



Edge Waves in Plates with Fixed Faces and Various Boundary Conditions on the Front Edge

R. V. Ardazishvili, M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, ardazishvili.roman@yandex.ru, mv_wilde@mail.ru, president@sgu.ru

This paper is concerned with the propagation of surface waves in plates subject to free or mixed boundary conditions on the front edge. Symmetric and antisymmetric waves in plates with fixed faces are considered. Asymptotic analysis is performed, which shows that there is an infinite spectrum of higher order edge waves in plates. Asymptotics of phase velocity are obtained for large values of wave number. It is demonstrated that in the short-wave limit the phase velocity of all higher order edge waves tends to the velocity of Rayleigh wave or shear wave, depending on the boundary conditions on the front edge.

Key words: surface waves, edge waves, Rayleigh wave, shear wave, asymptotic methods.

References

1. Belubekian M. V. Surface waves in elastic medium. *Problems in Solid Mechanics*. Institute of mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, 1997, pp. 79–96 (in Russian).
2. Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A., Rogerson G. A. On three dimensional edge waves in prestressed incompressible elastic solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005, vol. 118, no. 5, pp. 2975–2983. DOI: 10.1121/1.2062487.
3. Zernov V., Kaplunov J. D. Three-dimensional edge waves in plates. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 2008, vol. 464, pp. 301–318.
4. Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. *Edge and interface resonance phenomena in elastic bodies*. Moscow, FIZMATLIT, 2010. 280 p. (in Russian).
5. Ardazishvili R. V., Wilde M. V., Kossovich L. Yu. Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Plates. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pp. 50–56 (in Russian).
6. Ardazishvili R. V. Three-dimensional surface wave for mixed boundary conditions on the surface. *Proceedings of Young Scientists School-Conference MECHANICS-2013*, Tsakhkadzor, Armenia, 2013, pp. 74–79.

УДК 681.03.06:531.383:532.516

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ И ОКРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

А. Ю. Блинкова¹, Ю. А. Блинков², С. В. Иванов³, Л. И. Могилевич⁴

¹Ассистент кафедры теплогазоснабжение, вентиляция, водообеспечение и прикладная гидрогазодинамика, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., anblinkova@yandex.ru

²Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, BlinkovUA@info.sgu.ru

³Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, evilgraywolf@gmail.com

⁴Доктор технических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский филиал), Саратов, Mogilevich@sgu.ru

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных продольных волн деформаций в цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость внутри. Физические свойства оболочки определяются уравнениями квадратичной теории вязкоупругости, учитывающей линейную упругость объемных деформаций. Проблемы распространения волн в вязкоупругих и нелинейных тонкостенных конструкциях, в том числе цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассмотрены ранее с позиции теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, вязкоупругие цилиндрические оболочки, окружающая упругая среда.



1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Волновые процессы в вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в [1–3].

Получим уравнения динамики с учётом наличия вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической оболочке с помощью асимптотических методов для решения связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями. Рассмотрим бесконечно длинную вязкоупругую цилиндрическую оболочку, окружённую упругой средой, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [4]

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{1}{2} V^2 + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \cdot p = -\nu \text{rot rot} \bar{V}, \quad \text{div} \bar{V} = 0, \quad (1)$$

где \bar{V} — вектор скорости жидкости, t — время, ρ — плотность, p — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости.

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U \frac{\partial V_r}{\partial x} - W \frac{\partial V_r}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь U — продольное упругое перемещение оболочек по оси x , V_x, V_r — проекции вектора скорости жидкости \bar{V} на оси цилиндрической системы координат, W — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки.

В случае осевой симметрии, используя гипотезу Кирхгофа – Лява, имеем связь между компонентами деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ перемещений [5]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = -\frac{1}{R} W, \quad (3)$$

где R — радиус серединой поверхности оболочки, z — расстояние от нее. Связь между компонентами напряжений σ_x, σ_y и деформаций зададим уравнениями квадратичной теории вязкоупругости [6], учитывающей линейную упругость объёмных деформаций:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_x + \mu_0 \varepsilon_y) - \frac{E}{1 + \mu_0} \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (1 + a \varepsilon_u^2) e_x d\tau, \quad (4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_y + \mu_0 \varepsilon_x) - \frac{E}{1 + \mu_0} \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (1 + a \varepsilon_u^2) e_y d\tau. \quad (5)$$

