ИНФОРМАТИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 519.17

О ЧИСЛЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ РЕБЕР МИНИМАЛЬНОГО ВЕРШИННОГО 1-РАСШИРЕНИЯ СВЕРХСТРОЙНОГО ДЕРЕВА

М. Б. Абросимов

Саратовский государственный университет
E-mail: mic@rambler.ru

Граф G^* называется вершинным 1-расширением графа G, если граф G можно вложить в каждый граф, получающийся из графа G^* удалением любой его вершины вместе с инцидентными ребрами. Вершинное 1-расширение G^* графа G называется минимальным, если граф G^* имеет на одну вершину больше, чем граф G, а среди всех вершинных 1-расширений графа G с тем же числом вершин граф G^* имеет минимальное число ребер. Дерево называется сверхстройным (звездоподобным), если только одна его вершина имеет степень больше двух. В работе дается нижняя и верхняя оценки числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и указываются семейства деревьев, на которых эти оценки достигаются.

Ключевые слова: минимальное вершинное расширение, сверхстройное дерево, звездоподобное дерево, отказоустойчивая реализация.

On the Number of Additional Edges of a Minimal Vertex 1-Extension of a Starlike Tree

M. B. Abrosimov

For a given graph G with n nodes, we say that graph G^* is its 1-vertex extension if for each vertex v of G^* the subgraph $G^* - v$ contains graph G up to isomorphism. A graph G^* is a minimal vertex 1-extension of the graph G if G^* has $n+1$ nodes and there is no 1-vertex extension with $n+1$ nodes of G having fewer edges than G^*. A tree is called starlike if it has exactly one node of degree greater than two. We give a lower and upper bounds of the edge number of a minimal vertex 1-extension of a starlike tree and present trees on which these bounds are achieved.

Key words: minimal vertex extension, starlike tree, fault tolerance.

ВВЕДЕНИЕ

Минимальные расширения (вершинные или реберные) являются продолжением предложенной J. P. Hayes [1] графовой модели для исследования отказоустойчивости. В [1] и последующей статье F. Harary и J. P. Hayes [2] рассматривалась отказоустойчивость элементов дискретных систем (node fault tolerance, вершинное расширение). В работе [3] модель была распространена и на отказы связей элементов системы (edge fault tolerance, реберное расширение). Среди рассматриваемых систем особое внимание уделялось системам, граф которых является цепью, циклом или деревом. Исследованию минимальных вершинных 1-расширений частных случаев деревьев посвящены статьи [4–7]. Оказалось, что эта задача является вычислительно сложной [8] и поэтому общего аналитического описания минимального расширения (вершинного или реберного) для произвольного графа по-видимому не существует. В некоторых случаях удается предложить схему построения расширения, но не удается доказать его минимальность. В данной работе рассматриваются минимальные вершинные 1-расширения деревьев особого вида, которые называются сверхстройными, или звездоподобными. Был проведен вычислительный эксперимент [7] по построению минимальных вершинных 1-расширений для сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно. Мы далее будем использовать некоторые статистические данные, полученные в результате этих вычислений. В работе [4] была предложена схема построения минимальных вершиных 1-расширений для произвольного сверхстройного дерева. Далее будет показано, что это результат является ошибочным, а схема позволяет строить вершинные 1-расширения, но в общем случае не минимальные. Однако полученный авторами результат может быть использован как верхняя оценка для числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева. В работе [9] аналогичный вопрос рассматривался для минимальных реберных 1-расширений, где удалось получить только нижнюю оценку. Дадим далее основные понятия, преимущественно в соответствии с книгой [10].

Графом (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V, называемое *отношением смежности*. *Степенью* вершины v в неориентированном графе G будем называть количество вершин в G, смежных с данной, и обозначать через $d(v)$. Вектор, составленный из степеней вершин графа G в порядке невозрастания, называется *вектором степеней*. Будем говорить, что вектор степеней $(a_1, \dots, a_n)$ одного графа *мажорирует* вектор степеней $(b_1, \dots, b_n)$ другого графа, если все компоненты второго не превышают по величине соответствующих компонент первого вектора: $a_i \ge b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Связный граф без циклов называется *деревом*. Дерево называется *сверхстройным* (*звездообразным*), если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть *корнем* сверхстройного дерева. Другое определение звездообразного дерева: это граф, гомеоморфный звезде. На рис. 1 представлено 5-вершинное сверхстройное дерево.

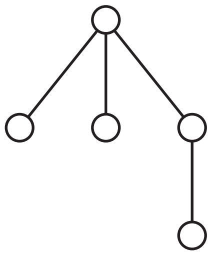


Рис. 1. Сверхстройное дерево (2, 1, 1)

Итак, вектор степеней сверхстройного дерева имеет вид $(k, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$, где $k > 2$, и количество листьев в точности равно k [9]. Кратко вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k, 2^m, 1^k)$. Среди сверхстройных деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов.

В данной статье мы рассматриваем сверхстройные деревья, у которых степень корневой вершины $k > 2$. Однако если это ограничение убрать, то при $k = 1$ или $k = 2$ сверхстройное дерево является цепью P_n.

Если $m = 0$, то сверхстройное дерево является звездой $K_{1,k}$.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: $(m_1, \dots, m_k)$, где $m_1 \ge \dots \ge m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным. В самом деле, любому вектору $(m_1, \dots, m_k)$ будет соответствовать единственное с точностью до изоморфизма сверхстройное дерево с числом вершин $m_1 + \dots + m_k + 1$. В этом дереве корневая вершина будет иметь степень k, k вершин будут иметь степень 1, а остальные $m_1 + \dots + m_k - k$ вершин будут иметь степень 2. Будем называть такой код *вектором цепей*. Дерево на рис. 1 имеет вектор цепей (2, 1, 1).

