6. *Каузерер К.* Нелинейная механика. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 240 с.

7. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.

8. Maxima, a Computer Algebra System. URL: http://maxima.sourceforge.net/ (дата обращения 28.02.10).

9. *Блинков Ю. А., Гердт В. П.* Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. 2008. Т. 34, № 2. С. 67–80.

10. *Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В.* Генерация разностных схем для уравнения Бюргерса построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. Т. 32, № 2. С. 71–74.

11. SciPy.org. URL: http://www.scipy.org (дата обращения 28.02.10).

УДК 519.713

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Д. О. Матов

Саратовский государственный университет
E-mail: MatovDO@info.sgu.ru

Рассматривается подкласс аффинных преобразований геометрических образов автоматов. Приводятся результаты исследования свойств и вида рассматриваемых преобразований.

Ключевые слова: автомат, геометрический образ, аффинное преобразование.

Affine Transformations of Geometrical Images of Finite Automata

D. O. Matov

A subclass of affine transformations on the set of geometrical images of finite automata is investigated. The results about the characteristics and the form of these transformations are described.

Key words: automaton, geometrical image, affine transformation.

ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется поведение конечных детерминированных автоматов, заданных в виде геометрических образов.

При решении различных задач, связанных с автоматами, как правило, используются традиционные способы задания автоматов (таблицы, графы, матрицы переходов и т.п.). Однако находят свое применение и относительно новые способы задания функционирования автоматов. В 1994 году В. А. Твердохлебовым был предложен геометрический подход к изучению автоматов. В рамках этого подхода поведение автомата отображается в геометрических фигурах, в частности, в кривых на плоскости. Была разработана дискретная словарная геометрия, и к изучению поведения автоматов был привлечен аппарат непрерывной математики, в том числе многие инструменты геометрии. Тогда впервые появилось понятие «геометрический образ автомата» как некоторая геометрическая фигура, содержащая в себе всю информацию о его поведении. В 1999 году Л. Б. Тяпаев в рамках геометрического подхода предложил в качестве геометрического образа автомата рассматривать множество точек на плоскости с рациональными координатами. Были рассмотрены многие задачи анализа, синтеза, эквивалентности и распознавания автоматов на основе их задания геометрическими образами [1]. Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней используется предложенный Л. Б. Тяпаевым способ построения геометрических образов автоматов.

Основным объектом исследования являются аффинные преобразования множеств точек, представляющих геометрические образы конечных детерминированных автоматов.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ АВТОМАТОВ

Пусть автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S — множество состояний, X, Y — входной и выходной алфавиты, $\delta : S \times X \to S$, $\lambda : S \times X \to Y$ — функции переходов и выходов соответственно. Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. С инициальным автоматом (A, s) связано автоматное отображение $\Lambda_A^s : X^* \to Y^*$. Геометрическое пространство Γ для автомата (A, s) определяется по следующему алгоритму [1].

1. Сопоставим элементам множества X натуральные числа от 1 до n, т.е. осуществим взаимно однозначное отображение $f : X \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Определим координатную ось абсцисс $\tilde{X}$ для пространства Γ как отрезок числовой оси $[0, n+1]$.

3. Каждому слову $p = x_{i1} \ldots x_{ik}$ сопоставим вектор $\omega = (f(x_{i_1}), \ldots f(x_{i_k}))$, т. е. осуществим взаимно однозначное соответствие $g : X^* \to V_N$, где V_N — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа.

