ry and their applications : Proc. 18th Intern. Sarat. Winter School]. Saratov, OOO Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 322–326.

12. Zygmund A. *Trigonometric series: Vol. I, II.* Second edition, reprinted with corrections and some additions. London ; New York, Cambridge Univ. Press, 1968, vol. I : 383 p.; vol. II : 364 p. (two volumes bound as one) (Russ. ed. : Zygmund A. Trigonometricheskie riady. Tom 1. Moscow, Mir, 1965, 616 p.).
13. Korneichuk N. P. *Ekstremal'nye zadachi teorii priblizheniya* [Extremal problems of approximation theory]. Moscow, Nauka, 1976, 320 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:
Shakirov I. A. On a Limit Value of a Remainder of the Lagrange Constant Corresponding to the Lagrange Trigonometrical Polynomial. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 302–310 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-302-310.

УДК 517.587

ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МЕЙКСНЕРА

И. И. Шарапудинов[1], З. Д. Гаджиева[2]

[1]Шарапудинов Идрис Идрисович, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН; Владикавказский научный центр РАН; Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, sharapud@mail.ru

[2]Гаджиева Зульфия Джамалдиновна, научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, zulfiya.gadzhieva.1976@mail.ru

Рассмотрена задача о конструировании полиномов $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$, $(n = 0,1,\ldots)$, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими полиномами Мейкснера. Эти полиномы могут быть определены с помощью следующих равенств $m_{r,k}^{\alpha}(x,q) = \frac{x^{[k]}}{k!}$, $x^{[k]} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$, $k = 0,1,\ldots,r-1$, $m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q) = \frac{1}{(r-1)!}\sum\limits_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}m_k^{\alpha}(t,q)$, где через $m_k^{\alpha}(t,q)$ обозначены полиномы Мейкснера, ортонормированные на сетке $\Omega = \{0,1,\ldots\}$ с весом $\rho(x) = q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$. Полиномы $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$ $(n = 0,1,\ldots)$ образуют ортонормированную систему на $\Omega = \{0,1,\ldots\}$ относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle m_{r,n}^{\alpha}, m_{r,m}^{\alpha}\rangle = \sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k m_{r,n}^{\alpha}(0,q)\Delta^k m_{r,m}^{\alpha}(0,q) + \sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r m_{r,n}^{\alpha}(j,q)\Delta^r m_{r,m}^{\alpha}(j,q)\rho(j).$$

Для $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$ мы получили явную формулу, содержащую полиномы Мейкснера $M_n^{\alpha-r}(x,q)$:

$$m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r\{h_k^{\alpha}(q)\}^{-1/2}\left[M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}\right], \quad k = 0,1,\ldots,$$

где $A_{r,k,\nu} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)!\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}$, $M_n^{\alpha}(x,q) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^{[k]}x^{[k]}}{\Gamma(k+\alpha+1)k!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k$, $h_n^{\alpha}(q) = \binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1)$.

Ключевые слова: полиномы, ортогональные по Соболеву, полиномы Мейкснера, ортогональные на сетке, приближение дискретных функций, смешанные ряды по полиномам Мейкснера, ортогональным на равномерной сетке.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321

ВВЕДЕНИЕ

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последние три десятилетия интенсивное развитие и нашла ряд важных приложений (см. [1–6] и цитированную там литературу). Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева является, в частности, то что они, как правило, содержат слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в одной или нескольких точках числовой оси. Например, часто рассматривают скалярное произведение вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt, \tag{1}$$

в котором f и g — функции, заданные на $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемые там $r-1$-раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ и $g^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны и $f^{(r)}(x), g^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a, b)$, где $L^2_\rho(a, b)$ — пространство Лебега с весом $\rho(x)$. Следует отметить, что полиномы, ортогональные по Соболеву, по своим свойствам могут весьма существенно отличаться от обычных ортогональных на интервале полиномов. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a, b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (1) имеет одну особую точку, а именно точку a, в окрестности которой «контролируется» поведение соответствующих полиномов, ортогональных по Соболеву. Это достигается за счет наличия в скалярном произведении (1) слагаемого вида $\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)$.

С другой стороны, в работах [7–18] независимо были рассмотрены так называемые смешанные ряды по классическим ортонормированным системам $\{\varphi_k(x)\}$, которые представляют собой ряды по системам функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}$, порожденным соответствующей системой $\{\varphi_k(x)\}$ посредством применения равенств вида

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, r-1 \tag{2}$$

и

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}\varphi_{k-r}(t)dt, \qquad k = r, r+1, \ldots\ . \tag{3}$$

Обозначим через $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ весовое пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, заданных на $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемых там $(r-1)$-раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $f^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a, b)$. Если $f \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, то смешанный ряд по системе $\{\varphi_k(x)\}$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{4}$$

где

$$f_{r,k} = \int\limits_a^b f^{(r)}(t)\varphi^{(r)}_{r,k}(t)\rho(t)dt = \int\limits_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt. \tag{5}$$

Пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (2) и (3)), нетрудно увидеть [18], что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ относительно скалярного произведения (1), величины $f^{(k)}(a)(k = 0, 1, \ldots, r-1)$ и $f_{r,k}(k = r, r+1, \ldots)$ являются коэффициентами Фурье функции f, а смешанный ряд (4) представляет собой ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по этой системе. Мы будем называть систему $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (1) и *порожденной* ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$. Таким образом, понятие смешанного ряда по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, введенное в работах [7–18], совпадает с понятием ряда Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (1) и порожденной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$.

