УДК 519.17

МНОГОУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ КАК УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА: КРИТЕРИЙ ШПЕРНЕРОВОСТИ

В. Н. Салий

Салий Вячеслав Николаевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, SaliiVN@info.sgu.ru

Конечное упорядоченное множество называется шпернеровым, если среди его максимальных по длине антицепей хотя бы одна составлена из элементов одинаковой высоты. Под многоугольным графом понимается бесконтурный граф, полученный из цикла путем некоторой ориентации его ребер. В многоугольном графе отношение достижимости вершин является отношением порядка. Таким образом, многоугольный граф можно рассматривать как упорядоченное множество. Найдены необходимые и достаточные условия шпернеровости таких упорядоченных множеств.

Ключевые слова: упорядоченное множество, шпернерово свойство, многоугольный граф, цепь, зигзаг.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-226-231

1. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Упорядоченным множеством называется пара (A, ω), где A — непустое множество и $\omega \subseteq A \times A$ — отношение порядка на нем, т. е. тождественно выполняются условия 1) $(x, x) \in \omega$ (рефлексивность), 2) $(x, y) \in \omega \;\&\; (y, x) \in \omega \implies x = y$ (антисимметричность), 3) $(x, y) \in \omega \;\&\; (y, z) \in \omega \implies (x, z) \in \omega$ (транзитивность).

Стандартными примерами являются $(\mathbf{N}, \leqslant)$ — множество натуральных чисел с естественным порядком; $(\mathbf{N}, |)$ — то же множество с отношением делимости натуральных чисел: $m|n$ означает, что m делит n; $(P(S), \subseteq)$ — совокупность всех подмножеств множества S с теоретико-множественным включением.

Далее для $x, y \in A$ вместо $(x, y) \in \omega$ будем писать $x \leqslant y$. Запись $x \leqslant y$ имеет эквивалентную форму $y \geqslant x$. Если $x \leqslant y$ и $x \neq y$, пишут $x < y$ (строгое неравенство) и соответственно $y > x$.

Пусть $(A, \leqslant)$ — конечное (т. е. с конечным A) упорядоченное множество. Убывающей цепью в нем называется последовательность вида $x_1 > x_2 > \cdots > x_k$. Под длиной такой цепи понимается количество «звеньев» в ней, т. е. число $k-1$. Говорят, что элемент x является нижним соседом для y или что x непосредственно предшествует y, если $x < y$ и не существует $z \in A$ такого, что $x < z < y$. Элемент $a \in A$ по определению является минимальным (максимальным) в $(A, \leqslant)$, если в $(A, \leqslant)$ нет такого x, что $x < a$ (соответственно $x > a$). Высота $h(a)$ элемента a в $(A, \leqslant)$ определяется как максимальная из длин убывающих цепей, начинающихся с a. Например, для всех минимальных элементов x из A будет $h(x) = 0$. Наибольшая из высот элементов конечного упорядоченного множества называется его длиной. Например, если $\mathbf{N_8}$ — первые 8 натуральных чисел, то длина упорядоченного множества $(\mathbf{N_8}, \leqslant)$ равна 7, для $(\mathbf{N_8}, |)$ получаем длину 3, для $(P(S), \subseteq)$ длина равна $|S|$ — количеству элементов в S.

Для наглядного представления конечных упорядоченных множеств используют так называемые диаграммы Хассе. Если длина упорядоченного множества $(A, \leqslant)$ равна l, то на $l + 1$ горизонталях, пронумерованных снизу вверх числами $0, 1, \ldots, l$, располагают элементы множества A в соответствии с их высотой в $(A, \leqslant)$. Затем, двигаясь снизу вверх, каждый элемент соединяют прямолинейными отрезками со всеми его нижними соседями. Полученный рисунок (горизонтали не изображают) и есть диаграмма для $(A, \leqslant)$. На рис. 1 приведены диаграммы упорядоченных множеств $(\mathbf{N_8}, |)$ и $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Элементы $x, y \in A$ называются сравнимыми в $(A, \leqslant)$, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ и несравнимыми в противном случае. Упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы, по определению является линейно упорядоченным. Таковым будет, например, $(\mathbf{N}, \leqslant)$.