1. НИЖНЯЯ ОЦЕНКА

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (МВ-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, т. е. граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, т. е. $|V^*| = |V| + k$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

В данной работе мы будем рассматривать только случай $k = 1$. Построение минимального вершинного 1-расширения можно представить как добавление одной вершины и некоторого числа ребер. Для удобства количество дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения графа G обозначим через $ec(G)$.

Относительно специальных случаев сверхстройных деревьев некоторые результаты известны. Единственное минимальное вершинное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_{n+1}, а любое минимальное вершинное k-расширение цепи P_n есть минимальное вершинное $(k-1)$-расширение цикла C_{n+1} (см. [1]).

Минимальное вершинное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма, и получается добавлением вершины и соединением ее со всеми вершинами звезды. Для $k > 1$ также известен вид всех минимальных вершинных k-расширений звезды (см. [11]).

Покажем, что минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева $(m_1, \ldots, m_k)$ не может иметь меньше $k+1$ дополнительных ребер.

Теорема 1. *Минимальное вершинное 1-расширение любого сверхстройного дерева T вида $(m_1, \ldots, m_k)$ отличается от него более чем на k дополнительных ребер:*

$$ec(T) > k.$$

Доказательство. Пусть T — сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$. Обозначим через T^* некоторое минимальное вершинное 1-расширение дерева T. По определению после удаления любой вершины из графа T^* дерево T должно вкладываться в получившийся граф. Следовательно, граф T^* должен содержать вершину степени k или выше и будет отличаться от дерева T не менее чем на k дополнительных ребер. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что T^* не может отличаться на k дополнительных ребер.

Предположим, что это не так, и T^* отличается от T на k дополнительных ребер. Так как в T есть одна вершина степени k, то в T^* должно быть не менее двух вершин степени k или выше. Действительно, если бы это было не так и в T^* была бы только одна вершина v степени k или выше, то вложение дерева T в граф $T^* - v$ было бы невозможно. Рассуждая далее, убеждаемся, что в T^* не может быть вершин степени меньше 2. В самом деле, если бы степень некоторой вершины v в графе T^* была бы равна 1, то, удалив смежную с v вершину, мы бы получили граф с изолированной вершиной, в который дерево T вкладываться не будет. Наконец, в T^* не может быть вершины степени выше k, так как удаление такой вершины привело бы к удалению более k ребер. По предположению в получившийся граф должно вкладываться дерево T, однако оно отличается от T^* на k ребер.

Итак, делаем вывод, что если T^* — некоторое минимальное вершинное 1-расширение дерева T, которое отличается от T на k дополнительных ребер, то T^* имеет вектор степеней $(k, k, 2, \ldots, 2)$. Обозначим через v_1 и v_2 вершины степени k графа T^*. Удаление одной из этих вершин приводит к удалению k ребер, следовательно, графы $T^* - v_1$, $T^* - v_2$ и T изоморфны. С учетом того, что степени остальных вершин графа T^* равны 2, это означает, что вершины v_1 и v_2 соединены k цепями, длины которых есть $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, $\ldots$, $m_k + 1$.

Предположим, что минимальная из длин этих цепей равна 1, т. е. $m_k = 1$. Это означает, что в T^* есть вершина v, которая смежная и с v_1 и с v_2. Но тогда в графе $T^* - v$ старшая степень вершины будет $k - 1$, и вложение дерева T будет невозможно. Следовательно, длины всех цепей $m_1, \ldots, m_k$ должны быть больше 1, в частности, и минимальная из длин цепей $m_k > 1$.

Пусть u — вершина цепи минимальной длины m_k, смежная с вершиной v_1. Рассмотрим удаление вершины u. В графе $T^* - u$ вершина v_1 будет иметь степень $k - 1$, а $d(v_2) = k$. Следовательно, только вершина v_2 может быть образом корневой вершины дерева T при вложении. Из вершины v_2 выходит k цепей, однако минимальная из них будет иметь длину $m_k - 1$. Таким образом, дерево T не может вкладываться в граф $T^* - u$. Полученное противоречие показывает, что дерево T не может иметь минимального вершинного 1-расширения с k дополнительными ребрами. □

Итак, любое минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева T вида $(m_1, \ldots, m_k)$ при $k > 2$ должно отличаться от T не менее чем на $k+1$ дополнительное ребро, должно иметь две вершины степени не ниже k, а степени остальных вершин не могут быть меньше 2. Звезды имеют минимальные вершинные 1-расширения как раз с таким числом дополнительных ребер. Существуют ли минимальные вершинные 1-расширения сверхстройных деревьев, кроме звезд, с числом дополнительных ребер $k+1$, какими они могут быть и для каких сверхстройных деревьев это возможно?

Утверждение. *Пусть T — сверхстройное n-вершинное дерево с вектором цепей $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$ такое, что $m_1 = 2$, а $m_k = 1$. Тогда граф T^*, полученный из этого дерева добавлением* *вершины и соединением ее со всеми листьями и корнем, является минимальным вершинным 1-расширением дерева T.*

Доказательство. Заметим, что граф T^*, построенный по схеме из теоремы, будет иметь вектор степеней $(k+1, k+1, 2, \ldots, 2)$ или $((k+1)^2, 2^{n-1})$ и отличаться от дерева T на $k+1$ дополнительных ребер. Покажем, что граф T^* является вершинным 1-расширением дерева T, тогда минимальность будет следовать из теоремы 1.

