



УДК 539.374

ПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

Э. И. Старовойтов¹, Д. В. Леоненко²

¹ Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, 246653, Беларусь, Гомель, Кирова, 34, edstar0@yandex.by

² Леоненко Денис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, 246653, Беларусь, Гомель, Кирова, 34, leoden@tut.by

Рассмотрен переменный изгиб трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине наполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Учитывается работа наполнителя в тангенциальном направлении. Физические соотношения связи напряжений и деформаций соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. На границе предполагаются кинематические условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Решение краевой задачи сведено к нахождению четырех искомых функций — прогибов и продольных перемещений срединных поверхностей несущих слоев. Аналитическое решение получено методом упругих решений с помощью теоремы о переменных нагружениях Москвитина. Проведен его численный анализ в случае непрерывных и локально распределенных нагрузок.

Ключевые слова: трехслойный стержень, пластичность, повторный изгиб, сжимаемый наполнитель, нейтронный поток.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208

ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким применением в промышленности и строительстве неоднородных элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках в различных физико-механических средах актуальной становится проблема создания адекватных математических моделей для описания их деформирования. В монографиях [1, 2] рассмотрены различные математические модели квазистатического и динамического деформирования слоистых элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их решения. В статьях [3–10] исследованы свободные и вынужденные колебания неоднородных оболочек, а также рассмотрены вопросы распространения волн и деформирования оболочек и пластин с термочувствительной толщиной. Публикации [11–15] посвящены теоретическому и экспериментальному исследованию параметров свободных колебаний трехслойных панелей и квазистатическому деформированию трехслойных упругих и упругопластических пластин при однократных и переменных нагрузках.



Здесь теория переменного нагружения Москвитина [15] применена к трехслойным упругопластическим стержням прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым наполнителем, находящимся в нейтронном потоке.

1. НАГРУЖЕНИЕ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень (рис. 1). Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. На стержень действуют поверхностная нагрузка $q(x)$ и подводится нейтронный поток плотностью φ_0 в направлении, противоположном внешней нормали. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв, h_k — толщина k -го слоя, $h_3 = 2$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), b_0 — ширина стержня.

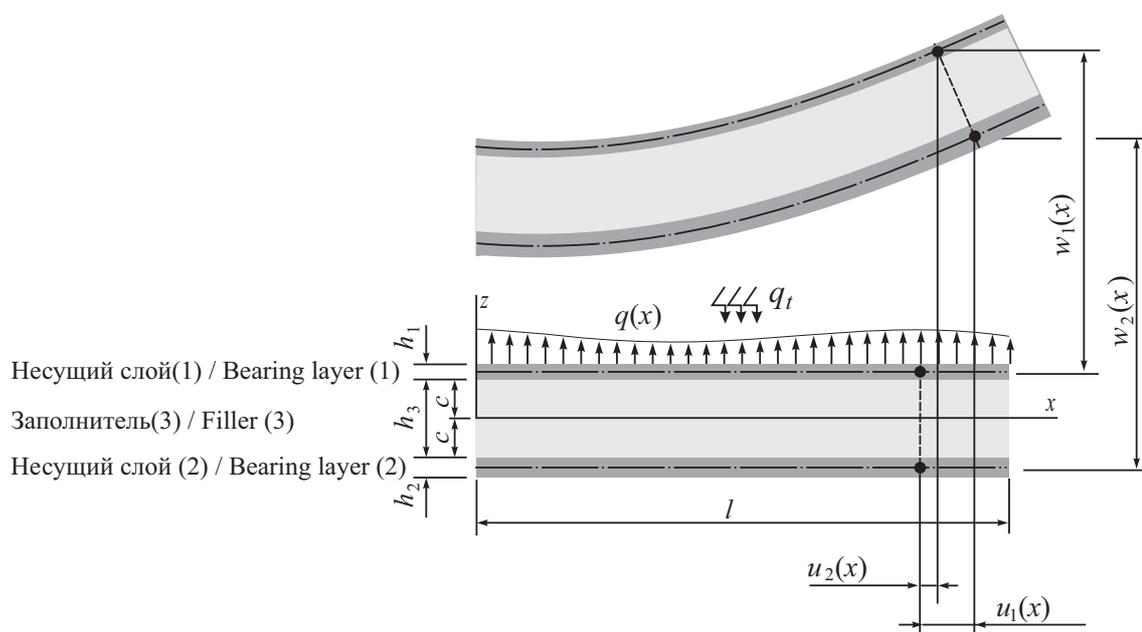


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня
Fig. 1. The design scheme of a three-layer rod

Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых возникает объемная деформация θ_I , изменяются упругие и особенно пластические характеристики материала. Согласно известным экспериментальным данным [16], рост величины нейтронного потока

$$I(t) = \varphi t \tag{1}$$

в пределах малых деформаций, как правило, приводит к радиационному упрочнению материала, вызванному ростом предела текучести (φ — интенсивность потока, нейтрон/(м²с), t — время), и возникновению объемной деформации, которую в линейном приближении можно считать прямо пропорционально потоку (см. [16]):

$$\theta_I = BI(z), \tag{2}$$

где B — константа, получаемая из опыта.



Пусть на границу тела, занимающего полупространство $z \geq 0$, параллельно оси z падают нейтроны с одинаковой интенсивностью φ_0 . Тогда интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости параллельной границе $z = \text{const}$, будет (см. [16]):

$$\varphi(z) = \varphi_0 e^{-\mu z}, \quad \mu = \sigma n_0 = \sigma \frac{A_0 \rho}{A}, \quad (3)$$

где μ — величина макроскопического эффективного сечения (1/см), σ — эффективное сечение, отнесенное к одному ядру, n_0 — число ядер в 1 см³, A_0 — число Авогадро, ρ — плотность, A — атомный вес.

Для алюминия $\sigma = 0.21 \cdot 10^{-24}$ см², $A_0 = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, плотность $\rho = 2.7$ г/см³, $A = 27$ а.е.м., подставляя в (3), получим $\mu = 1.26$ м⁻¹.

Если в (1) интенсивность $\varphi = \varphi_0$ не зависит от времени, то к моменту t через сечение с координатой z пройдет интегральный поток

$$I(z, t) = \varphi_0 t e^{-\mu z}. \quad (4)$$

В реакторах φ_0 имеет порядок $10^{17} - 10^{18}$ нейтрон/(м²с), а I_0 достигает значений $10^{23} - 10^{27}$ нейтрон/м², причем θ_I достигает значений порядка 0.1. Следовательно, величина B может быть порядка $10^{-28} - 10^{-23}$ м²/нейтрон.

Предположим, что в процессе деформирования материалы несущих слоев стержня проявляют упругопластические свойства, наполнитель — нелинейно упругий. Для описания их деформирования с учетом объемной деформации (2) принимаем физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций [17]:

$$\begin{aligned} s_{xx}^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, I))e_{xx}^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= K_k(3\varepsilon^{(k)} - B_k I) & (k = 1, 2, 3), \\ s_{zz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, I))e_{zz}^{(3)}, & s_{xz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, I))e_{xz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $s_i^{(k)}$, $e_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций, $s_{xz}^{(3)}$, $e_{xz}^{(3)}$ — тангенциальное напряжение и сдвиговая деформация в наполнителе, G_k , K_k — модули сдвига и объемного деформирования материала k -го слоя, $\omega^{(k)}$ — универсальные функции нелинейности материалов несущих слоев ($k = 1, 2$) и наполнителя ($k = 3$) при нагружении из естественного состояния, например, для сплава Д16Т:

$$\begin{aligned} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, I) &= \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(I), \\ A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)}(I)}{\varepsilon_u^{(k)}}\right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(I), \end{cases} \\ \varepsilon_y^{(k)}(I) &= \varepsilon_{y0} \left[1 + A(1 - \exp(-\xi I))^{1/2}\right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций, $\varepsilon_y^{(k)}$ — деформационный предел текучести материала несущего слоя, I — интегральный нейтронный поток (4), B_k — константы материалов, получаемые экспериментально.