Антицепь в упорядоченном множестве — это такое его подмножество, в котором любые два элемента несравнимы. Под длиной антицепи понимается количество элементов в ней. Антицепи максимальной длины будем называть главными. Антицепь в конечном упорядоченном множестве называется правильной, если все ее элементы имеют одинаковую высоту. Так, в $(\mathbf{N_8}, |)$ среди главных антицепей $\{2,3,5,7\}, \{3,4,5,7\}, \{3,5,7,8\}$ правильной будет только первая. В $(P(\{a,b,c\}), \subseteq)$ главных антицепей две: $\{a,b,c\}$ и $\{ab,ac,bc\}$ и обе они — правильные.

Конечное упорядоченное множество называется шпернеровым, если среди его главных антицепей есть по крайней мере одна правильная. Упорядоченные множества на рис. 1 оба шпернеровы.

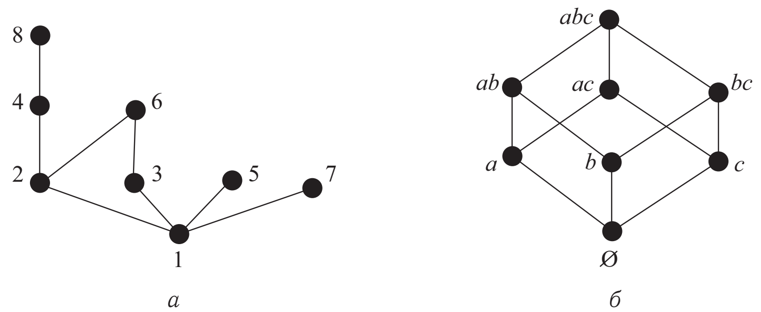


Рис. 1. Диаграммы упорядоченных множеств $(\mathbf{N_8}, |)$ и $(P(\{a,b,c\}), \subseteq)$

Один из минимальных примеров упорядоченного множества, не обладающего свойством шпернеровости, представлен диаграммой на рис. 2. Это упорядоченное множество образуют по включению пять подмножеств множества $S = \{a,b,c,d\}$, а именно $\{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}$. В нем всего одна главная антицепь — $\{a, bc, bd\}$ и она не является правильной.

В 1928 году Шпернер в [1] доказал, что все конечные упорядоченные множества вида $(P(S), \subseteq)$ обладают обнаруженным им свойством. Самое простое из известных доказательств этого факта можно найти в [2]. Свойство шпернеровости для конечных упорядоченных множеств находит содержательные интерпретации в различных разделах математики (см., например, [3–8]). Его наличие или отсутствие в конкретных ситуациях обсуждается также в [9–11], в том числе для упорядоченных множеств, ассоциированных с графами, в [12, 13].

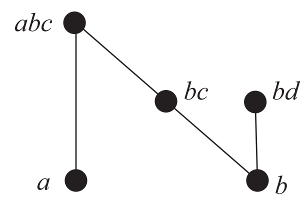


Рис. 2. Упорядоченное множество, не являющееся шпернеровым

2. ГРАФЫ

Под (ориентированным) графом понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество и $\alpha \subseteq V \times V$ — отношение на нем. Элементы множества V называются вершинами графа, а пары, входящие в α, — его дугами. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина v смежна с вершиной u.

Вершины u и v по определению связаны, если существуют $v_1, v_2, \dots v_k \in V$ такие, что $(u, v_1) \in \alpha \cup \alpha^{-1}, (v_1, v_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \dots (v_k, v) \in \alpha \cup \alpha^{-1}$, т. е. если u и v можно соединить последовательностью дуг без учета их направлений. Граф, в котором любые две вершины связаны, называется связным.

Граф $H = (U, \beta)$ называется частью графа $G = (V, \alpha)$, если $U \subseteq V$ и $\beta \subseteq \alpha$, т. е. если H состоит из некоторых вершин графа G и некоторых дуг, соединяющих в G эти вершины.

Контур длины $k \geqslant 2$ в графе G определяется как последовательность C_k его дуг вида $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)$, в которой все встречающиеся вершины различны. Граф, не содержащий контуров, называется бесконтурным.

