



УДК 536.24

## Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя

А. О. Ватульян, С. А. Нестеров

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а, vatulyan@math.rsu.ru

Нестеров Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Россия, 362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22, 1079@list.ru

Поставлена коэффициентная обратная задача теплопроводности об определении теплофизических характеристик функционально-градиентной части двусоставного слоя. Входной информацией служат данные измерения температуры на верхней грани слоя. После преобразования Лапласа и обезразмеривания прямая задача теплопроводности решается на основе проекционного метода Галеркина. Обращение трансформант осуществляется на основе теории вычетов. Проведено исследование влияния различных законов изменения теплофизических характеристик и толщины функционально-градиентной части на входную информацию. Для решения обратной задачи применяются два подхода. Первый подход основан на алгебраизации прямой задачи при использовании проекционного метода Галеркина. Второй подход является развитием ранее разработанного итерационного подхода, на каждом шаге которого решается интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению различных законов изменения теплофизических характеристик. Даны практические советы по выбору временного интервала по съему дополнительной информации. Проведено сравнение двух подходов к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности.

*Ключевые слова:* коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, слоистые материалы, функционально-градиентные материалы, обратная задача, идентификация, алгебраизация, итерационная схема, интегральное уравнение, проекционный метод Галеркина.

Поступила в редакцию: 23.05.2019 / Принята: 30.06.2019 / Опубликовано: 02.12.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>

### ВВЕДЕНИЕ

Слоистые конструкции широко применяются в металлургии, авиационной и космической технике. Обычно слоистые конструкции изготавливают из однородных материалов. Однако в последнее время для придания конструкции заданных свойств один из слоев стали изготавливать из функционально-градиентных материалов (ФГМ), у которых теплофизические характеристики являются функциями координат [1, 2]. Однако в силу сложности изготовления конструкции, в состав которых



входят ФГМ, необходимо исследовать на соответствие полученных и требуемых законов изменения теплофизических свойств. В случае неоднородных тел теплофизические характеристики можно определить только из решения коэффициентных обратных задач (КОЗ) теплопроводности по дополнительной (входной) информации.

Решение обратной задачи зависит от точности решения прямой задачи. В случае произвольных законов неоднородности высокую точность обеспечивают приближенные аналитические методы, например проекционный метод Галеркина [3, 4]. Идентификацию теплофизических свойств слоистой среды исследовали в работах [5–9]. Однако в этих работах каждый из слоев полагался однородным, а теплофизические характеристики слоев являлись постоянными числами. Задача исследования теплофизических характеристик неоднородных, в т.ч. функционально-градиентных материалов является более сложной. Кроме того, КОЗ теплопроводности являются, как правило, нелинейными задачами. Наиболее распространенный подход к решению нелинейных КОЗ для неоднородных материалов основан на применении хорошо себя зарекомендовавших итерационных алгоритмов [10–23]. Для этого составляют функционал невязки, для минимизации которого используют, как правило, градиентные методы [10–15] или генетические алгоритмы [16]. В работах [17–23] для решения нелинейной КОЗ теплопроводности для однослойных ФГМ был построен итерационный процесс, на каждом шаге которого для нахождения поправок восстанавливаемых коэффициентов решались линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода. Для решения КОЗ теплопроводности применяются и альтернативные неитерационные методы решения: метод квазиобращения [24], метод обращения разностной схемы [25, 26] и др. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Однако в рассмотренных работах функции, характеризующие неоднородность, имели либо кусочно-постоянный, либо непрерывный характер. В то же время не исследованным оставался вопрос об идентификации теплофизических характеристик как функций, имеющих точки разрыва первого рода на границе соприкосновения слоев.

В данной работе приводится постановка коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя с функционально-градиентной частью. Приводится решение прямой теплопроводности на основе проекционного метода Галеркина. Для решения обратной задачи используются два метода — ранее разработанный в [22] итерационный подход, адаптированный для слоистых материалов с функционально-градиентной частью, и метод алгебраизации. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению теплофизических характеристик функционально-градиентной части слоя в различных классах функций. Проведено сравнение двух подходов к решению обратной задачи.

## 1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим задачу о распространении тепла в неоднородном слое толщиной  $H$ . Ось  $x$  направим вертикально вверх. Нижняя грань слоя  $x = 0$  поддерживается нулевой температурой, а на верхней границе  $x = H$  действует постоянный тепловой поток  $q_0$ . Начально-краевая задача теплопроводности при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = c(x) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq H, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T(0, t) = 0, \quad -k(H) \frac{\partial T}{\partial x}(H, t) = q_0, \quad (2)$$



$$T(x, 0) = 0. \tag{3}$$

Здесь  $k(x)$  — коэффициент теплопроводности,  $c(x)$  — удельная объемная теплоемкость,  $T(x, t)$  — температура тела,  $q_0$  — плотность теплового потока.

Прямая задача теплопроводности заключается в определении функции  $T(x, t)$  из (1)–(3) при известных теплофизических характеристиках  $k(x)$ ,  $c(x)$ .

В обратной задаче требуется определить одну из теплофизических характеристик  $k(x)$  или  $c(x)$  из (1)–(3) по дополнительной информации о температуре, измеренной на верхней грани слоя  $x = H$ :

$$T(H, t) = f(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \tag{4}$$

Рассмотрим случай двусоставного слоя, нижняя часть которого толщиной  $H_1$  полагается изготовленной из функционально-градиентного материала с характеристиками  $k_1(x)$ ,  $c_1(x)$ , а верхняя часть слоя толщиной  $H_2 = H - H_1$  полагается из однородного материала с постоянными характеристиками  $k_2 = \text{const}$ ,  $c_2 = \text{const}$ .

