



gral Equations. Boca Raton ; London, Chapman and Hall/CRC Press, 2008, 1544 p.
26. Hartman S. Numerical studies on the identification of

the material parameters of Rivlin's hyperelasticity using tension-torsion tests. *Acta Mechanica*, 2001, vol. 148, pp. 129–155.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕЗАПНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

О. А. Мыльцина¹, Е. Н. Савина², Г. Н. Белосточный³

¹Ассистент кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, omyltcina@yandex.ru

²Ведущий документовед деканата механико-математического факультета, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, savinaen@info.sgu.ru

³Доктор технических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belostochny@mail.ru

На основании замкнутых интегралов начально-краевых задач несвязной термоупругости пологих оболочек проводится количественный анализ влияния параметров, характеризующих геометрию оболочки, на колебания оболочек постоянного кручения и цилиндрической, обусловленные тепловым ударом со стороны одной из основных поверхностей.

Ключевые слова: пологие оболочки, кривизна, кручение, термоупругость, тепловой удар.

В рамках модели типа Лява рассматриваются прямоугольные в плане пологие оболочки (постоянного кручения и цилиндрическая) с основными поверхностями и краями, теплоизолированными до определенного момента времени ($t = 0$), начиная с которого происходит мгновенное нарушение термоизоляции по всей внешней поверхности оболочки.

На основании замкнутых интегралов нестационарной термоупругости пологих оболочек определяется их динамическая реакция на мгновенное тепловое воздействие в зависимости от параметров, характеризующих геометрию оболочки.

Температурное поле $\Theta(\vec{r}, t)$ — при сделанных выше предположениях — будет функцией двух переменных [1–4] — пространственной z и временной t координат. Рассмотрим начально-краевую задачу теплопроводности (в силу пологости оболочек кривизна в уравнениях теплопроводности не учитывается)

$$\beta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad (1)$$

$$t = 0, \quad \Theta = \theta_0; \quad z = h/2, \quad \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} = q; \quad z = -h/2, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) с помощью преобразований Лапласа либо методом суперпозиции одинарного тригонометрического ряда с переменными коэффициентами и многочлена, учитывающего характер неоднородности начальных и краевых условий (2), запишется в виде

$$\Theta(z, t) = \frac{qh}{\lambda} \left(\frac{\beta t}{h^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{z}{h} - \frac{1}{24} - 2 \sum_k \frac{\cos k\pi}{(k\pi)^2} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h} \right)^2 t} \cos \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi z}{h} \right) \right) + \theta_0. \quad (3)$$

Здесь q — тепловой поток постоянной интенсивности, h — толщина, λ — коэффициент теплопроводности, β — коэффициент температуропроводности.

Решение несвязной динамической термоупругости пологих оболочек в компонентах поля перемещений $\bar{U}(u, v, w)$ с учетом структуры температурного поля (3) сводится к интегрированию неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных [5–6]:

$$\begin{aligned} u_{,11} + \frac{1-\nu}{2} u_{,22} + \frac{1+\nu}{2} v_{,12} - [(k_1 + \nu k_2)w]_{,1} - (1-\nu)(k_{12}w)_{,2} &= \frac{\gamma h}{gB} u_{,tt}, \\ \frac{1+\nu}{2} u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2} v_{,11} - [(k_2 + \nu k_1)w]_{,2} - (1-\nu)(k_{12}w)_{,1} &= \frac{\gamma h}{gB} v_{,tt}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{12}{h^2} (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2 + 2(1-\nu)k_{12}^2) w - \frac{12}{h^2} (k_1 + \nu k_2) u_{,1} - \\ - \frac{12}{h^2} (k_2 + \nu k_1) v_{,2} - \frac{12(1-\nu)}{h^2} k_{12} (u_{,2} + v_{,1}) = -\alpha(1+\nu) \frac{12}{h^2} (k_1 + k_2) \Theta_0(t) - \frac{\gamma h}{gD} w_{,tt}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ν — коэффициент Пуассона, k_1, k_2, k_{12} — соответственно кривизны и кручение оболочки, γ — удельный вес, g — интенсивность поля тяжести, α — коэффициент линейного расширения материала,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad \Theta_0(t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta(z, t) dz.$$

