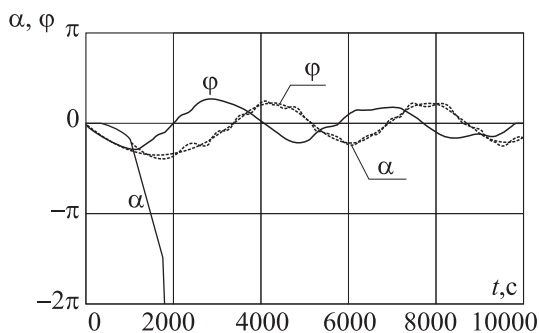


Рис. 4. Зависимость углов α , φ от времени

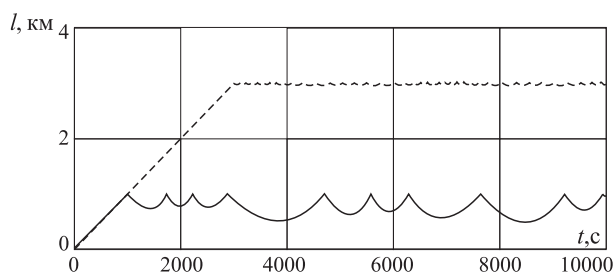


Рис. 5. Зависимость расстояния между точкой выпуска троса и грузом от времени

Анализ результатов серии расчетов позволил сделать следующие выводы:

- с увеличением массы груза увеличивается интервал времени заклинивания, приводящего к разрыву троса;
- с увеличением высоты орбиты увеличивается величина опасного интервала заклинивания, приводящего к намотке троса на КА;
- обрыв троса и столкновение в результате отскока могут произойти только на начальном этапе развертывания. Для рассматриваемых систем граничное время для отскока составляло $t_* = 1213$ с, граничное время для разрыва $t_* = 1763$ с;
- уменьшение разницы между продольным и поперечным моментом инерции практически не влияет на интервал времени заклинивания, вызывающий разрыв троса и столкновение, но приводит к



возрастанию опасного с точки зрения закрутки интервала. Например, сравнивая $A = 5000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и $A = 10000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, можно отметить, что в первом случае наибольший интервал опасного заклинивания составлял 1860 с, а во втором — 1920 с;

– увеличение скорости выпуска троса приводит к увеличению интервала заклинивания, соответствующего разрыву троса, а также к увеличению интервала, опасного с точки зрения закрутки КА. Для систем с рассматриваемыми параметрами выпуск троса со скоростью, большей 4.3 м/с, приводит к намотке троса на КА независимо от момента заклинивания.

Авторы выражают благодарность профессору В. С. Асланову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00317-а).

Библиографический список

1. Cartmell M. P., McKenzie D. J. A review of space tether research // Progress in Aerospace Sciences. 2008. Vol. 44. P. 1–21.
2. Smith H. F. The First and Second Flights of the Small Expendable Deployer System (SEDS) // Proceedings of the Fourth Intern. Conf. on Tethers in Space, Smithsonian Inst., Washington, DC. 1995. P. 43–55.
3. Kruijff M., Heide E. J. van der. Qualification and in-flight demonstration of a European tether deployment system on YES2 // Acta Astronautica. 2009. Vol. 64, № 9–10. P. 882–905.
4. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М. : Наука, 1990. 329 с.
5. Zimmermann F., Schottle U. M., Messerschmid E. Optimization of the tether-assisted return mission of a guided re-entry capsule // Aerospace Science and Technology. 2005. № 9. P. 713–721.
6. Асланов В. С., Волошенюк О. Л., Кислов А. В., Ящук А. В. Определение времени выживания космической тросовой системы // Изв. Самарского науч. центра РАН. 2010. Т. 12, № 4. С. 138–143.
7. Асланов В. С., Ледков А. С., Стратилатов Н. Р. Пространственное движение космической тросовой системы, предназначенной для доставки груза на Землю // Общероссийский науч.-техн. журн. Полет. 2007. № 2. С. 28–33.
8. Асланов В. С., Ледков А. С., Пироженко А. В., Храмов Д. А. Исследование влияния обрыва тросовой системы на возможность доставки груза на Землю // Сборник трудов XIV Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара : СГАУ, 2011. С. 36–39.
9. Асланов В. С. Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 4. С. 582–593.
10. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1975. 308 с.

УДК 629

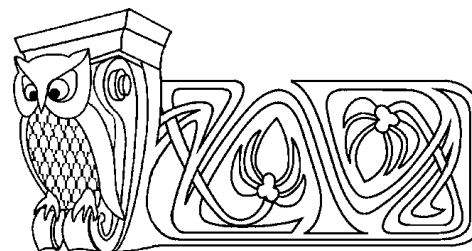
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

Саратовский государственный университет,
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

С помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионных уравнений решается задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Функционал, определяющий качество процесса управления, равен взвешенной интегральной сумме времени переориентации орбиты КА и модуля (или квадрата) управления. Сформулированы дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА. Получены законы оптимального управления, построены условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Приведены примеры численного решения задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, космический аппарат, кватернион.



About a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation

I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov

The problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit is solved with the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion equations. Control (thrust vector, orthogonal to the orbital plane) is limited in magnitude. Functional, which determines a quality of control process is weighted sum of time and module (or square) of control. We have formulated a differential boundary problems of reorientation of spacecraft's orbit. We have obtained optimal control laws, built the transversality conditions, not containing Lagrange multipliers. Examples of numerical solution of the problem are given.

Key words: optimal control, spacecraft, quaternion.