Перейдем в случае двусоставного слоя к безразмерному виду задачи (1)–(4), введя следующие параметры и функции:

$$z = \frac{x}{H}, \quad z \in [0, 1], \quad h_1 = \frac{H_1}{H}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k(x)}{k_2},$$

$$\bar{c}(z) = \frac{c(x)}{c_2}, \quad \tau = \frac{k_2 t}{c_1 H^2}, \quad W(z, \tau) = \frac{k_2 T}{q_0 H}.$$

После обезразмеривания задача (1)–(4) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z}) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \tau > 0, \tag{5}$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=1} = 1, \tag{6}$$

$$W(z, 0) = 0, \tag{7}$$

$$W(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [c, d]. \tag{8}$$

Имеем две постановки КОЗ теплопроводности в безразмерном виде:

- 1) из (1)–(3) по информации (4) найти  $\bar{c}_1(z)$  при известном законе  $\bar{k}_1(z)$ ;
- 2) из (1)–(3) по информации (4) найти  $\bar{k}_1(z)$  при известном законе  $\bar{c}_1(z)$ .

## 2. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

В случае произвольных законов неоднородности построим решение обезразмеренной задачи теплопроводности (5)–(7) с помощью проекционного метода Галеркина. Для этого вначале применим к (5), (6) преобразование Лапласа и с учетом начального условия (7) получим:

$$\frac{d}{dz}(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}}{dz}) = p\bar{c}(z)\tilde{W}(z, p), \tag{9}$$

$$\tilde{W}(0, p) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = \frac{1}{p}. \tag{10}$$



Здесь обозначено:  $p$  — параметр преобразования Лапласа,  $\tilde{W}(z, p)$  — трансформанта безразмерной температуры.

Далее представим приближенное решение задачи в трансформантах (9), (10) в виде разложения по системе базисных функций, аналогично сделанному в [20]:

$$\tilde{W}_n(z, p) = \phi_0(z, p) + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(p) \phi_i(z). \quad (11)$$

Здесь  $\phi_0(z, p) = -\frac{z}{p}$  — функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям (10),  $\phi_i(z) = \sin \frac{(2i-1)\pi z}{2}$ ,  $i = 1..n$  — ортогональные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям.

Потребовав ортогональность невязки  $L(\tilde{W}_n) = \frac{d}{dz}(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}_n}{dz}) - p\bar{c}(z)\tilde{W}_n(z, p)$  к базисным функциям  $\phi_i$ , получим систему алгебраических уравнений относительно  $\tilde{a}_i(p)$  в виде

$$\sum_{j=1}^n H_{ji} \tilde{a}_j(p) = D_j, \quad (12)$$

где

$$H_{ji} = - \int_0^1 \bar{k}(z) \frac{d\phi_i}{dz} \frac{d\phi_j}{dz} dz - p \int_0^1 \bar{c}(z) \phi_i \phi_j dz + \bar{k}(1) \phi_j \frac{d\phi_i}{dz} \Big|_{z=1},$$

$$D_j = - \int_0^1 \bar{k}(z) \frac{d\phi_0}{dz} \frac{d\phi_j}{dz} dz - p \int_0^1 \bar{c}(z) \phi_0 \phi_j dz + \bar{k}(1) \phi_j \frac{d\phi_0}{dz} \Big|_{z=1}.$$

Поскольку  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{c}(z)$  — кусочно-непрерывные функции, необходимо интервал интегрирования  $[0, 1]$  разбить на участки, соответствующие отдельным частям слоя.

После решения системы (12) в Maple составляем выражение

$$\tilde{W}_n(1, p) = \phi_0(1, p) + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(p) \phi_i(1),$$

которое после некоторых преобразований можно представить в виде

$$\tilde{W}_n(1, p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (13)$$

где  $A(p)$ ,  $B(p)$  — многочлены степени  $n$ . Таким образом, (13) является дробно-рациональной функцией от  $p$  и не имеет других особых точек, кроме вещественных отрицательных полюсов. Поэтому для нахождения оригиналов температуры применялась теория вычетов: оригиналы находились в виде конечной суммы показательных функций по формуле

$$W_n(1, \tau) = \sum_{j=1}^m \frac{A(p_j)}{B'(p_j)} e^{p_j \tau}, \quad (14)$$

где  $p_j$ ,  $j = 1..m$  — отрицательные полюса функции (14), соответствующие корням знаменателя  $B(p)$ .



Предложенный метод решения прямой задачи тестировался на примере двусоставного слоя, у которого толщина нижнего слоя  $h_1 = 0.7$  с постоянными теплофизическими характеристиками, у которых  $\bar{c}_1(z) = \bar{k}_1 = 0.5$ ,  $\bar{c}_2(z) = \bar{k}_2 = 1$ . Для этого с помощью встроенных процедур Maple было получено конечно-разностное решение. В результате решения задачи (5)–(7) выяснено, что если в методе Галеркина ограничиться двумя или тремя координатными функциями, то наибольшая погрешность возникает на малых временах; в то же время на временах  $\tau \geq 0.1$  погрешность метода Галеркина не превосходит 1%.

В ходе вычислительных экспериментов также выяснено, что при большой толщине функционально-градиентной части, например  $h_1 = 0.7$ , различные законы изменения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости оказывают сильное влияние на изменение дополнительной информации — температуры на верхней грани слоя, что очень важно для решения КОЗ теплопроводности. Однако с уменьшением толщины функционально-градиентной части это влияние заметно уменьшается.