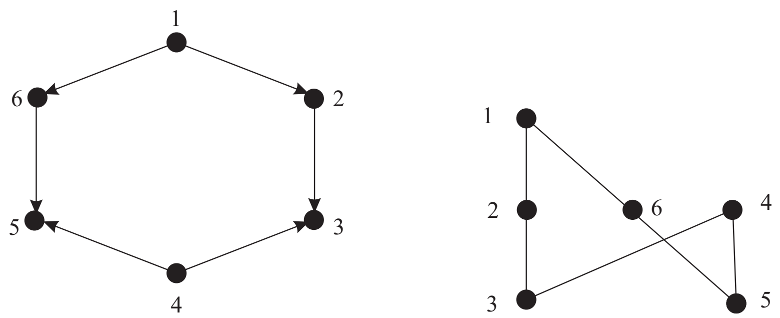
Вершина v по определению достижима в графе G из вершины u, если существует последовательность примыкающих дуг $(u, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, v)$, соединяющая u с v. Отношение достижимости в графе обозначим через δ. В бесконтурном графе отношение достижимости является отношением порядка (о бесконтурных графах см. [14]). Очевидно, что минимальными элементами в упорядоченном множестве (V, δ) будут стоки графа G, т. е. его вершины, из которых не исходит ни одна дуга в другие вершины. Максимальными элементами в (V, δ) будут источники графа G, т. е. те его вершины, в которые не входит ни одна дуга из других вершин.

Связный бесконтурный граф $G = (V, \alpha)$ назовем шпернеровым, если упорядоченное множество (V, δ) обладает шпернеровым свойством.

3. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Под n-угольным графом будем понимать всякий граф M_n, полученный из контура C_n переориентацией некоторого количества k его дуг. Будем считать, что $1 \leqslant k < n$. Следовательно, контуры исключаются из числа многоугольных графов, которые, таким образом, попадают в класс связных бесконтурных графов. В [15] рассматривается задача о минимальных примитивных расширениях многоугольных графов, в [16] охарактеризованы многоугольные графы, для которых множество связных частей, упорядоченное вложением, является решеткой. Ниже будет найдено необходимое и достаточное условие шпернеровости для многоугольных графов.

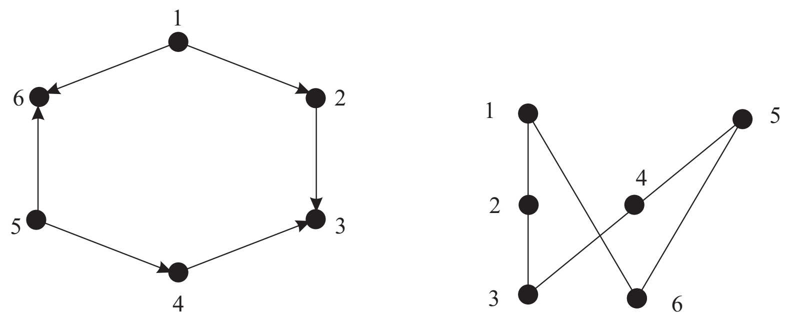
На рис. 3 показаны шестиугольный граф $M' = (V', \alpha')$ и диаграмма упорядоченного множества (V', δ'). В этом упорядоченном множестве одна главная антицепь — $\{2, 4, 6\}$. Она является правильной, так что M' — шпернеров граф.



а *б*

Рис. 3. Шестиугольный граф M' (*а*) и упорядоченное множество (V', δ') (*б*)

На рис. 4 показаны шестиугольный граф $M'' = (V'', \alpha'')$ и упорядоченное множество (V'', δ''). В этом упорядоченном множестве главной антицепью будет только $\{2, 4, 6\}$. Она не является правильной, так что M'' — не шпернеров граф.



а *б*

Рис. 4. Шестиугольный граф M'' (*а*) и упорядоченное множество (V'', δ'') (*б*)

В графе на рис. 3 источниками являются вершины 1 и 4, а стоками — 3 и 5. В графе на рис. 4 вершины 1 и 5 — источники, а 3 и 6 — стоки. Нетрудно понять, что в многоугольном графе количество источников равно количеству стоков.