Следует отметить, что смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам были введены в работах [7–18] как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат решения задач, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и несколько ее производных. В частности, такая задача часто возникает при решении дифференциальных уравнений численно-аналитическими (спектральными) методами [19, 20]. Смешанные ряды по ортонормированным системам функций оказались естественным и весьма эффективным средством решения краевых задач для дифференциальных уравнений спектральными методами. По этому поводу мы можем отослать, например, к работе [21].

В настоящей статье мы рассмотрим дискретный аналог скалярного произведения (1) следующего вида:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0)+\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)\Delta^r g(j)\rho(j), \tag{6}$$

где функции f и g заданы на множестве $\Omega=\{0,1,\ldots,\}$, $\rho=\rho(j)$ — дискретная весовая функция, заданная на множестве Ω. В случае, когда $r=0$, мы будем считать, что $\sum\limits_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0)=0$. При $r\geqslant 1$ особой точкой в скалярном произведении (6) является $x=0$, в которой контролируется поведение соответствующих ортогональных по Соболеву полиномов дискретной переменной благодаря присутствию в (6) выражения $\sum\limits_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0)$. В настоящей статье рассматриваются системы дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (6), порожденных заданной ортонормированной системой функций дискретной переменной. Основное внимание будет уделено изучению свойств полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных классическими ортогональными полиномами Мейкснера дискретной переменной.

1. СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Перейдем к конструированию дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (6), порожденных заданной системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной на дискретном множестве $\Omega=\{0,1,\ldots\}$ с весом $\rho(x)$. Для этого нам понадобятся некоторые обозначения и понятия. Если целое $k\geqslant 0$, то положим $a^{[k]}=a(a-1)\cdots(a-k+1)$, $a^{[0]}=1$ и рассмотрим следующие функции:

$$\psi_{r,k}(x)=\frac{x^{[k]}}{k!},\qquad k=0,1,\ldots,r-1, \tag{7}$$

$$\psi_{r,k}(x)=\begin{cases}\frac{1}{(r-1)!}\sum\limits_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t), & r\leqslant x,\\ 0, & x=0,1,\ldots,r-1,\end{cases} \tag{8}$$

которые определены на сетке $\Omega=\{0,1,\ldots\}$. Рассмотрим некоторые важные разностные свойства системы функций $\psi_{r,k}(x)$, определенных равенствами (7) и (8). Введем оператор конечной разности Δf: $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ и положим $\Delta^{\nu+1}f(x)=\Delta\Delta^{\nu}f(x)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\Delta^{\nu}\psi_{r,k}(x)=\begin{cases}\psi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0\leqslant\nu\leqslant r-1,\ r\leqslant k,\\ \psi_{k-r}(x), & \text{если } \nu=r\leqslant k,\\ \psi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu\leqslant k<r,\\ 0, & \text{если } k<\nu\leqslant r.\end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Справедливость утверждения леммы 1 при $r=1$ почти очевидна, поэтому мы будем считать, что $r\geqslant 2$. Прежде всего заметим, что если $f(x)=(x-1-t)^{[r-1]}$, то $\Delta f(x)=(r-1)(x-1-t)^{[r-2]}$, поэтому для $r\leqslant x,k$ в силу (8) имеем:

$$\Delta\psi_{r,k}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\left(\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t)-\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t)\right)=$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}\left((x-t)^{[r-1]}-(x-1-t)^{[r-1]}\right)\psi_{k-r}(t)=$$

$$= \frac{1}{(r-2)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-1-t)^{[r-2]}\psi_{k-1-(r-1)}(t) = \psi_{r-1,k-1}(x). \tag{10}$$

Отсюда убеждаемся в справедливости первого из равенств (9) для $r \leqslant x$. Справедливость равенства $\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r-1,k-1}(x)$ для $x = 0, 1, \ldots, r-2$ очевидна. Остается проверить первое из равенств (9) для $x = r-1$. Но в этом случае мы имеем:

$$\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r,k}(x+1) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t) = \frac{(r-1)^{[r-1]}}{(r-1)!}\psi_{k-r}(0) = \psi_{k-r}(0),$$

$$\psi_{r-1,k-1}(x) = \frac{1}{(r-2)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-1-t)^{[r-2]}\psi_{(k-1)-(r-1)}(t) = \frac{(r-2)^{[r-2]}}{(r-2)!}\psi_{k-r}(0) = \psi_{k-r}(0),$$

поэтому мы снова находим $\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r-1,k-1}(x)$. Таким образом, полностью доказано первое из равенств (9) для $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Его справедливость для $2 \leqslant \nu \leqslant r-1$ выводим по индукции.

