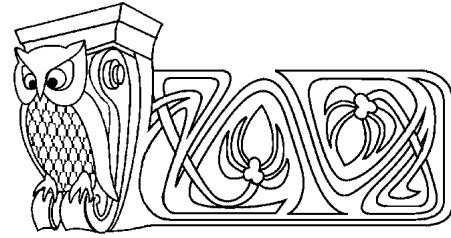




УДК 531.3; 534.1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ С ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ В СОЕДИНЕНИИ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГОЙ ПРОКЛАДКОЙ



В. К. Манжосов, И. А. Новикова

Ульяновский государственный технический университет
E-mail: v.manjosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru

Рассмотрен процесс преобразования продольной волны деформации на границе разнородных стержней с упругой прокладкой. Изложена методика расчета процесса преобразования волны деформации линейной формы. Определены параметры волны, прошедшей через соединение стержней.

Ключевые слова: волна деформации, волновые уравнения, метод бегущих волн, преобразование волны деформации, стержневая система, сопряжение стержней с упругой прокладкой.

The Transformation of Longitudinal The Strain Wafe Having a Linear Form and Increasing Intensity in Conjugation of Rods with Elastic Gasket

V. K. Manzhosov, I. A. Novikova

The paper gives a review of transformation of longitudinal strain wave at the boundary of heterogeneous rods with elastic gasket. The article describes a technique for calculating the transformation of the strain wave of linear form. Parameters of the wave, which have passed through connection of rods are defined.

Key words: strain wave, wave equations, traveling wave method, transformation of the strain wave, rod system, conjugation of rods with elastic gasket.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прогнозирование поведения волны деформации на границе сопряжения стержней актуально при создании систем, обеспечивающих перенос энергии сформированных при ударе продольных волн к технологической среде [1, 2]. Если в стержневой системе имеются соединения разнородных участков, то на границе сопряжения возникают процессы, связанные с отражением и трансформацией волн [3–5].

В данной работе рассмотрена задача о преобразовании продольной волны деформации линейной формы с возрастающей интенсивностью в соединении разнородных стержней. Схема стержневой системы изображена на рис. 1. На границу $x = x_1$ со стороны стержня 1 падает прямая волна.

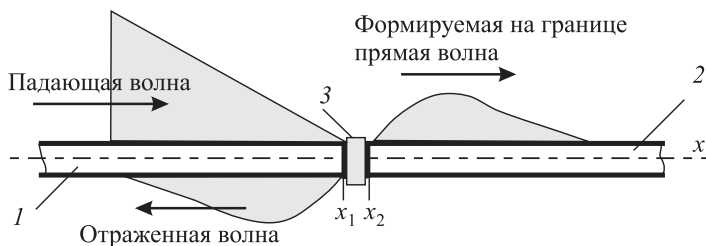


Рис. 1. Схема стержневой системы

Параметры падающей волны считаются известными. Между стержнями 1 и 2 размещена упругая прокладка 3. Требуется определить формируемую в сечении $x = x_2$ прямую волну, распространяющуюся в направлении оси x по стержню 2, и отраженную волну, формирующуюся в сечении $x = x_1$ и распространяющуюся по стержню 1 в другом направлении.

1. ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Движение сечений рассматриваемой динамической системы описывается волновыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — смещения сечений соответственно стержней 1 и 2; a_1 , a_2 — скорости распространения волн деформаций в стержнях; x — координата поперечного сечения; t — время.

Начальное состояние системы описывается равенствами при $t = 0$:

$$u_1(x, 0) = u(x), \quad u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = v(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2)$$



Граничные условия рассматриваемой динамической системы имеют вид для сопряженных сечений стержней при $x = x_1 = x_2 = 0$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x}, \quad E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -k[u_1(0, t) - u_2(0, t)], \quad (3)$$

для $x = -\infty$ $E_1 A_1 \frac{\partial u_1(-\infty, t)}{\partial x} = 0$, для $x = \infty$ $E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\infty, t)}{\partial x} = 0$,

где k — жесткость упругого элемента; E_1, E_2 — модули упругости материалов стержней; A_1, A_2 — площади поперечных сечений стержней.