Здесь E — модуль Юнга, μ_0 — коэффициент Пуассона материала оболочек (считая их одинаковыми), t — время, a, β, ρ — параметры вязкоупругости, ε_u^2 — квадрат интенсивности деформаций, e_x, e_y — компоненты девиатора деформаций:

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y); \quad e_x = \frac{2}{3} \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon_y, \quad e_y = \frac{2}{3} \varepsilon_y - \frac{1}{3} \varepsilon_x. \quad (6)$$

Разлагая функции $(1 + a \varepsilon_u^2) e_x, (1 + a \varepsilon_u^2) e_y$ в ряд Тейлора по степеням $(t - \tau)$, при условии $\beta t \gg 1$ сохраняем два члена разложения их формул (4), (5), получим приближенные уравнения состояния [1–3]

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_x + \mu_0 \varepsilon_y) + p \left[\frac{2}{3} \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon_y + a (e_u^2 e_x) \right], \quad (7)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_y + \mu_0 \varepsilon_x) + p \left[\frac{2}{3} \varepsilon_y - \frac{1}{3} \varepsilon_x + a (\varepsilon_u^2 e_y) \right], \quad (8)$$



где введен оператор p такой, что

$$p f = \frac{E}{1 + \mu_0} \left(\frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta} f \right). \quad (9)$$

Вычисляя с использованием (6) усилия и моменты по формулам [5]

$$N_x = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_y dz, \quad M_x = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_y z dz, \quad (10)$$

и подставим (9) в систему уравнений динамических оболочек [5]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \\ & = -q_n - \rho_0 h_0 \left[k_1 \frac{c_0^2}{l^2} W - k_2 \frac{c_0^2 l^2}{R^6} W^3 - 2t_1 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь h_0 — толщина оболочки, ρ_0 — плотность материала оболочки, q_x , q_n — напряжения, действующие со стороны жидкости на поверхность оболочки, снесенные на невозмущаемую поверхность оболочки ($W \ll R$)

$$q_x = \left[\rho \nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[-\rho + 2\rho \nu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R}.$$

Выражение в квадратных скобках характеризует реакцию упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения Власова – Леонтьева [7]. $k_1 \frac{c_0^2}{l^2} W - k_2 \frac{c_0^2 l^2}{R^6} W^3$ — реакция на сдвливание (сжатие), $-2t_1 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ — реакция на сдвиг, $m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ — инерционная реакция. Коэффициенты k_1 , k_2 , t_1 , m — определены в [7].

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОБЛОЧЕК

Принимая за характерную длину длину волны деформации l , перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений динамики оболочек (3)–(10)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}. \quad (13)$$

Здесь c_0 — скорость звука в материале оболочки.

Положим

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon), \quad a = O(\varepsilon^{-1}), \quad \frac{\alpha}{\beta} = O(1), \\ \frac{\alpha c_0}{\beta^2 l} = O(\varepsilon), \quad \frac{R}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0}{R} = O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр задачи.

Применим метод двухмасштабных разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (15)$$

где c — безразмерная неизвестная скорость волны, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру ε :

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (16)$$



Подставляя (13), (15), (16) в уравнения (11), (12), с учетом оценок (14) получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m}{R} u_{30} = \mu_1 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \quad \mu_1 = \frac{\mu_0 + \frac{1}{3}(1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta}}{1 - \frac{2}{3}(1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta}} \quad (17)$$

и определяется безразмерная скорость волны:

$$c^2 = \left[1 - \frac{2}{3}(1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \right] (1 - \mu_1^2). \quad (18)$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (17) и (18), находится уравнение для определения u_{10} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{c R^2}{2 l^2 \varepsilon} \mu_1^2 \left(1 + m - \frac{2 t_1}{c^2} \right) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \frac{c u_m}{2 l \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ & - \left\{ \frac{2(1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta}}{3 c} \left[1 + \mu_1^4 + (1 + \mu_1)^4 \right] \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 + \frac{3}{2 c \varepsilon} \frac{1}{R^2} k_2 \mu_1^4 \right\} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ & - \frac{1}{3} (1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1 + \mu_1 + \mu_1^2) \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_1^2}{2 c} k_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2 2 c} \left[q_x - \mu_1 \frac{R}{\varepsilon} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ДЕЙСТВУЮЩИХ СО СТОРОНЫ ЖИДКОСТИ

Для определения правой части уравнения (19) введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, & V_x &= w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, & r^* &= \frac{r}{R_1}, & t^* &= \frac{c_0}{l} t, & x^* &= \frac{x}{l}, \\ p &= \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{R_1^3} P, & \psi &= \frac{R_1}{l} = o(\varepsilon^{1/2}), & \lambda &= \frac{w_m}{R_1}, & \psi &\ll 1, & \lambda &\ll 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь R_1 — внутренний радиус оболочки.