Рассмотрим второе из равенств (9). В силу уже доказанного первого из равенств (9) и того, что второе из них для $r = 1$ легко проверяется, имеем

$$\Delta^r\psi_{r,k}(x) = \Delta\Delta^{r-1}\psi_{r,k}(x) = \Delta\psi_{1,k-r+1}(x) = \psi_{k-r}(x).$$

Тем самым мы доказали второе из равенств (9). Третье и четвертое равенства из (9) непосредственно вытекают из (7). Лемма 1 полностью доказана. □

Пусть $0 \leqslant r$ — целое. Обозначим через l_ρ пространство дискретных функций $f = f(x)$, заданных на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, в которых скалярное произведение $< f, g >$ определено с помощью равенства (6). Рассмотрим задачу об ортогональности, нормированности и полноте в l_ρ системы $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (7) и (8).

Теорема 1. *Предположим, что функции $\psi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют полную в l_ρ ортонормированную систему с весом $\rho(x)$. Тогда система $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств* (7) *и* (8)*, полна в l_ρ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (6).

Доказательство. Из равенства (8) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $\Delta^\nu\psi_{r,k}(x))_{x=0} = 0$, поэтому в силу (6) и (9) имеем:

$$\langle\psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = \sum_{x=0}^{\infty}\Delta^r\psi_{r,k}(x)\Delta^r\psi_{r,l}(x)\rho(x) = \sum_{x=0}^{\infty}\psi_{k-r}(x)\psi_{l-r}(x)\rho(x) = \delta_{kl}, \qquad k, l \geqslant r, \tag{11}$$

$$\langle\psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu\psi_{r,k}(0)\Delta^\nu\psi_{r,l}(0) = \delta_{kl}, \qquad k, l < r. \tag{12}$$

Очевидно также, что

$$\langle\psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l, \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k. \tag{13}$$

Это означает, что функции $\psi_{r,k}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют в l_ρ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (6). Чтобы проверить полноту этой системы в l_ρ предположим, что для функции $f = f(x) \in l_\rho$ имеют место равенства

$$\langle\psi_{r,k}, f\rangle = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Тогда, во-первых, в силу того что $0 = \langle\psi_{r,k}, f\rangle = \Delta^k f(0)$ при $k = 0, \ldots, r-1$, имеем $f(j) = 0$ для всех $j = 0, \ldots, r-1$. Во-вторых, из равенств $\langle\psi_{r,k}, f\rangle = 0, \quad k = r, r+1, \ldots$ и полноты в l_ρ исходной системы $\psi_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ следует, что $\Delta^r f(x) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$ и поэтому f совпадает с алгебраическим полиномом степени не выше $r-1$. Из этих двух фактов вытекает, что $f(x) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$. Теорема 1 доказана. □

Систему функций $\psi_{r,k}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ мы будем называть системой, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (6).

Из теоремы 1 следует, что система дискретных функций $\psi_{r,k}(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ является ортонормированным базисом (ОНБ) в пространстве l_ρ, поэтому для произвольной функции $f(x)\in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\langle f,\psi_{r,k}\rangle\psi_{r,k}(x), \tag{14}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x)\in l_\rho$ по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву. Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f,\psi_{r,k}\rangle$ имеют вид

$$f_{r,k}=\langle f,\psi_{r,k}\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu f(0)\Delta^\nu\psi_{r,k}(0)=\Delta^k f(0), \qquad k=0,\ldots,r-1, \tag{15}$$

$$f_{r,k}=\langle f,\psi_{r,k}\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)\Delta^r\psi_{r,k}(j)\rho(j)=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)\psi_{k-r}(j)\rho(j), \qquad k=r,r+1,\ldots, \tag{16}$$

то равенство (14) можно переписать в следующем смешанном виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r}^{\infty}f_{r,k}\psi_{r,k}(x),\ x\in\Omega. \tag{17}$$

Поэтому ряд Фурье по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ мы будем, следуя [7–18], называть смешанным рядом по исходной ортонормированной $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Отметим некоторые важные свойства смешанных рядов (17) и их частичных сумм вида

$$\mathscr{Y}_{r,n}(f,x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r}^{n}f_{r,k}\psi_{r,k}(x). \tag{18}$$

Из (17) и (18) с учетом равенств (9) мы можем записать $(0\leqslant\nu\leqslant r-1,\ x\in\Omega)$

$$\Delta^\nu f(x)=\sum_{k=0}^{r-\nu-1}\Delta^{k+\nu}f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r-\nu}^{\infty}f_{r,k+\nu}\psi_{r-\nu,k}(x), \tag{19}$$

$$\Delta^\nu\mathscr{Y}_{r,n}(f,x)=\sum_{k=0}^{r-\nu-1}\Delta^{k+\nu}f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r-\nu}^{n-\nu}f_{r,k+\nu}\psi_{r-\nu,k}(x), \tag{20}$$

$$\Delta^\nu\mathscr{Y}_{r,n}(f,x)=\mathscr{Y}_{r-\nu,n-\nu}(\Delta^\nu f,x). \tag{21}$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ МЕЙКСНЕРА