Под цепью в многоугольном графе будем понимать его максимальную собственную связную часть, в которой 1) есть хотя бы одна вершина, не являющаяся ни источником, ни стоком, и 2) любые две соседние дуги одинаково направлены. Например, цепями в графе на рис. 3 являются $1 \to 2 \to 3$ и $1 \to 6 \to 5$, а в графе на рис. 4 таковыми будут $1 \to 2 \to 3$ и $5 \to 4 \to 3$. Всякая цепь начинается в источнике и завершается стоком. Зигзагом в многоугольном графе назовем его максимальную собственную связную часть, в которой 1) каждая вершина является источником или стоком и 2) любые две соседние дуги противоположно направлены. Зигзаги классифицируются по виду их концевых вершин: в ss-зигзаге оба конца являются источниками; в st-зигзаге один конец источник, другой сток; в tt-зигзаге оба конца стоки. В графе на рис. 3 есть tt-зигзаг $3 \leftarrow 4 \rightarrow 5$, в графе на рис. 4 имеем ss-зигзаг $1 \rightarrow 6 \leftarrow 5$. Заметим, что в многоугольном графе с четным числом вершин и чередующимися источниками и стоками зигзагами являются части графа, получаемые из него удалением одной дуги, причем одним из концов такого зигзага будет источник, а другим — сток.

Теорема. *Многоугольный граф тогда и только тогда является шпернеровым, когда в нем нет ss-зигзагов.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $M = (V, \alpha)$ — шпернеров многоугольный граф. Допустим, что в нем есть некоторый ss-зигзаг Z, и получим из этого предположения противоречие.

Через A обозначим имеющуюся в M главную антицепь, которая является правильной. Прежде всего заметим, что в состав A входит по одной вершине из каждой цепи. В самом деле, если в A нет ни одной вершины из некоторой цепи, то, присоединив к A любую внутреннюю (т. е. не источник и не сток) вершину из этой цепи, получим антицепь, более длинную, чем A, что невозможно в силу максимальности A.

Пусть u — один из концов ss-зигзага Z. Источник u имеет в M две смежные с ним вершины. Одной из них является сток, входящий в состав Z. Вторая смежная с u вершина не может быть стоком, иначе, присоединив ее к Z, мы получили бы зигзаг, собственно содержащий Z, что противоречит максимальности Z. Отсюда следует, что каждый из двух концевых источников ss-зигзага Z является началом некоторой цепи в M. Эти две цепи будем называть граничными для зигзага Z.

Далее заметим, что в состав антицепи A очевидным образом попадают максимальные по длине антицепи, составленные из подходящих внутренних вершин каждого зигзага. Если ss-зигзаг Z имеет k вершин, то в нем $\frac{k+1}{2}$ источников и $\frac{k-1}{2}$ стоков.

Покажем, что ни один из концов зигзага Z не входит в A. Пусть это не так и в A присутствует источник u, являющийся концевой вершиной в Z и, следовательно, начальной вершиной одной из граничных для Z цепей, скажем P. Если длина антицепи A равна l, то в ней имеются $l - \frac{k+1}{2}$ вершин, не входящих в Z, и цепи, граничные для Z. Построим новую антицепь A', в состав которой включим все вершины из A, не входящие в зигзаг Z, и граничные для него цепи, по одной внутренней вершине из этих двух цепей и все $\frac{k-1}{2}$ стоков зигзага Z. Тогда количество вершин в A' окажется равным $(l - \frac{k+1}{2}) + 2 + \frac{k-1}{2} = l - \frac{k+1}{2} + 1 + \frac{k+1}{2} = l + 1$, что невозможно, так как A — одна из главных антицепей в упорядоченном множестве (V, δ).

Итак, в антицепь A не входят концевые источники зигзага Z. Значит, в нее попадут все стоки этого зигзага, поскольку эти вершины не сравнимы в смысле порядка δ ни друг с другом, ни с содержащимися в A представителями цепей, граничных для Z. По предположению антицепь A — правильная, т. е. все ее вершины являются элементами одинаковой высоты в (V, δ). Так как стоки представляют собой минимальные элементы в (V, δ) и, значит, имеют высоту 0, то и все вершины в A должны быть стоками. В частности, вершина v, представляющая в A цепь P, граничную для зигзага Z, — тоже сток.

Могут представиться два случая: 1) v входит в некоторую другую цепь графа M; 2) v является концевой вершиной подходящего зигзага в M. Рассмотрим эти ситуации.

1. Сток v является концом для цепей P и P'. Исключим v из A и добавим к оставшимся вершинам из A по одной внутренней вершине из цепей P и P'. Полученное множество вершин будет антицепью в (V, δ) и в ней на одну вершину больше, чем в A , что невозможно, так как A — главная антицепь.

