

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ПО ВРЕМЕННОЙ КООРДИНАТЕ СИЛОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Г. Н. Белосточный¹, О. А. Мыльцина²

¹Белосточный Григорий Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belostochny@mail.ru

²Мыльцина Ольга Анатольевна, ассистент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, omyltcina@yandex.ru

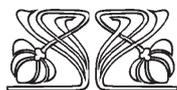
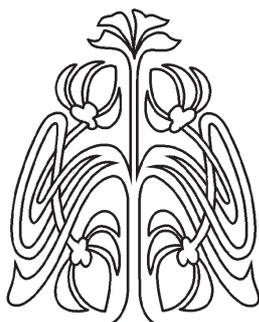
На основе несвязной термоупругости исследуется динамическое поведение геометрически нерегулярных пластинок под действием быстропеременных по временной координате температурных и силовых воздействий на основные поверхности. Предлагается подход, позволяющий получить аналитическое решение термоупругой динамической задачи для пластинки при неоднородных граничных условиях на всех четырех краях. Проводится количественный анализ влияния геометрических и термомеханических параметров упругой системы на изменение величины прогиба и характер колебаний точек срединной поверхности.

Ключевые слова: пластинка, геометрическая нерегулярность, демпфирование, динамика, термоупругость, обобщенные функции, конвективный теплообмен, сосредоточенная сила, температура.

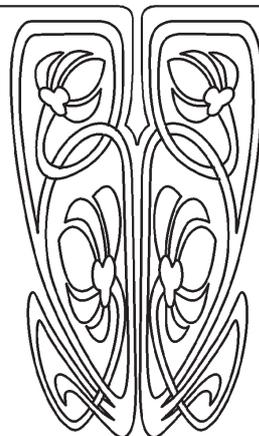
DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451

Рассмотрим геометрически нерегулярную [1] изотропную пластину в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с окружающей средой. В некоторый момент времени t_1 в точке с координатами (x_1, y_1) прикладывается сосредоточенная сила \bar{q} , действие которой продолжается до момента t_2 . На этом же временном интервале $|t_2 - t_1|$ происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды на постоянную величину T_1^+ . Предполагается, что пластинка испытывает линейное демпфирование. Ввиду отсутствия внутренних источников тепла температурное поле принимается линейным по толщине h и высоте h_i подкрепляющих ребер, расположенных симметрично относительно срединной плоскости пластинки $\Theta(x, y, z) = \theta_0(x, y) + \frac{z}{h}\theta_1(x, y)$. Решение несвязной термодинамической задачи сводится к интегрированию сингулярного дифференциального уравнения [1, 2]:

$$\frac{\gamma h}{gD} \ddot{w} + \frac{\mu}{D} \dot{w} + \nabla^2 \nabla^2 w + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - \tilde{x}_i) =$$



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\beta}_i}{D} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=\tilde{x}_i} \frac{d\delta}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma h_i a_i}{gD} \ddot{w} \delta(x - \tilde{x}_i) = \\
 &= \frac{q_0 a_1 b_1}{D} \delta(x - x_1, y - y_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) - \frac{1 + \nu}{h} \alpha \nabla^2 \theta_1, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $\delta(x - \tilde{x}_i)$ — дельта-функции Дирака, $H(t - t_l)$ ($l = 1, 2$) — функции Хевисайда неопределенные и ограниченные в точках t_l временной оси, μ — коэффициент демпфирования, $\frac{\beta_i}{D} = \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 a_i$, $\frac{\tilde{\beta}_i}{D} = 2(1 - \nu) \frac{\beta_i}{D}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\Phi_{3i} = 1 + 3\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$, $\theta_1(x, y)$ — температурная функция, которая является интегралом дифференциальных уравнений [3–8]

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\beta} \theta_{0,t} - \nabla^2 \theta_0 + \frac{\kappa^+}{\lambda h} \theta_0 + \frac{\kappa^-}{2\lambda h} \theta_1 + \sum_i \left[-\frac{h_i}{h} (\theta_{0,1} \varphi_i)_{,1} - \frac{h_i}{h} \theta_{0,22} \varphi_i + \frac{1}{2} \frac{h_i}{h} \frac{\kappa^-}{\lambda h} \varphi_i \theta_1 \right] + \\
 &+ \sum_i \left[\frac{1}{4} \frac{h_i}{h} \frac{\kappa_i^+}{\lambda} \theta_0 + \frac{1}{16} \frac{\kappa_i^-}{\lambda} H_{2i} \theta_1 - \frac{1}{4} \frac{h_i}{h} \left(T^+ \frac{\varkappa_i^+}{\lambda} + T^- \frac{\varkappa_i^-}{\lambda} \right) \right] \tilde{\delta}_i = \left(T^+ \frac{\varkappa^+}{\lambda h} + T^- \frac{\varkappa^-}{\lambda h} \right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\beta} \theta_{1,t} - \nabla^2 \theta_1 + \left(\frac{12}{h^2} + 3 \frac{\kappa^+}{\lambda h} \right) \theta_1 - 6 \frac{\kappa^-}{\lambda h} \theta_0 + \sum_i \left[-\left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i}^* (\theta_{1,1} \varphi_i)_{,1} - \right. \\
 &\left. - \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i}^* \varphi_i \theta_{1,22} + \left(\frac{12}{h^2} + 3 \frac{\kappa^+}{\lambda h} \left(\frac{h_i}{h}\right)^2 \right) \varphi_i \theta_1 + 6 \frac{h_i}{h} \frac{\kappa^-}{\lambda h} \varphi_i \theta_0 + 6 \frac{h_i}{h} \left(T^- \frac{\varkappa^-}{\lambda h} - T^+ \frac{\varkappa^+}{\lambda h} \right) \varphi_i \right] + \\
 &+ \sum_i \left\langle \frac{3}{4} H_{2i} \frac{\kappa_i^-}{\lambda} \theta_0 + \frac{1}{4} H_{3i} \frac{\kappa_i^+}{\lambda} \theta_1 - \frac{3}{4} H_{2i} \left(T^+ \frac{\varkappa_i^+}{\lambda} - T^- \frac{\varkappa_i^-}{\lambda} \right) \right\rangle \tilde{\delta}_i = \frac{6}{\lambda h} (T^+ \varkappa^+ - T^- \varkappa^-). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Здесь обозначено: β — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, h_i/h — относительная высота ребер и $h_i/h \leq 5$ [2], \varkappa^\pm — коэффициенты теплоотдачи с основных плоскостей пластинки и торцов ребер, T^\pm — температуры окружающей среды со стороны основных поверхностей, $\varphi_i(x, \tilde{x}_i, a_i) = H(x - (\tilde{x}_i - \frac{a_i}{2})) - H(x - (\tilde{x}_i + \frac{a_i}{2}))$, $\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\varphi_i}{a_i} \rightarrow \delta(x - \tilde{x}_i)$, a_i — ширина i -го ребра, $H_{li} = (1 + \frac{h_i}{h})^l - 1$ ($l = 1, 2$), $\tilde{\delta}_i = -\delta(x - (\tilde{x}_i - \frac{a_i}{2})) + \delta(x - (\tilde{x}_i + \frac{a_i}{2}))$, $\Phi_{2i}^* = 1 + 2\frac{h}{h_i}$, $\Phi_{3i}^* = 12 + 6\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$, $\kappa^\pm = \varkappa^+ \pm \varkappa^-$, $\kappa_i^\pm = \varkappa_i^+ \pm \varkappa_i^-$, n — число ребер.