4. Каждому такому вектору $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ взаимно однозначно сопоставим точку $\tilde{x} \in Q$ на оси абсцисс:

$$\tilde{x} = \frac{\omega_1}{(n+1)^0} + \frac{\omega_2}{(n+1)^1} + \frac{\omega_3}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{\omega_k}{(n+1)^{k-1}}.$$

Аналогично определяется нумерация элементов множества Y, ось ординат $\tilde{Y}$ пространства Γ и отображение $h : Y^* \to V_N$. Каждой паре $(p, q) \in \Lambda_A^s$ в пространстве Γ сопоставляется точка с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$, где

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, \qquad (c_1, c_2, \ldots, c_{|p|}) = g(p),$$

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}, \qquad (b_1, b_2, \ldots, b_{|q|}) = h(q).$$

Множество таких пар $(\tilde{x}, \tilde{y})$ понимается под геометрическим образом Ω_A^s автомата (A, s).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБРАЗОВ

В работе [1] было введено понятие аффинной эквивалентности геометрических образов автоматов. Два геометрических образа называются *аффинно-эквивалентными*, если множество точек одного образа может быть преобразовано в множество точек другого образа некоторым поточечным аффинным преобразованием. Аффинное преобразование задается формулами

$$\tilde{x}' = c_{11}\tilde{x} + c_{12}\tilde{y} + r_1, \qquad \tilde{y}' = c_{21}\tilde{x} + c_{22}\tilde{y} + r_2, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

выражающими для каждой данной точки $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ координаты преобразованной точки $M'(\tilde{x}', \tilde{y}')$ (в той же системе координат).

Класс автоматов, у которых $|S| = N$, $|X| = L$ и $|Y| = M$ будем обозначать $K(N, L, M)$. Зафиксируем некоторый класс автоматов $K(N, L, M)$ и рассмотрим множество Ω геометрических образов всевозможных инициальных автоматов из данного класса. Будем рассматривать те аффинные преобразования образов, путем применения которых можно некоторый образ $\Omega_i \in \Omega$ преобразовать в другой образ $\Omega_j \in \Omega$. В этой статье рассматривается следующее аффинное преобразование: параллельный перенос вдоль оси ординат одновременно с растяжением или сжатием относительно оси абсцисс. Данное преобразование имеет вид

$$\tilde{x}' = \tilde{x}, \qquad \tilde{y}' = a\tilde{y} + b. \tag{1}$$

Будем говорить, что образы Ω_i, Ω_j *совместимы* с выбранным видом аффинного преобразования, если при применении преобразования (1) ко всем точкам из Ω_i получаются точки, составляющие Ω_j.

Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset \Omega^2$, образованное парами совместимых образов. Легко показать, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, поэтому является отношением эквивалентности на множестве Ω и задает разбиение этого множества на классы эквивалентности. Множество всех различных геометрических образов всевозможных инициальных автоматов из класса $K(N, L, M)$ будем обозначать $\Omega(N, L, M)$. Множество пар коэффициентов преобразований образов из $\Omega(N, L, M)$ будем обозначать $F(N, L, M)$.

3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Лемма 1. *Пусть A, B — пара сравнимых автоматов, геометрические образы $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$ которых совместимы. Пусть реакции этих автоматов на произвольное слово $p \in X^*$ имеют вид $q_A = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}$ и $q_B = y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_k}$. Тогда если пара (a, b) задает коэффициенты преобразования для совмещения $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$, то номера символов выходного алфавита, составляющих q_A и q_B, связаны соотношением*

$$n(y_{i_1}) = a \cdot n(y_{j_1}) + b, \qquad n(y_{i_t}) = a \cdot n(y_{j_t}), \qquad 2 \le t \le k,$$

где $n(c)$ означает номер символа c в выходном алфавите.

Доказательство. По определению совместимости $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$ для любого $1 \le l \le k$ имеет место равенство

$$\sum_{f=1}^{l} \frac{n(y_{i_f})}{(M+1)^{f-1}} = a \cdot \sum_{f=1}^{l} \frac{n(y_{j_f})}{(M+1)^{f-1}} + b.$$

При $l = 1$ получаем, что $n(y_{i_1}) = a \cdot n(y_{j_1}) + b$. Вычитая равенство при $l = t-1$ из равенства при $l = t$, получаем, что $n(y_{i_t}) = a \cdot n(y_{j_t})$. □