При конструировании полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими многочленами Мейкснера, нам понадобится ряд свойств этих многочленов, которые мы приведем в настоящем параграфе. Для произвольного α и $0<q<1$ положим

$$\rho(x)=\rho(x;\alpha)=q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}, \tag{22}$$

$$M_n^\alpha(x,q)=\frac{q^{-n}}{n!\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)x^{[n]}\right\}, \tag{23}$$

где $\Delta^n f(x)$ — конечная разность n-го порядка функции $f(x)$ в точке x, т. е. $\Delta^0 f(x)=f(x)$, $\Delta^1 f(x)=\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$, $\Delta^n f(x)=\Delta\Delta^{n-1}f(x)$ $(n\geqslant 1)$, $a^{[0]}=1$, $a^{[k]}=a(a-1)\cdots(a-k+1)$ при $k\geqslant 1$. Для каждого $0\leqslant n$ равенство (23) определяет [22], алгебраический полином степени n, для которого $M_n^\alpha(0,q)=\binom{n+\alpha}{n}$.

Полные доказательства приведенных после свойств полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x,q)$ можно найти, например, в [22, 23]. Прежде всего отметим, что полиномы $M_n^\alpha(x,q)$ допускают следующее явное представление:

$$M_n^\alpha(x,q)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^{[k]}x^{[k]}}{\Gamma(k+\alpha+1)k!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k. \tag{24}$$

Если $\alpha > -1$, то полиномы $M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q)$ $(n = 0,1,\ldots)$ образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (22)) систему на множестве $\Omega = \{0,1,\ldots\}$:

$$\sum_{x\in\Omega} M_k^\alpha(x)M_n^\alpha(x)\rho(x) = \delta_{n,k}h_n^\alpha(q) \quad 0<q<1, \quad \alpha>-1, \tag{25}$$

где

$$h_n^\alpha(q) = \sum_{x=0}^{\infty}\rho(x)\left\{M_n^\alpha(x)\right\}^2 = \binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1). \tag{26}$$

Нам понадобятся также следующие свойства:

$$\Delta M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x+1) - M_n^\alpha(x) = \frac{q-1}{q}M_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{27}$$

$$M_n^a(x,q) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(a-\alpha)_k}{k!}M_k^\alpha(x,q), \tag{28}$$

$$M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\frac{r^{[j]}}{j!}M_{k+r-j}^\alpha(x,q), \tag{29}$$

$$M_n^{-l}(x,q) = \frac{(n-l)!}{n!}\left(\frac{1}{q}-1\right)^l(-x)_lM_{n-l}^l(x-l,q), \qquad l \text{ — целое}, \quad 1\leqslant l\leqslant n, \tag{30}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_l = a(a+1)\ldots(a+l-1)$.

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant r$. *Тогда*

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(x,q) = \frac{1}{(1-q)^r}\sum_{i=0}^{r}(-q)^i\binom{r}{i}M_{k+i}^0(x,q).$$

Доказательство. Полагая в (29) $\alpha = r$, имеем:

$$M_j^0(x,q) = \sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\binom{r}{\nu}M_{j-\nu}^r(x,q).$$

В то же время мы можем записать

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(x,q) = \sum_{j=0}^{k+r}\gamma_jM_j^0(x,q), \tag{31}$$

где

$$\gamma_j = \frac{1}{h_j^0(q)}\sum_{t=0}^{\infty}\rho(t,0,q)\frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(t,q)M_j^0(t,q) = q^j(1-q)\sum_{t=0}^{\infty}q^t\frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}}M_k^r(t,q)M_j^0(t,q) =$$

$$= \frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\sum_{t=0}^{\infty}q^t\frac{\Gamma(t+r+1)}{\Gamma(t+1)}(1-q)^{r+1}M_k^r(t,q)M_j^0(t,q), \tag{32}$$

в частности, $\gamma_j = 0$ при $j<k$. Из (31) и (32) имеем:

$$\gamma_j = \frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\sum_{t=0}^{\infty}\rho(t,r,q)M_k^r(t,q)\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\binom{r}{\nu}M_{j-\nu}^r(x,q) =$$

$$= \frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\binom{r}{j-k}\sum_{t=0}^{\infty}\rho(t,r,q)\left[M_k^r(t,q)\right]^2 =$$

$$= \frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\binom{r}{j-k}h_k^r(q) = \frac{(-q)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r}\binom{r}{j-k}\binom{k+r}{k}\Gamma(r+1).$$

Отсюда и из (31) находим

$$(1-q)^q \frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \sum_{j=k}^{k+r} (-q)^{j-k} \binom{r}{j-k} M_j^0(x,q) = \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x,q).$$