В графе T^* все вершины делятся на три группы подобных вершин (напомним, что две вершины графа называются *подобными*, если существует автоморфизм, при котором одна вершина является образом другой): вершины v_1 и v_2 степени $k+1$, вершины, смежные и с v_1, и с v_2 (вершины из цепей длины 1), и вершины, смежные либо с v_1, либо с v_2 (вершины из цепей длины 2).

При удалении вершины v_1 или v_2 получаем граф, изоморфный T, и вложение очевидно.

При удалении вершины u, смежной и с v_1, и с v_2, вложение строится следующим образом: вершина v_1 — корень, вершина v_2 — заменяет удаленную вершину u и образовывает цепь длины 1, а остальные вершины остаются без изменений.

При удалении вершины v, смежной либо с v_1, либо с v_2, вложение строится следующим образом. Пусть для определенности вершина v смежна с вершиной v_2, а w — другая смежная с v вершина: вершина v_1 — корень, вершина v_2 — заменяет удаленную вершину v и образовывает цепь v_1, v, w длины 2, а остальные вершины остаются без изменений. $\square$

Таким образом, существуют сверхстройные деревья с вектором степеней вида $(k, 2^m, 1^k)$, которые имеют минимальные вершинные 1-расширения с $k+1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$. На основании проведенного вычислительного эксперимента [7] были проанализированы все 67 сверхстройных деревьев с количеством вершин от 4 до 10. Большинство из них (57) имеют минимальные вершинные 1-расширения с числом дополнительных ребер $k+1$. Только у девяти деревьев минимальные вершинные 1-расширения имеют $k+2$ дополнительных ребра (это деревья (5,1,1), (6,1,1), (3,3,2), (5,1,1,1), (6,1,1,1), (7,1,1), (5,3,1), (3,2,2,2), (5,2,2)) и у одного дерева — $k+3$ (это дерево имеет вид $(3,3,3)$). Дерево (5,3,1) примечательно тем, что у него есть 117 неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений.

Определим, какие еще вектора степеней могут быть у минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев с $k+1$ дополнительным ребром. Любой такой вектор с учетом рассмотренных выше ограничений на степени вершин минимального вершинного 1-расширения должен мажорировать вектор $(k, k, 2^{m+k})$, который описывает граф, отличающийся от заданного дерева на k дополнительных ребер. Это означает, что мы можем добавить две единицы к компонентам такого вектора. Таким образом, кроме вектора степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$ возможны еще три: $(k+1, k, 3, 2^{m+k-1})$, $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ и $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$. При $k=3$ первый и последний вектора совпадают. На рис. 2 представлены все минимальные вершинные 1-расширения сверхстройного дерева $(2,1,1)$ (см. рис. 1) с векторами степеней трех оставшихся видов (4, 4, 2, 2, 2), (4, 3, 3, 2, 2) и (3, 3, 3, 3, 2).

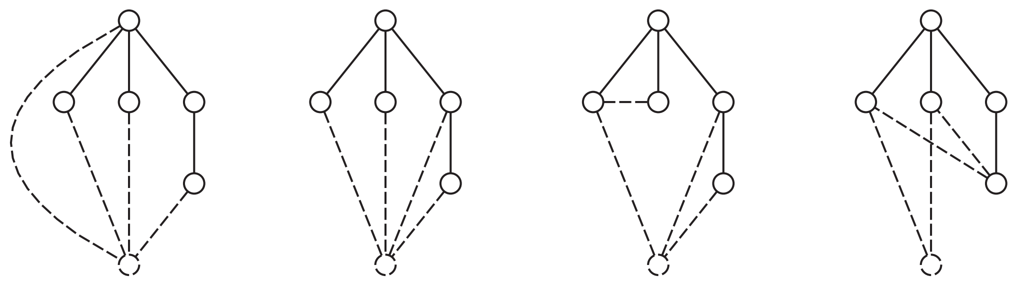


Рис. 2. МВ-1Р сверхстройного дерева (2, 1, 1)

Покажем, что никакое сверхстройное дерево при $k>3$ не может иметь минимального вершинного 1-расширения с векторами степеней $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$ и $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$.

2. ВЕКТОР $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$

Теорема 2. *Не существует сверхстройных деревьев вида* $(m_1, \dots, m_k)$ *и* $k > 3$*, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет вектор степеней вида* $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$.

Доказательство. В самом деле, предположим, что T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \dots, m_k)$ и $k > 3$, а T^* — его минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$. Обозначим для определенности через v_1 и v_2 вершины степени k, а через v — вершину степени 4 в графе T^*. Рассмотрим граф $T^* - v_1$. Вместе с вершиной v_1 удаляется k ее ребер, поэтому граф $T^* - v_1$ допускает вложение дерева T и отличается от него на одно ребро. Добавление одного ребра к дереву T с вектором степеней $(k, 2^m, 1^k)$ не может привести к появлению отличной от корневой вершины степени 4. При вложении дерева T в граф $T^* - v_1$ образом корневой вершины дерева T может быть или вершина v_2, или при $k = 4$ вершина v.

Рассмотрим сначала случай $k > 4$. Образом корневой вершины дерева T может быть только вершина v_2, а вершина v должна иметь степень меньше 4. Это означает, что вершины v и v_1 в графе T^* должны быть смежными. Аналогично рассмотрев граф $T^* - v_2$, приходим к выводу, что вершины v и v_2 в графе T^* также должны быть смежны. Но тогда в графе $T^* - v$ все вершины будут иметь степень меньше k, и вложение дерева T будет невозможно.

