



УДК 501.1

## ДВИЖЕНИЕ ПРОППАНТА В РАСКРЫВАЮЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

А. В. Татосов, А. С. Шляпкин

Татосов Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики и механики, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, Тюмень, Семакова, 10, atatosov@utmn.ru

Шляпкин Алексей Сергеевич, аспирант, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, Тюмень, Семакова, 10

Рассматривается процесс формирования трещины гидроразрыва при закачивании в скважину вязкой жидкости с примесью частиц. Предложена модель развития трещины с учетом потерь жидкости на просачивание в пористую среду и падения взвешенных частиц под действием силы тяжести. Проведен детальный анализ роста осадка, обусловленного просачиванием жидкости гидроразрыва в пористую среду. Показано, что наличие частиц существенно влияет на процесс раскрытия трещины. Рост трещины при наличии частиц ограничен, окончательная ее форма зависит от состава смеси и способа закачки — давления на входе, объемного содержания частиц, объема оторочки (чистой жидкости гидроразрыва без примеси). Все эти факторы учитываются в предложенной модели. Исследование выполнено для безразмерной формы уравнений движения. Результаты расчетов позволяют охарактеризовать остаточную форму трещины или подобрать технологические параметры для достижения желаемых результатов при разрыве пласта.

*Ключевые слова:* трещина гидроразрыва, пористая среда, вязкая жидкость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

### ВВЕДЕНИЕ

Для повышения дебита нефтяных скважин иногда применяется технология гидроразрыва пласта. В основополагающих работах [1–3] обоснованы формы и построены математические теории развития трещины гидроразрыва. Качественный обзор проведен в [4]. С целью формирования остаточной трещины в скважину подается вязкая жидкость (жидкость гидроразрыва) с примесью твердых частиц (проппант). В зарубежной литературе тема о транспорте проппанта по трещине широко освещается [5, 6]. Наиболее полно изучен рост осадка, обусловленный движением вниз взвешенных частиц. В данной работе предложена модель подачи проппанта в раскрывающуюся трещину гидроразрыва пласта с учетом потерь жидкости на просачивание в пористую среду и падения взвешенных частиц под действием силы тяжести. Акцент сделан на изучении процесса осаждения частиц за счет протекания жидкости гидроразрыва в грунт. Несмотря на малую скорость фильтрации, жидкость просачивается в пористую среду через боковую поверхность полости, площадь которой значительно превосходит площадь сечения Христиановича. Закачиваемая вязкая смесь, надавливая на берега начальной трещины, расширяет ее. Ввиду просачивания жидкости гидроразрыва в пласт у берегов трещины скапливается дисперсная фаза и быстро стекает вниз. Цель данного исследования — определить влияние примеси частиц в смеси на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**Допущения.** Движение жидкости с примесью частиц вдоль трещины опишем в односкоростном квазиодномерном приближении. Трещина гидроразрыва предполагается вертикальной (рис. 1, а, б).

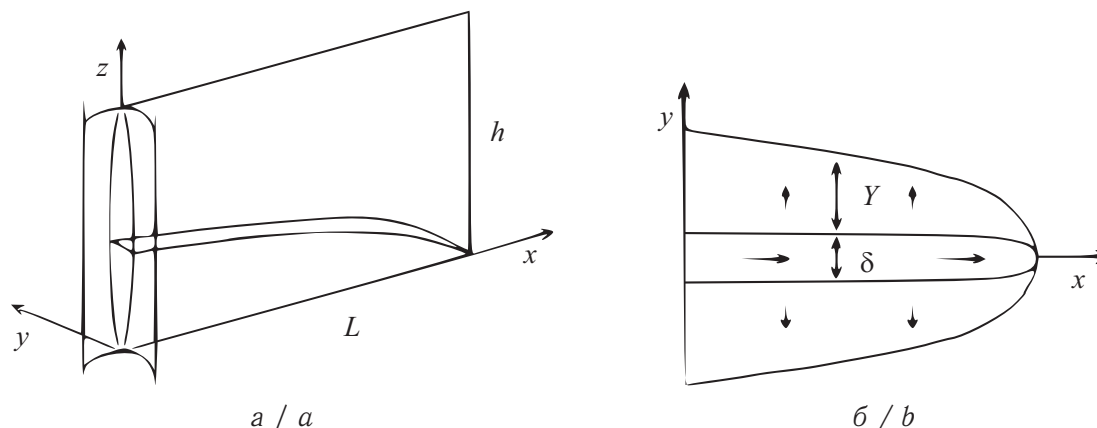


Рис. 1. Схематическое представление вертикальной трещины (а); сечение в горизонтальной плоскости (Христиановича) (б)