Лемма 2 доказана. □

Из (25) следует, что полиномы

$$m_n^\alpha(x) = m_n^\alpha(x,q) = (h_n^\alpha(q))^{-1/2} M_n^\alpha(x,q) \tag{33}$$

образуют ортонормированную систему на множестве Ω с весом $\rho(x)=\rho(x,\alpha,q)$, т.е.

$$\sum_{x\in\Omega} m_k^\alpha(x) m_n^\alpha(x)\rho(x) = \delta_{n,k}. \qquad 0<q<1, \quad \alpha>-1. \tag{34}$$

3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ, ПО СОБОЛЕВУ, ПОЛИНОМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МЕЙКСНЕРА

Из равенства (34) следует, что если $\alpha > -1$, то полиномы $m_n^\alpha(x,q) \quad (n=0,1,\ldots)$ образуют ортонормированную на $\Omega=\{0,1,\ldots\}$ с весом $\rho(x)$ систему. Эта система порождает на Ω систему полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$ $(k=0,1,\ldots)$, определенных равенством

$$m_{r,k+r}^\alpha(x,q) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]} m_k^\alpha(t,q). \tag{35}$$

Кроме того, определим полиномы

$$m_{r,k}^\alpha(x,q) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \qquad k=0,1,\ldots,r-1. \tag{36}$$

Покажем, что полином $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$ обращается в нуль, если $x\in\{0,1,\ldots,r-1\}$. С этой целью мы рассмотрим следующий дискретный аналог формулы Тейлора ($x\in\{r,r+1,\ldots\}$):

$$F(x) = Q_{r-1}(F,x) + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t), \tag{37}$$

где

$$Q_{r-1}(F,x) = F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!}x + \frac{\Delta^2 F(0)}{2!}x^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^{r-1}F(0)}{(r-1)!}x^{[r-1]}. \tag{38}$$

Так как для функции $F(x)=x^{[l+r]}$, где целое $l\geqslant 0$, имеем $\Delta^r F(x) = (l+r)^{[r]}x^{[l]}$ и $Q_{r-1}(F,x)\equiv 0$, то из (37) следует, что

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}t^{[l]} = \frac{1}{(l+r)^{[r]}(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t) = \frac{x^{[l+r]}}{(l+r)^{[r]}}. \tag{39}$$

С другой стороны, функция $x^{[l+r]}$ обращается в нуль в узлах $x\in\{0,1,\ldots,r-1\}$, поэтому наше утверждение вытекает из того, что полином $m_{k+r}^\alpha(x,q)$ в силу (24) и (33) можно представить в виде линейной комбинации функций вида $x^{[l]}$. Поэтому из теоремы 1 и свойства (29) непосредственно выводим следующий результат.

Теорема 2. *Если $\alpha>-1$, то система полиномов $m_{r,k}^\alpha(x,q) \quad (k=0,1,\ldots)$, порожденная многочленами Мейкснера $m_n^\alpha(x,q) \quad (n=0,1,\ldots)$ посредством равенств* (35) *и* (36)*, полна в l_ρ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (6).

4. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ $\mathbf{m_{r,k}^\alpha(x,q)}$

Перейдем к исследованию дальнейших свойств полиномов $m_{r,k}^\alpha(x,q)$ $(k=0,1,\ldots)$. Речь, в первую очередь, идет о том, чтобы получить представление полиномов $m_{r,k}^\alpha(x,q)$, которое не содержит знаков суммирования с переменным верхним пределом типа (35). С этой целью применим формулу (37) к полиному $F(x) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)$ и запишем

$$F(x) = Q_{r-1}(F,x) + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(t,q). \tag{40}$$

Вместо $\Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)$ подставим его значение, которое согласно формуле (27) равно $(\frac{q-1}{q})^r M_k^\alpha(x,q)$, тогда из (37) получим:

$$F(x) - Q_{r-1}(F,x) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^r \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]} M_k^\alpha(t,q). \tag{41}$$

Сопоставляя (35) и (41) с (33), находим

$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^r \{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}\, m_{r,k+r}^\alpha(x,q) = F(x) - Q_{r-1}(F,x). \tag{42}$$

Из (42) имеем $\big(F(x) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)\big)$

$$m_{r,k+r}^\alpha(x,q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \{h_k^\alpha(q)\}^{-1/2}\,[F(x) - Q_{r-1}(F,x)]. \tag{43}$$

Далее, в силу (27)

$$\Delta^\nu M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^\nu M_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(x,q),$$

поэтому из (24) находим

$$\Delta^\nu M_{k+r}^{\alpha-r}(0,q) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^\nu \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)!\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} = A_{r,k,\nu}. \tag{44}$$

Равенства (38) и (44), взятые вместе, дают

$$F(x) - Q_{r-1}(F,x) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}. \tag{45}$$

Подставив это выражение в (43), находим

$$m_{r,k+r}^\alpha(x,q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \{h_k^\alpha(q)\}^{-1/2}\left[M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}\right], k = 0,1,\ldots. \tag{46}$$