Остается рассмотреть случай $k = 4$. Граф T^* будет иметь вид $(4^3, 2^{m+k-1})$. Обозначим через v_1, v_2 и v_3 вершины степени 4. Рассмотрим удаление одной из этих вершин, например v_1. Так как T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T, то в графе $T^* - v_1$ должна остаться хотя бы одна вершина степени 4. Следовательно, вершина v_1 не может быть смежной одновременно с v_2 и v_3. В то же время в графе $T^* - v_1$, как было установлено ранее, не может остаться две вершины степени 4. Это означает, что вершина v_1 должна быть смежной либо с v_2, либо с v_3. Пусть для определенности вершина v_1 смежная с v_2 и несмежная с v_3. Повторяя рассуждения для графа $T^* - v_3$, мы приходим к выводу, что вершины v_2 и v_3 должны быть смежнми, т. е. вершина v_2 будет смежная и с v_1, и с v_3. Но тогда в графе $T^* - v_2$ не будет вершин степени выше 3, и вложение исходного дерева T будет невозможно. □

При $k = 3$ вектор $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$ совпадает с вектором $(k+1, k, 3, 2^{m+k-1})$, поэтому с учетом теоремы 2 вектор $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$ не представляет интереса для поиска минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев.

3. ВЕКТОР $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$

Теорема 3. *Не существует сверхстройных деревьев вида* $(m_1, \dots, m_k)$ *и* $k > 3$*, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет вектор степеней вида* $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$.

Доказательство. В самом деле, предположим, что T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \dots, m_k)$ и $k > 3$, а T^* — его минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$. Обозначим для определенности через v_1 и v_2 вершины степени k в графе T^*.

Очевидно, что вершины v_1 и v_2 не могут быть смежными. Если бы это было так, то в графе $T^* - v_2$ не было бы вершин степени k. Аналогично, в графе T^* не может быть вершины, смежной одновременно с v_1 и v_2. Если бы была такая вершина w, то в графе $T^* - w$ вершины v_1 и v_2 имели бы степень $k - 1$, и вложение дерева T было бы невозможно.

Рассмотрим граф $T^* - v_2$. Вместе с вершиной v_2 удаляется k ее ребер, поэтому граф $T^* - v_2$ допускает вложение дерева T и отличается от него на одно ребро. Рассмотрим, какой вид может иметь граф $T^* - v_2$ (рис. 3, *а*). Возможны три случая, схематично представленных на рис. 3, *б–г*. В графе $T^* - v_2$ может быть k, $k - 1$ или $k - 2$ вершин степени 1 и соответственно 2, 1 или 0 вершин степени 3.

Исследуем каждый случай.

Случай 1 (рис. 3, *б*). Обозначим через $l_1, \dots, l_k$ длины цепей, выходящих из вершины степени k (это вершина v_1) и заканчивающихся вершиной степени 1. Так как дерево T^* вкладывается в граф $T^* - v_2$, то, не ограничивая общности, получаем, что $m_1 = l_1 - 1, \dots, m_k = l_k - 1$. Как было установлено ранее, $l_k > 2$, а следовательно, $m_k > 1$, т. е. в сверхстройном дереве T не может быть цепи длины 1.

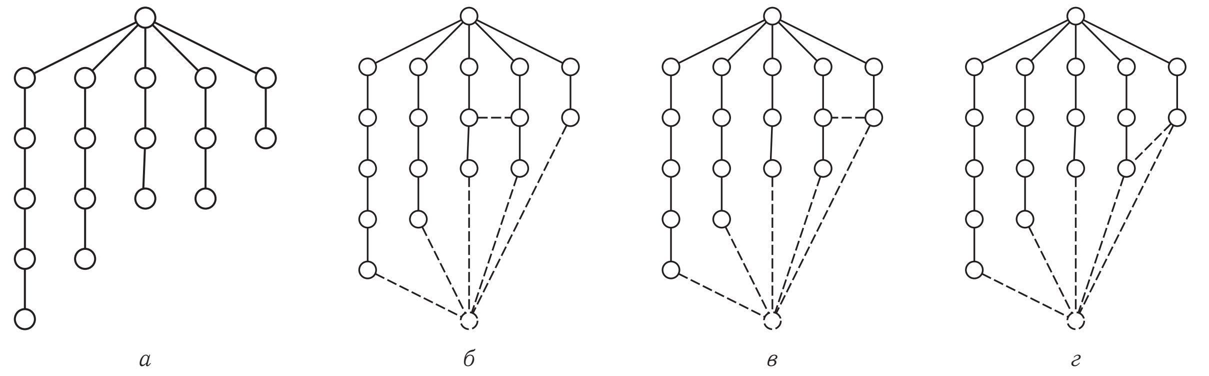


Рис. 3. Граф $T^* - v_2$ (*а*) и три случая для вектора $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ (*б–г*)

Обозначим через v вершину, смежную с вершиной v_2, в цепи длины l_k (т. е. в кратчайшей цепи, соединяющей вершины v_1 и v_2). Рассмотрим граф $T^* - v$. По предположению дерево T должно вкладываться в граф $T^* - v$. Однако в графе $T^* - v$ вершина v_2 имеет степень $k-1$ и, следовательно, образом корневой вершины дерева T при вложении может быть только вершина v_1. Однако из нее выходит цепь длины $m_k - 1$, которая меньше любой цепи в дереве T. Таким образом, этот случай исключается.

Случай 2 (рис. 3, *в*). Обозначим через $l_1, \ldots, l_{k-1}$ длину цепей, выходящих из вершины степени k (это по-прежнему вершина v_1) и заканчивающихся вершиной степени 1. Через l_k обозначим длину последней цепи, выходящей из вершины v_1 и заканчивающуюся вершиной, смежной с единственной вершиной степени 3. Далее, повторяя рассуждения первого случая, приходим к выводу, что и этот случай не возможен.