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$ — прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев:



- в несущих слоях

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, & w^{(1)} &= w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u^{(2)} &= u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, & w^{(2)} &= w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \end{aligned}$$

- в заполнителе

$$\begin{aligned} u^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right), \\ w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \end{aligned} \quad (7)$$

где z — координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций следуют из (7) и соотношений Коши [2]. Внутренние усилия в слоях вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, & M_x^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, & Q^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \\ N_z^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} dz, & M_{xz}^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_{zz}^{(3)}$ — компоненты тензора напряжений.

Уравнения равновесия в усилиях для рассматриваемого стержня получены вариационным методом Лагранжа:

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = 0, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 q, \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Обобщенные внутренние усилия в (9) выражаются через усилия (8)

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{Q^{(3)}}{2c}, & H_2 &= \frac{N_z^{(3)}}{2c}, & P_1 &= \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}, & P_2 &= \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)}, \\ T_1 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, & S_1 &= \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)}, \\ T_2 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, & S_2 &= - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем принимаются кинематические граничные условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в поперечных сечениях $x = 0, l$ (l — длина стержня) должны выполняться требования

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (11)$$



Используя соотношения (5), выделим в тензоре напряжений упругие (индекс e) и нелинейные (индекс ω) слагаемые, которые будут включать и радиационные добавки ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= \sigma_{xx}^{(k)e} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}, & \sigma_{xx}^{(k)e} &= 2G_k e_{xx}^{(k)} + 3K_k \varepsilon_{xx}^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)}, \\ \sigma_{xx}^{(k)\omega} &= \frac{4}{3} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} + K_k B_k I, & \sigma_{xx}^{(3)} &= \sigma_{xx}^{(3)e} - \sigma_{xx}^{(3)\omega}, \\ \sigma_{xx}^{(3)e} &= K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}, & \sigma_{xx}^{(3)\omega} &= \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} + K_3 B_3 I, \\ \sigma_{zz}^{(3)} &= \sigma_{zz}^{(3)e} - \sigma_{zz}^{(3)\omega}, & \sigma_{zz}^{(3)e} &= K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}, & \sigma_{zz}^{(3)\omega} &= \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} + K_3 B_3 I, \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, & \sigma_{xz}^{(3)e} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, & \sigma_{xz}^{(3)\omega} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}, \\ K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3} G_k, & K_k^- &= K_k - \frac{2}{3} G_k. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (8), получим

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} &= N_x^{(k)e} - N_x^{(k)\omega}, & M_x^{(k)} &= M_x^{(k)e} - M_x^{(k)\omega} & (k = 1, 2, 3), \\ N_z^{(3)} &= N_z^{(3)e} - N_z^{(3)\omega}, & M_z^{(3)} &= M_z^{(3)e} - M_z^{(3)\omega}, & M_{xz}^{(3)} &= M_{xz}^{(3)e} - M_{xz}^{(3)\omega}, \\ Q^{(3)} &= Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \end{aligned} \quad (12)$$

Линейные (индекс e) и нелинейные слагаемых (индекс ω) в (12) будут вычисляться по формулам типа (8), в которых подынтегральные выражения принимаются из (12) с соответствующими индексами.

Подставив в обобщенные усилия (10) внутренние усилия (12), в которых деформации выражены через перемещения (7), и отправив полученное в уравнения (9), придем к системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей деформирование упругопластического стержня в нейтронном потоке. Для решения этой системы применим метод упругих решений Ильюшина [17]. В этом случае получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений в итерациях:

$$\begin{aligned} a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_{1,xx}^n - a_5 u_{2,xx}^n + a_2 w_{1,x}^n + a_3 w_{2,x}^n - 2a_6 w_{1,xxx}^n + \\ + a_7 w_{2,xxx}^n = p + p_\omega^{(n-1)}, \\ -a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_{1,xx}^n - a_9 u_{2,xx}^n - a_{10} w_{1,x}^n - a_{17} w_{2,x}^n - a_6 w_{1,xxx}^n + \\ + 2a_7 w_{2,xxx}^n = h_\omega^{(n-1)}, \\ -a_2 u_{1,x}^n + a_{10} u_{2,x}^n + 2a_6 u_{1,xxx}^n + a_6 u_{2,xxx}^n + a_{11} w_{1,xx}^n - a_{12} w_{2,xx}^n + \\ + a_{15} w_{1,xxx}^n - a_{16} w_{2,xxx}^n + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + q_\omega^{(n-1)}, \\ -a_3 u_{1,x}^n + a_{17} u_{2,x}^n - a_7 u_{1,xxx}^n - 2a_7 u_{2,xxx}^n - a_{12} w_{1,xx}^n + a_{14} w_{2,xx}^n - \\ - a_{16} w_{1,xxx}^n + a_{13} w_{2,xxx}^n - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где n — номер линейного приближения, u_k^n, w_k^n — линейные приближения искомых перемещений, коэффициенты

$$a_1 = \frac{G_3}{2c}, \quad a_2 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad a_3 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2},$$



$$\begin{aligned}
 a_4 &= K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}, & a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}, & a_6 &= \frac{K_3^+ c h_1}{6}, & a_7 &= \frac{K_3^+ c h_2}{6}, \\
 a_8 &= \frac{K_3^+}{2c}, & a_9 &= K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}, & a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}, \\
 a_{11} &= \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}, \\
 a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{G_3 c}{6}, \\
 a_{13} &= \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}, & a_{14} &= \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}, \\
 a_{15} &= \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}, & a_{16} &= \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}, & a_{17} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}.
 \end{aligned}$$

В дополнительных нагрузках $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$, $g_\omega^{(n-1)}$ на первом шаге приближения нелинейные слагаемые принимаются равными нулю ($\omega_k^{(1)} = 0$), а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации:

$$\begin{aligned}
 p_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left(H_1^{\omega^{(n-1)}} - P_1^{\omega^{(n-1)}, x} \right), \\
 q_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left(S_1^{\omega^{(n-1)}, xx} + H_2^{\omega^{(n-1)}} - T_1^{\omega^{(n-1)}, x} \right), \\
 h_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left(H_1^{\omega^{(n-1)}} + P_2^{\omega^{(n-1)}, x} \right), \\
 g_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left(S_2^{\omega^{(n-1)}, xx} - H_2^{\omega^{(n-1)}} - T_2^{\omega^{(n-1)}, x} \right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Обобщенные усилия в (14) вычисляются по формулам типа (10), в которых нужно добавить в верхний индекс знак нелинейности ω и номер приближения $(n - 1)$. Граничные условия (11) должны выполняться на каждом шаге приближения.

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения задачу об упругопластическом изгибе рассматриваемого трехслойного стержня в нейтронном потоке поле сводить к соответствующей линейной задаче упругости с дополнительными нагрузками.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Решение системы дифференциальных уравнений (13) принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (11):

$$\begin{aligned}
 u_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos \left(\frac{\pi m x}{l} \right), & u_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos \left(\frac{\pi m x}{l} \right), \\
 w_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin \left(\frac{\pi m x}{l} \right), & w_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin \left(\frac{\pi m x}{l} \right),
 \end{aligned}$$

где U_{1m}^n , U_{2m}^n , W_{1m}^n , W_{2m}^n — искомые амплитуды перемещений.



Поперечная нагрузка и дополнительные усилия в слоях стержня также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & q_m &= \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\
 q_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & q_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\
 g_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & g_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\
 h_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & h_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\
 p_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & p_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx.
 \end{aligned}$$

Пусть поверхностная нагрузка равномерно распределена в интервале $a \leq x \leq b$, тогда

$$q_m = -\frac{2q_0}{\pi m} \left(\cos \frac{\pi m b}{l} - \cos \frac{\pi m a}{l} \right). \quad (15)$$

После подстановки перемещений (15), дополнительных усилий (15) и коэффициентов (15) в уравнения равновесия (13) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искоемых амплитуд перемещений $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$:

$$\begin{cases}
 b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_{\omega m}^{n-1}, \\
 b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\
 b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\
 b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1},
 \end{cases} \quad (16)$$

где коэффициенты b_i зависят от параметра m и от температуры через коэффициенты a_n , определенные в (13).