Лемма 2. *Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A, s_0)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B, t_0)$, а $s_f \in S$, $t_f \in T$ — некоторая пара состояний. Тогда если существует $p \in X^*$ такое, что $\delta_A(s_0, p) = s_f$ & $\delta_B(t_0, p) = t_f$, то существует слово $p' \in X^+$ длины не более $|S| \cdot |T|$ с таким же свойством.*

Для рассматриваемого вида аффинных преобразований был сформулирован и доказан критерий совместимости геометрических образов:

Теорема 1. *Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A, s_0)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B, t_0)$. Тогда если $\exists a, b \in R$ такие, что для всех $p \in X^*$, $|p| \le |S| \cdot |T| + 1$, верно*

$$\tilde{h}(q_A) = a \cdot \tilde{h}(q_B) + b, \tag{2}$$

где $q_A = \lambda_A(p)$, $q_B = \lambda_B(p)$, то (2) верно для любого $p \in X^*$, т. е. образы автоматов A и B совместимы.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по длине слова p. В качестве базы индукции возьмем посылку из условия теоремы: (2) верно для всех слов длины не более $|S| \cdot |T| + 1$.

Предположим, что (2) выполнено для всех слов длины k и менее, причем $k \ge |S| \cdot |T| + 1$. Рассмотрим произвольное слово $p = x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_k} x_{l_{k+1}}$. Пусть $q_A = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k} y_{i_{k+1}}$ и $q_B = y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_k} y_{j_{k+1}}$. Свойство (2) по условию теоремы выполнено для всех префиксов слова p. Тогда по лемме 1 для того чтобы (2) было верно для p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $n(y_{i_{k+1}}) = a \cdot n(y_{j_{k+1}})$. Обозначим префикс слова p длины k через p', а пару состояний, в которые p' переводит автоматы A и B, через (s_f, t_f). Согласно лемме 2, найдется слово p'' длины не менее 1 и не более $|S| \cdot |T|$, переводящее автоматы в эти же состояния. Образуем новое слово $w = p'' x_{i_{k+1}}$. Очевидно, что последние символы реакций автоматов на слово w равны $y_{i_{k+1}}$ и $y_{j_{k+1}}$ соответственно. По предположению индукции для w имеет место (2). По лемме 1 получаем, что $n(y_{i_{k+1}}) = a \cdot n(y_{j_{k+1}})$. В силу произвола выбора p равенство (2) верно для всех слов длины $k+1$. □

Из приведенной теоремы следует, что для установления факта совместимости образов следует проверить совместимость их конечных частей, что дает способ непосредственной проверки совместимости образов.

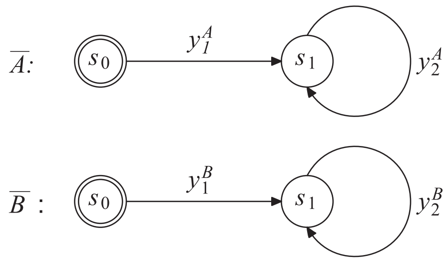
Лемма 3. $F(N, M) \subseteq F(2, M)$.

Доказательство. Пусть пара (a, b) задает коэффициенты преобразования совмещения для некоторой пары образов $\Omega(A)$, $\Omega(B)$ инициальных автономных автоматов $A, B \in K(N, M)$. Пусть реакции этих автоматов на входное слово бесконечной длины равны соответственно $y_1^A y_2^A \dots y_k^A \dots$ и $y_1^B y_2^B \dots y_k^B \dots$ Согласно лемме 1

$$n(y_1^A) = a \cdot n(y_1^B) + b, \quad n(y_k^A) = a \cdot n(y_k^B), \quad k > 1. \tag{3}$$

Построим два инициальных автомата $\overline{A}$, $\overline{B} \in K(2, M)$, для геометрических образов $\Omega(\overline{A})$, $\Omega(\overline{B})$ которых пара (a, b) также будет задавать совмещающее преобразование. Эти автоматы изображены на рисунке.

