



10. Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Generation of Difference Schemes for the Burgers Equation by Constructing Gröbner Bases. *Programming and Computer Software*, 2006, vol. 32, no. 2, pp. 114–117. DOI: 10.1134/S0361768806020095.
11. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2006, vol. 2, 26 p. URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html> (Accessed 02, March, 2015). DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051.
12. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and Difference Schemes for the Navier – Stokes Equations. *Computer Algebra in Scientific Computing, Lecture Notes in Computer Science*, 2009, vol. 5743, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.
13. Gerdt V. P., Robertz D. A Maple Package for Computing Gröbner Bases for Linear Recurrence Relations. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 2006, vol. A559, pp. 215–219. DOI: 10.1016/j.nima.2005.11.171.

УДК 539.374

ИМПУЛЬСНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ТРЕХСЛОЙНЫЕ КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Д. В. Леоненко¹, Э. И. Старовойтов²

¹ Доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, Гомель, leoden@tut.by

² Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, Гомель, edstar@mail.by

Рассмотрены вынужденные колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой безынерционной среде Винклера, возникающие под действием импульсных нагрузок. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа – Лява. В толстом заполнителе учитываются работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Получен ряд аналитических решений и проведен их численный анализ.

Ключевые слова: колебания, трехслойная цилиндрическая оболочка, собственные частоты, импульсные нагрузки.

ВВЕДЕНИЕ

Трехслойные пластины и оболочки нашли широкое применение в современных отраслях промышленности. Это обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Различные модели упругих трехслойных конструкций предложены в [1]. Монографии [2–4] посвящены исследованию статического и динамического деформирования трехслойных пластин и оболочек, не связанных с упругими средами. В монографии [5] рассмотрены различные модели упругой среды, с которой связаны элементы конструкций при деформировании, в том числе исследовано деформирование однородных конструкций на упругом основании. Задачи квазистатического деформирования трехслойных стержней и пластин на упругом основании разобраны в работах [6–9]. Статья [10] посвящена гармоническим колебаниям физически круглых нелинейных трехслойных пластин. Нестационарные колебания упругой среды, ограниченной двумя эксцентричными сферическими поверхностями, и распространение нестационарных волн в упругом слое рассмотрены в [11, 12].

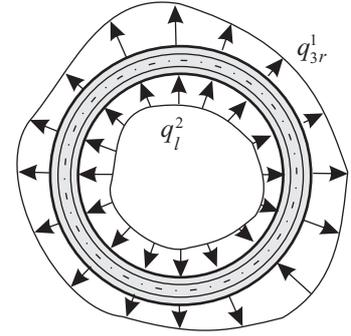
Одной из самых важных с практической точки зрения задач динамики является исследование спектра частот собственных колебаний. Ее решение позволяет определить собственные частоты и формы, знание которых необходимо для решения задач о колебаниях трехслойных конструкций при различных видах внешних воздействий. Здесь рассмотрены вынужденные колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде при импульсных внешних нагрузках.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В тонких изотропных несущих слоях трехслойной круговой цилиндрической оболочки приняты гипотезы Кирхгофа – Лява. В толстом заполнителе учитываются работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые.



Через h_k обозначена толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ (рис. 1). За независимые переменные принимаются u_α^k, w^k — тангенциальные перемещения и прогибы точек срединных поверхностей несущих слоев ($k = 1, 2$) в направлении осей x_α, z правой системы координат, отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности заполнителя и к внешней нормали соответственно. К внутренней поверхности оболочки приложена распределенная нагрузка q_l^2 , к внешней — реакция упругой безынерционной среды Винклера $q_{3r}^1 = -\kappa_0 w^1$, κ_0 — коэффициент жесткости упругой среды.



В результате выражения для перемещений в несущих слоях ($c \leq z \leq c + h_1, -c - h_2 \leq z \leq -c$) будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_\alpha^{kz} &= u_\alpha^k + (z \mp a_k) \psi_\alpha^k, & a_k &= c + 0.5h_k, \\ \psi_1^k &= -w^k, & \psi_2^k &= (R \pm a_k)^{-1} (u_2^k - w^k). \end{aligned} \quad (1)$$

Рис. 1. Расчетная схема нагружения

Здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, латинские — 1, 2, 3 (если другое специально не указано); нижний знак в формуле соответствует индексу $k = 2$ (номеру слоя); ψ_α^k — угол поворота деформированной нормали в k -м несущем слое; R — радиус оболочки. Частное дифференцирование по координате обозначается соответствующим нижним координатным индексом, следующим после запятой.