По методу бегущих волн решения уравнений (1) предоставляются в виде

$$u_1(x, t) = f_1(a_1 t - x) + \varphi_1(a_1 t + x), \quad -\infty \leq x \leq 0,$$

$$u_2(x, t) = f_2(a_2 t - x) + \varphi_2(a_2 t + x), \quad 0 \leq x \leq \infty,$$

где $f_1(a_1 t - x), f_2(a_2 t - x)$ — функции, описывающие волны деформации, распространяющиеся слева направо (прямые волны); $\varphi_1(a_1 t + x), \varphi_2(a_2 t + x)$ — функции, описывающие волны деформации, распространяющиеся справа налево (обратные волны).

Так как стержень 2 полуограниченный и в начальный момент времен находится в состоянии покоя, то из начальных условий (2) можно принять, что $\varphi_2(a_2 t + x) = 0$. Тогда

$$u_1(x, t) = f_1(a_1 t - x) + \varphi_1(a_1 t + x), \quad u_2(x, t) = f_2(a_2 t - x). \quad (4)$$

Продифференцируем последние равенства по x :

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = -f_1'(a_1 t - x) + \varphi_1'(a_1 t + x), \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = -f_2'(a_2 t - x).$$

Для сечения $x = 0$

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = -f_1'(a_1 t - 0) + \varphi_1'(a_1 t + 0), \quad \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -f_2'(a_2 t - 0). \quad (5)$$

Используя (5) в первом граничном условии (3), получим

$$\varphi_1'(a_1 t + 0) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f_2'(a_2 t - 0) + f_1'(a_1 t - 0). \quad (6)$$

Рассмотрим второе граничное условие (3) с учетом (4) и (5) при $x = 0$:

$$E_2 A_2 f_2'(a_2 t - 0) = k[f_1(a_1 t - 0) + \varphi_1(a_1 t + 0) - f_2(a_2 t - 0)].$$

Дифференцируя по t , приходим к равенству

$$f_2''(a_2 t - 0) = \frac{k a_1}{E_2 A_2 a_2} \left[2f_1'(a_1 t - 0) - \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f_2'(a_2 t - 0) - \frac{a_2}{a_1} f_2'(a_2 t - 0) \right].$$

Данное уравнение преобразуем к виду

$$f_2''(a_2 t - 0) + \frac{k(r+1)}{E_2 A_2 r} f_2'(a_2 t - 0) = \frac{2k a_1}{E_2 A_2 a_2} f_1'(a_1 t - 0), \quad (7)$$

где $r = \frac{E_1 A_1}{a_1} \frac{a_2}{E_2 A_2}$ — отношение волнового сопротивления $\frac{E_1 A_1}{a_1}$ стержня 1 к волновому сопротивлению $\frac{E_2 A_2}{a_2}$ стержня 2.

Обозначим отношения $\frac{k(r+1)}{E_2 A_2 r} = \alpha$, $\frac{2k a_1}{E_2 A_2 a_2} = \beta$. Тогда из (7) для сечения $x = 0$

$$f_2''(a_2 t - 0) + \alpha f_2'(a_2 t - 0) = \beta f_1'(a_1 t - 0). \quad (8)$$



Введём переменную $\xi = a_2t - 0$. Решение дифференциального уравнения (8) представим как

$$f'_2(\xi) = V(\xi)Z(\xi), \quad (9)$$

$$V(\xi) = C_1 \exp(-\alpha\xi), \quad Z(\xi) = \int \frac{\beta f'_1(a_1t - 0)}{V(\xi)} d\xi + C_2, \quad (10)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решение (9) зависит от функции $f'_1(a_1t - 0)$, определяющей параметры волны деформации, падающей на границу сопряжения стержней от стержня 1.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ С ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

Рассмотрим процесс преобразования линейной волны $f'_1(a_1t - 0)$ и формирования в стержне 2 волны $f'_2(a_2t - 0)$. Предположим, что подходящая к упругому элементу волна деформации имеет треугольную форму с возрастающей интенсивностью. Схема стержневой системы изображена на рис. 2.