Их реакции на слова бесконечной длины можно записать в виде $y_1^A(y_2^A)$ и $y_1^B(y_2^B)$ соответственно. Очевидно, что (3) выполняется для этих последовательностей, поэтому $(a, b) \in F(2, M)$. □



Автоматы $\overline{A}$ и $\overline{B}$

Теорема 2. *$F(N, L, M) = F(2, 1, M)$ для всех $N \geq 2$ и $L \geq 1$.*

Доказательство. I. Покажем, что $F(N, L, M) \subseteq F(2, 1, M)$. Пусть пара $(a, b) \in F(N, L, M)$ задает коэффициенты совмещающего преобразования геометрических образов $\Omega(A), \Omega(B)$ автоматов $A, B \in K(N, L, M)$. Это означает, что при приложении к этим автоматам произвольного слова $p \in X^*$ для наблюдаемых реакций $q_A, q_B \in Y^*$ имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{h}(q_A) = a \cdot \tilde{h}(q_B) + b. \tag{4}$$

Зафиксируем произвольный входной сигнал $x \in X$ и рассмотрим автономные компоненты автоматов A, B по этому входному сигналу. Обозначим эти компоненты через A' и B'. Выберем в автоматах A' и B' такие же начальные состояния, как и в исходных. Автоматные отображения, порождаемые автоматами A' и B', являются ограничениями отображений, порождаемых соответственно A и B, на множестве $\{x\}^*$, поэтому равенство (4) будет выполнено для этих отображений. Из этого следует, что образы $\Omega(A')$ и $\Omega(B')$ будут совместимы, причем с теми же коэффициентами преобразования, т. е. $(a, b) \in F(N, 1, M)$. По лемме 3 $F(N, 1, M) \in F(2, 1, M)$, поэтому в итоге $(a, b) \in F(2, 1, M)$.

II. Покажем, что $F(2, 1, M) \in F(N, L, M)$. Пусть A — произвольный инициальный автомат из $K(2, 1, M)$. Порождаемое им отображение можно задать в виде реакции на входное слово бесконечной длины. Для автомата с двумя состояниями длина периодической части этой записи не больше двух. Таким образом, эта запись может иметь два вида: 1) $u(v)$, 2) (uv), где u, $v \in Y$ (при этом в первом случае допускается, что $u = v$).

Для каждого из этих случаев построим автомат $A' \in K(2, L, M)$, выходная реакция которого зависит только от длины входного слова. Пусть множество состояний автомата A это $\{s_0, s_1\}$. Определим функции переходов и выходов автомата A в каждом из случаев так:

1) $\delta(s_0, x) = s_1$, $\delta(s_1, x) = s_1$, $\lambda(s_0, x) = u$, $\lambda(s_1, x) = v$ для всех $x \in X$;

2) $\delta(s_0, x) = s_1$, $\delta(s_1, x) = s_0$, $\lambda(s_0, x) = u$, $\lambda(s_1, x) = v$ для всех $x \in X$.

Начальным состоянием в A' выберем s_0. Тогда автомат A' обладает следующим свойством: на любом входном слове фиксированной длины выходная реакция этого автомата совпадает с выходной реакцией автомата A на слово такой же длины. Теперь дополним A' до автомата $A'' \in K(N, L, M)$, добавив в него $N - 2$ новых состояния и произвольным образом доопределив функции δ и λ. Тогда новые состояния будут недостижимы из начального.

Пусть теперь пара $(a, b) \in F(2, 1, M)$ задает коэффициенты совмещающего преобразования для геометрических образов автоматов $A, B \in K(2, 1, M)$. Применив к ним описанную выше процедуру, получим пару инициальных автоматов A'', $B'' \in K(N, L, M)$. Очевидно, что в силу описанных свойств автоматов A'', B'' по отношению к A, B образы $\Omega(A'')$ и $\Omega(B'')$ будут совместимы преобразованием с коэффициентами (a, b). В силу произвола выбора (a, b), $F(2, 1, M) \in F(N, L, M)$. □

Таким образом, оказалось, что все классы автоматов с одинаковой мощностью выходного алфавита имеют одинаковый набор преобразований геометрических образов, совпадающий с $F(2, 1, M)$.