Из условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев для заполнителя ($-c \leq z \leq c$, верхний индекс «3») следует:

$$\begin{aligned} u_1^{3z} &= 0.5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) (u_1^k \pm 0.5h_k w^{k,1}), \\ u_2^{3z} &= \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) ((0.5 \mp D_{k2}) u_2^k \pm D_{k2} w^k), & w^{3z} &= 0.5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) w^k, \\ D_{k1} &= h_k/4, & a_k &= c + 0.5h_k, & D_{k2} &= 0.25h_k(1 \pm a_k/R)^{-1} R^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения движения трехслойной оболочки и силовые граничные условия следуют из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta W + \delta A_q = A_I, \quad (3)$$

где δW — вариация работы внутренних сил упругости, δA_q — вариация работы внешних сил и упругого основания, δA_I — вариация работы сил инерции.

С учетом поперечных сдвигов и обжатия заполнителя имеем:

$$\begin{aligned} \delta W &= 2\pi \int_0^{l_1} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^k (R+z) dz + \int_{h_3} (2\sigma_{\alpha 3}^3 \delta \varepsilon_{\alpha 3}^{3z} + \sigma_{33}^3 \delta \varepsilon_{33}^{3z}) (R+z) dz \right] dx_1, \\ \delta A_{q1} &= 2\pi \int_0^{l_1} \left(\left(q_\alpha^2 \left(\delta u_\alpha^2 - \frac{h_2}{2} \delta \psi_\alpha^2 \right) + q_3^2 \delta w^2 \right) (R-c-h_2) + q_{3r}^1 \delta w^1 (R+c+h_1) \right) dx_1, \\ \delta A_I &= 2\pi \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_1} \int_{h_k} [\rho_k (\ddot{w}^{kz} \delta w^{kz} + \ddot{u}_\alpha^{kz} \delta u_\alpha^{kz})] (R+z) dz dx_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где напряжения σ_{ij}^k и деформации ε_{ij}^k в слоях связаны законом Гука, ρ_k — плотность материала k -го слоя, l_1 — линейный размер оболочки в направлении координатной оси x_1 , суммирование производится по повторяющимся греческим индексам, точки над перемещениями — производные по времени.

Подставив в вариационное уравнение (3) выражения для вариаций работ (4) и проведя с помощью (1), (2) стандартные преобразования, получим в общем случае шесть уравнений движения



цилиндрической трехслойной оболочки в упругой среде:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[\left(a_{m\alpha 1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{m\alpha 2}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} + a_{m\alpha 3}^k \right) u_\alpha^k + a_{m\alpha 4}^k \frac{\partial^2 u_\beta^k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \right. \\ & \left. + \left(a_{m\alpha 5}^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_{m\alpha 6}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^3} + a_{m\alpha 7}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2} \right) w^k \right] - b_\alpha^m \ddot{u}_\alpha^m = (\mp 0.5 h_m c_2^m \delta_{\alpha 2} - R) m_m q_\alpha^m \delta_{m 2}, \\ & \sum_{\alpha, k=1}^2 \left[\left(a_{m 31}^{\alpha k} \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha^4} + a_{m 32}^{\alpha k} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_{m 33}^{\alpha k} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{m 34}^{\alpha k} - \kappa_0 R m_m \delta_{mk} \delta_{1m} \right) w^k + \right. \\ & \left. + \left(a_{m 35}^{\alpha k} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^3} + a_{m 36}^{\alpha k} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_{m 37}^{\alpha k} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2} \right) u_\alpha^k \right] - b_3^m \ddot{w}^m = \\ & = -R m_m \delta_{2m} [q_3^m \pm 0.5 h_m (q_{1,1}^m + R^{-1} c_2^m q_{2,2}^m)] \quad (m, \alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

