УДК 517.952

О РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕРО С МУЛЬТИОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ

И. В. Рахмелевич

Кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий в предпринимательской деятельности, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, igor-kitpd@yandex.ru

Проведен анализ решений уравнения Клеро с произвольным числом независимых переменных. Предполагается, что нелинейная функция от производных, входящая в состав уравнения, является мультиоднородной. Это означает, что множество аргументов функции можно представить в виде объединения подмножеств, по каждому из которых функция является однородной. Рассматриваются решения уравнения, зависящие от линейных комбинаций исходных переменных, в каждую из которых входят только переменные из определенного подмножества. Исходное уравнение преобразовано к редуцированному, которое решается методом разделения переменных. Получены решения редуцированного уравнения в виде произвольных однородных функций с показателем однородности 1, а также некоторых обобщенных полиномов.

Ключевые слова: уравнение Клеро, редуцированное уравнение, мультиоднородная функция, метод разделения переменных.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее известных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, является уравнение Клеро [1, 2]. В указанных работах приведено общее решение уравнения Клеро, являющееся линейной функцией, а также особые решения, представленные в параметрической форме [2]. При этом не использовались никакие дополнительные предположения о свойствах нелинейной функции от производных, входящей в состав уравнения. В то же время известно, что при решении дифференциальных уравнений, содержащих однородные и мультиоднородные функции от частных производных [3–5], весьма эффективным является метод разделения переменных. В данной работе с помощью названного метода проводится анализ решений многомерного уравнения Клеро в случае, когда нелинейная часть уравнения представляет собой мультиоднородную функцию.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим многомерное уравнение Клеро относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) + \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = u. \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию $F(p_1, \ldots, p_N)$. Пусть множество значений $I = \{1, \ldots, N\}$ индекса i, нумерующего независимые переменные, представлено в виде объединения K непересекающихся подмножеств I_k $(k = 1, \ldots, K)$. Тогда вектор аргументов этой функции $P = \{p_1, \ldots, p_N\}$ может быть разбит на K непересекающихся подвекторов $P_k = \{p_i\}_{i \in I_k}$. По определению функция F называется мультиоднородной относительно подвекторов $P_1, \ldots, P_K$ с показателями однородности $r_1, \ldots, r_K$, если при всех $k = 1, \ldots, K$ выполняются соотношения:

$$F(P_1, \ldots, \alpha P_k, \ldots, P_K) = \alpha^{r_k} F(P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_K). \qquad (2)$$

Эти соотношения должны выполняться для любых действительных $\alpha, P_1, \ldots, P_K$, при которых определены функции, входящие в (2). Понятие мультиоднородной функции [3, 5] является обобщением классического понятия однородной функции [6].

Предполагая, что F является мультиоднородной функцией, решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u = U(z_1, \ldots, z_K), \qquad z_k = \sum_{i \in I_k} c_i x_i\,. \qquad (3)$$

Тогда с учетом свойства мультиоднородности (2) функции F уравнение (1) сводится к следующему:

$$A \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{\partial U}{\partial z_k}\right)^{r_k} + \sum_{k=1}^{K} z_k \frac{\partial U}{\partial z_k} = U. \qquad (4)$$

Здесь c_i — произвольные постоянные, $A = F(C_1, \dots, C_K)$, $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$ — постоянные векторы $(k = 1, \dots, K)$.

Таким образом, исходное уравнение (1) для решений вида (3) сведено к редуцированному уравнению (4) в предположении мультиоднородности функции F.

2. АНАЛИЗ РЕДУЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

В данном параграфе проведем анализ решений уравнения (4). Простейшие частные случаи, когда это уравнение сводится к линейному, описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Уравнение* (4) *имеет следующие решения в виде произвольных однородных функций с показателем однородности 1, дифференцируемых по всем аргументам:*

1) $U = U(z_1, \dots, z_K)$*, если удовлетворяется условие*

$$F(C_1, \dots, C_K) = 0; \tag{5}$$

2) $U = U(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_K)$ *при выполнении условия* $r_l > 0$ $(l \in [1, K])$.