Коэффициенты преобразований являются рациональными числами, причем справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $(a, b) \in F(N, L, M)$, *то* $a = p_a/q_a$, $b = p_b/q_b$, p_a, q_a, p_b, $q_b \in Z$, $1 \le p_a \le M$, $1 \le q_a \le M$, $0 \le |p_b| \le M^2 - 1$, $1 \le q_b \le M$.

Доказательство. Согласно теореме 2 $F(N, L, M) = F(2, 1, M)$, поэтому докажем теорему для случая $L = 1$. Пусть пара (a, b) задает совмещающее преобразование образов $\Omega(A)$, $\Omega(B)$ инициальных автономных автоматов A, $B \in K(N, M)$. Пусть реакции этих автоматов на входное слово бесконечной длины равны соответственно $y_1^A y_2^A \dots y_k^A \dots$ и $y_1^B y_2^B \dots y_k^B \dots$

Выпишем ординаты точек, составляющих образы $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$: $\tilde{y}_1^A \tilde{y}_2^A \dots \tilde{y}_k^A \dots$ и $\tilde{y}_1^B \tilde{y}_2^B \dots \tilde{y}_k^B \dots$

По определению геометрического образа

$$\tilde{y}_k^A = \sum_{t=1}^{k} \frac{n(y_t^A)}{(M+1)^{t-1}}, \qquad \tilde{y}_k^B = \sum_{t=1}^{k} \frac{n(y_t^B)}{(M+1)^{t-1}}. \tag{5}$$

Образы $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$ совместимы, поэтому $\tilde{y}_k^A = a \cdot \tilde{y}_k^B + b$ для всех $k \ge 1$. Запишем два равенства для $k = 1$ и $k = 2$, подставляя вместо ординат их выражения в (5):

$$n(y_1^A) = a \cdot n(y_1^B) + b,$$

$$n(y_1^A) + \frac{n(y_2^A)}{M+1} = a \cdot \left(n(y_1^B) + \frac{n(y_2^B)}{M+1} \right) + b.$$

Из этой системы получаем, что

$$a = \frac{n(y_2^A)}{n(y_2^B)}, \tag{6}$$

$$b = \frac{n(y_1^A) n(y_2^B) - n(y_2^A) n(y_1^B)}{n(y_2^B)}. \tag{7}$$

Заметим, что номера всех символов — целые числа из диапазона $[1, M]$. Поэтому из (6) получаем, что $a = p_a/q_a$, где $1 \le p_a, q_a \le M$. Числитель дроби в (7) может принимать значения от $-M^2 + 1$ до $M^2 - 1$, поэтому $b = p_b/q_b$, где $0 \le |p_b| \le M^2 - 1$, $1 \le q_b \le M$. □

Из этой теоремы вытекает очевидное следствие о верхней оценке мощности множества преобразований:

Следствие. $|F(N, L, M)| \le 2M^5$.

Таким образом, рассмотрен подкласс аффинных преобразований геометрических образов автоматов и определяемое ими отношение совместимости образов. Найден и доказан критерий совместимости геометрических образов, доказана инвариантность множества преобразований образов для классов автоматов с различным количеством состояний и различным количеством выходных сигналов. Получена оценка количества преобразований образов из заданного класса $\Omega(N, L, M)$.

Библиографический список

1. *Тяпаев Л. Б.* Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2006. Т. 6. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 121–133.

2. *Тяпаев Л. Б., Матов Д. О.* Базисы геометрических образов для динамических систем, определяемых некоторыми классами автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов, 2009. С. 201–204.

3. *Матов Д. О.* Классы аффинной эквивалентности геометрических образов автономных автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы науч. конф. Саратов, 2010. С. 103–108.

4. *Матов Д. О.* Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов // Проблемы теоретической кибернетики : материалы междунар. науч. конф. Н. Новгород, 2011. С. 303–306.