Fig. 1. Schematic representation of a vertical crack (a); cross-section in the horizontal plane (Khristianovicha) (b)

**Форма трещины.** На основании гипотезы Перкинса [1] с учетом формы плоских трещин в упругой среде введем связь избыточного давления  $p$  со средней шириной  $\delta$  трещины [7, 8]

$$p = b\delta, \quad b = \frac{4\mu_\sigma}{\pi(1 - \nu_\sigma)h}, \quad (1)$$

где  $\nu_\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $\mu_\sigma$  — модуль сдвига материала. Геометрическая форма трещины такова, что

$$\delta \ll h \ll L.$$

Здесь  $h$ ,  $L$  — соответственно высота и длина трещины. На носике трещины, в приближении Перкинса, избыточное давление равно нулю

$$x = L(t) : \quad p = 0.$$

В процессе подачи проппанта происходит осаждение частиц. Площадь поперечного сечения полости  $S = \delta h$ . Выделим часть сечения свободной от осадка, пусть  $s = \varepsilon h$  площадь свободной области.

**Уравнения неразрывности.** Скорость движения жидкости и взвешенных частиц в продольном направлении будем считать одинаковой. В отличие от [8, 9] поступательный поток вещества происходит только по свободной от осадка области. Уравнение неразрывности, отражающее сохранение общего объема смеси, имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} = -f, \quad (2)$$

где  $u$  — средняя скорость потока смеси,  $f$  — интенсивность потерь жидкости гидроразрыва через боковую поверхность трещины вследствие протекания в грунт. Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — объемные доли жидкости гидроразрыва и частиц в подаваемой смеси,



$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_*$  — объемное содержание дисперсной фазы в осевшем слое. Условие сохранения объема частиц есть

$$\frac{\partial(\alpha_*(S - s) + \alpha_2 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 s u)}{\partial x} = 0.$$

Введем обозначение  $\alpha = \alpha_2/\alpha_*$ , тогда

$$\frac{\partial(S - s + \alpha s)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha s u)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

**Протекание в грунт.** Фильтрацию жидкости в грунт опишем, применяя гипотезу плоских сечений, согласно которой жидкость гидроразрыва просачивается в пористую среду только по нормали к трещине [7]. Вязкость жидкости, изначально насыщающей пласт, считаем малой в сравнении с вязкостью жидкости гидроразрыва. В среднем по сечению примем

$$v_n = v_n(x, t), \quad \frac{\partial p_r}{\partial y} = -\frac{\eta}{k} v_n,$$

где  $v_n$  — скорость фильтрации,  $p_r$  — избыточное давление жидкости гидроразрыва в грунте,  $\eta$  — вязкость жидкости гидроразрыва,  $k$  — проницаемость грунта. В силу граничных условий  $0 \leq y \leq Y$ ,  $p_r(0) = p$ ,  $p_r(Y) = 0$  найдем

$$v_n = \frac{k p}{\eta Y}. \quad (4)$$

Учитывая различие физической скорости  $v_r$  и скорости фильтрации, глубину зоны пропитки  $Y$  определим уравнением

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v_r, \quad v_n = \beta v_r, \quad (5)$$

где  $\beta$  — объемное содержание жидкости гидроразрыва в пласте, близкое к величине пористости.

Ввиду потери жидкости через обе боковые поверхности трещины интенсивность утечки есть

$$f = 2h v_n. \quad (6)$$

**Динамика осаждения частиц.** Рост осадка обусловлен двумя процессами — падением взвешенных частиц под действием силы тяжести и их накоплением за счет просачивания жидкости гидроразрыва в пористую среду. Определим динамику роста объема осадка в каждом из этих процессов в отдельности.