Решение системы (16) можно выписать в определителях, либо решать численно. Далее по формулам (15) вычисляются искоемые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (7), деформации — из соотношений Коши, напряжения — из (5).

3. ПОВТОРНОЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Пусть, начиная с момента $t = t_1$, осуществляется мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями обратного знака q'' . Они создадут в k -м слое стержня поле перемещений $u_k''(x), w_k''(x)$, деформаций $\varepsilon_{ij}''^{(k)}(x, z)$ и напряжений $\sigma_{ij}''^{(k)}(x, z)$, $i, j = x, y$. При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения воздействие нейтронного потока прекратилось, интегральный нейтронный поток зафиксирован и совпадает с уровнем к моменту начала разгрузки.



Пределы текучести материалов $\varepsilon''_y^{(k)}$, $\sigma''_y^{(k)}$ в каждой точке стержня зависят, вообще говоря, от величин $\varepsilon'_u^{(k)}$, $\sigma'_u^{(k)}$ и $I_1(z, t_1)$, существовавших непосредственно перед началом разгрузки — конкретно от того, происходило ли в данной точке тела пластическое деформирование или нет. Следовательно, материалы слоев после нагружения из естественного состояния становятся деформационно анизотропными.

Введем параметры со звездочками, в которых величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения в стержне перед разгрузкой, двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)*} &= \sigma'_{ij}{}^{(k)} - \sigma''_{ij}{}^{(k)}, & \varepsilon_{ij}^{(k)*} &= \varepsilon'_{ij}{}^{(k)} - \varepsilon''_{ij}{}^{(k)}, & q^* &= q' - q'' & (k = 1, 2, 3), \\ u_1^* &= u'_1 - u''_1, & w_1^* &= w'_1 - w''_1, & u_2^* &= u'_2 - u''_2, & w_2^* &= w'_2 - w''_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Для введенных напряжений и деформаций со звездочками примем физические уравнения состояния типа (5):

$$\begin{aligned} s_{xx}^{(k)*} &= 2G_k(1 - \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, I_1))e_{xx}^{(k)*}, & \sigma^{(k)*} &= 3K_k \varepsilon^{(k)*} & (k = 1, 2, 3), \\ s_{zz}^{(3)*} &= 2G_3(1 - \omega^{(3)*}(\varepsilon_u^{(3)*}, I_1))e_{zz}^{(3)*}, & s_{xz}^{(3)*} &= 2G_3(1 - \omega^{(3)*}(\varepsilon_u^{(3)*}, I_1))e_{xz}^{(3)*}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отличие соотношений (18) в том, что в связь шаровых частей тензоров интегральный нейтронный поток не входит.

Следует отметить, что выражения (7)–(11) и соотношения Коши в силу их линейности будут выполняться и для величин со звездочками. После проведения аналогичных преобразований получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в итерациях для перемещений со звездочками, которая будет подобна системе (13). Дополнительные «внешние» нагрузки $p_\omega^{*(n-1)}$, $h_\omega^{*(n-1)}$, $q_\omega^{*(n-1)}$, $g_\omega^{*(n-1)}$ в ней вычисляются по формулам (14), в которых нелинейные составляющие будут иметь вид