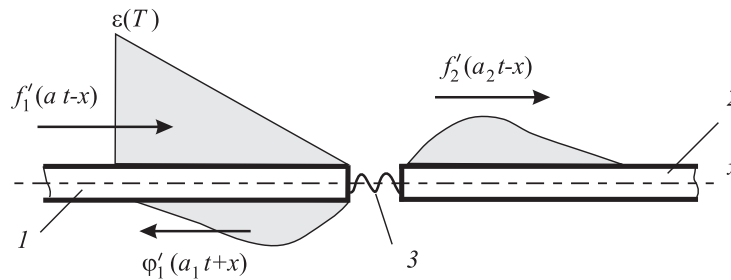


Рис. 2. Схема стержневой системы при падающей треугольной волне деформации с возрастающей интенсивностью: 1, 2 — стержни системы, 3 — упругий элемент

Функция $f'_1(a_1t - 0)$, определяющая параметры волны деформации, падающей на границу сопряжения стержней со стороны стержня 1, имеет вид

$$f'_1(a_1t - 0) = \begin{cases} \varepsilon(T) \frac{t}{T} = \varepsilon(T) \frac{a_2t}{a_2T} = \varepsilon(T) \frac{\xi}{a_2T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \quad (11)$$

где $\varepsilon(T)$ — значение функции $f'_1(a_1t - 0)$ при $t = T$, T — длительность действия падающей волны, t — время, $\xi = (a_2t - 0)$ — новая переменная.

Учитывая (11) в (10) при определении функции $Z(\xi)$, находим

$$Z(\xi) = \frac{\beta\varepsilon(T)}{C_1 a_2 T} \int \xi \exp(\alpha\xi) d\xi = \frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T C_1} \left[\frac{\exp(\alpha\xi)}{\alpha^2} (\alpha\xi - 1) \right] + C_2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Решение (9) с учётом (10) и найденного значения функции $Z(\xi)$ на интервале $0 \leq t \leq T$ примет вид

$$f'_2(\xi) = V(\xi)Z(\xi) = \frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T} \cdot \frac{1}{\alpha^2} (\alpha\xi - 1) + C \exp(-\alpha\xi), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

Постоянную интегрирования C найдём из условия, что в начальный момент времени при $\xi = 0$ упругий элемент не деформирован и значение $f'_2(0) = 0$. Тогда имеем

$$0 = -\frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + C, \quad C = \frac{\beta\varepsilon(T)}{a_2 T} \cdot \frac{1}{\alpha^2}.$$

Подставляя в (12), получим

$$f'_2(a_2t - 0) = \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 t - 1 + \exp(-\alpha a_2 t)), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$



Рассмотрим процесс формирования волны деформации $f'_2(\xi)$ после завершения действия падающей волны на интервале $t \geq T$, когда $f'_1(a_1t - 0) = 0$. Учитывая в (10) при определении функции $Z(\xi)$, что на интервале $t \geq T$ функция $f'_1(a_1t - 0) = 0$, находим

$$Z(\xi) = \int \frac{\beta f'_1(a_1t - 0)}{V(\xi)} d\xi + C_2 = C_2, \quad t \geq T,$$

а решение (9) на интервале $t \geq T$ представим как

$$f'_2(\xi) = C \exp(-\alpha\xi), \quad t \geq T. \quad (14)$$

Постоянную интегрирования C найдём из условия, что в момент времени $t = T$ значение функции $f'_2(\xi)$ определяется из (13) при $\xi = a_2T$:

$$f'_2(a_2T) = \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)).$$

Тогда из (14) при $\xi = a_2T$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) &= C \exp(-\alpha a_2 T), \\ C &= \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\exp(\alpha a_2 T)}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)). \end{aligned}$$