Под скоростью падения частиц  $w_g$  будем понимать скорость приближения взвешенных частиц к частицам верхнего слоя осадка. В системе координат, связанной с контактной поверхностью  $\Pi$  отделяющей осадок, условие равенства потоков дисперсной фазы по обе стороны от поверхности дает

$$\alpha_2(w_g + w_s) = \alpha_* w_s.$$

Здесь  $w_s$  — скорость движения контактной поверхности  $\Pi$  относительно близлежащих к ней частиц осадка. Скорость роста объема осадка за счет падения взвешенных частиц, отнесенная к единице длины трещины, есть  $\delta w_s$ , или  $(\alpha/(1 - \alpha))\delta w_g$ .



Интенсивность потерь жидкости гидроразрыва за счет протекания в грунт определена как  $f = 2hv_n$ . Единице объема смеси соответствует  $\alpha$  объем осадка и  $(1 - \alpha)$  объем жидкости, просочившейся в грунт. Таким образом, скорость роста объема осадка (отнесенная к единице длины трещины) за счет просачивания жидкости гидроразрыва в пористую среду будет определяться выражением  $(\alpha/(1 - \alpha))f$ .

Учитывая влияние обоих процессов на динамику роста осадка, получим:

$$\frac{\partial(S - s)}{\partial t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}(2hv_n + \delta w_g). \quad (7)$$

Существенным упрощением, соответствующим одномерной модели, является усреднение объемного содержания взвешенных частиц по поперечному сечению, что физически соответствует медленному перемешиванию смеси. Этому способствует стекание дисперсной фазы по берегам трещины.

**Уравнение импульсов.** В силу принятых ограничений на геометрические параметры трещины в уравнении движения смеси целесообразно пренебречь инерционным слагаемым. Согласно условию накопления осадка в нижней части трещины будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta_\alpha}{\delta^2}u. \quad (8)$$

где  $\eta_\alpha$  — вязкость смеси.

**Основная система уравнений.** Все приведенные выше уравнения движения имеют место лишь при условии существования свободной от осадка области течения. Будем считать, что поток смеси вдоль трещины возможен только при  $s > 0$ . Если же в некотором сечении  $s = 0$ , а  $S > 0$ , то трещина перекрыта. В таком сечении движение смеси отсутствует, избыточное давление падает до нуля, просачивание приостанавливается. Раскрытая трещина при этом удерживается слоем частиц, находящимся в напряженном состоянии. Положим в дальнейшем  $h, b = \text{const}$ . Исключая часть переменных, систему уравнений (1)– (8) приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -2v, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -\frac{2}{1 - \alpha}v - \frac{\alpha}{1 - \alpha}w, \\ \frac{\partial(\alpha \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \varepsilon u)}{\partial x} &= -\frac{2\alpha}{1 - \alpha}v - \frac{\alpha}{1 - \alpha}w, & u &= -\frac{b}{12\eta_\alpha}\delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{v}{\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$v = \begin{cases} v_n, & \varepsilon > 0, \\ 0, & \varepsilon = 0, \end{cases} \quad w = \begin{cases} (\delta/h)w_g, & \varepsilon > 0, \\ 0, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Величина  $v_n$  определена выражением

$$v_n = \frac{kb}{\eta} \frac{\delta}{Y}.$$

Аппроксимируем  $w_g$  согласно [5]

$$w_g = \frac{(1 - \alpha_*\alpha)\eta}{\eta_\alpha} w_{g0}, \quad w_{g0} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_p - \rho_l)gr^2}{\eta}, \quad \eta_\alpha = \eta(1 - \alpha)^{-m},$$

где  $\rho_p, \rho_l$  — плотности частиц проппанта и жидкости гидроразрыва;  $g$  — ускорение свободного падения;  $r$  — радиус частиц;  $\alpha_* = 0.66, m = 1.82$ .



Система (9) дополняется граничным условием на носике трещины

$$x = L(t) : \quad \delta = 0 \tag{10}$$

и граничным условием на входе в трещину.

В сравнении с [10] предложенная модель дополнительно учитывает влияние силы тяжести и технологическую неоднородность подаваемой смеси.