1. В случае оболочки постоянного кручения ($k_1 = 0, k_2 = 0, k_{12} = \text{const}$) будем предполагать, что она бесконечна вдоль координатной прямой Ox , края, расположенные по прямым $y = 0, y = b$ шарнирно закреплены, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 2k_{12}w = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\Psi(t), \quad (5)$$

в начальный момент времени ($t = 0$) термоупругая система находится в покое

$$\bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\Psi(t) = \frac{1+\nu}{2} \frac{q\alpha}{\lambda} \left(1 + 48 \sum_k \beta_k e^{-\beta(\frac{k\pi}{h})^2 t} \right).$$

Решение системы (4) при сделанных предположениях с помощью подстановки

$$u = (1-\nu) k_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (7)$$

сведем к интегрированию одного дифференциального уравнения шестого порядка относительно функции перемещений $\Phi(y, t)$:

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{gD}{\gamma h} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} - \frac{D}{B} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^4 \partial t^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} - 2(1-\nu)k_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = 0. \quad (8)$$

Краевые и начальные условия (5), (6) переписутся через функцию $\Phi(y, t)$ при $y = 0, y = b$ в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} = -\Psi(t); \quad (9)$$

при $t = 0$ в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = 0, \quad \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial t} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0. \quad (10)$$

Решение неоднородной краевой задачи (8), (9) будем разыскивать методом суперпозиции одинарного тригонометрического ряда с переменными по временной координате коэффициентами и многочлена, учитывающего характер неоднородности краевых условий (9):

$$\Phi(y, t) = \sum_K \Phi_K(t) \sin \frac{K\pi y}{b} - \frac{1}{12(1-\nu)} \Psi(t) (y^4 - 2by^3 + b^3y), \quad (11)$$

где коэффициенты ряда $\Phi_K(t)$ являются решениями обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_K^{(IV)}(t) + A_1 \frac{gB}{\gamma h} \frac{1}{b^2} \Phi_K^{(II)}(t) + \frac{1-\nu}{2} \frac{gD}{\gamma h} \frac{gB}{\gamma h} \frac{(K\pi)^6}{b^6} \Phi_K(t) =$$



$$= 48 \frac{1+\nu}{2} \frac{g\alpha b}{\lambda} \frac{\beta}{h^4} \sum_k \beta_k (k\pi)^4 \left(\frac{gB}{\gamma h} A_2 + \frac{2}{1-\nu} a_K \left(\frac{b}{h} \right)^2 \frac{\beta^2}{h^2} (k\pi)^4 \right) e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h} \right)^2 t}. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения

$$A_1 = \frac{(K\pi)^4}{12} \left(\frac{h}{b} \right)^2 + 2(1-\nu)(k_{12}b)^2 + \frac{1-\nu}{2}(K\pi)^2,$$

$$A_2 = a_K \left(\frac{1}{1-\nu} \frac{(K\pi)^4}{6} \left(\frac{h}{b} \right)^2 + 4(k_{12}b)^2 + (K\pi)^2 \right), \quad a_K = \frac{2(1-\cos K\pi)}{(K\pi)^5}.$$

Определяя стандартным образом фундаментальную систему функций $\varphi_{Kl}(t)$ для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (12), запишем его общий интеграл в виде

$$\Phi_K(t) = D_{K1} \cos C_K t + D_{K2} \sin C_K t + D_{K3} \cos \tilde{C}_K t + D_{K4} \sin \tilde{C}_K t + \sum_k \tilde{A}_{Kk} h^3 e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h} \right)^2 t}, \quad (13)$$

где

$$C_K = \sqrt{\frac{gE}{\gamma h^2}} d_K, \quad d_K = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left(A_1 - \sqrt{A_1^2 - (1-\nu) \frac{h^2 (K\pi)^6}{6b^2}} \right)},$$

$$\tilde{C}_K = \sqrt{\frac{gE}{\gamma h^2}} \tilde{d}_K, \quad \tilde{d}_K = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left(A_1 - \sqrt{A_1^2 + (1-\nu) \frac{h^2 (K\pi)^6}{6b^2}} \right)}.$$