Доказательство. 1. Пусть постоянные c_i таковы, что удовлетворяется условие (5). В этом случае (4) сводится к линейному уравнению:

$$\sum_{k=1}^{K} z_k \frac{\partial U}{\partial z_k} = U. \tag{6}$$

Решением этого уравнения является произвольная однородная функция $U(z_1, \dots, z_K)$ с показателем однородности 1 [1, с. 223].

2. Пусть $l \in [1, K]$ — некоторое значение индекса k. Рассмотрим функцию $U = U(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_K)$, дифференцируемую по всем своим аргументам. Подставив эту функцию в уравнение (4) и учитывая, что $\dfrac{\partial U}{\partial z_l} = 0$ при данном l, находим, что при выполнении условия $r_l > 0$ уравнение (4) сводится к следующему:

$$\sum_{k=1, k \neq l}^{K} z_k \frac{\partial U}{\partial z_k} = U. \tag{7}$$

Решением уравнения (7) также является произвольная однородная функция $U(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_K)$ с показателем однородности 1, причем в отличие от случая 1) на постоянные c_i никаких дополнительных условий не накладывается. Теорема доказана.

Отметим также, что при $K = 1$ функция F является однородной (в обычном смысле), и тогда уравнение (4) представляет собой частный случай одномерного уравнения Клеро:

$$A \left(\frac{dU}{dz} \right)^r + z \frac{dU}{dz} = U. \tag{8}$$

Решения уравнения (8) хорошо известны [7, с. 144]:

$$U(z) = Bz + AB^r, \qquad U(z) = bz^{r/(r-1)}, \qquad b = \left(-\frac{(r-1)^{r-1}}{Ar^r} \right)^{1/(r-1)}. \tag{9}$$

Здесь B — произвольная постоянная; первая из формул (9) соответствует общему решению одномерного уравнения Клеро, а вторая – особому решению, которое существует при $r \neq 1$.

Рассмотрим теперь общий случай $1 \leqslant K \leqslant N$ и проведем анализ решений уравнения (4) с помощью метода разделения переменных [8].

Теорема 2. *Уравнение* (4) *имеет следующие решения, представимые в виде суммы функций, каждая из которых зависит от одной из переменных* $z_1, \dots, z_K$*:*

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{k=1}^{K} a_k z_k + A \prod_{k=1}^{K} a_k^{r_k}, \tag{10}$$

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{k=1, k \neq l}^{K} a_k z_k + b_l z_l^{r_l/(r_l-1)}\,. \tag{11}$$

Здесь a_k — произвольные постоянные, а b_l определяется выражением

$$b_l = \left(-(1/A) \prod_{k=1, k\neq l}^{K} a_k^{-r_k} \frac{(r_l-1)^{r_l-1}}{r_l^{r_l}} \right)^{1/(r_l-1)}. \tag{12}$$

Решения вида (12) *существуют при всех $l \in [1, K]$, для которых выполнено условие $r_l \neq 1$.*

Доказательство. В соответствии с известной схемой аддитивного разделения переменных будем искать решение уравнения (4) в виде суммы функций одной переменной:

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \sum_{k=1}^{K} U_k(z_k). \tag{13}$$

Подставив функцию (13) в уравнение (4), получаем следующее:

$$A \prod_{k=1}^{K} [U_k'(z_k)]^{r_k} = \sum_{k=1}^{K} \left(U_k(z_k) - z_k U_k'(z_k) \right). \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что уравнению (14) удовлетворяют, в частности, линейные функции $U_k(z_k) = a_k z_k + b_k$. Подставив это выражение в уравнение (14) и учитывая (13), получаем решение вида (10), которое представляет собой известный полный интеграл многомерного уравнения Клеро [1, 2]. Для нахождения особых решений продифференцируем почленно уравнение (14) по z_l, где $l \in [1, K]$ — некоторое значение индекса k. Тогда уравнение (14) преобразуется к следующему:

$$A r_l \prod_{k=1, k\neq l}^{K} [U_k'(z_k)]^{r_k} [U_l'(z_l)]^{r_l-1} U_l''(z_l) = -z_l U_l''(z_l). \tag{15}$$