Случай 3 (рис. 3, *г*). Заметим, что в этом случае вершина v_2 в графе T^* смежна с двумя вершинами степени 3. В силу отмеченного свойства графа T^* вершина v_1 тогда не может быть смежна ни с одной из вершин степени 3, т. е. граф $T^* - v_1$ будет попадать под случай 1 и случай 3 также должен быть исключен. Таким образом, были рассмотрены все три возможных случая и оказалось, что ни в одном из них граф T^* не является вершинным 1-расширением дерева T. □

Полученный результат означает, что если сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и имеет минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$, то это возможно только при $k = 3$. Такие сверхстройные деревья существуют и далее одно из них будет использовано в качестве контрпримера.

4. ВЕКТОР $((k+1)^2, 2^{m+k})$

Как мы уже убедились, существуют сверхстройные деревья, у которых минимальные вершинные 1-расширения имеют вектор степеней вида $((k+1)^2, 2^{m+k})$. Следующая теорема дает полное описание сверхстройных деревьев, у которых минимальные вершинные 1-расширения имеют такой вид.

Теорема 4. *Пусть T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$. Дерево T тогда и только тогда имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k+1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$, когда выполняется условие*

$$(\forall i = 1, \ldots, k : m_i > 1)\ (\forall\, j = 2, \ldots, m_i)\ (\exists\, 1 \le l \le k)\ (m_l = j - 1 \vee m_l = m_i - j). \qquad (1)$$

Доказательство. Заметим, что если в сверхстройном дереве длины всех цепей равны 1, т. е. дерево является звездой, то условие (1) выполняется. Обозначим через T сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$ с корневой вершиной v, а через T^* — граф, получающийся добавлением к дереву T вершины и соединением ее с вершиной v и всеми листьями T. Граф T^* будет иметь вектор степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$. Обозначим две смежные вершины степени $k+1$ через v_1 и v_2.

Необходимость. Пусть граф T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T. Покажем, что высказывание (1) истинно. Рассмотрим одну из ветвей дерева T — цепь P_{m_i}. Перенумеруем ее вершины: $v_1, v_{i1}, \ldots, v_{ir}$. В графе T^* вершина v_{ir} соединена ребром с вершиной v_2 по построению. Рассмотрим удаление некоторой вершины v_{ij}. Граф $T^* - v_{ij}$ имеет в точности две вершины степени не ниже k: v_1 и v_2. Следовательно, только одна из них может быть корнем дерева. Из вершины v_1 выходит начальный фрагмент цепи P_{m_i} — цепь длины $j-1$. Из вершины v_2 выходит концевой фрагмент цепи P_{m_i} — цепь длины $m_i - j$. Если v_1 будет вершиной дерева, изоморфного T, тогда из нее выходит цепь длины $j-1$, а если v_2, то $m_i - j$. Следовательно, цепь одной из этих длин должна существовать в дереве T. Так как цепь P_{m_i} и ее вершина v_{ij} выбраны произвольно, то и получается формула (1).

Достаточность. Пусть высказывание (1) верно. Покажем, что T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T. Убедимся в том, что T^* является вершинным 1-расширением. Очевидно, что T вкладывается в $T^* - v_1$ и $T^* - v_2$. Рассмотрим удаление вершины v_{ij} некоторой цепи P_{m_i}. Не ограничивая общности, будем считать, что $i = 1$. Покажем, что дерево T вкладывается в $T^* - v_{1j}$. Граф $T^* - v_{1j}$ имеет в точности две вершины степени не ниже k: v_1 и v_2. Следовательно, только одна из них может быть корнем дерева. Из вершины v_1 выходит начальный фрагмент цепи P_{m_1} — цепь длины $j-1$. Из вершины v_2 выходит концевой фрагмент цепи P_{m_1} — цепь длины $m_1 - j$. Кроме того, вершины v_1 и v_2 соединены $k-1$ цепями, длины которых $m_2+1, \ldots, m_k+1$.

Если $j = 1$, тогда вложение получается следующим образом: v_1 — корень, цепь $v_1, v_2, v_{1m_1}, \ldots, v_{12}$ — цепь длины m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2}, \ldots, P_{m_k}$.

Если $j = m_1$, то аналогично предыдущему случаю вложение получается так: v_2 — корень, цепь v_2, $v_1, v_{12}, \ldots, v_{1m_1}$ — цепь длины m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2}, \ldots, P_{m_k}$, начиная от v_2, в обратном порядке.

Пусть $j \neq 1$ и $j \neq m_1$. По условию существует цепь, например P_{m_2}, такая, что ее длина равна или $j-1$, или $m_1 - j$. В первом случае v_1 — корень, начало цепи P_{m_1} — цепь длины $j-1$, а цепь $v_1, v_{21}, \ldots, v_{2(j-1)}, v_2, v_{1m_1}, \ldots, v_{1(j+1)}$ имеет длину m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2}, \ldots, P_{m_k}$. Во втором случае v_2 — корень, конец цепи P_{m_1}, начиная с вершины v_2 — цепь длины $m_1 - j$, а цепь $v_2, v_{2m_1}, \ldots, v_{21}, v_1, v_{11}, \ldots, v_{1(j-1)}$ имеет длину m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2}, \ldots, P_{m_k}$, начиная от v_2, в обратном порядке.