Подставляя (20) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру λ :

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (21)$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi \approx 0$ — гидравлическая теория смазки), считая $(\psi) (R_1 c_0 / \nu) \ll 1$ (ползущие течения [8, 9]), и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки):

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0, \quad (22)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} & r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{при } r^* = 0, \\ & v_r^0 = - \frac{\partial u_{30}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_1}{W_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial t^*} \quad \text{при } r^* = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Из решения задачи (22), (23) следует, что

$$P^0 = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_{30}}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = \frac{1}{2} r^* \frac{\partial P^0}{\partial x^*}. \quad (24)$$

С принятой точностью по ε , ψ , λ из (6) найдем

$$q_x = \rho \nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial R^*} \Big|_{r^*=1}, \quad q_n = -\rho \nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{l}{R_1} P^0,$$

и выражение в квадратных скобках правой части (19) имеем вид

$$\left[q_x - \mu_1 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \varepsilon} \right] = \rho \nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} \left[\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} + \mu_1 \frac{R}{l} \frac{l}{R_1} \frac{\partial P^0}{\partial x^*} \right] = \rho \nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{1}{2} \frac{\partial P^0}{\partial \xi} \left[1 + 2 \mu_1 \frac{R}{R_1} \right]. \quad (25)$$



Учитывая, что были введены переменные (20), (21), и имея соотношения (24), (25), получим:

$$P^0 = 8c \frac{u_m R_1}{w_m l} \left[2\mu_1 \frac{R}{R_1} - 1 \right] u_{10}. \quad (26)$$

Следовательно, в правой части уравнения (19) остается выражение

$$2 \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon} \left[1 - \left(2\mu_1 \frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (27)$$

с принятой точностью по ψ , ε положим $R_1 \approx R$. Подставляя (27) в уравнение (19), окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{c R^2}{2 l^2 \varepsilon} \mu_1^2 \left(1 + m - \frac{2t_1}{c^2} \right) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \frac{c u_m}{2 l \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ & - \left\{ \frac{2(1-\mu_0)}{3} \frac{\alpha}{c} \left[1 + \mu_1^4 + (1 + \mu_1)^4 \right] \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 + \frac{3}{2c} \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_m}{R^2} k_2 \mu_1^4 \right\} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ & - \frac{1}{3} (1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1 + \mu_1 + \mu_1^2) \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_1^2}{2c} k_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - 2[1 - (2\mu_1)^2] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0. \quad (28) \end{aligned}$$

При отсутствии жидкости ($\rho = 0$) последнее слагаемое выпадает, и уравнение (28), превращающееся в уравнение Гарднера – Бюргерса для $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$, имеет точное частное решение. В зависимости от физических параметров величина μ_1 может быть больше 1/2, меньше 1/2 или равна 1/2. Последний случай эквивалентен отсутствию жидкости, но означает, что она не влияет на волну деформации.

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_3 \varphi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau$$

позволяет записать уравнение (28) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\sigma_0 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - 6\sigma_1 \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \sigma_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma \varphi = 0. \quad (29)$$

Здесь $\sigma = 1$ при $\mu_1 < 1/2$, $\sigma = -1$ при $\mu_1 > 1/2$ и $\sigma = 0$ при $\mu_1 = 1/2$.