Еще одно важное представление для полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$ можно получить, если мы обратимся к равенствам (24) и (33) и запишем

$$m_k^\alpha(x,q) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\,\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}}\sum_{l=0}^{k}\frac{k^{[l]}x^{[l]}}{\Gamma(l+\alpha+1)l!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k. \tag{47}$$

Подставим это выражение в (35) и воспользуемся равенством (39). Это приводит к следующему явному виду для полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$ $(k = 0,1,\ldots)$:

$$m_{r,k+r}^\alpha(x,q) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\,\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}}\sum_{l=0}^{k}\frac{k^{[l]}x^{[r+l]}}{\Gamma(l+\alpha+1)l!(r+l)^{[r]}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k. \tag{48}$$

5. ПОЛИНОМЫ $\{\mathbf{m^0_{r,k}(x,q)}\}_{\mathbf{k=0}}^{\infty}$

Рассмотрим частный случай, который соответствует выбору $\alpha = 0$. Заметим, что если $\alpha = 0$, то из (44) имеем $A_{r,k,\nu} = 0$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$. Поэтому из (46) имеем:

$$m^0_{r,k+r}(x,q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \left\{h^0_k(q)\right\}^{-1/2} M^{-r}_{k+r}(x,q), k = 0, 1, \ldots. \tag{49}$$

Далее, если мы обратимся к равенству (30), то можем записать

$$M^{-r}_{k+r}(x,q) = \frac{k!}{(k+r)!}\left(1 - \frac{1}{q}\right)^r x^{[r]} M^r_k(x-r,q). \tag{50}$$

Из (49) и (50) находим

$$m^0_{r,k+r}(x,q) = \frac{k!}{(k+r)!}\left\{h^0_k(q)\right\}^{-\frac{1}{2}} x^{[r]} M^r_k(x-r,q), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{51}$$

С учетом (26) и (33) этому равенству можно придать также следующий вид:

$$m^0_{r,k+r}(x,q) = \left((k+r)^{[r]}\right)^{-1/2} x^{[r]} m^r_k(x-r,q), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{52}$$

Воспользовавшись леммой 2 и равенством (51), мы также можем получить для $m^0_{r,k+r}(x,q)$ представления в виде линейных комбинаций полиномов Мейкснера $m^0_{k+i}(x,q)$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$.

Наконец, если $0 \leqslant k \leqslant r-1$, то в силу определения (36)

$$m^0_{r,k}(x,q) = \frac{x^{[k]}}{k!}. \tag{53}$$

Из теоремы 1 следует, что система полиномов $m^0_{r,k}(x,q)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ является ортонормированным базисом (ОНБ) в пространстве l_ρ, поэтому для произвольной функции $f(x) \in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, m^0_{r,k}\rangle m^0_{r,k}(x,q), \tag{54}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x) \in l_\rho$ по системе $\{m^0_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболдлеву относительно скалярного призведения (6). Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f, m^0_{r,k}\rangle$ имеют вид

$$f_{r,k} = \langle f, m^0_{r,k}\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu f(0) \Delta^\nu m^0_{r,k}(0,q) = \Delta^k f(0), \qquad k = 0, \ldots, r-1, \tag{55}$$

$$f_{r,k} = \langle f, m^0_{r,k}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) m^0_{k-r}(j,q)\rho(j), \qquad k = r, r+1, \ldots, \tag{56}$$

то равенство (54) можно переписать в следующем смешанном виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} m^0_{r,k}(x,q), \qquad x \in \Omega. \tag{57}$$

.

6. РАЗНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ $\{m^\alpha_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$

Основные разностные свойства сумм Фурье по полиномам $m^\alpha_{r,k}(x,q)$, которые согласно (18) имеют вид

$$\mathscr{Y}^\alpha_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{n} f_{r,k} m^\alpha_{r,k}(x,q), \tag{58}$$

где

$$f_{r,k} = \langle f, m^0_{r,k}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) m^0_{k-r}(j,q)\rho(j), \qquad k = r, r+1, \ldots.$$

выражены равенствами (19)–(21). Для системы $\{m^{\alpha}_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$ они принимают вид $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$

$$\Delta^{\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{\infty} f_{r,k+\nu} m^{\alpha}_{r-\nu,k}(x,q), \tag{59}$$

$$\Delta^{\nu} \mathscr{Y}^{\alpha}_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu} m^{\alpha}_{r-\nu,k}(x,q), \tag{60}$$

$$\Delta^{\nu} \mathscr{Y}^{\alpha}_{r,n}(f,x) = \mathscr{Y}^{\alpha}_{r-\nu,n-\nu}(\Delta^{\nu} f, x). \tag{61}$$

Из (19) и (20) мы также можем записать для $n \geqslant r > \nu \geqslant 0$

$$\Delta^{\nu} f(x) - \Delta^{\nu} \mathscr{Y}^{\alpha}_{r,n}(f,x) = \sum_{k=n-\nu+1}^{\infty} f_{r,k+\nu} m^{\alpha}_{r-\nu,k}(x,q). \tag{62}$$

Равенство (62) дает выражение для погрешности, проистекающей в результате замены конечной разности $\Delta^{\nu} f(x)$ ее приближенным значением $\Delta^{\nu} \mathscr{Y}^{\alpha}_{r,n}(f,x)$. При решении задачи об оценке этой погрешности возникает вопрос об асимптотических свойствах полиномов $m^{\alpha}_{r-\nu,k}(x,q)$. Этот вопрос, в свою очередь, сводится, как это было показано в пп. 4 и 5 настоящей статьи, к задаче об асимптлотических свойствах полиномов $m^{\alpha}_{k}(x,q)$, которые весьма подробно исследованы в [22].