### 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для нахождения теплофизических характеристик функционально-градиентной части слоя в работе предложены два подхода: 1) применение метода алгебраизации; 2) использование ранее разработанного в [22] итерационного процесса.

#### Метод алгебраизации

Вначале рассмотрим применение метода алгебраизации для решения КОЗ теплопроводности на примере нахождения удельной теплоемкости  $\bar{c}_1(z)$  при известном коэффициенте теплопроводности (1-я постановка).

Будем искать приближенное решение обратной задачи в виде разложения:

$$\bar{c}_1(z) = \sum_{j=1}^m c_j \psi_j(z), \quad \psi_j(z) = z^{j-1}, \quad j = 1..m. \quad (15)$$

Подставляем (15) в систему уравнений (12), из решения которой находим  $\tilde{a}_i(p, c_1, c_2, \dots, c_m)$  и составляем выражение для трансформанты температуры на верхней границе слоя, которое можно представить в виде

$$\tilde{W}(1, p, c_1, c_2, \dots, c_m) = \frac{A(p, c_1, c_2, \dots, c_m)}{B(p, c_1, c_2, \dots, c_m)}. \quad (16)$$

Для нахождения набора неизвестных коэффициентов разложения  $\{c_j\}_{j=1..m}$  воспользуемся дополнительной информацией (8). Аппроксимируем дополнительную информацию  $f(\tau)$ , заданную таблично на информативном временном отрезке измерения  $[c, d]$ , в виде линейной комбинации экспоненциальных функций [22]:

$$f(\tau) \approx d_0 + d_1 e^{p_1 \tau} + d_2 e^{p_2 \tau} + \dots + d_m e^{p_m \tau}, \quad (17)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_m, d_1, d_2, \dots, d_m$  — отрицательные числа,  $d_0$  — положительное число.

Найдем показатели экспонент  $p_1, p_2, \dots, p_m$  в разложении (17) по методу [27]. Будем считать, что функция  $f(\tau)$  измерена в моменты времени  $\tau_i = \tau_1 + (i - 1)\Delta\tau$ ,



$i = 1..2m + 1$ . Введем величины  $v_i = f(\tau_i) - f(\tau_{i+1})$ . Тогда показатели экспонент  $p_1, p_2, \dots, p_m$  можно найти по формуле [23]:

$$p_j = \frac{1}{\Delta\tau} \ln u_j, \quad j = 1..m, \quad (18)$$

где  $u_j$  — корни характеристического уравнения

$$\alpha_m z^m + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + 1 = 0. \quad (19)$$

Для нахождения коэффициентов  $\alpha_i$  характеристического полинома (19) необходимо решить систему соответствующих рекуррентных разностных уравнений. Так, например, при  $m = 3$  эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} v_1 + \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_4 &= 0, \\ v_2 + \alpha_1 v_3 + \alpha_2 v_4 + \alpha_3 v_5 &= 0, \\ v_3 + \alpha_1 v_4 + \alpha_2 v_5 + \alpha_3 v_6 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для того чтобы значения параметра преобразования Лапласа были полюсами функции  $\tilde{W}(1, p)$ , они должны обращать в нуль знаменатель  $B(p, c_1, c_2, \dots, c_m)$ . Поэтому для нахождения коэффициентов разложения  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ , входящих в выражение для  $B(p, c_1, c_2, \dots, c_m)$ , полагаем  $B(p, c_1, c_2, \dots, c_m)$  равным нулю, а в качестве значений параметра преобразования Лапласа  $\{p_j\}_{j=1..m}$  используем приближенные значения  $m$  первых показателей экспонент (18). В результате получаем систему  $m$  нелинейных алгебраических уравнений, решением которой является  $m$  наборов чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ . Для каждого набора чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  составляем выражение для температуры на верхней границе слоя  $W_n(1, \tau)$ . Отбор подходящего набора коэффициентов разложения проводится: а) исходя из априорной информации об ограниченности удельной теплоемкости функционально-градиентной части  $0 < c_- < \bar{c}_1(z) < c_+$ ; б) путем минимизации функционала невязки:

$$J = \int_c^d (f(\tau) - W_n(1, \tau))^2 d\tau. \quad (21)$$

По найденному подходящему набору  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  восстанавливается неизвестная функция  $\bar{c}_1(z)$  согласно (15).

Аналогичным образом на основе метода алгебраизации осуществлялось нахождение коэффициента теплопроводности  $\bar{k}_1(z)$  при известной удельной теплоемкости (2-я постановка КОЗ теплопроводности).

### Итерационный подход

КОЗ теплопроводности в постановке (5)–(8) является нелинейной задачей. В случае однослойных функционально-градиентных материалов для решения нелинейной КОЗ теплопроводности был построен итерационный процесс [19–22], на каждом шаге которого для нахождения поправок восстанавливаемых коэффициентов решались линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода. Распространим этот подход на слоистые функционально-градиентные материалы.



Итерационный процесс состоит из двух этапов. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных функций, например линейных либо квадратичных. На втором этапе на каждой итерации определялись поправки реконструируемых функций  $\delta \bar{k}^{(n-1)}$  или  $\delta \bar{c}^{(n-1)}$  путем решения соответствующих интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$а) \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z}(z, \tau) \frac{\partial^2 W^{(n-1)}}{\partial z \partial \tau_1}(z, \tau - \tau_1) dz = f(\tau) - W(1, \tau), \quad \tau \in [c, d]; \quad (22)$$

$$б) \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau}(z, \tau) \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau}(z, \tau - \tau_1) dz = f(\tau) - W(1, \tau), \quad \tau \in [c, d]. \quad (23)$$

После нахождения поправок  $\delta \bar{k}^{(n-1)}$  или  $\delta \bar{c}^{(n-1)}$  строилось новое приближение и осуществлялся итерационный процесс по схеме  $\bar{k}^{(n)}(z) = \bar{k}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{k}^{(n-1)}(z)$ . На каждом шаге итерационного процесса решалась прямая задача (5)–(7) с уточненными характеристиками.