Постоянные c_3 , c_1 , c_2 определяются формулами

$$c_2 = 2\sigma \left[1 - (2\mu_1)^2 \right] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{c \mu_1^2 \left(1 + m - \frac{2t_1}{c^2} \right)} \right]^{1/3}, \quad c_3 = 6 \frac{c_2}{c_1} \frac{2l\varepsilon}{c u_m} \sigma_0.$$

При этом вводятся обозначения

$$\begin{aligned} 6\sigma_1 &= \frac{c_3^2 c_1}{c_2} \left[\frac{2a}{3\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 + \mu_1^4 + (1 + \mu_1)^4}{c} + 3k_2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_m}{R^2} \frac{\mu_1^4}{2c} \right], \\ \sigma_2 &= \frac{c_1^2}{c_2} \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1 - \mu_0) (1 + \mu_1 + \mu_1^2), \quad \sigma_3 = \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_1^2}{2c} k_1. \end{aligned}$$

При отсутствии жидкости уравнение (29) превращается в уравнение Гарднера – Бюргерса, имеющее точное частное решение:

$$\frac{3\sigma_0 \mp \sigma_2 \sqrt{\sigma_1} \mp 6k \sqrt{\sigma_1} \operatorname{th} \left\{ k\eta + \left(2k^3 + \frac{\sigma_2^2 k}{6} - \frac{3k\sigma_0^2}{2\sigma_1} - \sigma_3 k \right) t \right\}}{6\sigma_1}, \quad (30)$$

которое можно использовать в качестве начального условия с верхним знаком при $t = 0$ для численного решения уравнения (29):

$$\phi(\eta, t = 0) = \frac{3\sigma_0 - \sigma_2 \sqrt{\sigma_1} - 6k \sqrt{\sigma_1} \operatorname{th} \{k\eta\}}{6\sigma_1}. \quad (31)$$



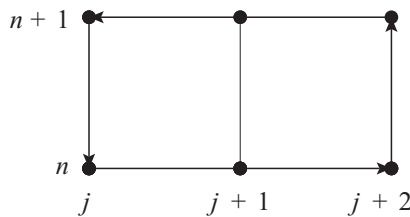
4. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работах [10–12] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом, применение техники базисов Грёбнера позволяет сгенерировать разностные схемы, из которых путем эквивалентных преобразований могут быть получены дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных уравнений.

Запишем уравнение (29) в интегральной форме:

$$\oint_{\partial\Omega} (-3\sigma_0\varphi^2 - \varphi_{\eta\eta} + 2\sigma_1\varphi^3 + 2\sigma_2\varphi_{\eta} - \sigma_3\varphi) dt + \sigma\varphi d\eta - \iint_{\Omega} \sigma\varphi dt d\eta = 0 \quad (32)$$

для любой области Ω . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \varphi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1.



Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta} d\eta = u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j), \quad (33)$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta\eta} d\eta = u_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u_{\eta}(t, \eta_j).$$

Рис. 1. Базовой контур для уравнения (32)

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (32), (33) в виде

$$\begin{aligned} & (-3\sigma_0 (u_j^{2n} + u_j^{2n+1} - u_{j+2}^{2n} - u_{j+2}^{2n+1}) - (u_{\eta\eta_j}^n + u_{\eta\eta_j}^{n+1} - u_{\eta\eta_{j+2}}^n - u_{\eta\eta_{j+2}}^{n+1}) + \\ & + 2\sigma_1 (u_j^{3n} + u_j^{3n+1} - u_{j+2}^{3n} - u_{j+2}^{3n+1}) + 2\sigma_2 (u_{\eta_j}^n + u_{\eta_j}^{n+1} - u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_{j+2}}^{n+1}) - \\ & - \sigma_3 (u_j^n + u_j^{n+1} - u_{j+2}^n - u_{j+2}^{n+1})) \cdot \frac{\tau}{2} + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \cdot 2h - \sigma(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n) \cdot h\tau = 0, \\ & (u_{\eta_{j+1}}^n + u_{\eta_j}^n) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n, \quad u_{\eta_{j+1}}^n \cdot 2h = u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_j}^n. \end{aligned}$$

Используя пакет LDA [13] для построения базисов Грёбнера в случае разностных идеалов реализованный в системе компьютерной алгебры Maple, зададим начальные разностные соотношения:

```
> with(LDA):
> L:= [ (-F(n,j)+F(n+1,j)-F(n,j+2)-F(n+1,j+2)) -
> (uxx(n,j)+uxx(n+1,j)-uxx(n,j+2)-uxx(n+1,j+2)) -
> sigma2*(ux(n,j)+ux(n+1,j)-ux(n,j+2)-ux(n+1,j+2))*tau/2+
> (u(n+1,j+1)-u(n,j+1))*2*h - sigma*(u(n+1,j+1)+u(n,j+1))*h*tau,
> (ux(n,j+1)+ux(n,j))*h/2-(u(n,j+1)-u(n,j)),
> 2*uxx(n,j+1)*h-(ux(n,j+2)-ux(n,j)) ]:
```