Библиографический список

1. *Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M.* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65, iss. 2. P. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-O.
2. *Marcellán F., Alfaro M., Rezola M. L.* Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. Appl. Math. 1993. Vol. 48, iss. 1–2. P. 113–131. DOI:10.1016/0377-0427(93)90318-6.
3. *Meijer H. G.* Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73, iss. 1. P. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029.
4. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Vol. 2. P. 289–303.
5. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Ann. Numer. Anal. 1998. Vol. 28. P. 547–594.
6. *Marcellan F., Yuan Xu* On sobolev orthogonal polynomials. arXiv: 6249v1 [math.C.A]. 25 Mar 2014. P. 1–40.
7. *Шарапудинов И. И.* Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Матем. заметки. 2000. Т. 67, № 3. С. 460–470. DOI: 10.4213/mzm858.
8. *Шарапудинов И. И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье – Лежандра // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 5. С. 143–160. DOI: 10.4213/sm480.
9. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства операторов $\mathscr{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 765–795. DOI: 10.4213/mzm466.
10. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. 2003. Т. 194, № 3. С. 115–148. DOI: 10.4213/sm723.
11. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам / Дагестан. науч. центр РАН. Махачкала, 2004. 176 с.
12. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Матем. заметки. 2005. Т. 78, вып. 3. С. 442–465. DOI: 10.4213/mzm2599.
13. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154. DOI: 10.4213/sm1539.
14. *Шарапудинов Т. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестн. Дагестан. науч. центра РАН. 2007. Т. 29. С. 12–23.
15. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле – Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 452–471. DOI: 10.4213/mzm5541.
16. *Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.
17. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Матем. заметки. 2010. Т. 88, вып. 1. С. 116–147. DOI: 10.4213/mzm6607.
18. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й

междунар. Сарат. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С.329–332.
19. *Trefethen L. N.* Spectral methods in Matlab. Philadelphia : SIAM, 2000. 160 p.
20. *Trefethen L. N.* Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University, 1996. 325 p.
21. *Магомед-Касумов Р. Г.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 176–178.
22. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на дискретных сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 252 с.
23. *Gasper G.* Positivity and special function // Theory and Application of Special Functions : Proceedings of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin-Madison, March 31-April 2, 1975 / ed. R. Askey. N. Y. ; San Francisco ; L. : Academic Press, Inc., 1975. P. 375–433.

Образец для цитирования:
Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321.

Sobolev Orthogonal Polynomials Generated by Meixner Polynomials

I. I. Sharapudinov[1], Z. D. Gadzhieva[2]

[1]Idris I. Sharapudinov, Dagestan Scientific Center RAS, Vladikavkaz Scientific Center RAS, Dagestan State Pedagogical University, 45, M. Gadzhieva st., 367032, Makhachkala, Russia, sharapud@mail.ru
[2]Zulfiya D. Gadzhieva, Dagestan Scientific Center RAS, Dagestan State Pedagogical University, 45, M.Gadzhieva st., 367032, Makhachkala, Russia, zulfiya.gadzhieva.1976@mail.ru

The problem of constructing Sobolev orthogonal polynomials $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$ $(n=0,1,\ldots)$, generated by classical Meixner's polynomials is considered. They can by defined using the following equalities $m_{r,k}^{\alpha}(x,q)=\frac{x^{[k]}}{k!}, x^{[k]}=x(x-1)\cdots(x-k+1)$, $k=0,1,\ldots,r-1$, $m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)=\frac{1}{(r-1)!}\sum\limits_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}m_{k}^{\alpha}(t,q)$, where $m_{k}^{\alpha}(t,q)$ denote Meixner's polynomial of degree k, orthonormal on $\Omega=\{0,1,\ldots\}$ with weight $\rho(x)=q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$. Polynomials $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$, $(n=0,1,\ldots)$ are orthonormal on $\Omega=\{0,1,\ldots\}$ with respect to the inner product

$$\langle m_{r,n}^{\alpha}, m_{r,m}^{\alpha}\rangle=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k m_{r,n}^{\alpha}(0,q)\Delta^k m_{r,m}^{\alpha}(0,q)+\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r m_{r,n}^{\alpha}(j,q)\Delta^r m_{r,m}^{\alpha}(j,q)\rho(j).$$

For $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$ we obtain the explicit formula that contains the Meixner polynomial $M_n^{\alpha-r}(x,q)$:

$$m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)=\left(\frac{q}{q-1}\right)^r\{h_k^{\alpha}(q)\}^{-1/2}\left[M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}\right], k=0,1,\ldots,$$

where $A_{r,k,\nu}=\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)!\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}, M_n^{\alpha}(x,q)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^{[k]}x^{[k]}}{\Gamma(k+\alpha+1)k!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k$, $h_n^{\alpha}(q)=\binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1)$.