Для получения регуляризованного решения интегральных уравнений (22), (23) в работе применялся метод А. Н. Тихонова [28].

Выход из итерационного процесса осуществлялся при достижении функционалом невязки (21) порогового значения, равного  $10^{-6}$ .

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Далее приведены результаты вычислительных экспериментов по решению КОЗ теплопроводности (5)–(8) об идентификации теплофизических характеристик функционально-градиентной части слоя  $\bar{c}_1(z)$ ,  $\bar{k}_1(z)$  при известных характеристиках однородной части слоя. Для этого был определен наиболее информативный интервал измерения дополнительной информации на верхней грани слоя  $\tau \in [0, 2]$ .

Сначала были проведены вычислительные эксперименты по идентификации теплофизических характеристик на основе метода алгебраизации.

При использовании метода алгебраизации устойчиво можно определить не больше трех показателей экспонент по методу Прони, поэтому метод ограничен возможностью реконструкции в виде линейных и квадратичных функций. Кроме того, устойчивые решения КОЗ получаются если при решении прямой задачи методом Галеркина использовать небольшое количество координатных функций, как правило, не более 3. Однако из-за этого необходимо снимать дополнительную информацию при  $\tau > 0.06$ .

Если необходимо определить характер монотонности функции, достаточно аппроксимировать неизвестную функцию линейной функцией ( $m = 2$ ). В этом случае дополнительная информация для нахождения показателей экспонент по методу Прони измерялась в точках  $\tau_i = 0.1i$ ,  $i = 1..5$ .

В примерах 1–4 рассмотрен процесс определения характера монотонности (возрастания, убывания, немонотонности) некоторых законов изменения теплофизических характеристик функционально-градиентной части слоя толщиной  $h_1 = 0.7$ . Результат реконструкции представлен на рис. 1–4; при этом сплошной линией изображен точный закон, а точками — восстановленный.

**Пример 1.** Точная функция задана в виде:  $\bar{c}_1(z) = 1 + 0.4z^2$ . Показатели экспонент, вычисленные по формуле (18), имеют вид:  $p_1 = -2.01$ ,  $p_2 = -19.15$ . После



подстановки в выражение  $B(p, c_1, c_2) = 0$  в качестве значений  $p$  найденных значений  $p_1, p_2$  получаем систему 2 квадратных уравнений относительно  $c_1, c_2$ :

$$1.369 - 1.240c_1 + 0.101c_1^2 - 0.849c_2 + 0.123c_1c_2 + 0.033c_2^2 = 0, \quad (24)$$

$$1.369 - 11.794c_1 + 9.139c_1^2 - 8.075c_2 + 11.19c_1c_2 + 2.98c_2^2 = 0. \quad (25)$$

Решением системы уравнений (24), (25) являются четыре набора чисел:  $(0.98, 0.34)$ ,  $(4.19, -4.04)$ ,  $(-0.34 \cdot 10^{10}, 0.88 \cdot 10^{10})$ ,  $(0.18 \cdot 10^{10}, -0.21 \cdot 10^{10})$ . Третья и четвертая пары чисел не отвечают условию ограниченности удельной теплоемкости, и мы их в дальнейшем не рассматриваем. Для нахождения подходящей пары чисел из  $(0.98, 0.34)$ ,  $(4.19, -4.04)$  найдем значение функционала невязки (21) на отрезке  $[c, d] = [0.1, 0.5]$ :  $J = 1,32 \cdot 10^{-6}$  (1 пара чисел),  $J = 0.042$  (2 пара чисел). Итак, минимальному значению функционала невязки (21) соответствует набор чисел  $c_1 = 0.98, c_2 = 0.34$ . Результат реконструкции представлен на рис. 1, а.

**Пример 2.** Точная функция задана в виде:  $c_1(z) = 1 - 0.3e^z$ . Показатели экспонент, вычисленные по формуле (18), имеют вид:  $p_1 = -9.94, p_2 = -73.39$ . Далее, выполняя действия, аналогичные примеру 1, находим, что минимальному значению (21) соответствует набор чисел  $c_1 = 0.73, c_2 = -0,54$ . Результат реконструкции представлен на рис. 1, б.