$$\begin{aligned} N_x^{(k)\omega^{*(n-1)}} &= \frac{4}{3}b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)*^{(n-1)}} \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*^{(n-1)}}, I_1) dz, \\ M_x^{(k)\omega^{*(n-1)}} &= \frac{4}{3}b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)*^{(n-1)}} \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*^{(n-1)}}, I_1) z dz, \\ N_x^{(3)\omega^{*(n-1)}} &= \frac{2}{3}b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)*^{(n-1)}} - \varepsilon_z^{(3)*^{(n-1)}}) \omega^{(3)*}(\varepsilon_u^{(3)*^{(n-1)}}, I_1) dz, \\ N_z^{(3)\omega^{*(n-1)}} &= \frac{2}{3}b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)*^{(n-1)}} - \varepsilon_x^{(3)*^{(n-1)}}) \omega^{(3)*}(\varepsilon_u^{(3)*^{(n-1)}}, I_1) dz, \\ M_x^{(3)\omega^{*(n-1)}} &= \frac{2}{3}b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)*^{(n-1)}} - \varepsilon_z^{(3)*^{(n-1)}}) \omega^{(3)*}(\varepsilon_u^{(3)*^{(n-1)}}, I_1) z dz, \\ M_{xz}^{(3)\omega^{*(n-1)}} &= 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)*^{(n-1)}} \omega^{(3)*^{(n-1)}}(\varepsilon_u^{(3)*^{(n-1)}}, I_1) z dz, \\ Q^{(3)\omega^{*(n-1)}} &= 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)*^{(n-1)}} \omega^{(3)*^{(n-1)}}(\varepsilon_u^{(3)*^{(n-1)}}, I_1) dz & (k = 1, 2). \end{aligned}$$



Входящая в них функция нелинейности со звездочкой $\omega^{(k)*}(n-1)(\varepsilon_u^{(k)*}(n-1), I_1)$, согласно гипотезе Москвитина, может быть выражена через соответствующую функцию нелинейности при нагружении из естественного состояния (6):

$$\omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, I_1) = \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)*}, I_1),$$

но с другими константами A_k^* , α_k^* .

В случае граничных условий свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры краевая задача для величин со звездочками с точностью до обозначений совпадает с задачей о нагружении стержня из естественного состояния. Поэтому искомое аналитическое решение краевой задачи для величин со звездочками можно принять в тригонометрических рядах по типу (15). Входящие в них искомые амплитуды перемещений U_{1m}^{*n} , U_{2m}^{*n} , W_{1m}^{*n} , W_{2m}^{*n} определяются по рассмотренной ранее схеме. Искомые перемещения на втором полуцикле следуют из (17).

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численно исследованы перемещения стержня, слои которого составлены из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Относительные толщины слоев $h_1 = h_2 = 0.03$, $c = 0.09$; упругие и радиационные параметры материалов приведены в [2]. Кроме этого принималось: $B = 10^{-23}$ м²/нейтрон, что обеспечивает объемную деформацию в слоях рассматриваемого стержня 3–3.5 %; для дюралюминия — $\mu = 1.26$ см, для фторопласта $\mu = 3.21$ см. Воздействие нейтронного потока моделировалось увеличением предела текучести материала внешнего слоя на 20 %, предела физической нелинейности заполнителя — на 10 %.

На рис. 2 показано изменение прогибов первого слоя по середине стержня ($x = 0, 5$) в зависимости от координат краев интервала нагрузки: 1 — упругий, 2' — упругопластический при прямом и обратном нагружениях в нейтронном потоке.