где δ_{mk} — символы Кронекера, a_{mnp}^k — 49 коэффициентов, выраженных через геометрические характеристики слоев, параметры упругости материалов слоев и жесткости наполнителя κ_0 , например

$$\begin{aligned} a_{k11}^k &= K_k^+ h_k (1 \pm a_k) + K_3^+ c (2 \pm c) / 3, & a_{\alpha 11}^k &= K_3^+ c / 3, \\ a_{\alpha 37}^{2k} &= \mp K_3 B_{k2} h_\alpha c / 3 \mp G_3 B_{k2} c (h_\alpha / 3 + 4 D_{\alpha 2}) / 3, \\ m_m &= 1 \pm (c + h_m) R^{-1}, & b_1^m &= 2R [\rho_m I_1^m + 0.25 \rho_3 I_2^\pm], & b_3^m &= b_1^m, \\ b_2^m &= 2R [\rho_m (I_1^m + 2R^{-1} (1 \pm a_1 / R)^{-1} I_3^m + R^{-2} (1 \pm a_1 / R)^{-2} I_5^m) + \rho_3 (B_{m2})^2 I_2^\pm], \\ I_1^k &= \int_{h_k} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, & I_2^\pm &= \int_{h_3} (1 \pm z/c)^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, & I_3^k &= \int_{h_k} (z \mp a_k) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz. \end{aligned}$$

Уравнения (5) учитывают силы инерции в оболочке, возникающие вдоль трех координатных осей, т.е. соответствуют объемно-инерционной модели.

Силовые граничные условия формулируются из требования выполнения в каждой точке координатной линии равенства заданных обобщенных усилий и моментов внутренним силовым факторам, входящим в выражения контурного интеграла вдоль той же линии. Иначе говоря, на каждом торце формулируется по восемь граничных условий. Кинематические условия свободного опирания торцами на жесткие неподвижные опоры будут:

$$w^k = u_{1,1}^k = w_{,11}^k = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

В случае жесткой заделки должны выполняться требования

$$u_1^k = u_2^k = w^k = w_{,1}^k = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (7)$$

Начально-краевая задача определения перемещений замыкается добавлением к уравнениям движения (7) профилей начальных перемещений и скоростей срединных поверхностей несущих слоев:

$$\begin{aligned} u_\alpha^k(x_\beta, 0) &= u_{\alpha 0}^k(x_\beta), & \dot{u}_\alpha^k(x_\beta, 0) &= \dot{u}_{\alpha 0}^k(x_\beta), \\ w^k(x_\beta, 0) &= w_0^k(x_\beta), & \dot{w}^k(x_\beta, 0) &= \dot{w}_0^k(x_\beta) \quad (\alpha, \beta, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

2. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Метод Бубнова – Галеркина позволяет представить искомые перемещения и нагрузку в виде разложения в ряды по системе базисных функций $\psi_{\beta mn}^k, \psi_{3mn}^k$:

$$u_\beta^k = \sum_{m,n} \psi_{\beta mn}^k(x, \varphi) T_{\beta mn}^k(t), \quad w^k = \sum_{m,n} \psi_{3mn}^k(x, \varphi) T_{3mn}^k(t), \quad q_l^k = \sum_{m,n} \psi_{qlmn}^k(x, \varphi) q_{lmn}^k(t). \quad (9)$$

За счет выбора базисных функций должны удовлетворяться заданные граничные условия. Подставив выражения (9) в уравнения (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для



определения искомым функции времени $T_{lmn}(t)$:

$$\sum_{j=1}^6 P_{jmn} T_{jmn} + q_{lmn}(t) = b_l \ddot{T}_{lmn} \quad (l = 1, \dots, 6). \quad (10)$$