Совокупность уравнений (1)–(3) образует основную систему несвязной термоупругости геометрически нерегулярной пластинки в рамках модели типа Лява и теории теплопроводности Фурье. Следует отметить, что: 1) если коэффициенты теплопроводности одинаковы, то система сингулярных дифференциальных уравнений (2), (3) распадается на два самостоятельных уравнения относительно температурных функций $\theta_p(x, y)$ ($p = 0, 1$); 2) во многих технических приложениях относительная ширина подкрепляющих элементов мала: $a_i/a \leq 0.01$. По этой причине в уравнениях системы (2), (3) на основании гипотезы «сжатых ребер», отсутствия внутренних источников тепла и симметричного расположения ребер относительно срединной плоскости пластинки слагаемые, содержащие δ -функции, можно опустить [1, 3]. Тогда, при определении температурной функции $\theta_1(x, y, t)$ для пластинки, со стороны внешней плоскости которой происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды на малом временном интервале $|t_2 - t_1| \ll 1$, следует исходить из уравнения

$$\frac{1}{\beta} \theta_{1,t} - \nabla^2 \theta_1 + \left(\frac{12}{h^2} + 6 \frac{\varkappa}{\lambda h} \right) \theta_1 = 6 \frac{\varkappa}{\lambda h} \langle T_0^+ + T_1^+ [H(t - t_1) - H(t - t_2)] - T^- \rangle. \quad (4)$$

2. Решение несвязной термоупругости геометрически нерегулярной пластинки при однородных краевых условиях (шарнирное опирание)

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad \theta_1 = 0, \\
 y = 0, \quad y = b: \quad w = 0, \quad M_{22} = 0, \quad \theta_1 = 0; \quad (5)
 \end{aligned}$$



будем разыскивать в виде двойных тригонометрических рядов с переменными по временной координате коэффициентами

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad \vartheta_1(x, y, t) = \sum_{km} \vartheta_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

где $\vartheta_{km}(t)$ на основании стандартных процедур метода двойных тригонометрических рядов являются интегралами дифференциальных уравнений [2, 9]:

$$\dot{\vartheta}_{km} + \frac{\beta}{a^2} S_{km} \vartheta_{km} = 6 \frac{\alpha\beta}{\lambda h} \Delta T_{km} + 6 \frac{\alpha\beta}{\lambda h} T_1^+ e_{km} [H(t - t_1) - H(t - t_2)]$$

и запишутся в виде

$$\vartheta_{km} = E_{km}^1 e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2} t} + E_{km}^2 + E_{km}^3 \left(\left(1 - e^{-\frac{\beta S_{km}(t-t_1)}{a^2}} \right) H(t - t_1) - \left(1 - e^{-\frac{\beta S_{km}(t-t_2)}{a^2}} \right) H(t - t_2) \right), \quad (6)$$

а коэффициенты $w_{km}(t)$ на основании процедуры Галеркина являются интегралами дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \frac{\mu g}{\gamma h} \frac{1}{H_i} \frac{dw_{km}}{dt} + \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i} w_{km} = 4 \frac{q_0 g}{\gamma h} \frac{1}{H_i} \frac{a_1 b_1}{ab} \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi y_1}{b} \langle H(t - t_1) - H(t - t_2) \rangle + \frac{1 + \nu}{h} \frac{gD}{\gamma h a^2} \frac{1}{H_i} L_{km} \alpha \vartheta_{km}(t). \quad (7)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} L_{km} &= (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2, & H_i &= 1 + 2 \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a}, \\ \tilde{H}_i &= L_{km}^2 + 2 \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^4 \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a} + 4 (k\pi)^2 \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 (1 - \nu) \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \cos^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a}, \\ E_{km}^1 &= \left(1 - 6 \frac{\alpha a}{\lambda} \frac{1}{h S_{km}} \right) \Delta T_{km}, & E_{km}^2 &= 6 \frac{\alpha a}{\lambda} \frac{1}{h} \frac{\Delta T_{km}}{S_{km}}, & E_{km}^3 &= 6 \frac{\alpha a}{\lambda} \frac{1}{h} \frac{e_{km}}{S_{km}} T_{km}^+, \\ e_{km} &= \frac{4(1 - \cos k\pi)(1 - \cos m\pi)}{km\pi^2}, & s_{km} &= (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 + 6 \frac{\alpha a}{\lambda} \frac{1}{h} + 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2. \end{aligned}$$