Подставив значение C в (14), получим

$$f'_2(a_2t - 0) = \varepsilon(T) \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 (t - T)), \quad t \geq T.$$

Итак, если падающая волна $f'_1(a_1t - 0)$ имеет треугольную форму с ростом интенсивности, то формируемая в стержне 2 волна деформации $f'_2(a_2t - 0)$ имеет вид

$$f'_1(a_1t - 0) = \begin{cases} \varepsilon(T)t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & t \geq T. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{f'_2(a_2t - 0)}{\varepsilon(T)} = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 t - 1 + \exp(-\alpha a_2 t)), & 0 \leq t \leq T, \\ \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 (t - T)), & t \geq T. \end{cases}$$

Из (6) формируемая в сечении $x = 0$ обратная волна определяется как

$$\varphi'_1(a_1t + 0) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \cdot \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2} f'_2(a_2t - 0) + f'_1(a_1t - 0) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{a_2}{a_1} f'_2(a_2t - 0) + f'_1(a_1t - 0).$$

Для большей универсальности в применении целесообразно перейти к относительным величинам при определении падающей и формируемых волн. Так, относительное значение функции падающей прямой волны имеет вид

$$\tilde{f}'_1(a_1t - 0) = \frac{f'_1(a_1t - 0)}{\varepsilon(T)} = \begin{cases} \frac{t}{T}, & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ 0, & \frac{t}{T} \geq 1. \end{cases}$$

Относительное значение функции формируемой в сечении x прямой волны $\tilde{f}'_2(a_2t - 0) = f'_2(a_2t - 0)/\varepsilon(T)$ определится следующим образом:

$$\tilde{f}'_2(a_2t - 0) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 t - 1 + \exp(-\alpha a_2 t)), & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha a_2 T} (\alpha a_2 T - 1 + \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 T (t/T - 1)), & \frac{t}{T} \geq 1. \end{cases}$$



Относительное значение функции $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ найдем как

$$\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0) = \frac{\varphi'_1(a_1t + 0)}{\varepsilon(T)} = -\frac{1}{r} \frac{a_2}{a_1} \tilde{f}'_2(a_2t - 0) + \tilde{f}'_1(a_1t - 0). \quad (15)$$

При расчете значений $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ и $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ целесообразно учитывать, что

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2}, \quad \alpha a_2 t = \frac{k}{E_2 A_2} \cdot \frac{r+1}{r} a_2 t = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t},$$

$$\alpha a_2 T = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \cdot \frac{T}{\Delta T} = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}, \quad \frac{t}{T} = \frac{t}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}},$$

где Δl – единица длины стержня 2, $\tilde{k} = k \cdot \Delta l / (E_2 A_2)$ – отношение жесткости упругого элемента к продольной жесткости единицы длины стержня 2, $\Delta T = \Delta l / a_2$ – время прохождения волной деформации расстояния Δl во втором стержне, $\tilde{t} = t / \Delta T$ – отношение текущего времени t к ΔT , $\tilde{T} = T / \Delta T$ – отношение длительности падающей волны T к ΔT . С учетом представленных равенств имеем:

$$\tilde{f}'_1(a_1t - 0) = \begin{cases} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}}, & 0 \leq \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \leq 1, \\ 0, & \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \geq 1, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0) = -\frac{1}{r} \frac{a_2}{a_1} \tilde{f}'_2(a_2t - 0) + \tilde{f}'_1(a_1t - 0),$$

$$\frac{\tilde{f}'_2(a_2t - 0)}{\frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2}} = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} - \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}} \right), & 0 \leq \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \leq 1, \\ \left(1 - \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}\right)}{\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}} \right) \cdot \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T} \left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} - 1\right)\right), & \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

В таблице представлены результаты расчета падающей волны $f'_1(a_1t - 0)$ и формируемых в сечении x прямой $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ и обратной $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ волн.