Поскольку пакет [13] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (29) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции $F = 3\sigma_0\varphi^2 - 2\sigma_1\varphi^3 + \sigma_3\varphi$. За счет выбора допустимого лексикографического упорядочения сначала по функциям $u_{xx} \succ u_x \succ u \succ F$, а затем по переменным n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера:

```
> JanetBasis(L, [n,j], [uxx,ux,u,F],2);
```



$$\begin{aligned}
 & [[\tau u(n+1, j+4) + (2h\sigma_2\tau - 2\tau)u(n+1, j+3) + (2h^3\sigma\tau + 4h^3 - 4h\sigma_2\tau)u(n+1, j+2) + \\
 & (2h\sigma_2\tau + 2\tau)u(n+1, j+1) - \tau u(n+1, j) + \tau u(n, j+4) + (2h\sigma_2\tau - 2\tau)u(n, j+3) + \\
 & (2h^3\sigma\tau - 4h^3 - 4h\sigma_2\tau)u(n, j+2) + (2h\sigma_2\tau + 2\tau)u(n, j+1) - \tau u(n, j) + \\
 & h^2\tau F(n+1, j+3) + h^2\tau F(n, j+3) - h^2\tau F(n+1, j+1) - h^2\tau F(n, j+1), \\
 & hux(n, j+1) + hux(n, j) - 2u(n, j+1) + 2u(n, j), h^2uxx(n, j+1) - u(n, j+2) + \\
 & 2u(n, j+1) - u(n, j), -h^2\tau uxx(n+1, j) - h^2\tau uxx(n, j) + \tau u(n+1, j+3) + \\
 & (2h\sigma_2\tau - 2\tau)u(n+1, j+2) + (2h^3\sigma\tau + 4h^3 - 4h\sigma_2\tau + \tau)u(n+1, j+1) + \\
 & 2h\sigma_2\tau u(n+1, j) + \tau u(n, j+3) + (2h\sigma_2\tau - 2\tau)u(n, j+2) + \\
 & (2h^3\sigma\tau - 4h^3 - 4h\sigma_2\tau + \tau)u(n, j+1) + 2h\sigma_2\tau u(n, j) + h^2\tau F(n+1, j+2) + h^2\tau F(n, j+2) \\
 & - h^2\tau F(n+1, j) - h^2\tau F(n, j)], [n, j], [uxx, ux, u, F]]
 \end{aligned}$$

> collect(\%[1,1]/(4*tau*h**3), [tau, h, sigma]);

$$\begin{aligned}
 & ((1/2)u(n+1, j+2) + (1/2)u(n, j+2))\sigma + ((1/2)u(n+1, j+3) - u(n+1, j+2) + \\
 & (1/2)u(n+1, j+1) + (1/2)u(n, j+3) - u(n, j+2) + (1/2)u(n, j+1))\sigma_2/h^2 + \\
 & ((1/4)F(n+1, j+3) + (1/4)F(n, j+3) - (1/4)F(n+1, j+1) - \\
 & (1/4)F(n, j+1))/h + ((1/4)u(n+1, j+4) - (1/2)u(n+1, j+3) + \\
 & (1/2)u(n+1, j+1) - (1/4)u(n+1, j) + (1/4)u(n, j+4) - \\
 & (1/2)u(n, j+3) + (1/2)u(n, j+1) - (1/4)u(n, j))/h^3 + (u(n+1, j+2) - u(n, j+2))/\tau
 \end{aligned}$$

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (29), аналогичную схеме Кранка - Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u_{j+1}^{2n+1} - u_{j-1}^{2n+1}) + (u_{j+1}^{2n} - u_{j-1}^{2n})}{4h} + \\
 & + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} - \\
 & - 2\sigma_1 \frac{(u_{j+1}^{3n+1} - u_{j-1}^{3n+1}) + (u_{j+1}^{3n} - u_{j-1}^{3n})}{4h} + \sigma_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{2h^2} + \\
 & + 2\sigma_3 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} - \sigma \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация:

$$\begin{aligned}
 v_{k+1}^2 &= v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2, \\
 v_{k+1}^3 &= v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3.
 \end{aligned}$$

Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало 3. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy.