При выполнении неравенства

$$4 \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i} > \left(\frac{\mu g}{\gamma h H_i} \right)^2$$

фундаментальная система функций для соответствующего (7) однородного дифференциального уравнения запишется

$$\varphi_{km}^1(t) = e^{-\tilde{\mu}t} \sin(K_{km}t), \quad \varphi_{km}^2(t) = e^{-\tilde{\mu}t} \cos(K_{km}t),$$

здесь

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu g}{2\gamma h H_i}, \quad k_{km} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h a^4} \sqrt{4 \frac{\tilde{H}_i}{H_i} - 12(1 - \nu^2) \frac{\mu^2 g}{\gamma E} \left(\frac{a}{h} \right) \frac{1}{H_i^2}}}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7) запишется в виде

$$\begin{aligned} w_{km}(t) &= (C_{km}^1 \sin(K_{km}t) + C_{km}^2 \cos(K_{km}t)) e^{-\tilde{\mu}t} + A_{km}^3 + B_{km}^3 e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2} t} + \\ &+ \sum_{l=1}^2 (D_{km1}^l \sin(K_{km}t) + D_{km2}^l \cos(K_{km}t) + \tilde{w}_{km}^l) H(t - t_l) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 (F_{km1}^l \sin(K_{km}t) + F_{km2}^l \cos(K_{km}t) + \tilde{w}_{km}^l) H(t - t_l). \end{aligned}$$



Постоянные $D_{km1}^l, D_{km2}^l, F_{km1}^l, F_{km2}^l$ являются решениями алгебраических систем [9, 10]

$$\begin{aligned} & \sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}D_{km1}^l + \cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}D_{km2}^l = (-1)^l\tilde{w}_{km}^l, \\ & \left(\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) D_{km1}^l + \\ & + \left(-\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) D_{km2}^l = 0, \\ & \sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}F_{km1}^l + \cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}F_{km2}^l = -\tilde{w}'_{km}{}^l \Big|_{t=t_l}, \\ & \left(\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) F_{km1}^l + \\ & + \left(-\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) F_{km2}^l = \frac{1}{K_{km}} \left(-\tilde{w}'_{km}{}^l \right)' \Big|_{t=t_l}, \\ & \tilde{w}_{km}^l = (-1)^{l+1}4\frac{q_0a^4}{D}\frac{a_1b_1}{ab}\frac{1}{\tilde{H}_i}\sin\frac{k\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi y_1}{b}, \quad \tilde{w}'_{km}{}^l = A_{km}^l + B_{km}^l e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2}(t-t_l)}, \\ & A_{km}^l = \frac{(-1)^{l+1}(1+\nu)L_{km}\alpha E_{km}^3 a^2}{h\tilde{H}_i}, \quad B_{km}^l = \frac{(-1)^l \frac{1+\nu}{h} \frac{gD}{\gamma ha^2} \frac{L_{km}}{H_i} \alpha E_{km}^3}{\left(\frac{\beta S_{km}}{a^2}\right)^2 - \frac{\mu g}{\gamma h H_i} \frac{\beta S_{km}}{a^2} + \frac{gD}{\gamma ha^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i}}, \\ & A_{km}^3 = \frac{1+\nu}{h} \frac{a^2 L_{km} \alpha E_{km}^2}{\tilde{H}_i}, \quad B_{km}^3 = \frac{\frac{1+\nu}{h} \frac{gD}{\gamma ha^2} \frac{L_{km}}{H_i} \alpha E_{km}^1}{\left(\frac{\beta S_{km}}{a^2}\right)^2 - \frac{\mu g}{\gamma h H_i} \frac{\beta S_{km}}{a^2} + \frac{gD}{\gamma ha^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i}}. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования C_{km}^l ($l = 1, 2$) определяются из начальных условий. При $0 \leq t < t_1$ пластина находилась в покое $w = 0, w_{,t} = 0$.

3. Задача значительно усложняется в случае неоднородных краевых условий. Предположим, что на краях гладкой пластинки поддерживается постоянный по толщине перепад температуры $\tilde{\theta}_1$, тогда краевые условия (5) переписутся через функцию прогиба в виде

$$\text{при } x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad w_{,11} = -\frac{1+\nu}{h}\alpha\tilde{\theta}_1, \quad \theta_1 = \tilde{\theta}_1, \quad (8)$$

$$\text{при } y = 0, \quad y = a: \quad w = 0, \quad w_{,22} = -\frac{1+\nu}{h}\alpha\tilde{\theta}_1, \quad \theta_1 = \tilde{\theta}_1. \quad (9)$$

Температурная функция θ_1 в этом случае запишется

$$\theta_1(x, y, t) = \sum_{km} \vartheta_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} + \tilde{\theta}_1,$$

где $\vartheta_{km}(t)$ определяется формулой (6), в которой предварительно E_{km}^2 следует взять в виде

$$E_{km}^2 = 6\frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{\Delta T_{km}}{S_{km}} - \left(6\frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} + 12\left(\frac{a}{h}\right)^2 \right) \frac{e_{km}}{S_{km}} \tilde{\theta}_1.$$

Определить функцию $f(x, y)$, тождественно удовлетворяющую всем условиям (8), (9), и искать решение термодинамической задачи в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} + f(x, y)$$

не представляется возможным. По этой причине решение запишем в виде, тождественно удовлетворяющем только условиям (8)

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b} + \sum_k f_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a} - \frac{1+\nu}{h}\alpha\tilde{\theta}_1 \frac{1}{2}(x^2 - ax), \quad (10)$$

где $f_k(y) = \sum_{l=0}^3 A_l^k y^l$.