2. Сток v является концом цепи P и концевой вершиной некоторого зигзага Z'. Так как v — сток, то зигзаг Z' может быть или st-зигзагом, или tt-зигзагом. Если Z' является st-зигзагом и в нем k вершин, то среди них $\frac{k}{2}$ источников и столько же стоков. Пусть антицепь A имеет длину l. Тогда в A вне зигзага Z' и граничных для него двух цепей будет $l - \frac{k}{2}$ вершин. Построим новую антицепь следующим образом: возьмем в нее все вершины из A, не входящие в зигзаг Z' и граничные

для него цепи, присоединим к ним по одной внутренней вершине из указанных граничных для Z' цепей и все, кроме v, стоки зигзага Z'. Количество вершин в построенной антицепи будет равным $(l - \frac{k}{2}) + 2 + (\frac{k}{2} - 1) = l + 1$, т. е. она имеет на одну вершину больше, чем главная антицепь A, что невозможно.

Случай, когда Z' является tt-зигзагом, исключается рассуждениями, вполне аналогичными тем, которые были проведены выше при доказательстве того факта, что в главную антицепь не могут входить концы ss-зигзагов.

Итак, в состав главной и правильной антицепи A обязательно входит вершина из цепи P, граничной для ss-зигзага Z. Однако эта вершина не является стоком в графе M, т. е. не имеет высоту 0 в упорядоченном множестве (V, δ). Но тогда в A присутствуют элементы, имеющие разные высоты в (V, δ), что невозможно ввиду правильности A.

Таким образом, предположение о наличии в шпернеровом многоугольном графе ss-зигзага привело к противоречию.

Достаточность. Изобразив для наглядности n-угольный граф в виде правильного n-угольника с соответственно ориентированными сторонами, видим, что n-угольник этот делится на отрезки — цепи и зигзаги, причем каждый зигзаг расположен между двумя граничными для него цепями. Пусть A — некоторая главная антицепь в упорядоченном множестве (V, δ). Очевидно, что ее «следом» в каждом отрезке будет максимально возможная по длине антицепь, составленная из внутренних элементов этого отрезка (при доказательстве необходимости было установлено, что концевые вершины отрезков не входят в главные антицепи). Так, в каждой цепи отмечается одна вершина (цепь линейно упорядочена и не имеет несравнимых элементов), в ss-зигзаге получится антицепь, состоящая из стоков, в tt-зигзаге — из источников, в st-зигзаге — либо из источников, либо из стоков.

Пусть в многоугольном графе $M = (V, \alpha)$ нет ss-зигзагов. Построим в нем антицепь A следующим образом: включим в состав A все источники каждого st-зигзага, все источники каждого tt-зигзага и по одной из каждой цепи вершине, с которой смежен сток этой цепи. В силу сказанного выше антицепь A будет главной, а так как все ее элементы имеют в упорядоченном множестве (V, δ) высоту 1, то A — правильная антицепь. Следовательно, (V, δ) — шпернерово упорядоченное множество, а значит, M — шпернеров многоугольный граф.

Теорема доказана. □

Содержание работы было анонсировано в [17].

Библиографический список

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge // Math. Zeitschrift. 1928. Vol. 27, № 1. P. 544–548.
2. *Lubell D.* A short proof of Sperner's lemma // J. Comb. Theory. 1961. Vol. 1, № 2. P. 299.
3. *Мешалкин Л. Д.* Обобщение теоремы Шпернера о числе подмножеств конечного множества // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, № 2. С. 219–220.
4. *Green C., Kleitman D. J.* Strong versions of Sperner's theorem // J. Comb. Theory Ser. A. 1976. Vol. 20, № 1. P. 80–88.
5. *Stanley R. P.* Weyl groups, the hard Lefschetz theorem and the Sperner property // SIAM J. Alg. Discr. Math. 1980. Vol. 1, № 2. P. 168–184.
6. *Shahriari S.* On the structure of maximum two-part Sperner families // Discr. Math. 1996. Vol. 162, № 2. P. 229–238.
7. *Кочкарев В. С.* Структурные свойства одного класса максимальных шпернеровых семейств подмножеств // Изв. вузов. Математика. 2005. № 7. С. 37–42.
8. *Aydinian H., Erdős P. L.* On two-part Sperner systems for regular posets // Electronic Notes in Discr. Math. 2011. Vol. 38, № 1. P. 87–92.
9. *Lih K. W.* Sperner families over a subset // J. Comb. Theory Ser. A. 1980. Vol. 29, № 1. P. 182–185.
10. *Griggs J. R.* Collections of subsets with the Sperner property // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 269, № 2. P. 575–591.
11. *Wang J.* Proof of a conjecture on the Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p-group // Annals Comb. 1999. Vol. 2, № 1. P. 85–101.
12. *Jacobson M. S., Kezdy A. E., Seif S.* The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner // Order. 1995. Vol. 12, № 3. P. 315–318.
13. *Maeno T., Numata Y.* Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras // Contemp. Math. 2012. Vol. 280, № 1. P. 73–83.

14. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997.
15. *Салий В. Н.* Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикл. дискр. математика. 2008. Т. 1, № 1. С. 116–119.
16. *Салий В. Н.* Упорядоченное множество связных частей многоугольного графа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 44–51.
17. *Салий В. Н.* О шпернеровом свойстве для многоугольных графов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2014. С. 275–277.

The Sperner Property for Polygonal Graphs Considered as Partially Ordered Sets

V. N. Salii

Viacheslav N. Salii, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, SaliiVN@info.sgu.ru

A finite poset is said to have the Sperner property if at least one of its maximum antichains is formed from elements of the same height. A polygonal graph is a directed acyclic graph derived from a circuit by some orientation of its edges. The reachability relation of a polygonal graph is a partial order. A criterion is presented for posets associated with polygonal graphs to have the Sperner property.

Key words: partially ordered set, Sperner property, polygonal graph, path, zigzag.

References

1. Sperner E. Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge. *Math. Zeitschrift*, 1928, vol. 27, no. 1, pp. 544–548.
2. Lubell D. A short proof of Sperner's lemma. *J. Comb. Theory*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 299.
3. Meshalkin L. D. Generalization of Sperner's theorem on the number of subsets of a finite set. *Teoriia veroiatnostei i ee primeneniia* [Theory of probability and i ts applications], 1963, vol. 8, no. 2, pp. 219–220 (in Russian).
4. Green C., Kleitman D. J. Strong versions of Sperner's theorem. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 1976, vol. 20, no. 1, pp. 80–88.
5. Stanley R. P. Weyl groups, the hard Lefschetz theorem and the Sperner property. *SIAM J. Alg. Discr. Math.*, 1980, vol. 1, no. 2, pp. 168–184.
6. Shahriari S. On the structure of maximum two-part Sperner families. *Discr. Math.*, 1996, vol. 162, no. 2, pp. 229–238.
7. Kochkarev V. S. Structural properties of a class of maximal Sperner families of subsets. *Russian Math.*, 2005, vol. 49, no. 7, pp. 35–40.
8. Aydinian H., Erdós P. L. On two-part Sperner systems for regular posets. *Electronic Notes in Discr. Math.*, 2011, vol. 38, no. 1, pp. 87–92.
9. Lih K. W. Sperner families over a subset. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 1980, vol. 29, no. 1, pp. 182–185.
10. Griggs J. R. Collections of subsets with the Sperner property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, vol. 269, no. 2, pp. 575–591.
11. Wang J. Proof of a conjecture on the Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p-group. *Annals Comb.*, 1999, vol. 2, no. 1, pp. 85–101.
12. Jacobson M. S., Kezdy A. E., Seif S. The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner. *Order*, 1995, vol. 12, no. 3, pp. 315–318.
13. Maeno T., Numata Y. Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras. *Contemp. Math.*, 2012, vol. 280, no. 1, pp. 73–83.
14. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems*. Moscow, Nauka, 1997 (in Russian).
15. Salii V. N. Minimal primitive extensions of oriented graphs. *Prikl. diskr. matematika* [Appl. Discr. Matematics], 2008, vol. 1, no. 1, pp. 116–119 (in Russian).
16. Salii V. N. Ordered set of connected parts of polygonal graph. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 44–51 (in Russian).
17. Salii V. N. O shpernerovom svoistve dlia mnogougol'nykh grafov [On Sperner property for polygonal graphs]. *Komp'iuternye nauki i informatsionnye tekhnologii. Materialy mezhdunar. nauch. konf.* [Computer science and information trchnology. Proc. Intern. Sci. Conf.], Saratov, Publ. center "Nauka", 2014, pp. 275–277 (in Russian).