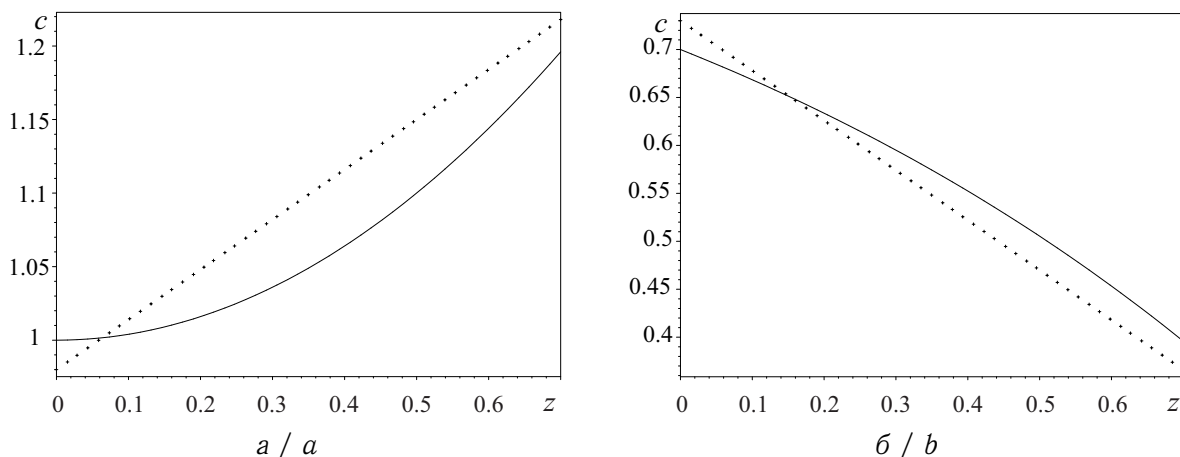


Рис. 1. Определение характера монотонности закона изменения удельной теплоемкости: а) возрастающей функции  $\bar{c}_1(z) = 1 + 0.4z^2$ ; б) убывающей функции  $c_1(z) = 1 - 0.3e^z$  при  $m = 2$

Fig. 1. Determining the nature of the monotony of the law of specific heat capacity change: а) increasing function  $\bar{c}_1(z) = 1 + 0.4z^2$ ; б) decreasing function  $c_1(z) = 1 - 0.3e^z$  at  $m = 2$

**Пример 3.** Точная функция задана в виде  $\bar{k}_1(z) = \cos(z)$ . Показатели экспонент, вычисленные по формуле (18), имеют вид:  $p_1 = -3.2, p_2 = -26,6$ . Минимальному значению (21) соответствует набор чисел  $(1.03, -0.42)$ . Результат реконструкции представлен на рис. 2, а.

**Пример 4.** Точная функция задана в виде  $\bar{k}_1(z) = 1 + \sin(1.43\pi z)$ . Результат реконструкции представлен на рис. 2, б.

Итак, результаты восстановления теплофизических характеристик путем аппроксимации линейной функцией позволяют судить о характере монотонности функции (возрастающей, убывающей или немонотонной).

Более точного восстановления монотонных функций можно добиться путем увеличения степени аппроксимирующего многочлена. В случае восстановления в классе



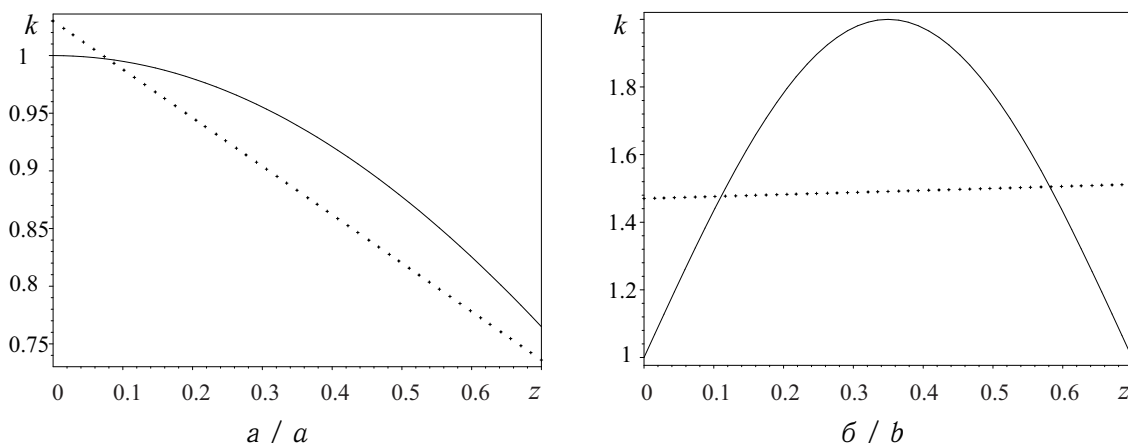


Рис. 2. Результат реконструкции коэффициента теплопроводности: а) убывающей функции  $\bar{k}_1(z) = \cos(z)$ ; б) немонотонной функции  $\bar{k}_1(z) = 1 + \sin(1.43\pi z)$  при  $m = 2$   
 Fig. 2. The reconstruction result of the thermal conductivity coefficient: а) decreasing function  $\bar{k}_1(z) = \cos(z)$ ; б) non-monotonic function  $\bar{k}_1(z) = 1 + \sin(1.43\pi z)$  at  $m = 2$

квадратичных функций ( $m = 3$ ) дополнительная информация измерялась в точках  $\tau_i = 0.1i, i = 1..7$ .

В примерах 5, 6 рассмотрен процесс восстановления некоторых законов изменения теплофизических характеристик функционально-градиентной части слоя толщиной  $h_1 = 0.7$  в классе квадратичных функций.

**Пример 5.** Точная функция задана в виде  $\bar{\gamma}_1(z) = 2.1z^2 + z + 1$ . Показатели экспонент, вычисленные по формуле (18), имеют вид:  $p_1 = -0.73, p_2 = -7.39, p_3 = -20.01$ . После подстановки в выражение  $B(p, c_1, c_2, c_3) = 0$  в качестве значений  $p$  найденные значения  $p_1, p_2, p_3$  получаем систему 3 кубических уравнений относительно  $c_1, c_2, c_3$ , решением которой является 9 наборов из трех чисел. Минимальному значению функционала невязки (21) соответствует набор чисел  $c_1 = 2.08, c_2 = 1.03, c_3 = 0.99$ . Максимальная погрешность реконструкции не превысила 2%. Результат идентификации представлен на рис. 3, а.