Таким образом, граф T^* является вершинным 1-расширением дерева T, причем отличается от дерева T на $k+1$ дополнительное ребро. По теореме 1 дерево T не может иметь расширения с k дополнительными ребрами и, следовательно, граф T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T. □

Замечание. Условие в формулировке теоремы означает, что если мы занумеруем, начиная от корня, все вершины цепи с длиной m_i сверхстройного дерева, то для каждой вершины с номером j в этой цепи должна найтись или цепь длины $j-1$, или цепь длины $m_i - j$. При этом считаем, что цепь длины 0 в дереве есть, поэтому достаточно рассмотреть все вершины цепи, кроме первой и последней. Например, рассмотрим сверхстройное дерево с вектором цепей (4, 1, 1). Проверим, что условие выполняется для большей цепи:

$j = 2$ — цепь длины 1 в дереве есть;

$j = 3$ — цепи длины 2 в дереве нет, но цепь длины $4 - 3 = 1$ в дереве есть.

Таким образом, деревья (2, 1, 1), (3, 1, 1) или (4, 1, 1) подходят под условие теоремы 4. А вот сверхстройное дерево (5, 1, 1) — нет, так как для вершины v_{13} с номером $j = 3$ цепи длины 5 в дереве нет подоходящей цепи длины 2 (см. рис. 5, *а*). Из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно 57 имеют минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на $k+1$ дополнительное ребро. Из них только 3 дерева не попадают под действие теоремы 4. Это сверхстройные деревья с векторами цепей (5, 1, 1), (3, 2, 2) и (4, 3, 2).

По построению минимального вершинного 1-расширения с вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$ очевидно

Следствие. *Пусть T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$. Если дерево T имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k+1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$, то оно имеет только одно минимальное вершинное 1-расширение с таким вектором степеней.*

5. ВЕКТОР $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$

Полного описания данного семейства пока не известно. Рассмотрим некоторые общие идеи построения минимального вершинного 1-расширения по данной схеме. Пусть T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$, а T^* — минимальное вершинное 1-расширение дерева T с вектором степеней $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$. Граф T^* отличается от дерева T на $k+1$ дополнительных ребер. Обозначим через u вершину степени $k+1$, а через v — вершину степени k.

Рассмотрим граф $T^* - u$. Удаление вершины u приводит к удалению $k+1$ ребер, т. е. в получившемся графе будет столько же ребер, как и в дереве T. По предположению дерево T должно вкладываться в граф $T^* - u$, а раз количество ребер одинаково, то граф $T^* - u$ изоморфен дереву T. Это значит, что построение графа T^* можно представить следующим образом. Добавляется вершина u, которая соединяется с k листьями дерева T и еще одним ребром с вершиной степени 2. Таким образом, кандидатов на минимальное вершинное 1-расширение n-вершинного сверхстройного дерева T с вектором степеней $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$ будет менее чем $n-k-1$ штук (очевидно, что достаточно рассматривать по одному представителю от цепей одинаковой длины). Предположим, что последнее ребро соединяет вершину u с некоторой вершиной w степени 2 в цепи длины m_1. Если назначить номера вершинам этой цепи, начиная с вершины, смежной с вершиной v, то пусть номер вершины w будет j. Тогда вершины u и v соединены $k-1$ цепью длины m_i+1, $i = 2, \ldots, n$. Кроме этих цепей из вершины v выходит цепь длины j, конец которой смежен с вершиной u, и кроме ребра $\{u, w\}$, вершины u и w соединены цепью длины $m_1 - j$. Рассмотрим удаление вершины v_{i1}, смежной с вершиной v в некоторой цепи m_i. По предположению дерево T вкладывается в получившийся граф. Образом корневой вершины может быть только вершина u, которая имеет в графе $T^* - v_{i1}$ степень $k+1$. Из вершины u в графе $T^* - v_{i1}$ выходит цепь длины $m_i - 1$, следовательно, в дереве T также должна быть цепь такой длины. Проведенные рассуждения позволяют предложить одно семейство сверхстройных деревьев, представители которого имеют минимальные вершинные 1-расширения с вектором степеней $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$.

Теорема 5. *Пусть T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$ такое, что $m_i - m_{i+1} \leq 1$, $i = 1, \ldots, k-1$. Тогда граф, получающийся из дерева T добавлением одной вершины, соединением ее с листьями дерева T и одной вершиной, смежной с листом, будет являться минимальным вершинным 1-расширением дерева T.*

Доказательство. Покажем, что граф T^*, описанный в формулировке теоремы, будет являться вершинным 1-расширением дерева T, а минимальность будет следовать из теоремы 1. Обозначим, как и ранее, в графе T^* через u вершину степени $k+1$, а через v — вершину степени k. Не ограничивая общности, будем считать, что при построении графа T^* добавленная вершина была соединена с предпоследней вершиной цепи $m_l > 1$: $v_{l(m_l-1)}$ (см. рис. 4).

Убедимся, что при удалении любой вершины графа T^* дерево T можно будет вложить в получившийся граф. Для графов $T^* - u$ и $T^* - v$ вложение дерева T очевидно. Далее исследуем удаление произвольной вершины v_{ij} цепи длины m_i. Как и ранее j — это номер вершины в цепи, начиная от вершины, смежной с вершиной v.

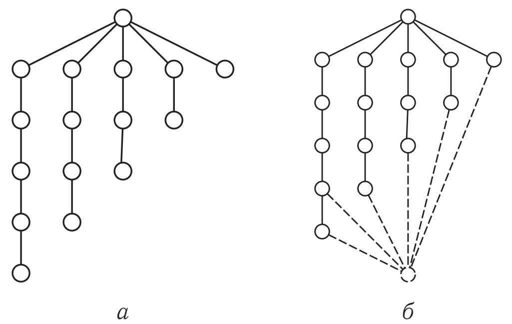


Рис. 4. Дерево (5,4,3,2,1) и схема построения для вектора $(k+1, k, 3, 2^{m+k-2})$