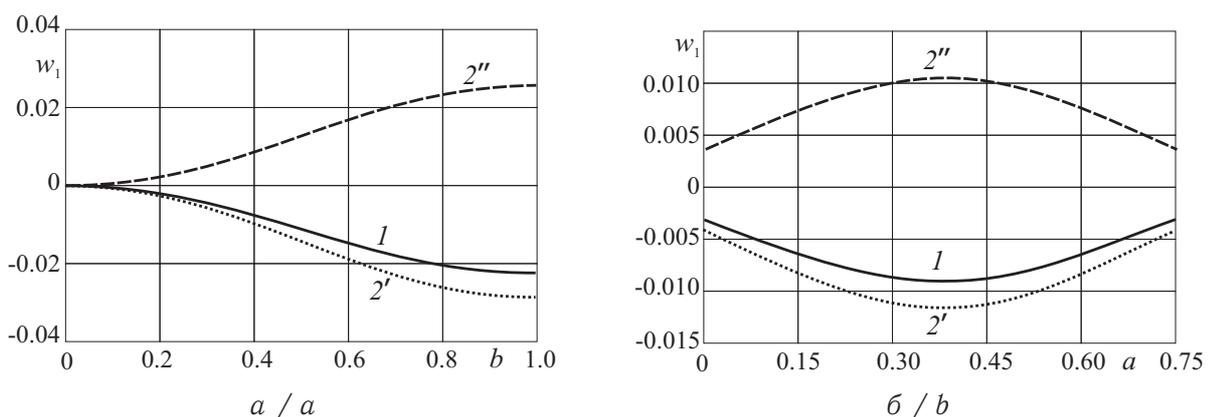


Рис. 2. Изменение прогиба вдоль оси стержня в зависимости от длины интервала нагрузки
Fig. 2. Change in deflection along the axis of the rod, depending on the length of the load interval

Рис. 2, а иллюстрирует зависимость прогиба от длины интервала нагрузки b ($a = 0$); рис. 2, б — зависимость прогиба от координаты a левого края интервала нагрузки ($b - a = 0.25$).



Следует отметить, что за счет воздействия нейтронного потока на первом полуцикле нагружения происходит увеличение пределов текучести и жесткости материалов слоев. Это приводит к уменьшению упругопластического прогиба на 3–4 %. При повторном знакопеременном нагружении и равномерно распределенной и локальной прямоугольной нагрузками предел текучести материала несущих слоев изменяется только за счет силового упрочнения материала, так как воздействие нейтронного потока прекращается. Поэтому максимальное значение прогибов при повторных нагружениях в нейтронном потоке уменьшается на 1–2 %, однако в случае последующих циклических изменениях нагрузки это расхождение будет накапливаться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная методика исследования переменного деформирования трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем может быть применена при любом количестве циклов нагружения. Она позволяет учитывать в инженерных расчетах воздействие нейтронного облучения и физическую нелинейность материалов слоев. Численные расчеты показали их существенное влияние на перемещения в стержне.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00091-П).

Библиографический список

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М. : Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. М. : Физматлит, 2011. 416 с.
3. Kuznetsova E. L., Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Natural Vibrations of Three-layer Circular Cylindrical Shells in an Elastic Medium // Mech. Solids. 2015. Vol. 50, № 3. P. 359–366. DOI: 10.3103/S0025654415030127.
4. Леоненко Д. В., Старовойтов Э. И. Импульсные воздействия на трехслойные круговые цилиндрические оболочки в упругой среде // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 202–209. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209.
5. Мочалин А. А. Параметрические колебания неоднородной круговой цилиндрической оболочки переменной плотности при различных краевых условиях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 210–214. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215.
6. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2015. Т. 50, № 2. С. 118–128.
7. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // J. Machinery Manufacture and Reliability. 2014. Vol. 43, № 2. P. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
8. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer // Mech. Solids. 2011. Vol. 46, № 5. P. 779–787. DOI: 10.3103/S0025654411050128.
9. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic Investigation of Features of Stresses in Plane Nonstationary Contact Problems With Moving Boundaries // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, № 2. P. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4.
10. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // Докл. Рос. акад. естественных наук. Поволжское межрегион. отд-ние. 1999. № 1. С. 28–37.



11. *Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholy H.* The Effect of Functionally Graded Materials into the Sandwich Beam Dynamic Performance // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4. P. 751–760. DOI: 10.4236/msa.2013.411095.
12. *Havaladar S., Sharma R.* Experimental Investigation of Dynamic Characteristics of Multilayer PU Foam Sandwich Panels // *J. Minerals and Materials Characterization and Engineering*. 2013. Vol. 1, № 5. P. 201–206. DOI: 10.4236/jmmce.2013.15031.
13. *Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A.* Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, № 8. P. 471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
14. *Москвитин В. В.* Циклическое нагружение элементов конструкций. М. : Наука, 1981. 344 с.
15. *Москвитин В. В., Старовойтов Э. И.* К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1986. № 1. С. 116–121.
16. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1960. 224 с.
17. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М. : Гостехиздат, 1948. 376 с.