Подстановка (10) в краевые условия (9) приводит к равенствам:
при $y = 0$

$$\sum_k A_0^k \sin \frac{k\pi x}{a} = \frac{1+\nu}{h} \alpha \tilde{\theta}_1 \frac{1}{2} (x^2 - ax), \quad \sum_k A_2^k \sin \frac{k\pi x}{a} = -\frac{1+\nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1; \quad (11)$$

при $y = b$

$$\sum_k \sum_{l=0}^3 A_l^k b^l \sin \frac{k\pi x}{a} = \frac{1+\nu}{h} \alpha \tilde{\theta}_1 \frac{1}{2} (x^2 - ax), \quad \sum_k (A_2^k + 3A_3^k b) \sin \frac{k\pi x}{a} = -\frac{1+\nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1. \quad (12)$$

Раскладывая правые части равенств (11), (12) в тригонометрические ряды, получим неоднородную алгебраическую систему для коэффициентов A_l^k

$$A_0^k = b_k^2, \quad A_2^k = -\frac{b_k^0}{2}, \quad 2A_2^k + 6A_3^k = -b_k^0, \quad \sum_{l=0}^3 A_l^k = b_k^2,$$

где

$$b_k^2 = -\frac{b_k^0}{(k\pi)^2}, \quad b_k^0 = \frac{2(1+\nu)\alpha\tilde{\theta}_1}{h} \frac{(1 - \cos(k\pi))}{k\pi}.$$

Структуру функции $w(x, y, t)$ по пространственным переменным можно считать известной, что дает возможность при определении дифференциальных уравнений для коэффициентов $w_{km}(t)$ в аппроксимации (10) исходить при отсутствии ребер из метода двойных тригонометрических рядов либо, в случае дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами (1), обращаться к процедуре Галеркина.

4. На рис. 1–7 приводятся изображения поверхностей прогибов термоупругой системы и графики движения точек срединной плоскости во времени при различных значениях относительной высоты ребер a/b , их числа n , величины температурного скачка $\tilde{\theta}_1$, числа Bio и при фиксированных значениях параметров: $\mu = 0.00007$, $q_0 = 10$, $T_0^+ = T^- = 20$, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 1.005$ с, $h/a = 0.005$.

На рис. 1–3 изображены при $a/b = 1$, $Bio = 0.5$, $T_1^+ = 100$ поверхности прогиба гладкой ($n = 0$) и ребристой ($n = 3$, $h_i/h = 2$) пластин в различные моменты времени, близких к верхней границе интервала температурно-силовых воздействий.

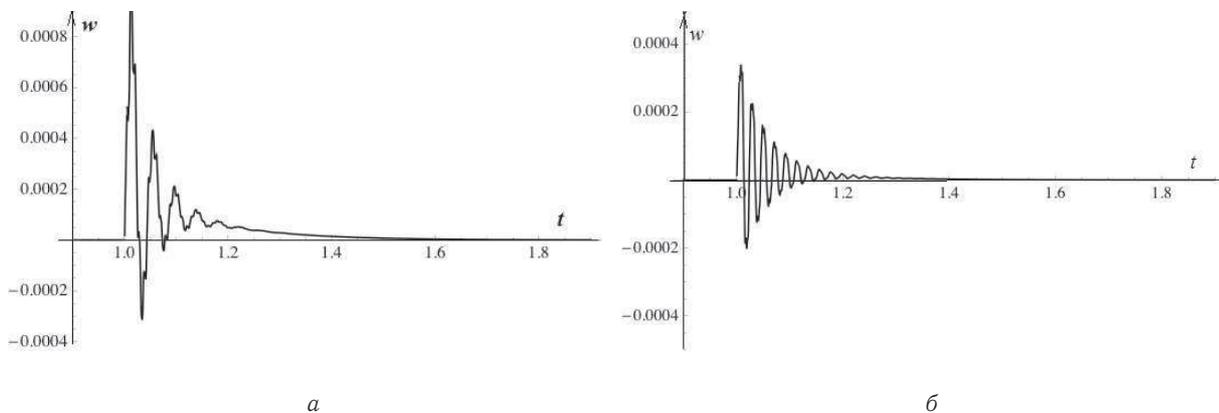


Рис. 1. Графики движения точек срединной плоскости $w(a/2, b/2, t)$ гладкой (а) и ребристой (б) пластин