В случае жесткого закрепления торцов оболочки (7) и при соответствующем выборе базисных функций перемещения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} u_1^k &= \sum_{m,n} \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x - \pi m\right) \cos(n\varphi) T_{1mn}^k(t), \\ u_2^k &= \sum_{m,n} \left[(-1)^m - \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x - \pi m\right)\right] \sin(n\varphi) T_{2mn}^k(t), \\ w^k &= \sum_{m,n} \left[(-1)^m - \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x - \pi m\right)\right] \cos(n\varphi) T_{3mn}^k(t), \\ q_l^k &= \sum_{m,n} \psi_{q\alpha mn}^k(x, \varphi) q_{lmn}^k(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Кинематические условия свободного опирания торцами на жесткие неподвижные опоры (6) удовлетворяют перемещения

$$\begin{aligned} u_1^k &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \cos\frac{\pi mx}{L} \cos(n\varphi) T_{1mn}^k(t), & u_2^k &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sin\frac{\pi mx}{L} \sin(n\varphi) T_{2mn}^k(t), \\ w^k &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sin\frac{\pi mx}{L} \cos(n\varphi) T_{3mn}^k(t), & q_l^k &= \sum_{m,n} \psi_{q\alpha mn}^k(x, \varphi) q_{lmn}^k(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где $T_{lmn}^k(t)$ — искомые функции времени, удовлетворяющие уравнению (10).

2.1. Собственные колебания

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. Уравнения движения получим из (5), положив $q_\alpha^m = 0$. Предполагая, что все точки конструкции совершают колебания с одинаковой частотой ω_{mn} , уравнения для ее вычисления получим из (10), приняв функции $T_{jmn}(t)$ в виде

$$T_{lmn}(t) = A_{lmn} \sin(\omega_{mn}t + \alpha_{mn}), \quad (13)$$

где A_{lmn} , ω_{mn} , α_{mn} — амплитуды, частоты и начальные фазы колебаний, определяемые из начальных условий (8).

Подставив функции (13) в систему (10), приходим к обобщенной задаче на собственные значения.

Численные результаты здесь и далее получены для круговой трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде Винклера, свободно опертой торцами на жесткие неподвижные опоры. Несущие слои — сплав Д16Т, наполнитель — фторопласт. Относительные толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0.02$, $c = 0.025$. Коэффициент жесткости среды κ_0 . Учтены силы инерции вдоль трех координатных осей. Линейные перемещения отнесены к радиусу оболочки, время измеряется в секундах. Собственные частоты оболочки ω_{mnp} ($p = 1, \dots, 6$, $m, n = 0, \dots, 2$, $L = 2R, 10R$), полученные без учета жесткости окружающей среды, приведены в таблице.



Частоты собственных объемных колебаний трехслойной оболочки ω_{mnp} ($^{-1}$)

p	m/n	L = 2R			L = 10R		
		0	1	2	0	1	2
1	0	0	0	187	0	0	187
2		0	1728	3454	0	1728	3454
3		3602	4800	5660	3602	4800	5660
4		4478	5023	7847	4478	5023	7847
5		4485	5815	8674	4485	5815	8674
6		32958	32961	32973	32958	32961	32973
1	1	2715	1780	1068	543	186	200
2		2822	3645	4680	938	1935	3527
3		5239	5509	6269	3655	4826	5685
4		6068	7168	9511	4518	5110	7917
5		7234	8103	10326	4621	5921	8745
6		32964	32968	32982	32958	32962	32974
1	2	3021	2701	2130	1086	581	312
2		5429	5804	6635	1774	2372	3725
3		7032	7238	7828	3859	4912	5761
4		11433	11995	13490	4614	5365	8127
5		12203	12735	14240	5024	6230	8954
6		32993	32999	33022	32959	32962	32975

На рис. 2 а, б ($L = 2R, 10R$ соответственно) показано изменение первых трех частот ω_{01p} ($1 - \omega_{011}, 2 - \omega_{012}, 3 - \omega_{013}$) рассматриваемой оболочки в зависимости от коэффициента жесткости κ_0 упругой среды. При уменьшении жесткости частота ω_{011} уменьшается до нуля (см. таблицу). Наличие упругой среды практически не влияет на частоты ω_{012} для обеих оболочек. В короткой оболочке ($L = 2R$) частота ω_{013} не зависит от жесткости окружающей среды. В длинной оболочке ($L = 10R$) при $\kappa_0 > 10^9$ Па/м эта частота ω_{013} резко возрастает.