Уравнение (15) удовлетворяется, в частности, при $U_l''(z_l) \equiv 0$, что соответствует рассмотренному выше линейному решению (10). Для нахождения другого решения предположим, что $U_l''(z_l)$ тождественно не равна 0, тогда (15) можно переписать в виде

$$A \prod_{k=1, k\neq l}^{K} [U_k'(z_k)]^{r_k} = -\frac{z_l}{r_l [U_l'(z_l)]^{r_l-1}}. \tag{16}$$

Так как функции $U_k(z_k)$, $U_l(z_l)$ зависят от разных переменных, то в соответствии с известной схемой метода разделения переменных из (16) получаем уравнения относительно этих функций:

$$U_k'(z_k) = a_k \quad (k \neq l), \qquad \frac{z_l}{r_l [U_l'(z_l)]^{r_l-1}} = \lambda_l, \tag{17}$$

где a_k, λ_l — некоторые постоянные. Находя решения уравнений (17) и подставив их в (14), получаем решения, определяемые формулами (11), (12). Теорема доказана.

Теорема 3. *Уравнение* (4) *имеет следующие решения, представимые в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной из переменных $z_1, \ldots, z_K$:*

1)

$$U(z_1, \ldots, z_K) = B \prod_{k=1}^{K} z_k^{q_k}, \tag{18}$$

где

$$q_k = \frac{r_k}{r_\Sigma - 1}, \qquad r_\Sigma = \sum_{k=1}^{K} r_k, \qquad B = [(1-r_\Sigma)A]^{\frac{1}{1-r_\Sigma}} \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{r_\Sigma - 1}{r_k} \right)^{\frac{r_k}{r_\Sigma - 1}}; \tag{19}$$

2) для каждого $l \in [1, K]$

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \tilde{B} U_l(z_l) \prod_{k=1, k\neq l}^{K} z_k^{q_k}, \tag{20}$$

где $U_l(z_l)$ является решением следующего ОДУ:

$$D[U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1} = \kappa_l - \frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)}. \tag{21}$$

Здесь $\kappa_l = (r_l - 1)/(r_\Sigma - 1)$, $D = A\tilde{B}^{r_\Sigma - 1} \prod\limits_{k=1, k\neq l}^{K} q_k^{r_k}$.

Решения, определяемые формулами (18)–(21), существуют при условии $r_\Sigma \neq 1$.

Доказательство. В соответствии с известной схемой мультипликативного разделения переменных будем искать решение уравнения (4) в виде произведения функций одной переменной:

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \prod_{k=1}^{K} U_k(z_k). \tag{22}$$

Подстановка выражения (22) в уравнение (4) приводит к следующему:

$$A \prod_{k=1}^{K} [U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)}, \tag{23}$$

где r_Σ определяется второй из формул (19).

Из уравнения (23) непосредственно следует, что если при всех $k = 1, \ldots, K$ функции $U_k(z_k)$ удовлетворяют системам ОДУ

$$[U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1} = \lambda_k, \qquad \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)} = q_k, \tag{24}$$

то функция $U(z_1, \ldots, z_K)$, определяемая формулой (22), является решением уравнения (4). Здесь λ_k, q_k — некоторые постоянные, которые должны удовлетворять условию:

$$A \prod_{k=1}^{K} \lambda_k = 1 - \sum_{k=1}^{K} q_k. \tag{25}$$

Решая системы (24), находим:

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_\Sigma - 1}} \left(\frac{z_k}{q_k}\right)^{q_k}, \qquad q_k = \frac{r_k}{r_\Sigma - 1}. \tag{26}$$

Подставляя функции (26) в выражение (22) и учитывая условие (25), получаем решение, определяемое формулами (18), (19). Для получения других решений продифференцируем уравнение (23) по z_l, где $l \in [1, K]$ — некоторое выбранное значение индекса k:

$$A \prod_{k=1, k\neq l}^{K} [U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1} \frac{d}{dz_l}\left([U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1}\right) = -\frac{d}{dz_l}\left(\frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)}\right). \tag{27}$$

Если функция $U_l(z_l)$ удовлетворяет системе (24), то уравнение (27) удовлетворяется автоматически. Рассмотрим теперь случай, когда

$$[U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1} \neq \mathrm{const}; \qquad z_l U_l'(z_l)/U_l(z_l) \neq \mathrm{const}.$$