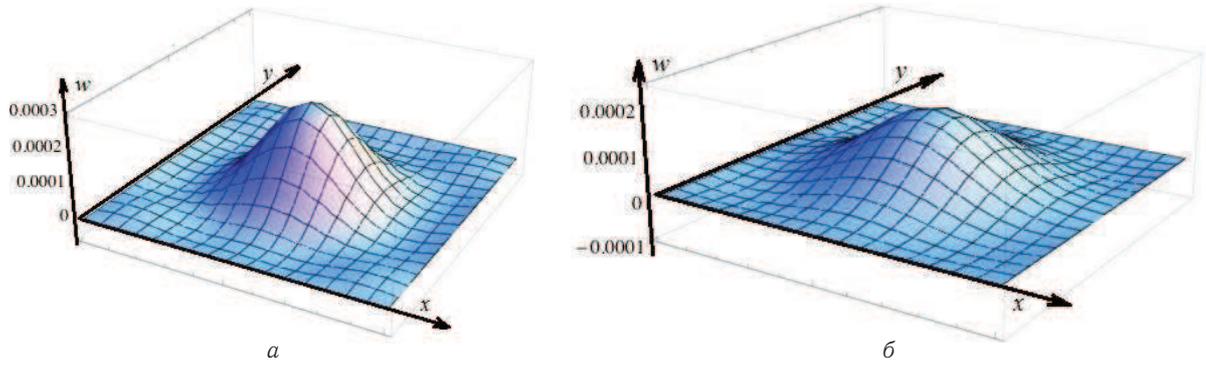


Рис. 2. Поверхность прогиба $w(x, y, t)$ гладкой пластины: а — при $t = 1.0025$; б — при $t = 1.0053$

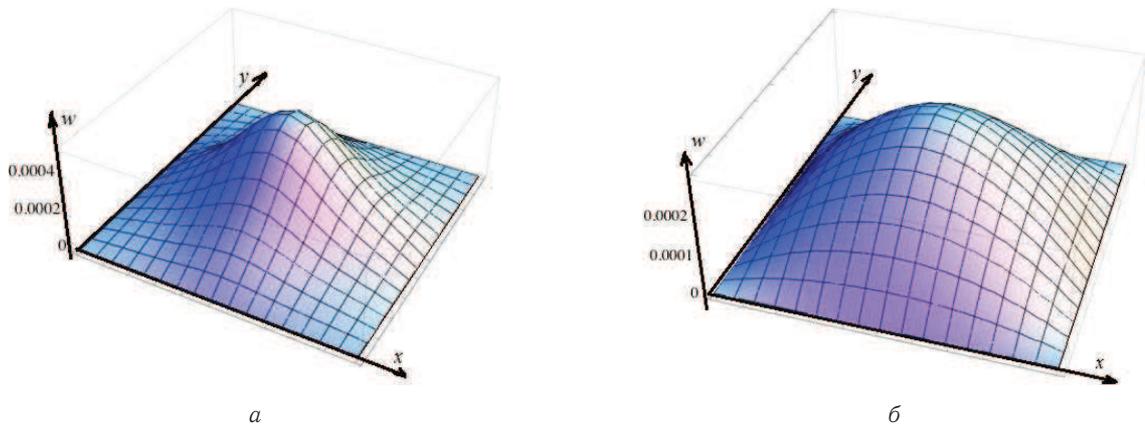


Рис. 3. Поверхность прогиба $w(x, y, t)$ ребристой пластины: а — при $t = 1.0025$; б — при $t = 1.0053$

Количественный анализ полученных решений выявил следующие закономерности в отклике термоупругой системы на изменения перечисленных параметров.

1. С увеличением числа ребер (как и их жесткости на изгиб и кручение) размахи колебаний уменьшаются, частота значительно возрастает (рис. 4). Следует отметить, что в термостатической постановке задачи увеличение изгибной жесткости ребер, как и их числа, ведет к росту прогиба, а увеличение жесткости на кручение — к уменьшению прогиба, при прочих равных условиях [11].

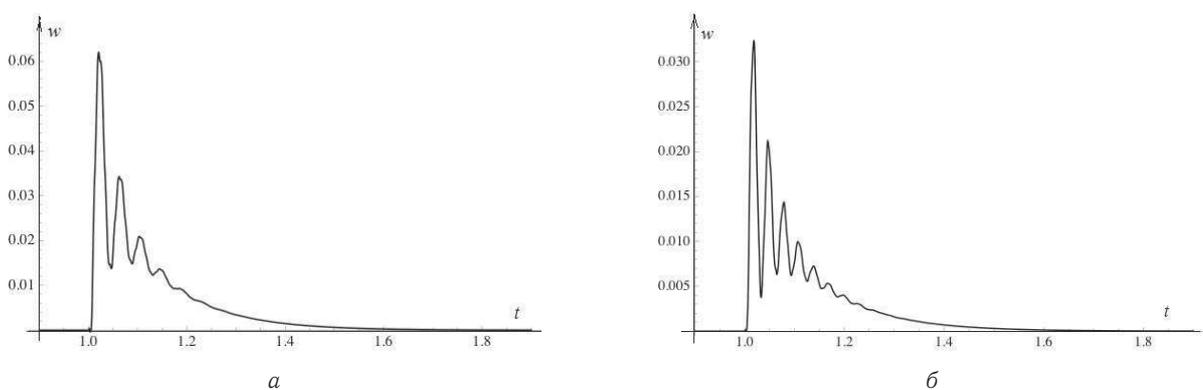
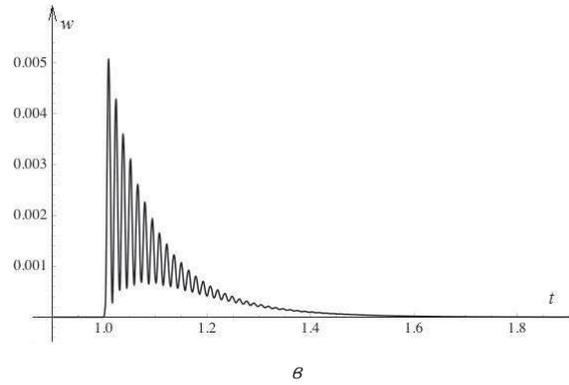


Рис. 4. Графики движения точек серединной плоскости $w(a/2, b/2, t)$ ребристой пластины с различным числом ребер n , $B_{10} = 100$, $h_i/h = 5$: а — $n = 0$; б — $n = 1$



Окончание рис. 4. $\nu - n = 10$

2. Существенное влияние на частоту и размахи колебаний ребристой пластинки оказывает параметр a/b (рис. 5), с уменьшением которого размахи колебаний возрастают, при этом частота колебаний существенно уменьшается. Этот факт объясняется изменением длины подкрепляющих элементов.