## 2. ЗНАЧИТЕЛЬНОЕ ПРОТЕКАНИЕ В ГРУНТ

Рассмотрим менее изученный случай преобладания роста осадка за счет протекания жидкости гидроразрыва в пористую среду

$$\frac{w}{v} \ll 1, \tag{11}$$

считая, что для основного объема взвеси  $\alpha$  и  $(1 - \alpha)$  одного порядка. Введем безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{x}{L^*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta^*}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}, \quad \bar{q} = \frac{\varepsilon u}{q^*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v^*}, \quad \bar{Y} = \frac{Y}{Y^*}. \tag{12}$$

Учитывая вид уравнений, примем в качестве характерных величин

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{6\beta k} \frac{p_0^2}{b^2}}, & t^* &= \frac{1}{4\beta} \frac{\eta p_0}{k b^2}, & \delta^* &= \varepsilon^* = \frac{p_0}{b}, \\ q^* &= 2 \sqrt{\frac{\beta k}{6} \frac{p_0^2}{\eta b}}, & Y^* &= \frac{1}{2\beta} \frac{p_0}{b}, & v^* &= 2\beta \frac{k b}{\eta}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $p_0$  — параметр, в качестве которого удобно принять некоторое избыточное давление на входе в трещину, такой величине давления будет соответствовать  $\bar{\delta}(0, \bar{t}) = 1$ .

Выбранный масштаб соответствует тому, что в течение времени  $t^*$  в пористую среду просочилось порядка половины количества жидкости, закаченной в трещину  $2v^*t^* = 2\beta Y^* = \delta^*$ . Это приведет к заполнению осадком  $\alpha/(1 - \alpha)$  доли объема всей трещины. Следовательно, характерное время  $\tau_f$  заполнения всей трещины частицами за счет фильтрации можно оценить, как  $\tau_f \sim ((1 - \alpha)/\alpha)t^* \sim t^*$ , характерное же время падения взвешенных частиц  $\tau_g \sim h/w_g$ . При этом  $w \sim (\delta^*/h)w_g$ ,  $v \sim v^*$ , так что условие (11) есть  $\tau_f/\tau_g \ll 1$ .

Пренебрегая смещением взвешенных частиц, все же считаем в данном исследовании, что скопившаяся у берегов трещины дисперсная фаза стекает вниз. В противном случае, необходимо использовать уравнение импульсов в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta\alpha}{\varepsilon^2}u.$$

**Безразмерная форма уравнений движения.** Система уравнений движения в переменных (12), (13) с учетом условия (11) принимает следующую безразмерную форму (черта опущена):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + 2 \frac{\partial q}{\partial x} &= -v, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 2 \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{1}{1 - \alpha}v, & \frac{\partial(\alpha\varepsilon)}{\partial t} + 2 \frac{\partial(\alpha q)}{\partial x} &= -\frac{\alpha}{1 - \alpha}v, \\ q &= -(1 - \alpha)^m \varepsilon \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial t} &= v, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $q = \varepsilon u$ ,  $v = \delta/Y$  при  $\varepsilon > 0$ ,  $v = 0$  при  $\varepsilon = 0$ .



В дальнейшем, используются только безразмерные величины.

**Начальные и краевые условия.** Процесс гидроразрыва будем проводить при постоянном давлении на входе в трещину. Предварительно до момента  $\tau_1$  подается жидкость гидроразрыва без примеси частиц. Затем в течение времени  $\tau_2$  — проппант. Полное время закачки смеси  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ , после чего подача смеси прекращается. Граничные условия имеют вид

$$\delta(0, t) = 1, \quad 0 < t \leq \tau; \quad q(0, t) = 0, \quad t > \tau; \quad \alpha(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq \tau_1, \\ A, & t > \tau_1. \end{cases} \quad (15)$$

Если полость трещины в начальном сечении целиком перекрывается слоем частиц до сброса давления, то подача смеси прекращается. Данный процесс реализуется при граничном условии

$$\delta(0, t) = 1, \quad \alpha(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq \tau_1, \\ A, & t > \tau_1. \end{cases} \quad (16)$$

В этом случае подача смеси поддерживается максимально продолжительное время. Время закачки  $\tau$  определится моментом остановки потока во входном сечении:  $q(0, t) = 0$ , при  $t > \tau$ .