Образец для цитирования:

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 196–208. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208.

Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux

E. I. Starovoitov¹, D. V. Leonenko²

¹Eduard I. Starovoitov, ORCID: 0000-0002-2550-5377, Belarusian State University of Transport, 34, Kirova str., Gomel, Belarus, 246653, edstar0@yandex.by

²Denis V. Leonenko, ORCID: 0000-0001-8003-9279, Belarusian State University of Transport, 34, Kirova str., Gomel, Belarus, 246653, leoden@tut.by

The present paper considers variable bending of a three-layer elastoplastic bar with a compressible filler in the neutron flux. To describe kinematic properties of an asymmetric through thickness pack we have accepted the hypotheses of a broken line as follows: Bernoulli's hypothesis is true in the thin bearing layers; Timoshenko's hypothesis is true in the compressible through thickness filler with a linear approximation of displacements through the layer thickness. The filler's work is taken into account in the tangential direction. The physical stress-strain relations correspond to the theory of small elastoplastic deformations. By the variational method a system of differential equilibrium equations has been derived. The kinematic conditions of simply supported faces of the bar on the immovable in space rigid bases are presumed on the boundary. The solution of the boundary problem is reduced to the search for four functions, namely: deflections and longitudinal displacements of the medial surfaces of the bearing layers. An analytical solution has been derived by the method of elastic solutions by using the Moskvitin's theorem about variable loadings. Its numerical analysis has been performed for the case of the uniform distribution of the continuous and local loads.

Key words: three-layer rod, plastic, variable bending, compressible filler, neutron flux.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-49-00091-П).



References

1. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruksii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (in Russian).
2. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Tarlakovskii D. V. *Teoriia uprugosti i plastichnosti* [Foundations of the Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 416 p. (in Russian).
3. Kuznetsova E. L., Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 359–366. DOI: 10.3103/S0025654415030127.
4. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Impulsive action on the three-layered circular cylindrical shells in elastic media. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 202–209. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209 (in Russian).
5. Mochalin A. A. Parametric Oscillations of a Non-uniform Circular Cylindrical Shell of Variable Density under Different Boundary Conditions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 210–214. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215 (in Russian).
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D Motion of an Elastic Spherical Shell. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 118–128. DOI: 10.3103/S0025654415020107.
7. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
8. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 779–787. DOI: 10.3103/S0025654411050128.
9. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic Investigation of Features of Stresses in Plane Nonstationary Contact Problems With Moving Boundaries. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4.
10. Belostochny G. N., Rusina E. A. Obolochki and Geometrically Irregular Plates with a Temperature-Sensitive Thickness. *Dokl. Ross. Akad. estestvennykh nauk. Povolzhskoe mezhhregional'noe otделение*, 1999, no. 1, pp. 28–37 (in Russian).
11. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholly H. The Effect of Functionally Graded Materials into the Sandwich Beam Dynamic Performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, pp. 751–760. DOI: 10.4236/msa.2013.411095.
12. Havaldar S., Sharma R. Experimental Investigation of Dynamic Characteristics of Multilayer PU Foam Sandwich Panels. *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 201–206. DOI: 10.4236/jmmce.2013.15031.
13. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
14. Moskvitin V. V. *Tsiklichesкое nagruzhenie elementov konstruksii* [Cyclic Loading of Elements of Designs]. Moscow, Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).
15. Moskvitin V. V., Starovoitov E. I. To the Study of the Stress-Strain State of Two-Layer Metal-Polymer Plates under Cyclic Loading. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1986, no. 1, pp. 116–121 (in Russian).



16. Il'iushin A. A., Ogibalov P. M. *Uprugoplasticheskie deformatsii polykh tsilindrov* [Elastic-Plastic Deformations of Hollow Cylinders]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1960. 224 p. (in Russian).
17. Il'iushin A. A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Ch. 1. Elastic-Plastic Deformation]. Moscow, Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).

Cite this article as:

Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208.