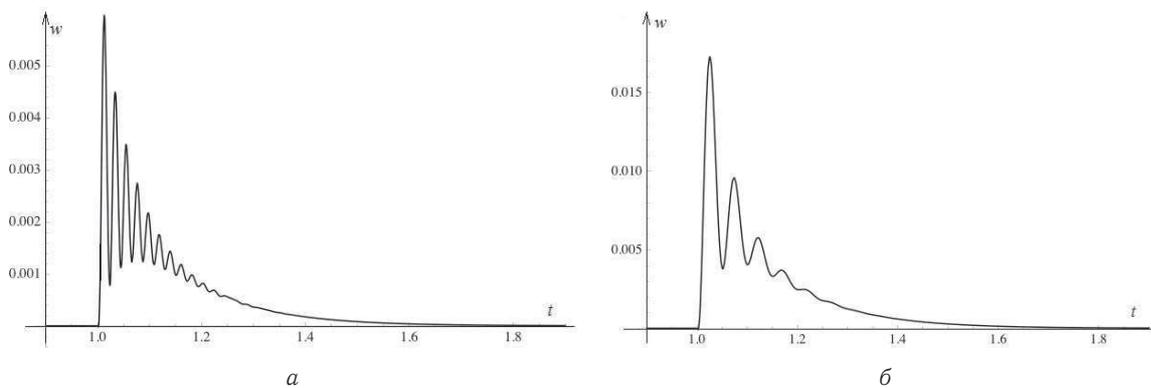


Рис. 5. Графики зависимости движения точек плоскости $w(a/3, b/3, t)$ ребристой пластины от параметра a/b при $Bio = 50$, $\tilde{\theta}_1 = 100$, $n = 3$: а — $a/b = 1$; б — $a/b = 1/2$

3. При малых значениях параметра Bio затухающие колебания геометрически нерегулярной пластинки происходят около прямой, практически совпадающей с временной осью (рис. 6).

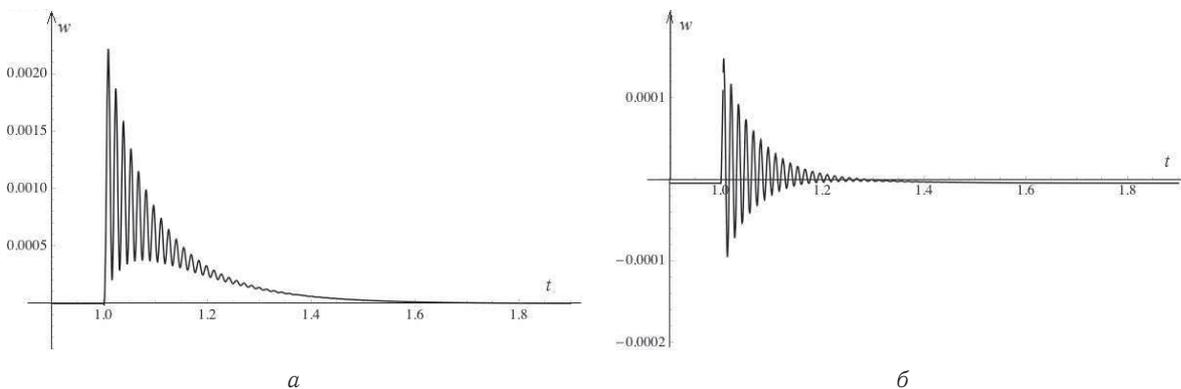


Рис. 6. Графики зависимости движения точек плоскости $w(a/3, b/3, t)$ ребристой пластины от параметра Bio при $a/b = 1$, $\tilde{\theta}_1 = 100$, $n = 9$: а — $Bio = 50$; б — $Bio = 1$

4. При наличии на краях пластинки перепада температуры по толщине асимметричные затухающие колебания происходят около прямой параллельной временной оси. Расстояние между этими прямыми зависит от величины перепада (рис. 7).