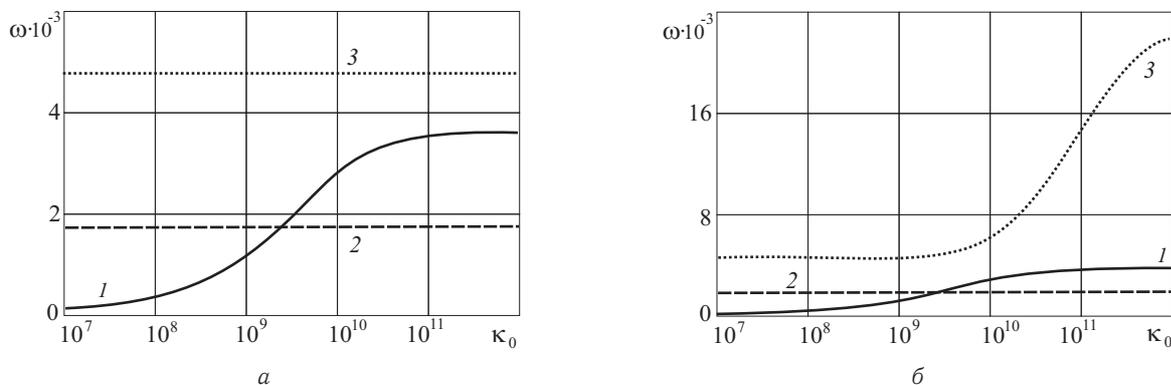


Рис. 2. Зависимость частот колебаний ω_{01p} от коэффициента жесткости среды κ_0

2.2. Вынужденные колебания

Искомые функции времени $T_{lmn}(t)$ представляются в виде разложения в конечный ряд по системе собственных ортонормированных функций:

$$T_{lmn} = \sum_{i=1}^6 \delta_{lmni} \zeta_{mni}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (10) и используя свойство ортогональности собственных форм колебаний, приходим к шести независимым уравнениям относительно собственных функций времени ζ_{mni} (для каждого m и n):

$$\ddot{\zeta}_{mni} + \omega_{mni}^2 \zeta_{mni} = \tilde{q}_{mni}(t), \quad \tilde{q}_{mni} = \sum_{l=1}^6 q_{lmn} \delta_{lmni} / \sum_{l=1}^6 b_l \delta_{lmni}^2, \tag{15}$$

где \tilde{q}_{mni} — компоненты приведенной нагрузки, δ_{lmni} — коэффициенты форм.



После решения уравнений (15) искомые перемещения представляются в виде сумм произведений ζ_{mni} на соответствующие коэффициенты и исходные координатные функции по типу частных случаев (11), (12).

Как правило, нагрузку считают импульсной, если время ее воздействия не превышает четверти периода самой меньшей из собственных частот колебаний. Примером импульсного нагружения оболочки, находящейся в упругой среде, может служить воздействие подводного взрыва, произведенного на некотором удалении от исследуемой конструкции. В дальнейшем учитываем инерцию оболочки вдоль ее оси и радиуса.

Пусть на рассматриваемую трехслойную круговую цилиндрическую оболочку в начальный момент времени действует осесимметричная импульсная нагрузка. Ее будем моделировать дельта-функцией Дирака $\delta(t)$:

$$q_l^k(x, t) = q_l^k(x)\delta(t). \tag{16}$$

где $q_l(x)$ — мгновенно приложенный импульс в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Коэффициенты разложения нагрузки (16) в ряд по формам колебаний при свободном опирании торцов оболочки будут иметь вид

$$q_{1m}^k = \frac{a_{qm}\delta(t)}{L} \int_0^L q_1^k(x) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx, \quad q_{3m}^k = \frac{2\delta(t)}{L} \int_0^L q_3^k(x) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx. \tag{17}$$

Функция времени $\zeta_{mi}(t)$ с учетом (17) запишется в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi}t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi}t) + \tilde{q}_{im} \frac{\sin(\omega_{mi}t)}{\omega_{mi}}. \tag{18}$$

В случае воздействия импульса равномерного гидростатического давления интенсивностью $q_{3i}^2 = q_1 = \text{const}$ коэффициенты (17) будут

$$q_{3m}^2 = \frac{2q_1\delta(t)}{\pi m} (1 - \cos(\pi m)). \tag{19}$$

Искомые перемещения u_1^1, u_1^2, w^1, w^2 для нагрузки (16) описываются формулами (9) с учетом выражений для функций времени (17)–(19).