$\tilde{T} = 1, \tilde{k} = 1, r = 1$				$\tilde{T} = 1, \tilde{k} = 2, r = 1$		$\tilde{T} = 1, \tilde{k} = 5, r = 1$	
\tilde{t}	\tilde{f}'_1	\tilde{f}'_2	$\tilde{\varphi}'_1$	\tilde{f}'_2	$\tilde{\varphi}'_1$	\tilde{f}'_2	$\tilde{\varphi}'_1$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,2	0,03516	0,16484	0,062332	0,137668	0,137668	0,086466
0,4	0,4	0,124664	0,275336	0,200474	0,199526	0,301832	0,098168
0,6	0,6	0,250597	0,349403	0,372679	0,227321	0,500248	0,099752
0,8	0,8	0,400948	0,399052	0,560191	0,239809	0,700034	0,099966
1	1	0,567668	0,432332	0,754579	0,245421	0,900005	0,099995
			-0,56766		-0,75457		-0,90000
1,2	0	0,380519	-0,38052	0,339054	-0,33905	0,121802	-0,1218
1,4	0	0,25507	-0,25507	0,152347	-0,15235	0,016484	-0,01648
1,6	0	0,170978	-0,17098	0,068454	-0,06845	0,002231	-0,00223
1,8	0	0,11461	-0,11461	0,030758	-0,03076		
2	0	0,076825	-0,07683	0,013821	-0,01382		
2,1	0	0,062899	-0,0629	0			

Диаграммы волн для $\tilde{k} = 1$ (относительная длительность падающей волны $\tilde{T} = 1$, отношение волновых сопротивлений $r = 1$, скорости распространения волн $a_1 = a_2$) приведены на рис. 3.

Значение формируемой в стержне 2 прямой волны сжатия $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ экспоненциально растет на интервале $0 \leq t \leq T$ и при $t = T$ достигает максимума. Максимальное значение $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ меньше 1. Отраженная волна $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ также изменяется по экспоненте и представляет волну растяжения.

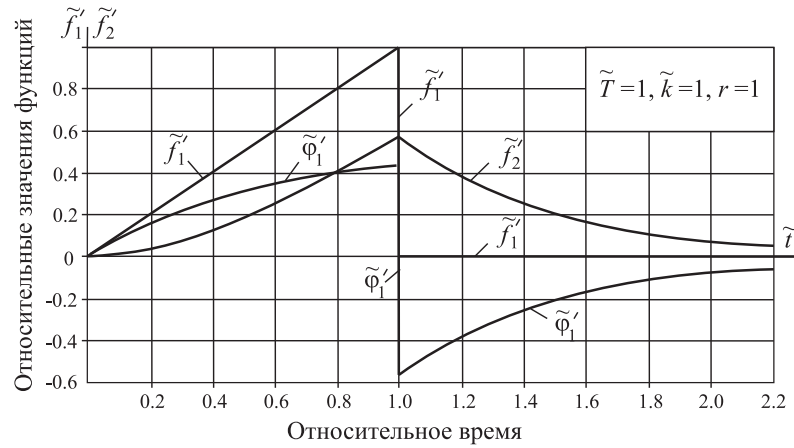


Рис. 3. Диаграммы падающей волны $f_1'(a_1t - 0)$ и формируемых на границе сопряжения прямой $f_2'(a_2t - 0)$ и обратной $\varphi_1'(a_1t + 0)$ волн при $\tilde{k} = 1$

При $\tilde{t} > 1$ падающая волна $f_1'(a_1t - 0) = 0$. Однако волна $f_2'(a_2t - 0)$ продолжает формироваться за счет потенциальной энергии, накопленной в упругом элементе. Волна $\varphi_1'(a_1t + 0)$ с этого момента — уже не отраженная доля падающей волны, а формируемая упругим элементом волна сжатия.