Начальные условия соответствуют состоянию покоя

$$\delta(x, 0) = \varepsilon(x, 0) = q(x, 0) = Y(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

**Анализ расчетов.** Система уравнений в безразмерном виде (14) исследовалась численно. Использовалась явная разностная схема по аналогии с [11]. Схема тестировалась для случая подачи в пласт жидкости гидроразрыва без примеси частиц. При выбранном граничном условии постоянного давления на входе в трещину решение задачи автомодельно и приведено в [8]. В обратном предельном случае отсутствия оторочки воспроизводится решение из [10].

На рис. 2 приведен пример развития трещины в виде распределения величин  $\delta$  и  $\varepsilon$  по ее длине в моменты времени  $t = 1, 2, 6, 10$  — соответственно кривые 1–4.

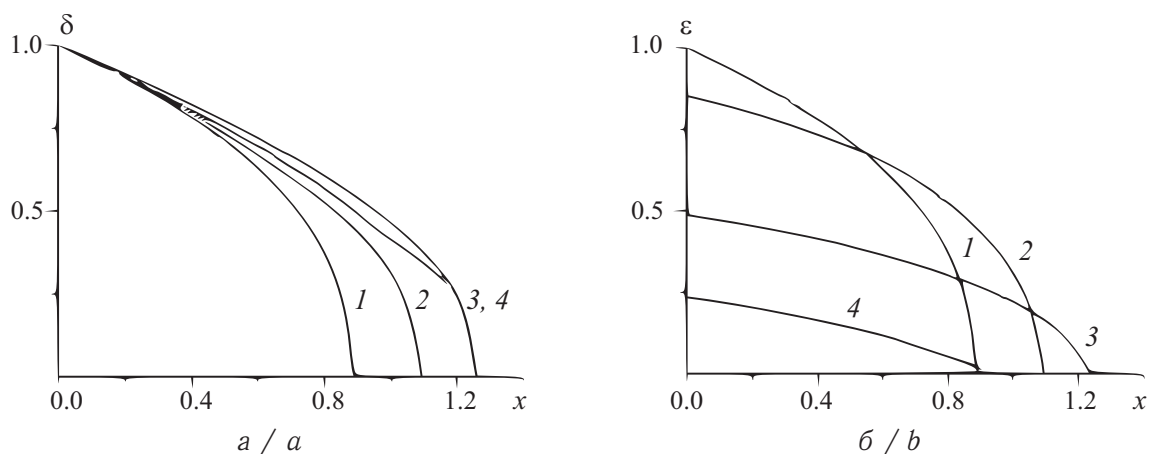


Рис. 2. Распределение безразмерных величин  $\delta$  (а) и  $\varepsilon$  (б) по длине трещины в моменты времени  $t = 1, 2, 6, 10$  — соответственно кривые 1–4;  $A = 0.2, \tau_1 = 1$

Fig. 2. The distribution of the dimensionless quantities  $\delta$  (a) and  $\varepsilon$  (b) along the length of the crack at the instants  $t = 1, 2, 6, 10$  are, respectively, curves 1–4;  $A = 0.2, \tau_1 = 1$



Граничные условия соответствуют случаю (16) при  $A = 0.2$ ,  $\tau_1 = 1$ . До момента  $t = \tau_1$  функции  $\delta$  и  $\varepsilon$  совпадают (кривые 1). В дальнейшем при подаче проппанта полость трещины заполняется частицами (кривые 2). Уменьшение свободного пространства особенно заметно в начальном сечении. Здесь  $\varepsilon$  меньше единицы. Контактный разрыв, отделяющий слой частиц от первоначальной оторочки, приближается к носику трещины. В дальнейшем наличие примеси частиц в жидкости гидроразрыва играет существенную роль в судьбе трещины. Начинается более интенсивное выпадение осадка в раскрывающейся ее части. В некоторый момент происходит закупоривание носика трещины и ее дальнейший рост прекращается. Ввиду продолжающегося просачивания жидкости гидроразрыва в грунт свободное пространство сокращается (кривые 3–4) и за конечный промежуток времени полностью исчезает. По мере сужения свободного пространства происходит незначительное уменьшение средней ширины трещины.

При постановке граничного условия (16) длина трещины не может превысить некоторой максимальной величины. Для различных значений параметров  $A$  и  $\tau_1$  наблюдается остановка роста трещины, которая происходит раньше прекращения закачки смеси. Обозначим предельную длину трещины и момент ее достижения как  $L_m$  и  $t_m$  соответственно.