Численные результаты получены при импульсной нагрузке с интенсивностью $q_1 = 2 \cdot 10^3$ Па·с, равномерно распределенной по внутренней поверхности оболочки.

На рис. 3, 4 показано изменение прогибов и продольных перемещений первого несущего слоя оболочки длиной $L = 10R$ во времени: *a* — при $\kappa_0 = 0$, *б* — при $\kappa_0 = 10^9$ Па/м. Колебания представляют собой симметричный цикл. У оболочки в упругой среде частота растет, период колебаний уменьшается. Амплитуда прогибов уменьшается на 21.5%, продольных перемещений — на 20.5%. Во втором несущем слое наблюдается подобная картина, прогибы и продольные перемещения при этом несколько меньше, чем во внешнем слое.

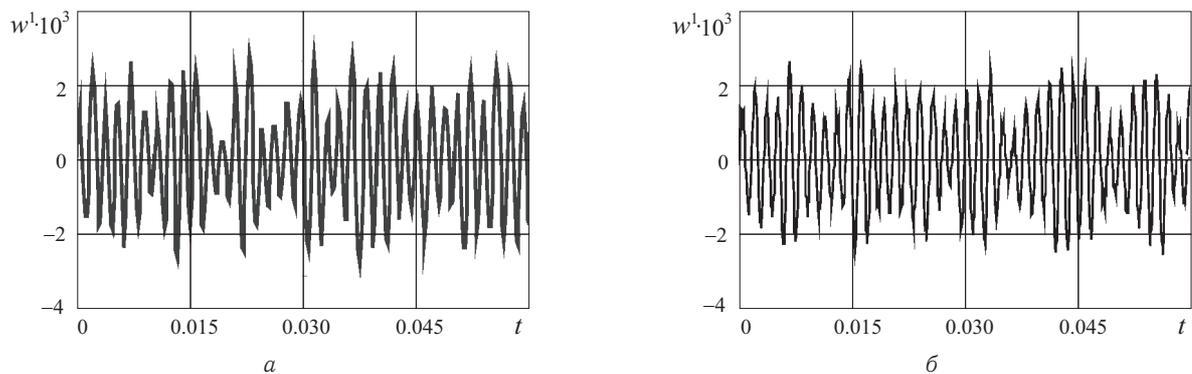


Рис. 3. Изменение прогиба первого несущего слоя во времени

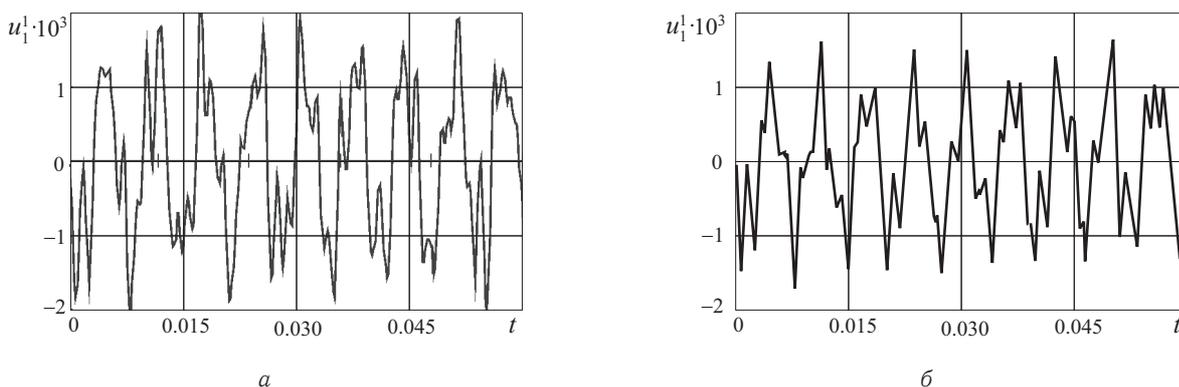


Рис. 4. Изменение горизонтального перемещения первого слоя во времени

ВЫВОДЫ

В работе предложена адекватная механико-математическая модель динамического деформирования трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде. Исследованы частоты собственных колебаний при учете сил инерции вдоль трех координатных осей. Получены решения задач о вынужденных колебаниях при действии импульсных нагрузок. Численно исследовано влияние жесткости окружающей среды на параметры колебаний. Установлено, что с ростом жесткости среды собственные частоты растут, а амплитуды колебаний уменьшаются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00091).