**Пример 6.** Точная функция задана в виде  $\bar{k}_1(z) = 0.8 + e^{-z}$ . Максимальная погрешность реконструкции не превысила 2%. Результат идентификации представлен на рис. 3, б.

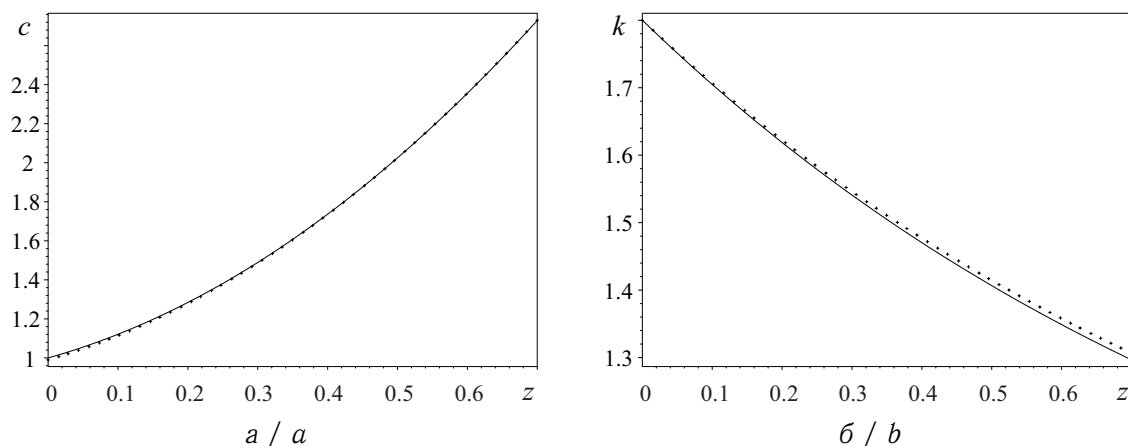


Рис. 3. Результат реконструкции теплофизических характеристик: а) возрастающей функции  $\bar{\gamma}_1(z) = 2.1z^2 + z + 1$ ; б) убывающей функции  $\bar{k}_1(z) = 0.8 + e^{-z}$  при  $m = 3$   
 Fig. 3. The reconstruction result of thermal characteristics: а) increasing function  $\bar{\gamma}_1(z) = 2.1z^2 + z + 1$ ; б) decreasing function  $\bar{k}_1(z) = 0.8 + e^{-z}$  at  $m = 3$



Исследовано влияние толщины функционально-градиентной части на результаты реконструкции на примере функций  $\bar{c}_1(z) = 2.1 + z + z^2$  и  $\bar{k}_1(z) = 0.8 + e^{-z}$  при  $m = 3$ . В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что погрешность реконструкции возрастает с уменьшением толщины и при  $h_1 < 0.06$  реконструкция становится невозможной.

На примере восстановления функции  $\bar{k}_1(z) = 0.8 + e^{-z}$  при  $h_1 = 0.4$  обсуждено влияние на точность реконструкции зашумления входной информации, которое моделировалось с помощью соотношений

$$f_\beta(\tau) = f(\tau)(1 + \beta\gamma), \tag{26}$$

где  $\beta$  — амплитуда зашумления,  $\gamma$  — случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке  $[-1, 1]$ . При отсутствии зашумления погрешность не превышала 2%. При наличии зашумления погрешность реконструкции увеличивалась с ростом  $\beta$  и при 1%-ной амплитуде шума, моделирующего измерительную погрешность, достигала 17%.

При использовании метода алгебраизации с высокой точностью возможна идентификация только монотонных функций. Для немонотонных функций полученное методом алгебраизации решение может служить начальным приближением в итерационном процессе, на каждом шаге которого необходимо решать одно из интегральных уравнений согласно формулам (22), (23).

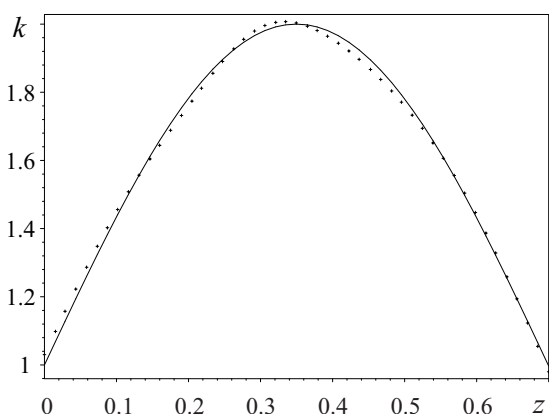


Рис. 4. Результат реконструкции немонотонной функции  $\bar{k}_1(z) = 1 + \sin(1.43\pi z)$   
 Fig. 4. The reconstruction result of the non-monotonic function  $\bar{k}_1(z) = 1 + \sin(1.43\pi z)$

На рис. 4 показан пример восстановления немонотонной функции  $\bar{k}_1(z) = 1 + \sin(1.43\pi z)$ , начальное приближение для которой было найдено методом алгебраизации в виде линейной функции (см. пример 4). Вычислительные эксперименты проводились при отсутствии зашумления входной информации. Потребовалось не более 10 итераций. Максимальная погрешность реконструкции не превысила 6%.

Вычислительные эксперименты показали, что этот подход хорошо себя зарекомендовал в случае восстановления как монотонных, так и немонотонных функций, что является преимуществом по сравнению с первым подходом. Кроме того, он оказался более устойчивым к зашумлению входной информации. При отсутствии зашумления входной информации относительная погрешность реконструкции монотонных функций не превосходила 3%, а немонотонных 7%. При наличии зашумления погрешность реконструкции увеличивалась с ростом  $\beta$ , но даже при 1%-ном шуме, моделирующем измерительную погрешность, не превышала 9%, что намного меньше первого подхода. Однако метод алгебраизации позволяет производить идентификацию теплофизических характеристик с меньшими во много раз затратами машинного времени по сравнению с итерационным подходом.