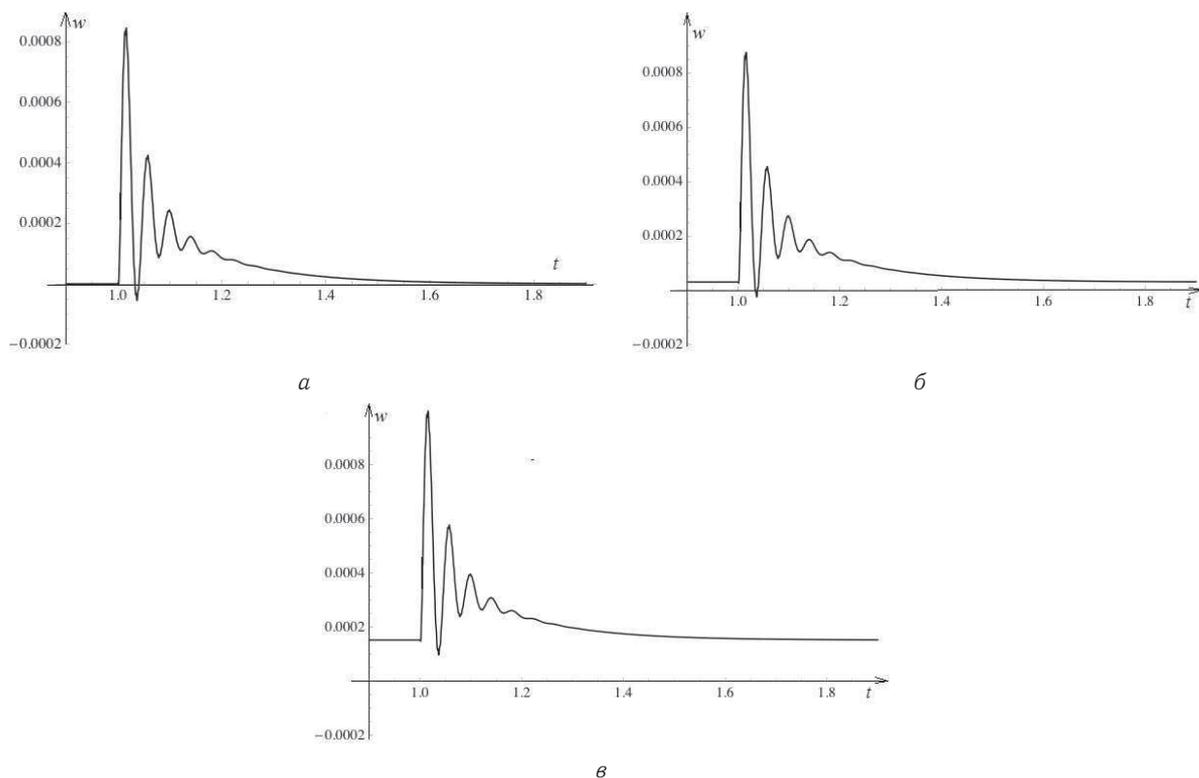


Рис. 7. Графики зависимости движения точек плоскости $w(a/3, b/3, t)$ ребристой пластины от величины перепада температуры $\tilde{\theta}_1$ при $Bio = 1$: а — $\tilde{\theta}_1 = 0$; б — $\tilde{\theta}_1 = 20$; в — $\tilde{\theta}_1 = 100$

Отмеченные закономерности термоупругого поведения геометрически нерегулярной пластинки происходят на временном промежутке, значительно большем (более чем в 38 раз) временного интервала температурно-силового воздействия. В целом картина нестационарного термоупругого поведения геометрически нерегулярной пластины чрезвычайно сложная. Алгоритмизация полученных аналитических решений не представляет трудности, что весьма важно для инженерной практики в целях предварительного количественного и качественного анализов поведения геометрически нерегулярной пластины под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий, предусмотренных условиями эксплуатации конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00644а).

Библиографический список

1. Белосточный Г. Н. Геометрически нерегулярные оболочки и пластинки под действием температурных факторов : дис. ... д-ра техн. наук. М. : МАИ, 1992. 593 с.
2. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Термоупругость подкрепленной пластинки под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий на границе // Вестн. МАИ. 2014. Т. 21, № 2. С. 169–174.
3. Белосточный Г. Н., Гуцин Б. А. Уравнения теплопроводности оболочек со ступенчато изменяющейся толщиной / Саратов. политех. ин-т. Саратов, 1990. 11 с. Деп. в ВИНТИ 14.06.90, № 3434-B90.
4. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Нестационарное уравнение теплопроводности подкрепленных оболочек и некоторое решение задачи термоупругости ребристых пластин и пологих оболочек с учетом связности полей температуры и деформаций / Саратов. политех. ин-т. Саратов, 1984. 49 с. Деп. в ВИНТИ 6.04.84, № 2080-84.
5. Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях / под ред. Г. В. Ужика М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 595 с.
6. Чернуха Ю. А. Дискретно-континуальная модель температурных полей оребренных оболочек // Матем. методы и физ.-мех. поля. 1978. Т. 7. С. 43–47. URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/688/734> (дата обращения 10.09.15).
7. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость



- тонких оболочек. Киев : Наук. думка, 1978. 343 с.
8. Расчет элементов конструкций летательных аппаратов / под ред. В. В. Кабанова. М. : Машиностроение, 1982. 136 с.
 9. Белостошный Г. Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Докл. Академии военных наук. 1999. № 1. С. 14–26.
 10. Белостошный Г. Н., Гуцин Б. А. Эффективный метод решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений // Прикладные задачи напряженного состояния упругих тел : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во СПИ, 1987. С. 54–58.
 11. Белостошный Г. Н., Зелукин Ю. В. Некоторые решения задач несвязной термоупругости изотропных систем «пластинка-ребра» на базах континуальной и дискретной моделей / Саратов. политех. ин-т. Саратов, 1982. 12 с. Деп. в ВИНТИ 7.01.82, № 521-82.

The Geometrical Irregular Plates under the Influence of the Quick Changed on the Time Coordinate Forces and Temperature Effects

G. N. Belostochny, O. A. Myltcina

Belostochny Grigory Nikolaevich, Myltcina Olga Anatolevna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, belostochny@mail.ru, omyltcina@yandex.ru

On the basis of incoherent thermoelasticity, the dynamic behaviour of geometrically irregular plates under the influence of quick changed, on the time coordinate, forces and temperature effects on surfaces is considered. An approach allowing to obtain the analytical solution of the thermoelasticity dynamic problem for the plate under inhomogeneous boundary conditions at all four edges is suggested. Quantitative analysis of the influence of the geometrical and thermomechanical parameters of elastic system on the change of bending and the character of oscillation of the points of medial surface is carried out.

Key words: plate, geometrical irregularity, damping, динамика dynamics, thermoelasticity, generalized functions, convective heat exchange, concentrated force, temperature.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-08-00644a).