Библиографический список

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М. : Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
3. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 380 с.
4. Starovoitov E. I., Nagiyev F. B. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity. Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. 346 p.
5. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. М. : Физматгиз, 1960. 491 с.
6. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44, № 5. P. 744–755.
7. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, № 2. P. 291–298.
8. Старовойтов Э. И., Доровская Е. П. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2006. № 3. С. 45–50.
9. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Сулейман М. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 55–62.
10. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaia A. V. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell // Intern. Appl. Mech. 2001. Vol. 37, № 9. P. 1196–1203.
11. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В., Шукуров А. М. Нестационарные колебания упругой среды, ограниченной двумя эксцентричными сферическими поверхностями // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 2. С. 85–92.
12. Кузнецова Е. Л., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Распространение нестационарных волн в упругом слое // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 144–152.



Impulsive Action on the Three-layered Circular Cylindrical Shells in Elastic Media

D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov

Belarusian State University of Transport, 34, Kirova st., 246653, Gomel, Belarus, leoden@tut.by, edstar@mail.by

The paper considers oscillations of three-layered cylindrical shells filled by an elastic medium. External loads are impulsive. The Kirchhoff – Love's hypotheses are assumed for thin isotropic bearing layers. The work of the transverse shear and thickness reduction in the thick filler is taken into account. Variations in displacements in the transverse coordinate are assumed to be linear. The conditions of continuous displacements are used on the contact boundary. The reaction of the inertia-free elastic filler is described in terms of the Winkler's model. A number of analytical solutions have been obtained and analyzed numerically.

Key words: vibrations, three-layered cylindrical shell, natural frequencies, local load.

This work was supported by the Russian Science Foundation (projects no. 14-49-00091).

References

1. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruksii* [Mechanics of Layered Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 p. (in Russian).
2. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. *Mekhanika sloistykh viazkouprugoplasticheskikh elementov konstruksii* [Mechanics of Layer Viscoelastoplastic Construction Elements]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 576 p. (in Russian).
3. Starovoitov E. I., Yarovaya A. V., Leonenko D. V. *Deformirovanie trekhslonnykh elementov konstruksii na uprugom osnovanii* [Deformation of Three-Layer Construction Elements on the Elastic Foundation]. Moscow, Fizmatlit, 2006, 380 p. (in Russian).
4. Starovoitov E. I., Nagiyev F. B. *Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity and Viscoelasticity*. Toronto, New Jersey, Apple Academic Press, 2012, 346 p.
5. Vlasov V. Z., Leontiev N. N. *Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 491 p. (in Russian).
6. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Thermoplastic Strain of Circular Sandwich Plates on an Elastic Base. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 5, pp. 744–755. DOI: 10.3103/S0025654409050112.
7. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Deformation of a Three-layer Elastoplastic Beam on an Elastic Foundation. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
8. Starovoitov E. I., Dorovskaya E. P. Bending of Rectangular Sandwich Plate on Elastic Foundation. *Problemy mashinostroeniia i avtomatizatsii* [Engineering and Automation Problems], 2006, no. 3, pp. 45–50 (in Russian).
9. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Suleyman M. Thermoelastic Bending of a Ring Sandwich Plate on the Elastic Foundation. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2006, no. 4, pp. 55–62 (in Russian).
10. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell. *International Applied Mechanics*, 2001, vol. 37, no. 9, pp. 1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
11. Gorshkov A. G., Tarlakovskii D. V., Shukurov A. M. Unsteady Vibrations of an Elastic Medium Bounded by Two Eccentric Spherical Surfaces. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 2, pp. 275–282. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90056-6.
12. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotkov G. V. Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 45, no. 5, pp. 779–787. DOI: 10.3103/S0025654411050128.