Как показано на рис. 2, а и б и как можно увидеть из точного решения (30) уравнения (29) при $\sigma = 0$ упругая среда, окружающая оболочку, приводит к увлечению скорости нелинейной волны деформации.

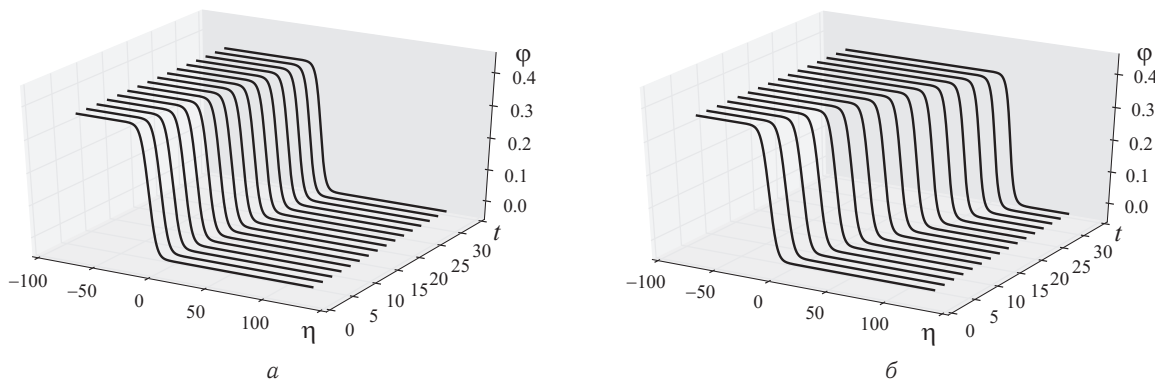


Рис. 2. Графики численного решения уравнений (29) при $\sigma_3 = 0$ (а) и $\sigma_3 = 2$ (б) для $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.8, \sigma = 0$ с начальным условием (31) для φ с $k = 0.2$

Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в бесконечно длинной оболочке в зависимости от введенного параметра μ_1 , характеризующего вязкоупругие свойства материала оболочки, аналогичного коэффициенту Пуассона для упругой среды. Наблюдается рост амплитуды волны при $\mu_1 < 1/2$ на рис. 3, а из-за нарушения баланса между нелинейностью и дисперсией с учетом демпфирования в пользу нелинейности и падения амплитуды волны при $\mu_1 > 1/2$ на рис. 3, б из-за нарушения баланса между нелинейностью и дисперсией с учетом демпфирования в пользу дисперсии и диссипации. При $\mu_1 = 1/2$ влияние жидкости перестает сказываться.