Исследуем влияние продолжительности предварительной подачи в скважину жидкости гидроразрыва без примеси частиц (оторочки) на процесс формирования трещины. Поставив граничное условие (16) с постоянным значением  $A = 0.2$ , варьируем параметр  $\tau_1$ . На рис. 3 приведены зависимости предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от длительности предварительной закачки. Подача оторочки увеличивает предельную длину трещины и снижает среднюю скорость ее роста до предельной длины. Отношение времени заполнения всей полости трещины частицами  $\tau$  к моменту достижения предельной длины  $t_m$  изменяется незначительно.

Ограничим время закачки, поставив граничное условие (15). Положим  $A = 0.2$ ,  $\tau = \text{const} = 10$  или  $\tau_2 = \text{const} = 10$ ; параметр  $\tau_1$  — варьируем. В первом случае — постоянно полное время подачи смеси, во втором — время подачи проппанта. В обоих случаях меняем время закачивания оторочки. На рис. 4 представлена окончательная форма трещины; значениям  $\tau_1 = 0, 2, 5$  соответствуют кривые 1–3.

При  $\tau_1 = 0$  к моменту сброса давления  $\tau$  трещина почти целиком заполнена частицами. Для двух других значений  $\tau_1$  изменения более значительны. После принудительного прекращения закачки поток смеси в начальном сечении останавливается. Из полости трещины жидкость гидроразрыва протекает в грунт. Присутствующие в ней частицы пополняют осадок. С течением времени трещина сужается по длине

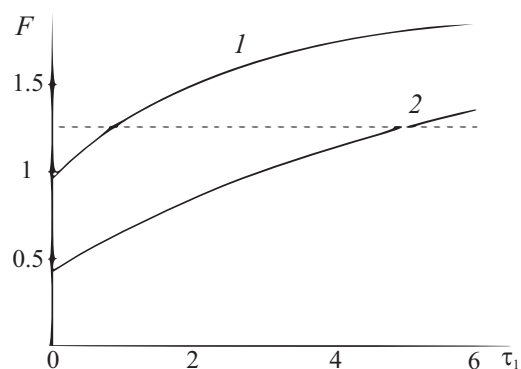


Рис. 3. Зависимость предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от длительности закачивания оторочки: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , пунктир —  $0.5\tau/t_m$ ,  $A = 0.2$   
 Fig. 3. Dependence of the limiting length of the crack, the time of the mixture feeding and the stopping time of growth from the duration of pumping of the rim: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , dotted line —  $0.5\tau/t_m$ ,  $A = 0.2$

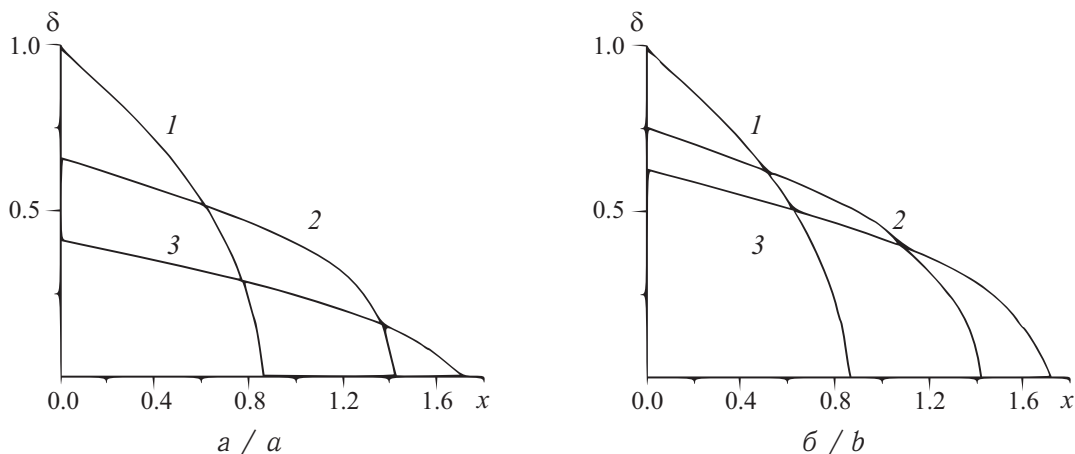


Рис. 4. Окончательная форма трещины с остановкой подачи проппанта; значениям  $\tau_1 = 0, 2, 5$  соответствуют кривые 1-3,  $A = 0.2, \tau = \text{const} = 10$  (а),  $\tau_2 = \text{const} = 10$  (б)  
 Fig. 4. The final shape of the crack with stopping proppant flow; The values  $\tau_1 = 0, 2, 5$  correspond to the curves 1-3,  $A = 0.2, \tau = \text{const} = 10$  (a),  $\tau_2 = \text{const} = 10$  (b)