## ВЫВОДЫ

Поставлена коэффициентная обратная задача теплопроводности для двусоставного слоя. Прямая задача теплопроводности после преобразования Лапласа решается на основе проекционного метода Галеркина. Для решения обратной задачи предложены два подхода — метод алгебраизации, итерационный подход, на каждом шаге которого решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению различных законов изменения теплофизических характеристик. Проведено сравнение двух предложенных подходов. Выяснено, что в случае монотонных функций метод алгебраизации позволяет производить идентификацию теплофизических характеристик с меньшими во много раз затратами машинного времени по сравнению с итерационным подходом. Для немонотонных функций полученное методом алгебраизации решение может служить начальным приближением в итерационном процессе.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Южного математического института — филиала Владикавказского научного центра РАН, г. Владикавказ.

## Библиографический список

1. *Wetherhold R. C., Seelman S., Wang S.* The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // *Composites Science and Technology*, 1996. Vol. 56, iss. 9. P. 1099–1104. DOI: [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
2. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* 2007. Vol. 60, iss. 5. P. 195–216. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
3. *Агишева Д. К., Шаповалов В. М.* Инженерный анализ нестационарной теплопроводности многослойной пластины // *Вестн. ТГТУ*. 2002. Т. 8, № 4. P. 612–617.
4. *Кудинов В. А., Кузнецова А. Э., Еремин А. В., Котова Е. В.* Аналитические решения задач термоупругости для многослойных конструкций с переменными свойствами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2013. Т. 1 (30) P. 215–221. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1128>
5. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1988. 288 с.
6. *Lesnic D., Elliot L., Ingham D. B., Clennell B., Knioe R. J.* The identification of the piecewise homogeneous thermal conductivity of conductors subjected to a heat flow test // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1999. Vol. 42, iss. 1. P. 143–152. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00132-X](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00132-X)
7. *Пененко А. В.* Дискретно-аналитические схемы для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистых сред градиентными методами // *Сиб. журн. вычисл. математики*. 2012. Т. 15, № 4. С. 393–408.
8. *Lukasiewicz S. A., Babaei R., Qian R. E.* Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // *J. Thermal Stresses*. 2003. Vol. 26, № 1. P. 13–23. DOI: <https://doi.org/10.1080/713855763>
9. *Победря Б. Е., Кравчук А. С., Аризне П. А.* Идентификация коэффициентов нестационарного уравнения теплопроводности // *Выч. мех. сплош. сред*. 2008. Т. 1, № 4. С. 78–87. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2008.1.4.41>
10. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во МГУ, 1994. 206 с.
11. *Kravvaris C., Seinfeld J. H.* Identification of spatially varying parameters in distributed parameters systems by discrete regularization // *J. Math. Anal. Appl.* 1986. Vol. 119. P. 128–152. DOI: <https://doi.org/10.1137/0323017>



12. *Chen W. L., Chou H. M., Yang Y. C.* An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder // *Composites Part B: Engineering*. 2013. Vol. 50. P. 112–119. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.010>
13. *Kabanikhin S. I., Hasanov A., Penenko A. V.* A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // *Numerical Analysis and Applications*. 2008. № 1. P. 34–45. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>
14. *Hao D. N.* Methods for inverse heat conduction problems. Frankfurt/Main : Peter Lang Pub. Inc. 1998. 249 p.
15. *Isakov V., Kindermann S.* Identification of the diffusion coefficient in a one dimensional parabolic equation // *Inverse Problems*. 2000. Vol. 16, № 3. P. 665–680. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/16/3/309>
16. *Raudensky M., Woodbary K. A., Kral J.* Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*. 1995. Vol. 28. P. 293–306. DOI: <https://doi.org/10.1080/10407799508928835>
17. *Xu M. H., Cheng J. C., Chang S. Y.* Reconstruction theory of the thermal conductivity depth profiles by the modulated photo reflectance technique // *J. Appl. Phys.* 2004. Vol. 84, № 2. P. 675–682. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.368122>
18. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87, № 1. С. 217–224.
19. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51, iss. 3–4. P. 767–773. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
20. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder // *Appl. Math. Model.* 2016. Vol. 40, iss. 4. P. 2711–2719. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.078>
21. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016. Vol. 102. P. 213–218. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027>
22. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Об одном подходе к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2018. Т. 15, № 1. С. 50–60. DOI: <https://doi.org/10.31429/vestnik-15-1-50-60>
23. *Ватульян А. О.* Коэффициентные обратные задачи механики. М. : Физматлит, 2019. 272 с.
24. *Danilaev P. G.* Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their applications. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo : VSP, 2001. 115 p.
25. *Lam T. T., Yeung W. K.* Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems // *J. Thermophys. Heat Transf.* 1995. Vol. 9, № 2. P. 335–344. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.665>
26. *Yeung W. K., Lam T. T.* Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1996. Vol. 39, iss. 17. P. 3685–3693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
27. *Марпл С. Л. (мл.).* Цифровой спектральный анализ и его приложения : пер с англ. М. : Мир, 1990. 584 с.
28. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1990. 230 с.