References

1. Belostochny G. N. *Geometricheski neregularnye obolochki i plastinki pod deistviem temperaturnykh faktorov*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Geometrically irregular shells and plates under the influence of temperature factors : Dr. techn. sci. diss.]. Moscow, MAI, 1992, 593 p. (in Russian).
2. Myltcina O. A., Belostochny G. N. Thermoelasticity of the reinforced plate under influence of quick change for coordinate of thermal and force factors on the boundary. *Vestnik Moskovskogo aviatzionnogo instituta*, 2014, vol. 21, iss. 2, pp. 169–174 (in Russian).
3. Belostochny G. N., Gushchin B. A. *Uravneniia teploprovodnosti obolochek so stupenchato izmeniaiushcheisia tolshchinoi* [Equations of thermoelasticity of shells with step variation in thickness] / Saratov Polytechnic Institute, Saratov, 1990, 11 p. Dep. in VINITI 14.06.90, no. 3434-B90 (in Russian).
4. Belostochny G. N., Rassudov V. M. *Nestatsionarnoe uravnenie teploprovodnosti podkrepennykh obolochek i nekotoree reshenie zadache termouprugosti rebristykh plastin i pologikh obolochek s uchetom svyaznosti polei temperatury i deformatsii* [Nonstationary equation of thermal conductivity of supported shells, and some solution of the problem of the thermo elasticity of ribbed plates and shallow shells with account of the coherence of temperature and deformation fields] / Saratov Polytechnic Institute, Saratov, 1984, 49 p. Dep. in VINITI 6.04.84, no. 2080-84 (in Russian).
5. *Problemy vysokikh temperatur v aviastroitel'nykh konstruktsiiakh* [Problems of high temperatures in the aerostructures] / ed. by G. V. Uzhik. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1961, 595 p. (in Russian).
6. Chernukha Yu. A. Diskretno-kontinual'naia model' temperaturnykh polei orebrennykh obolochek [The discrete - continuum model of the temperature fields of ribbed shells]. *Mat. metody i fiz.-mekh. polia*, 1978, vol. 7, pp. 43–47 (in Russian). Available at: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/688/734> (accessed 10, September, 2015).
7. Podstrigach Ia. S., Shvets R. N. *Termoupru-*



- gost' tonkikh obolochek* [Thermoelasticity of thin shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1978, 343 p. (in Russian).
8. *Raschet elementov konstruksii letatel'nykh apparatov* [Calculation of the components of the aircraft structure] / ed. by V. V. Kabanova. Moscow, Mashinostroenie, 1982, 136 p. (in Russian).
 9. Beloshtochny G. N. Analiticheskie metody opredeleniia zamknutykh integralov singuliarnykh differentsial'nykh uravnenii termouprugosti geometricheski nereguliarnykh obolochek [Analytical methods for definition of the closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells]. *Doklady Akademii voennykh nauk*, 1999, no. 1, pp. 14–26 (in Russian).
 10. Belostochny G. N., Gushchin B. A. Effektivnyi metod resheniia lineinykh neodnorodnykh differentsial'nykh uravnenii [The effective method for solution of linear inhomogeneous differential equations]. *Prikladnye zadachi napriazhennogo sostoianiia uprugikh tel : Mezhdouzovsk. nauchn. sb.* [Applications strained condition of elastic bodies : Interuniversity scientific collection]. Saratov, Publ. Saratov Pedagogical Institute, 1987, pp. 54–58 (in Russian).
 11. Belostochnyi G. N., Zelepukin Iu. V. Nekotorye resheniia zadach nesviaznoi termouprugosti izotropnykh sistem «plastinka – rebra» na bazakh kontinual'noi i diskretnoi modelei [Some solutions of the problems of incoherent thermoelasticity of the isotropic systems «plate – ribs» on the basis of the continuum and discrete models] / Saratov Polytechnic Institute. Saratov, 1982, 12 p. Dep. in VINITI 7.01.82, no. 521-82 (in Russian).

УДК 539.374

МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ КОНТИНУУМОВ СО СВЯЗАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МИКРОСТРУКТУРЫ

В. А. Ковалев¹, Ю. Н. Радаев²

¹Ковалев Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры финансового менеджмента, Московский городской университет управления Правительства Москвы, kovalev.kam@gmail.com

²Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Предложена новая теоретико-полевая модель термоупругого континуума с микрополярной структурой, определяемой микроструктурными d -векторами и d -тензорами, ранг которых может быть произвольно высоким. Микроструктурные векторные и тензорные экстраполевые переменные подчиняются уравнениям связей (ограничениям), конечным (голономным) или дифференциальным (неголономным). Исследование выполнено на основе лагранжева полевого формализма в стиле 4-ковариантных физических теорий поля. Наличие конечных или дифференциальных связей, накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, подразумевает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления, точнее, как вариационной задачи Лагранжа для многомерного интегрального функционала. Правило множителей Лагранжа применяется для вывода дифференциальных уравнений поля при наличии связей между микроструктурными переменными. Связи могут быть конечными и дифференциальными, в каждом их этих случаев получены уравнения поля. В качестве примера рассматривается микрополярный континуум с жестким репером директоров, определяющих его микроструктуру.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, микрополярный континуум, поле, действие, d -тензор, связь, множитель Лагранжа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-451-461

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Содержание механики континуума как науки и современный подход к математическому представлению деформаций и напряжений, выводу уравнений динамики и термодинамики, формулировке определяющих уравнений сложились в результате довольно длительного исторического развития. Механика континуума продолжает бурно развиваться, и прогресс этой науки в значительной мере связан