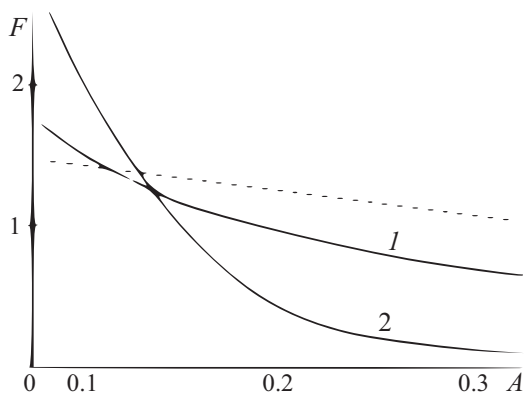


Рис. 5. Зависимость предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от объемного содержания частиц: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , пунктир —  $0.5\tau/t_m, \tau_1 = 0$

Fig. 5. Dependence of the limiting length of the crack, the time of the mixture feeding and the stopping time of growth on the volume content of the particles: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , dotted line —  $0.5\tau/t_m, \tau_1 = 0$

и принимает окончательную форму. При сравнении соответствующих кривых для первого и второго расчетов замечаем равенство длин трещин. Это означает, что в обоих случаях достигнута максимальная длина. Сокращение времени подачи проппанта приводит лишь к уменьшению средней ширины  $\delta$ .

Исследуем влияние объемного содержания частиц в смеси на процесс формирования трещины. Подадим однородную смесь проппанта без оторочки при различных значениях  $\alpha$ . Поставив граничное условие (16), положим  $\tau_1 = 0$ . На рис. 5 представлены зависимости предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от доли дисперсной фазы. Уменьшение объемного содержания частиц в смеси приводит к замедлению выпадения осадка и более длительному росту трещины. В результате достигается большая длина  $L_m$ . Время закачки существенно возрастает вследствие непрерывного уменьшения потока подаваемой смеси.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель и рассмотрены особенности процесса течения вязкой жидкости с примесью частиц по раскрывающейся трещине в пористой среде. Изучено влияние протекания жидкости в грунт. Установлено, что присутствие частиц в жидкости гидроразрыва существенно влияет на характер процесса в целом. Рост трещины в длину может прекратиться вследствие закупоривания ее носика. Уменьшение объемного содержания частиц в закачиваемой смеси приводит к





замедлению выпадения осадка и более длительному росту трещины. Предварительная подача жидкости гидроразрыва без примеси частиц увеличивает максимальную длину трещины и снижает среднюю скорость ее роста до предельной длины. Отношение времени заполнения всей полости трещины частицами к моменту достижения предельной длины изменяется незначительно.

### Библиографический список

1. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of hydraulic fractures // Journal of Petroleum Technology. 1961. Vol. 13, iss. 09. Paper SPE 89. P. 937–949. DOI: 10.2118/89-PA
2. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Society of Petroleum Engineers. 1972. Vol. 12, iss. 04. Paper 7834. P. 306–314. DOI: 10.2118/3009-PA
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
4. Есинов Д. В., Куранаков Д. С., Лапин В. Н., Черный С. Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.
5. Mobbs A. T., Hammond P. S. Computer Simulations of Proppant Transport in a Hydraulic Fracture // SPE Production and Facilities. 2001. Vol. 16, № 2. P. 112–121. DOI: 10.2118/69212-PA
6. Dontsov E. V., Peirce A. P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 760. P. 567–590. DOI: 10.1017/jfm.2014.606
7. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 256 с.
8. Ивашинов О. Е., Смирнов Н. Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. № 6. С. 28–36.
9. Смирнов Н. Н., Тагирова В. П. Анализ степенных автомодельных решений задачи о формировании трещины гидроразрыва // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2007. № 1. С. 48–54.
10. Татосов А. В. Модель закачки проппанта в трещину гидроразрыва // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 6. С. 91–101.
11. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987.