**Образец для цитирования:**

Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 409–423. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>

## On the Peculiarities of Solving the Coefficient Inverse Problem of Heat Conduction for a Two-Part Layer

A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov

Alexander O. Vatulyan, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8-a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia, [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru)

Sergei A. Nesterov, Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027, Russia, [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

The coefficient inverse problem of thermal conductivity about the determination of the thermophysical characteristics of the functional-gradient part of a two-component layer is posed. The input information is the temperature measurement data on the top face of the layer. After the Laplace transform and dimensioning, the direct problem of heat conduction is solved on the basis of Galerkin projection method. Conversion of transformant on the basis of the theory of residues is carried out. The influence of various laws of changes in the thermophysical characteristics and thickness of the functional-gradient part on the input information was studied. To solve the inverse problem, two approaches are used. The first approach is based on the algebraization of the direct problem using Galerkin projection method. The second approach is a development of the previously developed iterative approach, at each step of which the Fredholm integral equation of the first kind is solved. Computational experiments were carried out to restore various laws of change in thermophysical characteristics. Practical advice on the choice of a time interval for additional information is given. A comparison of two approaches to solving the coefficient inverse problem of heat conduction is made.

**Keywords:** thermal conductivity coefficient, specific heat capacity, layered materials, functional-gradient materials, inverse problem, identification, algebraization, iterative scheme, integral equation, Galerkin projection method.

Received: 23.05.2019 / Accepted: 30.06.2019 / Published: 02.12.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by the Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz.

### References

1. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang S. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation. *Compos. Science Techn.*, 1996, vol. 56, iss. 9, pp. 1099–1104. DOI: [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
2. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, iss. 5, pp. 195–216. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2777164>



3. Agisheva D. K., Shapovalov V. M. Engineering Analysis of Non-Steady-State Heat Conduction of Multi-Layer Plate. *Vestnik TGTU*, 2002. vol. 8, no. 4, pp. 612–617 (in Russian).
4. Kudinov V. A., Kuznetsova A. E., Eremin A. V., Kotova E. V. Analytical solutions of thermoelasticity problems for multilayer structures with variable properties. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, iss. 1 (30), pp. 215–221 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1128>
5. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme Methods of Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1988. 288 p. (in Russian).
6. Lesnic D., Elliot L., Ingham D. B., Clennell B., Knioe R. J. The identification of the piecewise homogeneous thermal conductivity of conductors subjected to a heat flow test. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1999, vol. 42, iss. 1, pp. 143–152. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00132-X](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00132-X)
7. Penenko A. V. Discrete-analytic schemes for solving an inverse coefficient heat conduction problem in a layered medium with gradient methods. *Numerical Analysis and Applications*, 2012, vol. 5, iss. 4, pp. 326–341. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423912040052>
8. Lukasiewicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects. *J. Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23. DOI: <https://doi.org/10.1080/713855763>
9. Pobedrya B. E., Kravchuk A. S., Arizpe P. A. Identification of the coefficients in a non-stationary heat conductivity equation. *Computational Continuum Mechanics*, 2008, vol. 1, no. 4, pp. 78–87 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2008.1.4.41>
10. Denisov A. M. *Vvedeniye v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1994. 206 p. (in Russian).
11. Kravaris C., Seinfeld J. H. Identification of spatially varying parameters in distributed parameters systems by discrete regularization. *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, vol. 119, pp. 128–152. DOI: <https://doi.org/10.1137/0323017>
12. Chen W. L., Chou H. M., Yang Y. C. An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 50, pp. 112–119. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.010>
13. Kabanikhin S. I., Hasanov A., Penenko A. V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numerical Analysis and Applications*, 2008, no. 1, pp. 34–45. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>
14. Hao D. N. *Methods for inverse heat conduction problems*. Frankfurt/Main, Peter Lang Publ. Inc, 1998. 249 p.
15. Isakov V., Kindermann S. Identification of the diffusion coefficient in a one dimensional parabolic equation. *Inverse Problems*, 2000, vol. 16, no. 3, pp. 665–680. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/16/3/309>
16. Raudensky M., Woodbary K. A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 1995, vol. 28, pp. 293–306. DOI: <https://doi.org/10.1080/10407799508928835>
17. Xu M. H., Cheng J. C., Chang S. Y. Reconstruction theory of the thermal conductivity depth profiles by the modulated photo reflectance technique. *J. Appl. Phys.*, 2004, vol. 84, no. 2, pp. 675–682. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.368122>
18. Vatul'yan A. O., Nesterov S. A. A Method of Identifying Thermoelastic Characteristics for Inhomogeneous Bodies. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, iss. 1, pp. 225–232. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1004-6>



19. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, iss. 3–4, pp. 767–773. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
20. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder. *Appl. Math. Modell.*, 2016, vol. 40, iss. 4, pp. 2711–2719. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.078>
21. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 102, pp. 213–218. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027>
22. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On an Approach to the Solution of the Coefficient Inverse Heat Conduction Problem. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov CHES* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2018, vol. 15, no. 1, pp. 50–60 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.31429/vestnik-15-1-50-60>
23. Vatulyan A. O. *Koeffitsiyentnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian).
24. Danilaev P. G. *Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their applications*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2001. 115 p.
25. Lam T. T., Yeung W. K. Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems. *J. Thermophys. Heat Transf.*, 1995, vol. 9, no. 2, pp. 335–344. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.665>
26. Yeung W. K., Lam T. T. Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1996, vol. 39, iss. 17, pp. 3685–3693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
27. Marple S. L. *Tsifrovoi spektral'nyi analiz i ego prilozheniya* [Digital spectral analysis and its applications]. Moscow, Mir, 1990. 584 p.(in Russian).
28. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V V., Yagola A. G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1990. 230 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the Peculiarities of Solving the Coefficient Inverse Problem of Heat Conduction for a Two-Part Layer. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 409–423 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>

---