Тогда поскольку в левой части (27) присутствует произведение функций от разных переменных z_k, а правая часть зависит только от z_l, то при всех $k \neq l$ функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять первому из уравнений (24). Тогда уравнение (23) преобразуется к виду

$$A \prod_{k=1, k\neq l}^{K} \lambda_k [U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)}. \tag{28}$$

Аналогично, так как левая часть (28) зависит только от z_l, а в правой части содержится сумма функций от всех z_k, то при всех $k \neq l$ функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять и второму из уравнений (24). Поэтому поскольку функции $U_k(z_k)$ $(k \neq l)$ должны удовлетворять обоим уравнениям (24), то эти функции определяются выражениями (26). Подставляя эти выражения в (23), получаем, что функция $U_l(z_l)$ должна быть решением уравнения (21). Теорема доказана.

Кроме рассмотренных выше аддитивного и мультипликативного разделения переменных, в данной задаче также существуют решения, представимые в виде суммы произведений функций от отдельных переменных z_k. Вид этих решений устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть множество $\Omega = \{1, \ldots, K\}$ значений индекса k представлено в виде объединения S $(1 \leqslant S \leqslant K)$ непересекающихся подмножеств Ω_s $(s = 1, \ldots, S)$. Тогда уравнение (4) имеет решения следующего вида:*

1) для каждого $t \in [1, S]$

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \sum_{s=1, s\neq t}^{S} B_s \prod_{k\in\Omega_s} z_k^{\tilde{q}_k} + B_t \prod_{k\in\Omega_t} z_k^{q_k}, \tag{29}$$

где $\tilde{q}_k$, q_k определяются выражениями:

$$q_k = r_k/(r_{\Sigma t} - 1), \qquad \tilde{q}_k = r_k/r_{\Sigma s}, \qquad r_{\Sigma s} = \sum_{k\in\Omega_s} r_k, \qquad r_{\Sigma t} = \sum_{k\in\Omega_t} r_k. \tag{30}$$

Постоянные B_s $(s = 1, \ldots, S)$ должны удовлетворять условию:

$$(1 - r_{\Sigma t}) A \prod_{s=1, s\neq t}^{S} B_s^{r_{\Sigma s}} \prod_{k\in\Omega_s} \tilde{q}_k^{r_k} B_t^{r_{\Sigma t}-1} \prod_{k\in\Omega_t} q_k^{r_k} = 1. \tag{31}$$

Решение (29) для каждого фиксированного t существует при $r_{\Sigma t} \neq 1$, $r_{\Sigma s} \neq 0$ (второе из этих условий должно выполняться при всех $s \neq t$);

2) для каждого $t \in [1, S]$ и каждого $l \in \Omega_t$

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \sum_{s=1, s\neq t}^{S} B_s \prod_{k\in\Omega_s} z_k^{\tilde{q}_k} + \tilde{B}_t U_l(z_l) \prod_{k\in\Omega_t, k\neq l} z_k^{q_k}, \tag{32}$$

причем функция $U_l(z_l)$ является решением следующего ОДУ:

$$D[U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t} - r_l - 1} = \kappa_l - \frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)}. \tag{33}$$

Здесь

$$\kappa_l = \frac{r_l - 1}{r_{\Sigma t} - 1}, \qquad D = A\tilde{B}_t^{r_{\Sigma t}-1} \prod_{s=1,\, s\neq t}^{S} B_s^{r_{\Sigma s}} \prod_{k\in\Omega_t,\, k\neq l}^{K} q_k^{r_k} \prod_{s=1,\, s\neq t}^{S} \prod_{k\in\Omega_s} \tilde{q}_k^{r_k}. \tag{34}$$

Доказательство. Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$U(z_1, \ldots, z_K) = \sum_{s=1}^{S} \left(\prod_{k\in\Omega_s} U_k(z_k) \right). \tag{35}$$

Подставляя функцию (35) в уравнение (4), получаем следующее:

$$A \prod_{s=1}^{S} \prod_{k\in\Omega_s} \left([U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k} \right) = \sum_{s=1}^{S} \left(\prod_{k\in\Omega_s} U_k(z_k) \right) \left(1 - \sum_{k\in\Omega_s} \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)} \right), \tag{36}$$

где $r_{\Sigma s}$ определяется формулой (30).