Окончательно выражение для функции относительного прогиба $W(y, t) = w(y, t)/b$ оболочки, испытывающей термодинамический удар, примет вид

$$W(y, t) = -\frac{1-\nu}{2} \sum_K (K\pi)^2 \left(\sum_{l=1}^4 D_{Kl} \varphi_{Kl}(t) + \sum_k \tilde{A}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h} \right)^2 t} \frac{h^3}{b^3} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} +$$

$$+(1-\nu^2) \frac{b^2}{h^2} \sum_K \left(\sum_{l=1}^4 D_{Kl} d_{Kl}^2 \varphi_{Kl}(t) - \frac{h^3}{b^3} \alpha_*^2 \sum_k (k\pi)^4 \tilde{A}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h} \right)^2 t} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} +$$

$$+\frac{(1+\nu)b^3\gamma}{12gE} \ddot{\Psi}(t) \left(\left(\frac{y}{b} \right)^4 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 + \frac{y}{b} \right) - \frac{b}{2} \Psi(t) \left(\left(\frac{y}{b} \right)^2 - \frac{y}{b} \right), \quad (14)$$

где D_{Kl} — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (10), предварительно переписанных через функцию $\Phi_K(t)$ (ввиду громоздкости не выписываются);

$$\alpha_* = \frac{\beta}{h} \sqrt{\frac{\gamma}{gE}}, \quad q_* = \frac{q\alpha b}{\lambda},$$

$$\tilde{A}_{Kk} = \frac{\frac{24q_*}{1-\nu} \frac{h}{b} (k\pi)^4 \beta_k B_{Kk} \alpha_*^2}{\alpha_*^4 (k\pi)^8 + \frac{A_1}{1-\nu^2} (k\pi)^4 \alpha_*^2 \left(\frac{h}{b} \right)^4 + \frac{1-\nu}{24} \left(\frac{h}{b} \right)^{10} \frac{(K\pi)^6}{(1-\nu^2)^2}},$$

$$B_{Kk} = A_2 + \frac{2a_K}{1-\nu} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \frac{\gamma h}{gB} \left(\frac{\beta}{h} \right)^2 (k\pi)^4.$$

2. Уравнения динамической термоупругости (4) цилиндрической оболочки ($k_1 = 0$, $k_{12} = 0$, $k_2 = \text{const}$) при тех же предположениях преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{B}{D} k_2^2 w - k_2 \frac{B}{D} \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha(1+\nu) \frac{B}{D} k_2 \Theta_0(t) - \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (15)$$

и подстановкой

$$v = k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (16)$$



система (15) сводится к одному неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных шестого порядка:

$$\frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^4 \partial t^2} + \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} - \frac{B}{D} k_2^2 \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = -\alpha(1 + \nu)k_2 \frac{B}{D} \Theta_0(t). \quad (17)$$

Краевые и начальные условия переписутся через функцию перемещений при $y = 0$, $y = b$ в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = R_2(1 + \nu)\alpha\Theta_0(t), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{gB}{\gamma h} R_2(1 + \nu)\alpha\Theta_0(t), \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} = -\Psi(t); \quad (18)$$

при $t = 0$ в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial t} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (17), тождественно удовлетворяющее всем краевым условиям (18), будем разыскивать в виде

$$\Phi(y, t) = \sum_K \Phi_K(t) \sin \frac{K\pi y}{b} - \Psi(t)f(y) + R_2(1 + \nu)\alpha\Theta_0(t)f''(y) + \frac{gB}{\gamma h} R_2(1 + \nu)\alpha \int_0^t \left(\int_0^t \Theta_0(t) dt \right) dt, \quad (20)$$

где $R_2 = \frac{1}{k_2}$, $\Theta_0(t) = \frac{qh}{\lambda} \frac{\beta t}{h^2} + \theta_0$.