При $\tilde{t} \rightarrow \infty$ значение $f_2'(a_2t - 0) \rightarrow 0$. Длительность формируемых волн $f_2'(a_2t - 0)$ и $\varphi_1'(a_1t + 0)$ превышает длительность падающей волны.

На рис. 4 представлены диаграммы волн при жесткости $\tilde{k} = 5$.

С увеличением жесткости упругого элемента формируемая волна $f_2'(a_2t - 0)$ приближается по параметрам к падающей волне $f_1'(a_1t - 0)$. Увеличивается ее максимальное значение, сокращается длительность. Если жесткость упругого элемента \tilde{k} стремится к бесконечности, то слагаемое $\frac{r}{r+1} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k} \tilde{T}}$ в формуле (16) стремится к нулю, а функция $f_2'(a_2t - 0)$ стремится к значению

$$\frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} f_1'(a_1t - 0).$$

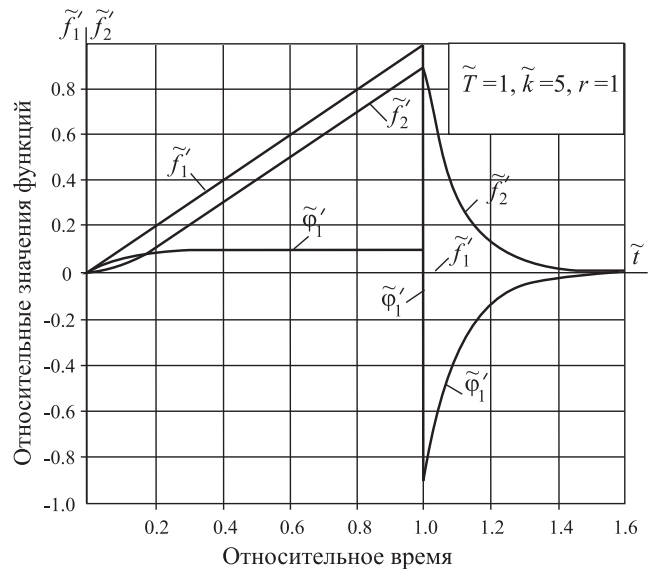


Рис. 4. Диаграммы падающей волны $f_1'(a_1t - 0)$ и формируемых на границе сопряжения прямой $f_2'(a_2t - 0)$ и обратной $\varphi_1'(a_1t + 0)$ волн при $\tilde{k} = 5$

ВЫВОДЫ

На границе сопряжения стержней при наличии упругого элемента падающая волна трансформируется даже при равных волновых сопротивлениях стержней. Значение формируемой волны в стержне 2 прямой волны $f_2'(a_2t - 0)$ экспоненциально растет на интервале $0 \leq t \leq T$ и при $t = T$ достигает максимального значения:

$$f_2'(a_2T) = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left(1 - \frac{r}{r+1} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}\right)}{\tilde{k} \tilde{T}} \right).$$

На интервале $0 \leq t \leq T$ формируемая в стержне 1 обратная волна $\varphi_1'(a_1t + 0) > 0$ представляет волну растяжения.

На интервале $t \geq T$ волна $f_1'(a_1t - 0) = 0$ и процесс формирования волны $f_2'(a_2t - 0)$ продолжается за счет потенциальной энергии упругого элемента, накопленной в нем на интервале $0 \leq t \leq T$. На



данном интервале формируемые прямая $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ и обратная $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + 0)$ волны представляют волны сжатия.

С увеличением жесткости упругого элемента формируемая в стержне 2 волна деформации $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ приближается по форме к падающей волне, уменьшается ее длительность, увеличивается максимальное значение.