Пусть l, t — некоторые значения индексов k, s, причем $l \in \Omega_t$. Для дальнейшего анализа уравнения (36) продифференцируем его по z_l, тогда:

$$A \prod_{s=1}^{S} \prod_{k\in\Omega_s} \left([U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k - \delta_{st}} \right) = \frac{-V_l(z_l) \sum\limits_{k\in\Omega_t} z_k V_k(z_k) + z_l V_l'(z_l)}{(r_{\Sigma t} - r_l) V_l(z_l) + r_l W_l(z_l)}. \tag{37}$$

Здесь использованы обозначения $V_l(z_l) = U'_l(z_l)/U_l(z_l)$, $W_l(z_l) = U''_l(z_l)/U'_l(z_l)$, δ_{st} — символ Кронекера.

Так как правая часть уравнения (37) зависит только от переменных z_k $(k \in \Omega_t)$, то в соответствии с известной схемой метода разделения переменных функции $U_k(z_k)$ при $k \in \Omega_s$, $s \neq t$, должны удовлетворять уравнениям:

$$[U'_k(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s}-r_k} = \lambda_k, \tag{38}$$

где λ_k — некоторые постоянные. Решая уравнения (38), находим, что

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_{\Sigma s}}} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{\tilde{q}_k}\right)^{\tilde{q}_k}, \tag{39}$$

где $\tilde{q}_k$ определяется второй из формул (30), z_{k0} — произвольные постоянные интегрирования.

Подставим выражение (39) в уравнение (36) и перепишем это уравнение в виде

$$A \prod_{s=1, s\neq t}^{S} \prod_{k\in\Omega_s} \lambda_k \prod_{k\in\Omega_t} \left([U'_k(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t}-r_k}\right) =$$

$$= \sum_{s=1,s\neq t}^{S} \left(\prod_{k\in\Omega_s} U_k(z_k)\right)\left(1 - \sum_{k\in\Omega_s} \frac{z_k\tilde{q}_k}{z_k - z_{k0}}\right) + \prod_{k\in\Omega_t} U_k(z_k)\left(1 - \sum_{k\in\Omega_t} \frac{z_k U'_k(z_k)}{U_k(z_k)}\right). \tag{40}$$

Левая часть (40) зависит только от переменных z_k $(k \in \Omega_t)$, а первое слагаемое в правой части зависит от z_k $(k \in \Omega_s,\ s \neq t)$. Поэтому уравнению (40) можно удовлетворить только в том случае, если при всех $s \neq t$ выполнено условие

$$1 - \sum_{k\in\Omega_s} \frac{z_k\tilde{q}_k}{z_k - z_{k0}} \equiv 0. \tag{41}$$

Учитывая выражение (30) для $\tilde{q}_k$, получаем, что условие (41) выполняется только в том случае, если

$$z_{k0} = 0 \tag{42}$$

при всех $k \in \Omega_s$, $s \neq t$. Тогда с учетом (41) уравнение (40) принимает вид

$$A^{(1)} \prod_{k\in\Omega_t} \left([U'_k(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t}-r_k-1}\right) = 1 - \sum_{k\in\Omega_t} \frac{z_k U'_k(z_k)}{U_k(z_k)}, \tag{43}$$

где

$$A^{(1)} = A \prod_{s=1,s\neq t}^{S} \prod_{k\in\Omega_s} \lambda_k. \tag{44}$$

Уравнение (43) имеет вид, аналогичный уравнению (23), с точностью до входящих в него параметров. Поэтому повторяя соответствующие рассуждения для уравнения (43), получаем, что для всех $k \in \Omega_t$ ему удовлетворяют функции:

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_{\Sigma t}-1}} \left(\frac{z_k}{q_k}\right)^{q_k}, \qquad q_k = \frac{r_k}{r_{\Sigma t} - 1}, \tag{45}$$