Функция относительного прогиба термоупругой системы на основании аналогичных преобразований запишется:

$$W(y, t) = - \sum_K \left((K\pi)^2 \left(\sum_{l=1}^4 C_{Kl} \varphi_{Kl}(t) + \sum_k \tilde{D}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right) \right) \sin \frac{K\pi y}{b} + (1 - \nu^2) \sum_K \left(\sum_{l=1}^4 d_{Kl}^2 C_{Kl} \varphi_{Kl}(t) - \frac{b^2}{h^2} \alpha_*^2 \sum_k (k\pi)^4 \tilde{D}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} + b^3(1 - \nu^2) \frac{\gamma}{gE} \ddot{\Psi}(t) \left(\left(\frac{y}{b}\right)^4 - 2 \left(\frac{y}{b}\right)^3 + \frac{y}{b} \right) - \frac{b}{2} \Psi(t) \left(\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{y}{b} \right). \quad (21)$$

На рис. 1 и рис. 2 приводятся графики функций относительного прогиба (14) и (21) при $y = b/2$ на двух временных интервалах с момента термодинамического удара.

Во всех случаях отмечаются следующие закономерности:

1) параметр кручения k_{12} существенно влияет на момент времени возникновения наибольшего прогиба (рис. 1, а; кривым 1–6 соответствуют параметры кручения k_{12} , равные 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05). При прочих равных условиях наибольший прогиб раньше возникает у пластинки ($k_{12} = 0$);

2) в случае цилиндрической оболочки (рис. 1, б; кривым 1–4 соответствуют кривизны k_2 , равные 0.01, 0.02, 0.03, 0.04.) время наступления наибольшего прогиба менее чувствительно к параметру кривизны k_2 , а временной интервал максимальных прогибов значительно меньше временного интервала для оболочки постоянного кручения;

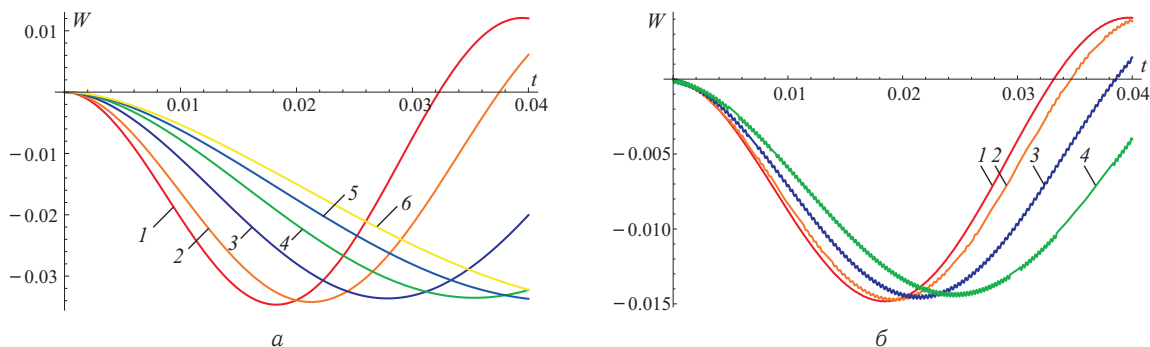


Рис. 1. Прогиб $W(b/2, t)$, заданный формулой (14): а – для оболочки постоянного кручения, б – для цилиндрической оболочки



3) с увеличением значений параметров k_{12} и k_2 динамические прогибы оболочек при «замороженном» моменте времени значительно убывают (на рис. 2, а кривым 1-5 соответствуют параметры кручения k_{12} , равные 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04; на рис. 2, б кривым 1-5 соответствуют кривизны k_2 , равные 0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04). Величина максимального прогиба оболочек мало чувствительна к кривизне и кручению на временном отрезке $[0; 0.05]$ при той же тенденции к убыванию;