Рассмотрим удаление вершины v_{im_i} цепи $m_i = 1$, т. е. вершины цепи длины 1. Вложение строится следующим образом. Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \ldots, v_{l1}, v$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{i1} цепи $m_i > 1$, $i \neq l$, смежной с вершиной v. Вложение строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T. Остаток цепи m_i будет иметь длину $m_i - 1$ и соответствовать цепи подходящей длины дерева T. Цепи длины m_i дерева T будет соответствовать цепь длины $m_i - 1$ с вершиной v. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{im_i} цепи $m_i > 1$, $i \neq l$, смежной с вершиной u. Вложение строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T. Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепь m_k вместе с ребром $\{v_{k1}, u\}$ и остатком цепи m_i от вершины v длины $m_i - 2$ образуют цепь длины m_i. Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \ldots, v_{l1}$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{lm_l} цепи m_l, смежной с вершиной u. Вложение очевидно и строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T. Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \ldots, v_{l1}, v$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины $v_{l(m_l-1)}$ цепи m_l, смежной с вершиной u. Вложение очевидно и строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T. Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепи m_l будут соответствовать цепь, оставшаяся часть цепи m_l до вершины v длины $m_l - 2$, цепь m_k длины 1 с ребром, соединяющим конец цепи с вершиной u. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление произвольной вершины v_{ij} цепи m_i, не относящейся ни к одному из рассмотренных ранее случаев. Вложение строится следующим образом. Вершина v соответствует корню дерева T. Остаток цепи m_i от вершины v будет иметь длину $j-1$ и соответстовать цепи подходящей длины дерева T. Цепь длины $j-1$ вместе с вершиной u и остатком цепи m_i от вершины u будет соответстовать цепи m_i. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Таким образом, граф T^*, построенный по описанной схеме, действительно является вершинным 1-расширением сверхстройного дерева T из условия теоремы, а в силу теоремы 1 и его минимальным вершинным 1-расширением. □

Следствие 1. *Пусть T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$ такое, что $m_i - m_{i+1} \leq 1$, $i = 1, \ldots, k-1$. Тогда дерево T имеет, по крайней мере, m_1 различных минимальных вершинных 1-расширений, отличающихся от T на $k+1$ дополнительное ребро.*

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что различных минимальных вершинных 1-расширений с вектором степеней $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$ будет, по крайней мере, столько, сколько есть различных цепей длины, отличной от 1, т. е. $m_1 - 1$. Заметим, что дерево из условия теоремы также попадает и под действие теоремы 4, что дает еще одно минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$. Итого получается, что количество минимальных вершинных 1-расширений не менее чем m_1. □

Рассмотрим сверхстройное дерево T, являющееся объединением цепей длины 1 и 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна цепь длины 2. Такое дерево попадает под условие и теоремы 4 и теоремы 5. А с учетом теоремы 3 получается

Следствие 2. *Пусть сверхстройное дерево T является объединением k ($k > 3$) цепей длинами не более 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна цепь длины 2. Тогда дерево T имеет в точности два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, которые строятся по схемам из теоремы 4 и теоремы 5.*

6. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА

Заметим, что любой граф имеет вершинное k-расширение с k дополнительными вершинами. Действительно, добавим к данному графу k вершин и соединим их ребрами между собой и со всеми вершинами графа. Очевидно, что полученный граф будет являться вершинным k-расширением. Такое вершинное k-расширение называется *тривиальным*. Число дополнительных ребер составит $k(k-1)/2 + nk$, где n — число вершин исходного графа. Таким образом, тривиальное вершинное k-расширение позволяет получить простейшую верхнюю оценку для числа дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения произвольного графа. При $k = 1$ получаем, что число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного n-вершинного графа не более n.

В статье [4] было высказано более сильное утверждение по сравнению с теоремой 4. Прежде чем перейти к его формулировке, дадим одно определение. Вершина v_{ij} сверхстройного дерева T называется *сложной*, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j-1$ или $m_i - j$. В теореме 4 рассматриваются сверхстройные деревья без сложных вершин. Сверхстройное деревое (5, 1, 1) из предыдущего примера имеет одну сложную вершину — вершину v_{13}.

Утверждение [4]. *Минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами содержит в точности $k+p+1$ дополнительных ребер.*

При $p = 0$ приведенное утверждение совпадает с теоремой 4. Однако при $p > 0$ схема доказательства в [4] исследует вариацую вершинного 1-расширения с вектором $((k+1)^2, 2^{m+k})$. Пусть v_{ij} — сложная вершина, тогда предлагается добавить ребро из вершины старшей степени в вершину $v_{i(j-1)}$. Далее в [4] утверждается, что построенный граф будет являться минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева. Однако ниже будет показано, что в общем случае построенный граф будет являться вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным.

Как было указано ранее, из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 есть деревья, которые не попадают под действие теоремы 4, но имеют $k+1$ дополнительное ребро. Оказывается, что все они являются контрпримерами к утверждению [4].

Сверхстройное дерево (5, 1, 1) имеет одну сложную вершину, но имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$, отличающееся на 4 дополнительных ребра.

Сверхстройное дерево (3, 2, 2) также имеет одну сложную вершину, но имеет 2 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ и одно вида $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$, отличающихся на 4 дополнительных ребра.

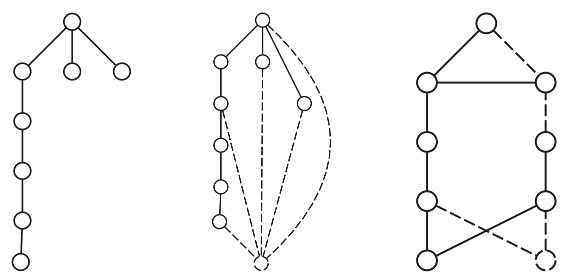
Наконец, сверхстройное дерево (4, 3, 2) имеет одну сложную вершину, но имеет 4 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$, отличающихся на 4 дополнительных ребра.