причём постоянные λ_k должны удовлетворять условию:

$$A^{(1)} \prod_{k\in\Omega_t} \lambda_k = 1 - \sum_{k\in\Omega_t} q_k. \tag{46}$$

Подставляя выражения (39), (45) в (35), получаем решение в виде (29), причем постоянные B_s, B_t определяются выражениями:

$$B_s = \left(\prod_{k\in\Omega_s} \lambda_k\right)^{\frac{1}{r_{\Sigma s}}} \prod_{k\in\Omega_s} \tilde{q}_k^{-\tilde{q}_k}, \qquad B_t = \left(\prod_{k\in\Omega_t} \lambda_k\right)^{\frac{1}{r_{\Sigma t}-1}} \prod_{k\in\Omega_t} q_k^{-q_k}. \tag{47}$$

Принимая во внимание условие (46) и учитывая (47), (44), находим, что постоянные B_s, B_t, входящие в решение (29), должны удовлетворять условию (31).

Далее, для нахождения другого решения, продифференцируем уравнение (43) по z_l, где $l \in \Omega_t$, тогда получаем:

$$A \prod_{k\in\Omega_t, k\neq l} \left([U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t}-r_k-1}\right) \frac{d}{dz_l}\left([U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t}-r_l-1}\right) = -\frac{d}{dz_l}\left(\frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)}\right). \qquad (48)$$

Для решения, определяемого формулами (29)–(31), рассмотренного выше, выражения под знаком производной по z_l в левой и правой частях (48) являются постоянными величинами и, следовательно, для этого случая (48) удовлетворяется автоматически. Рассмотрим теперь случай, когда

$$[U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t}-r_l-1} \neq \mathrm{const}; \qquad z_l U_l'(z_l)/U_l(z_l) \neq \mathrm{const}.$$

Так как правая часть (48) зависит только от z_l, а левая часть — от всех z_k ($k \in \Omega_t$), то при всех k ($k \in \Omega_t$, $k \neq l$) функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$[U_k'(z_k)]^{r_k}[U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t}-r_k-1} = \lambda_k, \qquad (49)$$

Решение уравнения (49) имеет вид

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_{\Sigma t}-1}}\left(\frac{z_k - z_{k0}}{q_k}\right)^{q_k}, \qquad (50)$$

Подставив выражение (50) в уравнение (43), преобразуем это уравнение к виду

$$A^{(1)} \prod_{k\in\Omega_t, k\neq l} \lambda_k \left([U_l'(z_l)]^{r_l}[U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t}-r_l-1}\right) = 1 - \sum_{k\in\Omega_t, k\neq l} \frac{z_k q_k}{z_k - z_{k0}} - \frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)}, \qquad (51)$$

Так как левая часть (51) зависит только от z_l, а правая часть — от всех z_k ($k \in \Omega_t$), то это уравнение может быть удовлетворено только в том случае, если для всех $k \in \Omega_t$, $k \neq l$ выполнено условие (42). Тогда, подставляя (39) и (50) в выражение (35) и учитывая условие (42), получаем решение уравнения (4) в виде (32), где постоянная $\tilde{B}_t$ определяется выражением

$$\tilde{B}_t = \left(\prod_{k\in\Omega_t,\, k\neq l} \lambda_k\right)^{\frac{1}{r_{\Sigma t}-1}} \prod_{k\in\Omega_t,\, k\neq l} q_k^{-q_k}. \qquad (52)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (51) учтем, что

$$1 - \sum_{k\in\Omega_t,\, k\neq l} q_k = \kappa_l, \qquad (53)$$

где κ_l определяется первой из формул (34). Тогда с учетом (52) и (53) из (51) получаем уравнение для $U_l(z_l)$ в виде (33). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе многомерное уравнение Клеро (1) с мультиоднородной функцией от производных сведено к редуцированному уравнению (4). Показано, что в случаях, когда уравнение (4) сводится к линейному, оно имеет решения в виде произвольной однородной функции от переменных $z_1, \ldots, z_K$ с показателем однородности 1 при выполнении условия (5); и в виде произвольных однородных функций от переменных $z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_K$ с показателем однородности 1 для всех $l \in [1, K]$, при которых выполняется условие $r_l > 0$. Другие решения уравнения (4) найдены методом разделения переменных. Так, в случае аддитивного разделения переменных получены решения, определяемые формулами (10)–(12); в случае мультипликативного разделения переменных — решения (18), (19) и (20), (21); в случае комбинированного разделения переменных – решения, определяемые формулами (29)–(31), (32)–(34). Результаты данной работы могут быть обобщены на другие уравнения аналогичного вида.