На интервале $0 \leq t \leq T$ с учетом, что $\tilde{f}'_1(a_1t - 0) = \tilde{t}/\tilde{T}$,

$$\tilde{f}'_2(a_2t - 0) = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left(\tilde{f}'_1(a_1t - 0) - \frac{r}{r+1} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k}\tilde{T}} \right), \quad 0 \leq \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} \leq 1.$$

Если жесткость упругого элемента \tilde{k} стремится к бесконечности, то слагаемое $\frac{r}{r+1} \times \frac{1 - \exp\left(-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}\right)}{\tilde{k}\tilde{T}}$ стремится к нулю, а функция $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ стремится к значению $\frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \tilde{f}'_1(a_1t - 0)$.

Если стержни из одного материала ($a_1 = a_2$) и имеют равные волновые сопротивления ($r=1$), то при $\tilde{k} \rightarrow \infty$ функция $\tilde{f}'_2(a_2t - 0) \rightarrow \tilde{f}'_1(a_1t - 0)$.

Это означает, что при $\tilde{k} \rightarrow \infty$ формируемая в стержне 2 волна деформации $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$ стремится воспроизвести падающую волну $\tilde{f}'_1(a_1t - 0)$.

Библиографический список

1. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Распространение волн деформаций в ударных системах. М., 1985. 354 с.
2. Дворников Л. Т., Жуков И. А. Продольный удар полукатеноидальным бойком. Новокузнецк, 2006. 80 с.
3. Манжосов В. К. Продольный удар. Ульяновск, 2006. 358 с.
4. Еремьянц В. Э., Невенчаный Ю. В., Писаренко Н. Г. Ударное нагружение оснащенных стержней. Фрунзе, 1987. 165 с.
5. Саруев Л. А., Слестин А. П., Авдеева А. И. Передача энергии по ставу штанг при продольном импульсном воздействии. Томск, 1995. 6 с. Деп. в ВИНТИ 29.11.95, № 3164-B95.

УДК 539.3+622.831

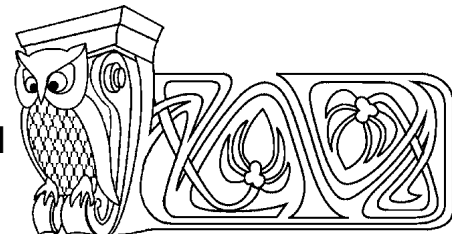
ГРАФОВЫЙ ПОДХОД ПРИ ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

А. А. Тырымов

Волгоградский государственный технический университет
E-mail: tyrymov2010@yandex.ru

Предлагается численный метод анализа упругой среды на основе дискретной модели в виде ориентированного графа. В процессе анализа на основе графового подхода тело рассекается на элементы и для каждого из них строим элементарную ячейку (подграф), являющуюся его моделью. Используя матрицы, представляющие структурные элементы графа, а также уравнения, описывающие разрезанное тело, можно получить уравнения связанного тела. Приведены числовые примеры.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория упругости, ориентированный граф, деформация, напряжения.



Graph Approach for Finite-Element Based Model of an Elastic Body Under Conditions of Axisymmetric Deformation

A. A. Tyrymov

A numerical method for analysis of the stress – strain state of elastic media based on a discrete model in form of directed graph is suggested. To analyze a deformable body using the graph approach, we partitione a solid body on elements and replace each element by its model in the form of an elementary cell. The matrices, presenting several structure elements of the graph, and the equations, describing the elementary cells, contribute to deriving the constitutive equations of the intact body. Numerical examples are presented.

Key words: mathematical simulation, elasticity, directed graph, strain, stress.

Из инженерной практики известно, что элементы многочисленных конструкций имеют форму тел вращения. Во многих случаях геометрия и система нагружения таковы, что исследование напряженного состояния трехмерных тел можно заменить решением соответствующей осесимметричной задачи. В настоящее время одним из самых эффективных и распространенных методов для решения задач механики сплошной среды является метод конечных элементов (МКЭ). Описанию этого метода,