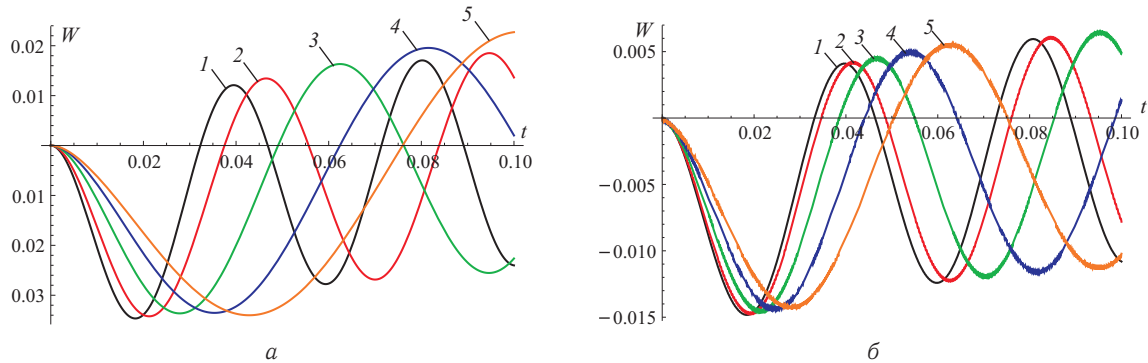


Рис. 2. Прогиб $W(b/2, t)$, заданный формулой (21): а – для оболочки постоянного кручения, б – для цилиндрической оболочки

4) при прочих равных условиях значение динамического прогиба цилиндрической оболочки во всех случаях практически в два раза меньше прогиба оболочки постоянного кручения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00644-а).

Библиографический список

1. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. Термостойчивость пластин и оболочек. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1968. 520 с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев : Наук. думка, 1970. 303 с.
3. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Колебания термоупругой изотропной системы пластинка – ребра, подверженной тепловому удару / Саратовский политехнический институт. Деп. в ВИНТИ № 87-82, 1981. 11 с.
4. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Динамика поверхности прогиба ребристой пластинки при мгновенном воздействии температуры со стороны окружающей среды // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XIX междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова : в 2 т. М. : ООО «ТР-принт», 2013. Т. 1. С. 167–170.
5. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев : Наук. думка, 1978. 343 с.
6. Рассудов В. М., Красюков В. П., Панкратов Н. Д. Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1973. 154 с.

Oscillations of Shallow Shells at abrupt Influence of Thermal Flow

O. A. Myltcina, E. N. Savina, G. N. Belostochny

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, omyltcina@yandex.ru, savinaen@info.sgu.ru, belostochny@mail.ru

On the basis of the closed integrals of the initial and boundary problems for incoherent thermoelasticity of shallow shells the quantitative analysis of influence of the geometrical parameters on the oscillations of constant rotation and cylindrical shells, which are conditioned by the thermal shock to outbound surface of shallow shell are carried out.

Key words: shallow shells, rotation, curvature, thermoelasticity, thermal shock.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-08-00644-а).

References

1. Oigbalov P. M., Gribanov V. F. *Termoustojchivost' plastin i obolochek* [Thermostability of plates and shells]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1968, 520 p. (in Russian).
2. Kovalenko A. D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermoelasticity]. Kiev, Naukova Dumka, 1970, 303 p. (in Russian).



3. Belostochny G. N., Rassudov V. M. *Kolebaniya termouprugoj izotropnoj sistemy plastinka – rebra, podverzhennoj teplovomu udaru* [Oscillations of the thermoelastic isotropic system of plate-rib subjected to thermal bump]. Dep. in VINITI. № 87–82, 1981, 11 p. (in Russian)
4. Mylcina O. A., Belostochny G. N. *Dinamika poverkhnosti progiba rebristoi plastinki pri mgnovennom vozdeistvii temperatury so storony okruzhaiushchei sredy* [Dynamics of the surface of bending of the ribbed plate under instantaneous temperature bump from the environment]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred : materialy XIX mezhdunarodnogo simpoziuma im. A. G. Gorshkova : v 2 t.* [Dynamic and technological problems of mechanics of continuum and structures : XX International symposium dedicated to Anatoly G. Gorshkov : in 2 vol.]. Moscow, ООО «TR-print», 2013, vol. 1. pp. 167–170 (in Russian)
5. Podstrigach Ia. S., Shvets R. N. *Termouprugost' tonkikh obolochek* [Thermoelasticity of thin shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1978, 343 p. (in Russian)
6. Rassudov V. M., Krasiukov V. P., Pankratov N. D. *Nekotorye zadachi termouprugosti plastinok i pologikh obolochek* [Some problems of thermoelasticity of plates and sloping shells]. Saratov, Saratov Univ Press, 1973, 154 p. (in Russian)