Еще один интересный пример представляет собой сверхстройное дерево (5, 2, 2). Можно заметить, что оно имеет две сложные вершины, но его 37 минимальных вершинных 1-расширений отличаются на 5, а не на 6 дополнительных ребер. Аналогичная ситуация с деревьями (6, 1, 1) или (3, 3, 2), у которых также по две сложные вершины, но минимальные вершинные 1-расширения отличаются на 5 дополнительных ребер.

Самое большое отклонение среди всех сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 наблюдается на сверхстройном дереве (7, 1, 1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно имеет 3 сложные вершины, но его 8 минимальных вершинных 1-расширений отличаются на 5, а не на 7 дополнительных ребер. Можно предположить, что на серхстройных деревьях вида $(t, 1, 1)$ (количество сложных вершин в таких деревьях составляет $t-3$, при $t > 3$) при увеличении t отклонение будет возрастать.

Каждый из этих контрпримеров показывает ошибочность утверждения в общем случае. Исследуем первый контрпример более подробно.

Пример. Рассмотрим сверхстройное дерево T с вектором цепей (5, 1, 1). На рис. 5, *а* изображено это дерево. При непосредственной проверке убеждаемся, что единственной сложной вершиной является вершина v_{13} — вершина цепи длины 5. Действительно, в дереве T нет цепи длины 2 ($j-1 = 3-1 = 2$, $m_1 - j = 5-3 = 2$). На рис. 5, *б*, изображено вершинное 1-расширение, построенное по схеме [4]. Это расширение отличается на 5 дополнительных ребер. На самом деле это вершинное 1-расширение не является минимальным, и на рис. 5, *в* изображено единственное минимальное вершинное 1-расширение дерева T с вектором степеней $(3^4, 2^5)$, которое отличается на 4 дополнительных ребра. Пунктирными линиями обозначаются добавленные вершина и ребра.



а *б* *в*

Рис. 5. Сверхстройное дерево (5,1,1) и два его вершинных 1-расширения

Убедимся, что граф на рис. 5, *в* действительно является вершинным 1-расширением сверхстройного дерева (5, 1, 1). В силу очевидной симметрии достаточно рассмотреть графы, получающиеся при удалении верхней вершины и вершин, расположенных слева от нее. На рис. 6 показано вложение рассматриваемого дерева при удалении соответствующих вершин. Толстой линией выделена вершина, являющаяся образом корневой вершины, а лишние ребра обозначаются пунктирными линиями. Доказательство минимальности следует из теоремы 1.

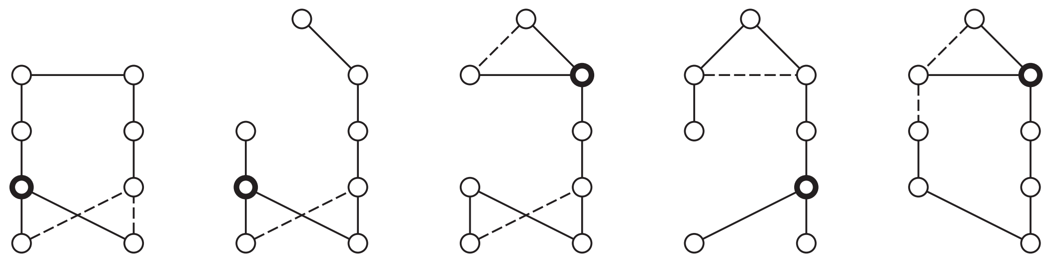


Рис. 6. Вложение дерева (5, 1, 1) при удалении различных вершин

Ошибка в работе [4] состояла в том, что исследовалась лишь схема $((k+1)^2, 2^{m+k})$, а другие возможности не рассматривались. Другими словами, исследовалась схема, в которой добавляется одна вершина и соединяется ребрами с некоторыми из остальных вершин. Вершинное k-расширение графа G называется *T-неприводимым*, если оно является частью тривиального k-расширения графа G, но никакая его собственная часть не является вершинным k-расширением графа G. По сути, авторы работы [4] описали Т-неприводимые 1-расширения сверхстройных деревьев. Однако с точки зрения минимальных вершинных 1-расширений этот результат может использоваться лишь как верхняя оценка. Следует отметить, что существуют сверхстройные деревья с $p > 0$, на которых эта верхняя оценка достигается. Например, сверхстройное дерево $(5, 1, 1, 1)$ имеет одну сложную вершину и 6 минимальных вершинных 1-расширений, отличающихся на 6 дополнительных ребер. Одно из этих расширений имеет указанный в работе [4] вид. Аналогичная ситуация возникает для сверхстройного дерева $(6, 1, 1)$. Таким образом, нижняя и верхняя оценки для числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами являются достижимыми, и можно сформулировать заключительный результат работы:

$$k \le ec(T) \le k + p.$$

Библиографический список

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. 25, № 9. P. 875–884.
2. *Harary F., Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27. P. 19–23.
3. *Harary F., Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.
4. *Harary F., Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Intern. J. Comput. Math. 1995. Vol. 56. P. 135–143.
5. *Кабанов М. А.* Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов, 1997. Вып. 1. С. 50–58.
6. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.
7. *Абросимов М. Б., Комаров Д. Д.* Минимальные вершинные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / Сарат. гос. ун-т. Саратов, 2010. 38 с. Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010, № 590-В2010.
8. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
9. *Абросимов М. Б.* О нижней оценке числа ребер минимального реберного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 2. С. 111–117.
10. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997. 368 с.
11. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2006. Вып. 7. С. 3–5.