---

### Образец для цитирования:

Татосов А. В., Шляпкин А. С. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 217–226. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

---

## The Motion of Propping Agent in an Opening Crack in Hydraulic Fracturing Plast

A. V. Tatosov, A. S. Shlyapkin

Alexey V. Tatosov, <https://orcid.org/0000-0002-4229-3812>, Tyumen State University, 10, Semakova, Tyumen, 625003, Russia, [atatosov@utmn.ru](mailto:atatosov@utmn.ru)

Alexey S. Shlyapkin, Tyumen State University, 10, Semakova, Tyumen, 625003, Russia

In the present study the process of hydraulic fracture formation when pumping a viscous fluid with an admixture of particles into a well is considered. A model of a crack propagation taking account of the loss of liquid on seepage into a porous medium and the sedimentation of suspended particles under the action of gravity is developed. Detailed analysis of the sedimentation growth caused by leakage of hydraulic fracturing fluid into a porous medium is carried out. It is shown that the presence of particles has a significant effect on the pro-



cess of crack opening. The crack growth in the presence of particles is limited, its final state depends on the composition of the mixture, injection method, inlet pressure, the volume content of the particles, the volume of the rim (pure fracturing fluid without admixture). All these factors are taken into consideration in the proposed model based on special dimensionless forms of the equations of motion. The results make it possible to estimate the crack residual and choose the technological parameters to provide the desired state of the ruptured formation.

*Key words:* hydraulic fracture, porous medium, viscous liquid.

## References

1. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of Hydraulic Fractures. *Journal of Petroleum Technology*, 1961, vol. 13, iss. 09, paper SPE 89, pp. 937–949. DOI: 10.2118/89-PA
2. Nordgren R. P. Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture. *Society of Petroleum Engineers*, 1972, vol. 12, iss. 04, paper 7834, pp. 306–314. DOI: 10.2118/3009-PA
3. Zheltov Yu. P., Khristianovich S. A. O gidravlicheskom razryve neftenosnogo plasta [On hydraulic fracturing of oil reservoirs]. *Izv. AN SSSR, Otd-nie tekhn. nauk* [Proc. USSR Acad. Sci. Sect. Tech. Sci.], 1955, no. 5, pp. 3–41 (in Russian).
4. Esipov D. V., Kuranakov D. S., Lapin V. N., Chernyi S. G. Mathematical models of hydraulic fracturing. *Computational technologies*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 33–61 (in Russian).
5. Mobbs A. T., Hammond P. S. Computer Simulations of Proppant Transport in a Hydraulic Fracture. *SPE Production & Facilities*, 2001, vol. 16, no. 2, pp. 112–121. DOI: 10.2118/69212-PA
6. Dontsov E. V., Peirce A. P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures. *Journal of Fluid Mechanics*, 2014, vol. 760, pp. 567–590. DOI: 10.1017/jfm.2014.606
7. Novatsky B. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 256 p. (in Russian).
8. Ivashnev O. E., Smirnov N. N. Formirovanie treshhiny gidrorazryva v poristoj srede [Formation of a hydraulic fracture in a porous medium]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika*, 2003, no. 6, pp. 28–36 (in Russian).
9. Smirnov N. N., Tagirova V. P. Analiz stepennykh avtomodel'nykh reshenij zadachi o formirovanii treshhiny gidrorazryva [Analysis of power-law self-similar solutions of the problem of fracture formation]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika*, 2007, no. 1, pp. 48–54 (in Russian).
10. Tatosov A. V. Model of crack filling in hydraulic fracturing. *Computational technologies*, 2005, vol. 10, no. 6, pp. 91–101 (in Russian).
11. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. *Rezhimy s obostreniem v zadachah dlja kvazilinejnykh parabolicheskikh uravnenij* [Regimes with peaking in problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow, Nauka, 1987. 480 p. (in Russian).

---

### Cite this article as:

Tatosov A. V., Shlyapkin A. S. The Motion of Propping Agent in an Opening Crack in Hydraulic Fracturing Plast. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 217–226 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

---