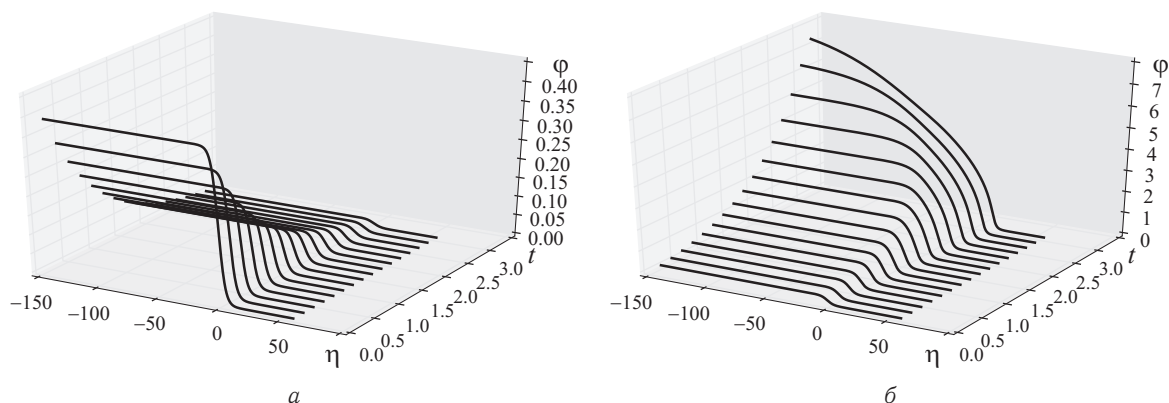


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (29) при $\sigma = -1$ (а) и $\sigma = 1$ (б) для $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.8, \sigma_3 = 2$ с начальным условием (31) для φ с $k = 0.2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены новые математические модели в виде нелинейных уравнений в частных производных, обобщающих уравнения Гарднера – Бюргера, описывающие волновые процессы в вязкоупругих бесконечно длинных цилиндрических оболочках с вязкой несжимаемой жидкостью внутри. На основе применения техники базисов Грёбнера сгенерированы разностные схемы, из которых путем эквивалентных преобразований могут быть получены дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных уравнений. Упругая среда, окружающая оболочку, приводит к увеличению скорости нелинейной волны деформации. Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в бесконечно длинной оболочке в зависимости от введенного параметра μ_1 , характеризующего вязкоупругие свойства материала оболочки, аналогичного коэффициенту Пуассона для упругой среды. Наблюдается рост амплитуды волны при $\mu_1 < 1/2$ ($\sigma = 1$) и падения амплитуды волны при $\mu_1 > 1/2$ ($\sigma = -1$). При $\mu_1 = 1/2$ ($\sigma = 0$) влияние жидкости перестает сказываться. Распространение нелинейных волн деформаций в вязкоупругих бесконечно длинных цилиндрических оболочках, содержащих внутри вязкую несжимаемую жидкость, сопровождается сглаживанием профиля волны и колебаний возникающих за ее фронтом за счет диссипации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00049-а).

Библиографический список

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках : солитоны, симметрии, эволюция. Саратов : Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 1999. 132 с.
2. Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журн. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117.
3. Аршинов Г. А., Могилевич Л. И. Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов : Изд-во Сарат. гос. аграрного ун-та, 2000. 152 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972. 328 с.
6. Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.
7. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М. : Физматгиз, 1960. 490 с.
8. Чивилихин С. А., Попов И. Ю., Гусаров В. В. Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой



- жидкости // Докл. АН. 2007. Т. 412, № 2. С. 201–203.
9. Попов Ю. И., Розыгина О. А., Чивилихин С. А., Гусаров В. В. Солитоны в стенке нанотрубки и стоково течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, вып. 18. С. 42–54.
 10. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргера построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. Т. 32, № 2. С. 71–74.
 11. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozhilkin V. V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations // Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications. 2006. Vol. 2. 26 p. URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html> (дата обращения: 03.03.2015).
 12. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Gröbner Bases and Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5743. P. 94–105.
 13. Gerdt V. P., Robertz D. A Maple Package for Computing Gröbner Bases for Linear Recurrence Relations // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2006. Vol. A559. P. 215–219.

Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium

A. Yu. Blinkova¹, Yu. A. Blinkov², S. V. Ivanov², L. I. Mogilevich³

¹Saratov State Technical University named after Gagarin Yu. A., 77, Politekhnicheskaya st., 410054, Saratov, Russia, anblinkova@yandex.ru

²Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, BlinkovUA@info.sgu.ru, evilgraywolf@gmail.com

³Volga Branch of Moscow State University of Railway Communications, 1a, Astrakhanskaya st., 410004, Saratov, Russia, Mogilevich@sgu.ru

The present study is devoted to analysis of nonlinear deformation of longitudinal waves in a cylindrical shell surrounded by an elastic medium and containing viscous incompressible fluid inside. The physical properties of the shell are defined by the equations of quadratic theory of viscoelasticity, which takes into account the linear elastic volume strain. The problem of wave propagation in viscoelastic and nonlinear thin-walled structures, including cylindrical shells, without interaction with the viscous incompressible fluid are considered from the perspective of earlier theory of solitons. The presence of fluid requires the development of new mathematical models and computer simulation of the processes occurring in the system.

Key words: nonlinear waves, viscous incompressible fluid, viscoelastic cylindrical shell surrounding elastic medium.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00049-a).