Key words: orthogonal Sobolev polynomial, Meixner polynomials orthogonal on the grid, approximation of discrete functions, mixed series in Meixner polinomials orthogonal on a uniform grid.

References

1. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. *J. Approx. Theory*, 1991, vol. 65, iss. 2, pp. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-O.
2. Marcellán F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions. *J. Comput. Appl. Math.*, 1993, vol. 48, iss. 1–2, pp. 113–131. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90318-6.
3. Meijer H. G. Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space. *J. Approx. Theory*, 1993, vol. 73, iss. 1, pp. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029.

4. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k. *Ann. Numer. Anal.*, 1995, vol. 2, pp. 289–303.
5. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations. *Ann. Numer. Anal.*, 1998, vol. 28, pp. 547–594.
6. Marcellan F., Xu Y. On sobolev orthogonal polynomials. *arXiv:6249v1* [math.C.A]. 25 Mar 2014, pp. 1–40.
7. Sharapudinov I. I. Approximation of discrete functions and Chebyshev polynomials orthogonal on the uniform grid. *Math. Notes*, 2000, 67, iss. 3, pp. 389–397. DOI: 10.1007/BF02676675.
8. Sharapudinov I. I. Approximation of functions of variable smoothness by Fourier – Legendre sums. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 5, pp. 759–777. DOI: 10.1070/SM2000v191n05ABEH000480.
9. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the operators $\mathscr{Y}_{n+2r}(f)$ and of their discrete analogs. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 5, pp. 705–732. DOI: 10.1023/A:1021421425474.
10. Sharapudinov I. I. Mixed series in ultraspherical polynomials and their approximation properties. *Sb. Math.*, 2003, vol. 194, no. 3, pp. 423–456. DOI: 10.1070/SM2003v194n03ABEH000723.
11. Sharapudinov I. I. *Smeshannye rjady po ortogonal'nym polinomam* [Mixed series of orthogonal polynomials]. Makhachkala, Dagestan Scientific Center RAS, 2004, 176 p. (in Russian).
12. Sharapudinov I. I. Mixed series of Chebyshev polynomials orthogonal on a uniform grid. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, iss. 3, pp. 403–423. DOI: 10.1007/s11006-005-0139-3.
13. Sharapudinov I. I. Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r. *Sb. Math*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 433–452. DOI: 10.1070/SM2006v197n03ABEH003765.
14. Sharapudinov T. I. Approximative properties of mixed series by Chebyshev polynomials, orthogonal on an uniform net. *Vestnik Dagestan. nauch. centra RAN*, 2007, vol. 29, pp. 12–23 (in Russian).
15. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the Vallee – Poussin means of partial sums of a mixed series of Legendre polynomials. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, iss 3–4, pp. 417–434. DOI: 10.1134/S0001434608090125.
16. Sharapudinov I. I., Muratova G. N. Same Properties r-fold Integration Series on Fourier – Haar System. *Izv. Saratov Univ. (N.S), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 68–76 (in Russian).
17. Sharapudinov I. I., Sharapudinov T. I. Mixed series of Jacobi and Chebyshev polynomials and their discretization. *Math. Notes*, vol. 88, iss. 1–2, pp. 112–139. DOI: 10.1134/S0001434610070114.
18. Sharapudinov I. I. Sistemy funktsii, ortogonal'nykh po Sobolevu, porozhdennye ortogonal'nymi funktsiiami [System functions orthogonal on Sobolev generated orthogonal functions]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and their applications : Proc. 18th Intern. Sarat. Winter School]. Saratov, OOO Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 329–332.
19. Trefethen L. N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, SIAM, 2000, 160 p.
20. Trefethen L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation*. Cornell University, 1996, 325 p.
21. Magomed-Gasimov M. G. Priblizhennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s ispol'zovaniem smeshannykh riadov po sisteme Khaara [Approximate solution of ordinary differential equations with the use of mixed series on the Haar system]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and their applications : Proc. 18th Intern. Sarat. Winter School]. Saratov, OOO Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 176–178.
22. Sharapudinov I. I. *Mnogochleny, ortogonal'nye na dickretnyh setkah* [Polynomials orthogonal on discrete grids]. Mahachkala, Izd-vo Dag. Gos. Ped. Un-ta, 1997, 252 p. (in Russian).
23. Gasper G, ppositivity and special function. *Theory and Application of Special Functions* : Proc. of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin-Madison, March 31-April 2, 1975, ed. R. Askey, New York, San Francisco, London, Academic Press, Inc., 1975, pp. 375–433.

Please cite this article in press as:
Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D. Sobolev Orthogonal Polynomials, Generated by Meixner Polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 310–321 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321.