Библиографический список

1. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М. : Физматлит, 2003. 416 с.
2. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М. : Наука, 1966. 260 с.
3. *Рахмелевич И. В.* О некоторых уравнениях в частных производных, содержащих мультиоднородные функции // Научная дискуссия : вопросы физики, математики, информатики : материалы III междунар. заочн. науч.-практ. конф. М. : Междунар. центр науки и образ., 2012. С. 18–23.
4. *Рахмелевич И. В.* О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2013. № 3. С. 37–44.
5. *Рахмелевич И. В.* Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 1. С. 42–50.
6. *Ацел Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными / пер. с англ. М. : Физматлит, 2003. 432 с.
7. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
8. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М. : Физматлит, 2002. 256 с.

On the Solutions of Multi-dimensional Clairaut Equation with Multi-homogeneous Function of the Derivatives

I. V. Rakhmelevich

Nizhny Novgorod State University, 23, Gagarin ave., Nizhny Novgorod, 603950, Russia, igor-kitpd@yandex.ru

The analysis of the solutions of Clairaut equation with an arbitrary number of independent variables is completed. It is assumed that the function of the derivatives, which is part of the equation is multi-homogeneous. This means that the set of function arguments can be represented as the union of subsets, and the function is homogeneous on each of these subsets. We consider solutions of equations depending on linear combinations of the original variables, each of which contains only a certain subset of variables. Original equation is transformed to a reduced one, which can be solved by separation of variables. It is shown that the reduced equation has solutions in the form of arbitrary homogeneous functions with index of homogeneity 1 and solutions in the form of some generalized polynomials.

Key words: Clairaut equation, reduced equation, multi-homogeneous function, variables separation method.

References

1. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiaux A. *Handbook of First Order Partial Differential Equations.* London, Taylor & Francis, 2002. (Rus. ed. : Zaitsev V. F., Polyanin A. D. Spravochnik po differentsialnym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka. Moscow, Fizmatlit, 2003, 416 p.)
2. Kamke E. *Differentialgleichungen: L-sungsmethoden und L-sungen, II, Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung fir eine gesuchte Funktion.* Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig,1965. (Rus. ed. : Kamke E. Spravochnik po differentsialnym uravneniyam v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka. Moscow, Nauka, 1966, 260 p.)
3. Rakhmelevich I. V. O nekotoryh uravneniyah v chastnyh proizvodnyh, soderzhashih odnorodnye funkcii [On Some Partial Differential Equations Containing Multi-homogeneous Functions]. *Nauchnaya discussiya : voprosy fiziki, matematiki, informatiki : materialy III Mezhdunar. zaoch. nauch.-pract. konf.* Moscow, 2012, pp. 18–23 (in Russian).
4. Rakhmelevich I. V. On Application of The Variable Separation Method to Mathematical Physics Equations Containing Homogeneous Functions of Derivatives. *Vestnik Tomsk Univ. Math. Mech.*, 2013, iss. 3, pp. 37–44 (in Russian).
5. Rakhmelevich I. V. On Equations of Mathematical Physics Containing Multi-homogeneous Functions of Derivatives. *Vestnik Tomsk Univ. Math. Mech.,* 2014, iss.1, pp. 42–50 (in Russian).
6. Aczel J., Dhombres J. *Functional equations in several variables*. Cambridge Univ. Press, Cambridge,1989. (Rus. ed. : Aczel J., Dhombres J. Funkcionalnye uravneniya s neskolkimi peremennymi. Moscow, Fizmatlit, 2003, 432 p.)
7. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, Second Edition.* Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003. (Rus. ed. : Zaitsev V. F., Polyanin A. D. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 p.)
8. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations.* Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2004. (Rus. ed. : Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki: tochnye resheniya. Moscow, Fizmatlit, 2002, 432 p.)