References

1. Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. *Nelineinye volny v tsilindricheskikh obolochkakh: solitony, simmetrii, evoliutsiia* [Nonlinear Waves in Cylindrical Shells : Solitons, Symmetry, Evolution]. Saratov, Saratov State Tech. Univ. Press, 1999, 132 p. (in Russian).
2. Arshinov G. A., Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Two-dimensional Solitary Waves in Nonlinear Viscoelastic Deformable Environment. *Akusticheskii zhurnal* [Acoustical Physics], 2000, vol. 46, no. 1, pp. 116–117 (in Russian).
3. Arshinov G. A., Mogilevich L. I. *Sticheskie i dinamicheskie zadachi viazkouprugosti* [Static and Dynamic Problems of Viscoelasticity]. Saratov, Saratov State RGM Univ. Press, 2000, 152 p. (in Russian).
4. Loitsyansky L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Mechanics]. Moscow, Drofa, 2003, 840 p. (in Russian). DOI: 10.7463/0115.0755210.
5. Volmir A. S. *Nelineinaya dinamika platinok i obolochek* [Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972, 432 p. (in Russian).
6. Moskvitin V. V. *Soprotivlenie viazko-uprugikh materialov* [Resistance Vyzko-elastic materials]. Moscow, Nauka, 1972, 328 p. (in Russian).
7. Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 490 p. (in Russian).
8. Chivilikhin S. A., Popov I. Yu., Gusarov V. V. Dynamics of nanotube twisting in a viscous fluid. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, no. 1, pp. 60–62.
9. Popov I. Y., Rodygina O. A., Chivilikhin S. A., Gusarov V. V. Soliton in a nanotube wall and stokes flow in the nanotube. *Technical Physics Letters*, 2010, vol. 36, no. 9, pp. 852–855. DOI: 10.1134/S1063785010090221.



10. Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Generation of Difference Schemes for the Burgers Equation by Constructing Gröbner Bases. *Programming and Computer Software*, 2006, vol. 32, no. 2, pp. 114–117. DOI: 10.1134/S0361768806020095.
11. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2006, vol. 2, 26 p. URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html> (Accessed 02, March, 2015). DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051.
12. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and Difference Schemes for the Navier – Stokes Equations. *Computer Algebra in Scientific Computing, Lecture Notes in Computer Science*, 2009, vol. 5743, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.
13. Gerdt V. P., Robertz D. A Maple Package for Computing Gröbner Bases for Linear Recurrence Relations. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 2006, vol. A559, pp. 215–219. DOI: 10.1016/j.nima.2005.11.171.

УДК 539.374

ИМПУЛЬСНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ТРЕХСЛОЙНЫЕ КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Д. В. Леоненко¹, Э. И. Старовойтов²

¹ Доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, Гомель, leoden@tut.by

² Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, Гомель, edstar@mail.by

Рассмотрены вынужденные колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой безынерционной среде Винклера, возникающие под действием импульсных нагрузок. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа – Лява. В толстом заполнителе учитываются работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Получен ряд аналитических решений и проведен их численный анализ.

Ключевые слова: колебания, трехслойная цилиндрическая оболочка, собственные частоты, импульсные нагрузки.

ВВЕДЕНИЕ

Трехслойные пластины и оболочки нашли широкое применение в современных отраслях промышленности. Это обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Различные модели упругих трехслойных конструкций предложены в [1]. Монографии [2–4] посвящены исследованию статического и динамического деформирования трехслойных пластин и оболочек, не связанных с упругими средами. В монографии [5] рассмотрены различные модели упругой среды, с которой связаны элементы конструкций при деформировании, в том числе исследовано деформирование однородных конструкций на упругом основании. Задачи квазистатического деформирования трехслойных стержней и пластин на упругом основании разобраны в работах [6–9]. Статья [10] посвящена гармоническим колебаниям физически круглых нелинейных трехслойных пластин. Нестационарные колебания упругой среды, ограниченной двумя эксцентричными сферическими поверхностями, и распространение нестационарных волн в упругом слое рассмотрены в [11, 12].

Одной из самых важных с практической точки зрения задач динамики является исследование спектра частот собственных колебаний. Ее решение позволяет определить собственные частоты и формы, знание которых необходимо для решения задач о колебаниях трехслойных конструкций при различных видах внешних воздействий. Здесь рассмотрены вынужденные колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде при импульсных внешних нагрузках.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В тонких изотропных несущих слоях трехслойной круговой цилиндрической оболочки приняты гипотезы Кирхгофа – Лява. В толстом заполнителе учитываются работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые.