



УДК 539.3:621.787

Исследование влияния остаточных напряжений на геометрические параметры поверхностно упрочнённого бруса

В. П. Радченко, О. С. Афанасьева, В. Е. Глебов

Радченко Владимир Павлович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244; ведущий научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, г. Москва, Мичуринский просп., д. 1, radchenko.vp@samgtu.ru

Афанасьева Ольга Сергеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, afanaseva.os@samgtu.ru

Глебов Виктор Евгеньевич, студент кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, gve5770200@mail.ru

Выполнено комплексное исследование формирования остаточных напряжений и пластических деформаций в призматических образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения и их влияния на геометрические параметры бруса. Предложена феноменологическая модель реконструкции полей остаточных напряжений, выполнена проверка её адекватности экспериментальным данным при четырёх режимах упрочнения. Наблюдается соответствие расчётных и экспериментальных данных. Для оценки влияния сформированных остаточных напряжений на геометрические параметры бруса использован метод расчёта по первоначальным деформациям на основании использования аналогии между первоначальными (остаточными) пластическими деформациями и температурными деформациями в неоднородном температурном поле. Это позволило свести рассмотрение задачи к краевой задаче термоупругости, которая в дальнейшем решалась численными методами. Детальное исследование показало, что остаточные напряжения приводят к изгибным эффектам. Для бруса $100 \times 10 \times 10$ мм расчётная величина стрелы максимального прогиба составила $206 \div 220$ мкм в зависимости от режима упрочнения. Выяснена кинетика изменения этой величины в зависимости от толщины бруса, которая в расчётах составляла от 2 до 10 мм при одном и том же распределении остаточных напряжений в упрочнённом слое. Показано, что величина прогиба нелинейно возрастает с уменьшением толщины, к тому же при толщине 2 мм она составляет 6.56 мм при длине бруса 100 мм. Приведён иллюстрированный материал в форме графической и табличной информации о результатах расчётов.

Ключевые слова: ультразвуковое упрочнение, плоские образцы, остаточные напряжения, реконструкция, изменение геометрических параметров, экспериментальные данные.

Поступила в редакцию: 23.04.2019 / Принята: 10.06.2019 / Опубликовано: 02.12.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-464-478>



ВВЕДЕНИЕ

Технологические методы обработки поверхности деталей машин и элементов конструкций занимают важное место в решении повышения их ресурса. В настоящее время разработано огромное количество методов поверхностного пластического деформирования, в результате применения которых в тонком приповерхностном слое создаются сжимающие остаточные напряжения (ОН), а именно с их наличием связывается повышение характеристик усталости, износостойкости, микротвердости и других показателей надежности. Важность решения этой проблемы подчёркивается просто необозримым количеством экспериментальных и теоретических работ в этом направлении. Приведём лишь некоторые из них. Так, в публикациях [1–7] исследовалось прямое влияние остаточных напряжений на повышение характеристик усталости. Одной из важных задач в этом направлении является проблема реконструкции полей ОН и пластических деформаций (ПД) в упрочнённом слое, поскольку многие критерии для оценки влияния упрочнения на характеристики надежности выражаются через интегральные или функциональные зависимости от остаточных напряжений.

Большая группа исследователей использует чисто экспериментальные подходы определения характера распределения остаточных напряжений по глубине упрочнённого слоя на основе разрушающих методов. К ним можно отнести метод полосок для плоских образцов и метод колец и полосок для цилиндрических изделий [6, 8, 9], идейно восходящие к методам Давиденко [10] и Биргера [11]. В основе этих подходов лежат поэтапное удаление электрохимическим травлением материала полосок и колец, вырезанных из упрочнённой детали, и измерение изменения прогиба у полосок и угла раскрытия разрезанного кольца. В арсенале исследователей имеются также методы высверливания цилиндрических лунок на упрочнённой поверхности деталей [11], дифракции нейронного излучения [12] и многие другие. Однако экспериментальные методы позволяют определить максимум две компоненты тензора ОН и не позволяют определить поля остаточных пластических деформаций.

Параллельно развиваются теоретические методы расчета полей ОН и ПД на основе непосредственного моделирования процессов упрочнения с использованием динамических упругопластических задач [13–19], лазерной [20] и ультразвуковой [21] обработки поверхности. В [7] на основе решения соответствующей прямой термоупругопластической задачи выполнены расчеты по оценке ОН и ПД, сформированных после термоупругопластического упрочнения (ТПУ). Однако учесть точно все параметры технологий упрочнения поверхности деталей (стохастический характер бомбардировки микрошариками, многократные проходы при упрочнении роликом или алмазном выглаживании, температурные эффекты в динамических и квазистатических контактных задачах, граничные и начальные условия при ТПУ и т.д.) практически невозможно. Поэтому получаемые результаты носят преимущественно качественный характер.

Другой теоретический подход связан с волевым заданием закона распределения компонент тензора пластических деформаций в тонком упрочнённом слое (однородное распределение, линейный или параболический законы и др.), основы которого заложены в [11], что позволяет в некоторых случаях получить аналитические решения для цилиндрических и плоских образцов.

Дальнейшее развитие этого метода расчета по первоначальным деформациям для гладких деталей и деталей с концентраторами напряжений осуществлялось в работах [22–26], при этом использование аналогии между первоначальными



(остаточными) пластическими деформациями и температурными деформациями в неоднородном температурном поле позволило свести рассмотрение исходной задачи к задачам термоупругости, соответствующие опции которых имеются практически во всех современных программных комплексах.

Во всех рассмотренных работах (и необозримом количестве других) исследователей интересовали в основном поля ОН и ПД после процедуры упрочнения. Однако в прикладных задачах возникает и другая проблема: каким образом наведённые остаточные напряжения влияют на изменение геометрических характеристик деталей, укладываются ли вариации этих параметров в допуски, регламентированные соответствующими нормативными документами? В соответствии с вышеизложенным целью настоящей работы является исследование влияния наведённого напряжённо-деформированного состояния после процедуры механического ультразвукового упрочнения плоского призматического образца-бруса квадратного сечения на изменение его геометрической формы на основании экспериментальных данных из работы [27].

1. РЕКОНСТРУКЦИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОСЛЕ ПРОЦЕДУРЫ УПРОЧНЕНИЯ

Рассмотрим призматический образец $100 \times 10 \times 10$ мм, одна грань которого подверглась процедуре поверхностного пластического деформирования. Введем декартову систему координат, совместив плоскость XOY с упрочнённой поверхностью, а ось OZ направим по глубине слоя.

Определим сначала тип напряжённого состояния. В данном случае можно считать, что все компоненты тензора остаточных напряжений изменяются только по толщине образца, т. е. $\sigma_x = \sigma_x(z)$, $\sigma_y = \sigma_y(z)$, $\sigma_z = \sigma_z(z)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(z)$, $\tau_{yz} = \tau_{yz}(z)$, $\tau_{xz} = \tau_{xz}(z)$.

Обратимся к уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

При введённых ограничениях они существенно упрощаются:

$$\frac{d\tau_{xz}(z)}{dz} = 0, \quad \frac{d\tau_{yz}(z)}{dz} = 0, \quad \frac{d\sigma_z(z)}{dz} = 0. \quad (1)$$

На упрочнённой и противоположной ей поверхности бруса компоненты τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z равны нулю, так как рассматривается напряжённое состояние при отсутствии внешних сил. Выполняя в соответствии с этим результатом интегрирование уравнений (1), получим

$$\tau_{xy}(z) = \tau_{yz}(z) = \sigma_z(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq H,$$

где $H = 10$ мм — толщина бруса.

Следовательно, пластина находится в условиях плоского напряжённого состояния, задаваемого компонентами $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$ и $\tau_{xy}(z)$. Краевые эффекты не рассматриваются.

Поскольку толщина упрочнённого слоя составляет всего 100–200 мкм (что будет показано ниже), то можно ввести гипотезу плоских сечений (XOZ и YOZ) для полных деформаций, причем, не допуская большой погрешности, записать

$$\epsilon_x(z) = \epsilon_y(z) = 0, \quad (2)$$



где $\epsilon_x(z)$ и $\epsilon_y(z)$ компоненты тензора полных деформаций. С учетом введенной гипотезы (2) компонента $\tau_{xy}(z) = 0$.

Обозначим через $q_i = q_i(z)$, $e_i = e_i(z)$, $\epsilon_i = \epsilon_i(z)$ ($i = x, y, z$) компоненты тензоров остаточных пластических, упругих и полных деформаций. Недиagonальные компоненты тензоров деформаций в силу введенных ранее ограничений и гипотез равны нулю.

Введем в рассмотрение гипотезу анизотропного упрочнения поверхности в виде

$$q_x = \alpha q_y, \quad (3)$$

где α — параметр анизотропии упрочнения (феноменологический параметр), методика определения которого в цилиндрическом упрочнённом образце для широкого спектра упрочняющих технологий приведена в [28, 29] и она практически без принципиальных изменений может быть перенесена на плоские образцы.

Из условия пластической несжимаемости $q_x + q_y + q_z = 0$ и (3) получаем

$$q_z = -(1 + \alpha)q_y. \quad (4)$$

Учитывая, что $\epsilon_i(z) = e_i(z) + q_i(z)$ ($i = x, y, z$), где e_i — компоненты тензора упругих деформаций, запишем соотношения (2) в развернутом виде:

$$\frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + q_x = 0, \quad \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + q_y = 0, \quad (5)$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Теперь из (3)–(5) нетрудно получить

$$\sigma_y = \frac{1 + \alpha\nu}{\alpha + \nu}\sigma_x, \quad q_x = \frac{\alpha(1 - \nu^2)}{E(\alpha + \nu)}\sigma_x, \quad q_y = \frac{(1 - \nu^2)}{E(\alpha + \nu)}\sigma_x, \quad q_z = \frac{(1 + \alpha)(1 - \nu^2)}{E(\alpha + \nu)}\sigma_x. \quad (6)$$

Таким образом, из формул (6) следует, что если известна компонента тензора ОН $\sigma_x = \sigma_x(z)$, $0 \leq z < H$, и коэффициент анизотропии α , то все компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций определяются через эти величины. В рассматриваемом нами случае механического ультразвукового упрочнения величина $\alpha = 1$ [28, 29] и формулы (6) упрощаются:

$$\sigma_y = \sigma_x, \quad q_x = q_y = \frac{1 - \nu}{E}\sigma_x, \quad q_z = \frac{2(1 - \nu)}{E}\sigma_x. \quad (7)$$

Отсюда предлагается следующий феноменологический метод реконструкции напряжённо-деформированного состояния (НДС) после упрочнения: величина $\sigma_x = \sigma_x(z)$ определяется экспериментально, а остальные компоненты находятся с использованием формул (7).

Рассмотрим применение изложенной методики реконструкции НДС на основе экспериментальных данных упрочнения поверхности бруса из сплава ЭП742 после ультразвукового (механического) упрочнения (УЗУ) микрошариками в специальных контейнерах, приведённых в работе [27]. Здесь имеются экспериментальные зависимости для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(z)$ при четырех режимах упрочнения длительностью 20 с (далее — вариант 1), 40 с (вариант 2), 60 с (вариант 3) и 80 с (вариант 4), представленные на рис. 1 маркерами.

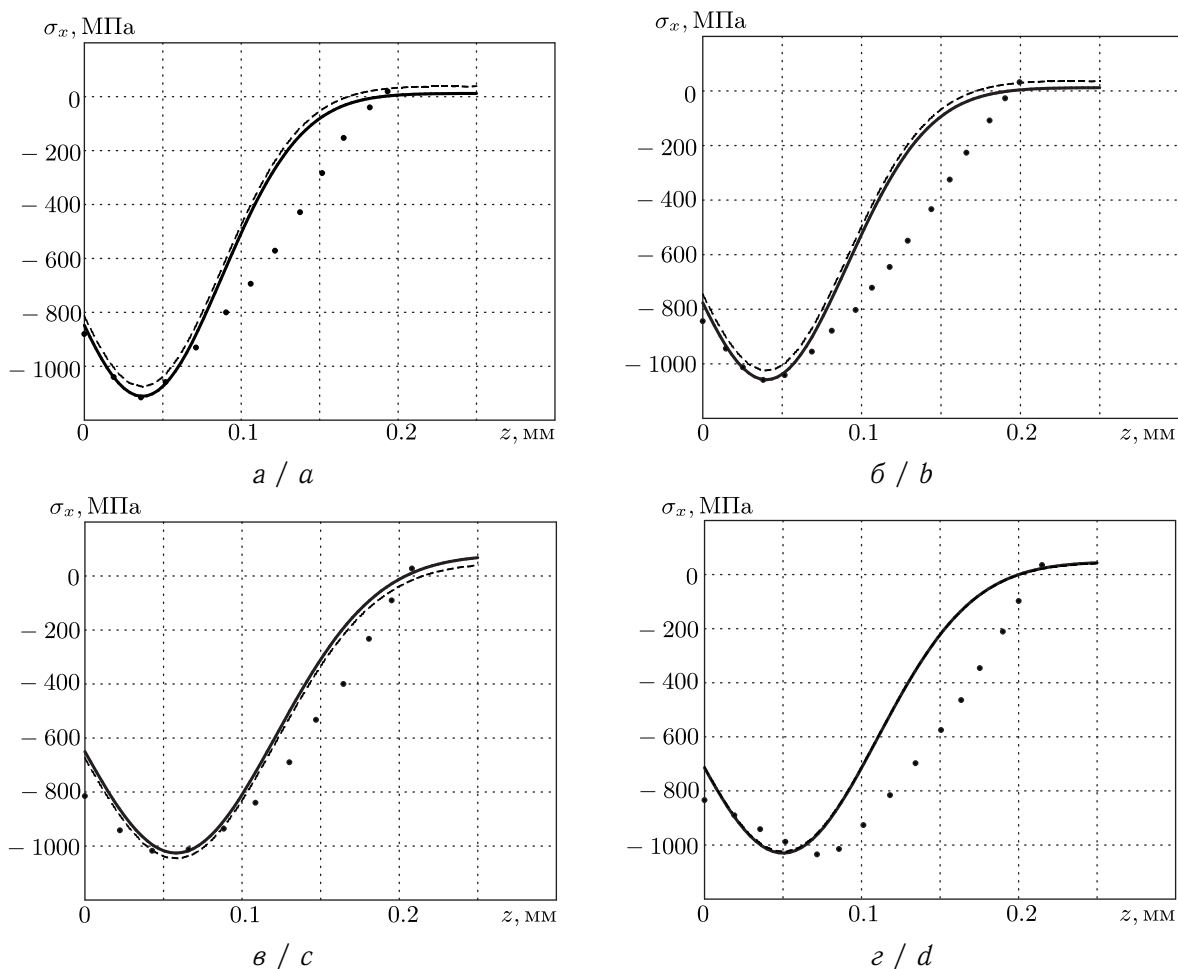


Рис. 1. Данные для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(z)$ после упрочнения УЗУ поверхности бруса из сплава ЭП742: экспериментальные (маркеры), расчетные (сплошные линии) по аппроксимации (9) и расчетные (штриховые линии) для термоупругой задачи. Варианты упрочнения: 1 (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г)

Fig. 1. Component data $\sigma_x = \sigma_x(z)$ after ultrasonic hardening of a beam surface made of EP742 alloy: experimental (markers), calculated (solid lines) by approximation and design (dashed lines) for the thermoelastic problem. Cases of hardening: the first (a), the second (b), the third (c), the fourth (d)

Как видно из рис. 1, экспериментальные данные определены в тонком упрочнённом слое глубиной около 200 мкм. Но для решения поставленной выше задачи влияния НДС на геометрические характеристики бруса необходимо иметь непрерывные поля ОН и ПД во всей области интегрирования. Поэтому первой задачей является аппроксимация экспериментальной эпюры $\sigma_x = \sigma_x(z)$ в области сжатия с последующей экстраполяцией на все значения $0 \leq z \leq H$, но таким образом, чтобы выполнялось условие самоуравновешенности остаточных напряжений:

$$\int_0^H \sigma_x(z) dz = 0. \tag{8}$$

Выберем аппроксимацию $\sigma_x = \sigma_x(z)$ в виде

$$\sigma_x(z) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(\frac{(z - z^*)^2}{b^2}\right), \tag{9}$$



где σ_0 , σ_1 и b — параметры, для определения которых (в первом приближении) можно использовать значения эпюры $\sigma_x(0) = \sigma^*$, $\sigma_x(z^*) = \sigma_{\min}$, $\sigma_x(z_0) = 0$ и условие (8). В результате, используя (9) и эти условия, получим переопределённую систему четырёх уравнений относительно трёх неизвестных σ_0 , σ_1 и b . Для устранения переопределённости системы можно отказаться от строгого выполнения одного из условий, например от прохождения зависимости $\sigma_x = \sigma_x(x)$ через точку $z = z_0$, в которой она обращается в ноль. Тогда в первом приближении получим систему трёх уравнений относительно трёх неизвестных σ_0 , σ_1 , b :

$$\begin{aligned} \sigma_0 \exp(-z^{*2}) - \sigma_1 \exp(-z^{*2}/b^2) &= \sigma^*, \\ \sigma_0 - \sigma_1 &= \sigma_{\min}, \quad \int_0^H [\sigma_0 - \sigma_1 \exp(-(z - z^*)^2/b^2)] dz = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которая решается численно с использованием функции $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$.

Уточнение значений параметров σ_0 , σ_1 и b (второе приближение) производится в результате минимизации отклонения расчётных данных $\sigma_x(z_i)$ от экспериментальных $\sigma_x^{\exists}(z_i)$ в следующей норме:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [\sigma_x(z_i) - \sigma_x^{\exists}(z_i)]^2}{\sum_{i=1}^n [\sigma_x^{\exists}(z_i)]^2}}, \quad (11)$$

где z_i — точки дискретизации; n — количество точек дискретизации зависимости $\sigma_x = \sigma_x(z)$. Для этой цели, начиная с первого приближения, варьируются величины σ_0 , σ_1 , а величина b определяется из третьего уравнения (10) (тем самым сохраняется самоуравновешенность эпюры $\sigma_x = \sigma_x(z)$) до достижения минимума функционалом (11). По этой же формуле вычисляется значение отклонения расчётных данных по аппроксимации (9) от экспериментальных (погрешность аппроксимации Δ_1) в процентах.

В табл. 1 приведены значения характерных точек и параметры аппроксимации для зависимостей (9) для всех четырёх режимов упрочнения УЗУ, полученных на основании обработки экспериментальных данных, представленных на рис. 1.

В последней строке табл. 1 даны погрешности Δ_1 для аппроксимации (9). На рис. 1 сплошными линиями приведены зависимости для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(z)$ по формуле (9).

Таким образом, после идентификации параметров аппроксимации (9) величина $\sigma_x = \sigma_x(z)$ будет иметь аналитическое представление для всех $0 \leq z \leq H$, а значит, будут иметь аналитические представления и остальные компоненты тензоров ОН и ПД в соответствии с формулами (7).



Таблица 1 / Table 1

Значения характерных точек эпюры $\sigma_x = \sigma_x(z)$, параметров аппроксимации (9) и погрешностей аппроксимации для образцов из сплава ЭП742 в зависимости от режимов УЗУ

Values of characteristic points of the diagram $\sigma_x = \sigma_x(z)$, approximation parameters (9), and approximation errors for EP742 alloy samples depending on the ultrasound hardening regimes

Параметры [Parameters]	Время обработки, с (режим УЗУ) [Time of processing, sec (ultrasound hardening regimes)]			
	20(1)	40(2)	60(3)	80 (4)
Значения характерных точек эпюры $\sigma_x = \sigma_x(z)$ [Values of characteristic points of the diagram $\sigma_x = \sigma_x(z)$]				
z_0 , мм	0.189	0.193	0.204	0.210
z^* , мм	0.042	0.048	0.056	0.06
σ^* , МПа	-883.6	-826	-781.2	-780
σ_{\min} , МПа	-1087.6	-1066	-1059	-1058
Значения параметров аппроксимации (9) [Values of approximation parameters (9)]				
σ_0 , МПа	13.34	13.94	15.21	16.3
σ_1 , МПа	1101	1080	1074	1075
b	0.0928	0.0954	0.102	0.110
Значения погрешностей [Error values]				
Δ_1 , %	5.74	6.38	7.77	8.19
Δ_2 , %	5.88	5.94	6.31	6.82

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ БРУСА

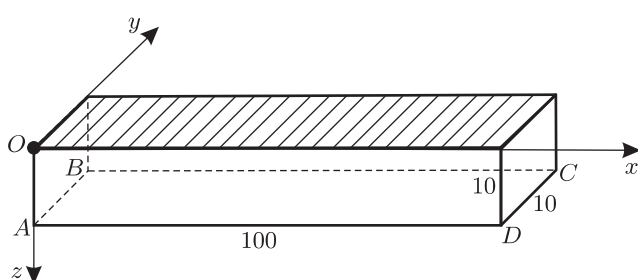


Рис. 2. Схематическое изображение упрочнённого образца

Fig. 2. Schematic representation of a hardened specimen

Основная задача данной работы — исследование влияния наведённых в процессе упрочнения ОН и ПД на геометрию первоначального бруса, схематически представленного на рис. 2, где штриховкой показана упрочнённая грань. Данная задача относится к классу краевых задач с начальным напряжённо-деформированным состоянием. Однако методов решения такого рода краевых задач и их программной реализации в имеющихся вычислительных

комплексах авторы настоящей работы не нашли. Поэтому в данной работе использовалась модификация метода расчета по первоначальным деформациям [22–26], заключающаяся в аналогии между остаточными пластическими деформациями и температурными деформациями в неоднородном температурном поле.

Использование этой связи первоначальных деформаций с термоупругостью материала позволяет применять современные расчётные комплексы с опцией решения термоупругой задачи методом конечных элементов (МКЭ) в форме



перемещений. Кроме этого, сведение исходной задачи к задаче термоупругости решает проблему корректности и единственности соответствующей исходной краевой задачи. Построение решения задачи содержит следующие этапы.

На первом этапе выполняется реконструкция полей ОН и ПД после процедуры упрочнения по методике, изложенной в разделе 1. Для сплава ЭП742 в соотношениях (7) использовались значения $E = 221000$ МПа и $\nu = 0.3$, соответствующие температуре упрочнения $T = 20$ °С.

На втором этапе определённые по (7) компоненты тензора остаточных ПД $q_i = q_i(r)$ ($i = x, y, z$) моделировались температурными деформациями с использованием зависимостей

$$q_i(z) = \beta_i(T(z)) [T(z) - T_0] \quad (i = x, y, z; \quad 0 \leq z \leq H), \quad (12)$$

где $T_0 = \text{const}$ — некоторое фиксированное значение температуры, $\beta_i(T(z))$ — коэффициенты температурного расширения. Закон распределения температуры $T = T(z)$ задавался в соответствии с решением стационарной задачи теплопроводности для бруса, где на упрочнённой поверхности (заштрихована на рис. 2) задавалась температура $T = T_1 > T_0$, на противоположной ей грани $T = T_0$, а боковые грани теплоизолированы. В расчётах использовались справочные значения коэффициента температуропроводности λ в зависимости от температуры, приведённые в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Значения коэффициента температуропроводности λ от температуры T сплава ЭП742
 Values of the coefficient of thermal diffusivity λ from temperature T alloy EP742

$T, \text{ }^\circ\text{C}$	25	100	200	300	400	500	600	700	800
$\lambda, \text{ Вт/м}\cdot\text{град}$	10.5	11.3	12.6	13.8	15.1	16.7	18.0	19.3	20.5

Здесь (и в дальнейшем) анализировались два варианта задания граничных условий $\{T_1 = 400^\circ \text{C}, T_0 = 20^\circ \text{C}\}$, $\{T_1 = 750^\circ \text{C}, T_0 = 20^\circ \text{C}\}$.

На рис. 3 приведено распределение температуры для стационарной задачи теплопроводности для обоих вариантов расчёта. Теперь, зная функции $q_i(z)$, определённые на основании соотношений (7), и полученные расчётные зависимости $T = T(z)$, находятся функции $\beta_i = \beta_i(T(z)) = \beta_i(z)$ для каждого температурного поля, которые в дальнейшем в задаче термоупругости используются как исходные данные.

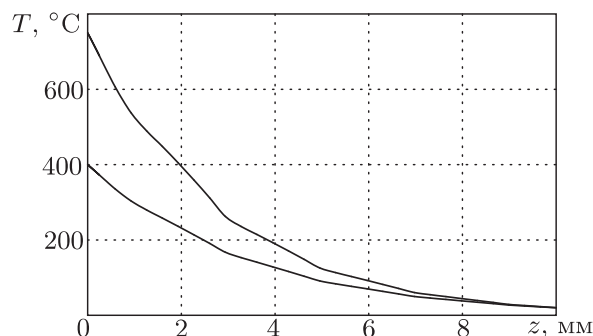


Рис. 3. Распределение температуры в образце для стационарной задачи теплопроводности
 Fig. 3. Temperature distribution in a sample for a stationary heat conduction problem

На третьем этапе строится геометрическая конечно-элементная модель бруса с фактически заданными по формуле (12) начальными псевдотемпературными деформациями. Однако при построении геометрической модели необходимо учитывать, что распределение ОН по координате z обладает большим градиентом: на линейном размере в 200 мкм величина $\sigma_x = \sigma_x(z)$ изменяется в пределах трёх порядков (см. рис. 1). Это приводит к необходимости создания довольно мелкой конечно-элементной сетки в области сжатия материала с очень малыми линейными размерами конечного элемента



(в настоящей работе — 7–8 мкм), а за пределами этой области размеры конечного элемента можно существенно увеличивать.

На четвёртом этапе решается краевая задача фиктивной термоупругости численным методом на основе МКЭ, при этом исходными данными являются величины температуры $T = T_1$ и $T = T_0$ на противоположных гранях, зависимости $\lambda = \lambda(T)$, а также рассчитанные значения коэффициентов температурного расширения $\beta_i = \beta_i(z)$, значения механических характеристик сплава ЭП742. Одной из особенностей решения задачи фиктивной термоупругости является учет условия пластической несжимаемости материала $q_x + q_y + q_z = 0$, используемого при реконструкции полей ОН. Для этого в краевой задаче термоупругости в качестве коэффициента Пуассона использована величина $\nu = 0.499$. В итоге за счёт описанного выше способа построения величин $\beta_i = \beta_i(T(z))$ численное решение не только даёт характеристики напряжённо-деформированного состояния, которое практически должно совпадать с построенным по феноменологическому методу, изложенному в разделе 1, но позволяет найти и изменение геометрии бруса, в частности — величину прогиба от действия самоуравновешенных остаточных напряжений.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА И ИХ АНАЛИЗ

Численное решение задачи фиктивной термоупругости для оценки напряжённо-деформированного состояния в бруске для всех четырёх вариантов упрочнения выполнено в пакете ANSYS при двух вариантах граничных условий: $T_1 = 750^\circ$, $T_0 = 20^\circ$ и $T_1 = 400^\circ$, $T_0 = 20^\circ$. Расчётные значения для полей ОН и ПД дают практически одинаковые результаты при обоих граничных температурных условиях, что свидетельствует об адекватности предложенного подхода, поскольку конкретное температурное поле стационарной задачи теплопроводности в (12) не влияет на решение. В качестве примера на рис. 1 штриховыми линиями показаны расчётные значения остаточных напряжений $\sigma_x = \sigma_x(z)$ для всех четырёх вариантов упрочнения, полученные на основе решения термоупругой задачи МКЭ. В табл. 1 приведена погрешность Δ_2 расчётных по МКЭ значений $\sigma_x = \sigma_x(z)$ относительно экспериментальных данных в норме (11). Как видно, погрешности Δ_1 и Δ_2 близки.

Проанализируем теперь геометрические изменения в бруске, вызванные наведёнными ОН. Эта задача не входит в основной тренд исследований в механике

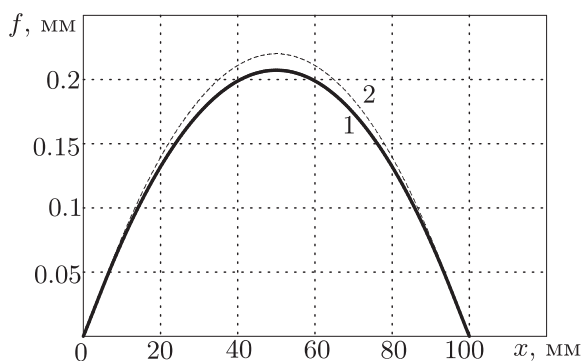


Рис. 4. Величина прогиба бруса для вариантов упрочнения № 1 (линия 1) и № 3 (линия 2)

Fig. 4. Beam deflection curves for the first (line 1) and the third (line 2) cases of hardening

упрочнённых конструкций, который связан с реконструкцией полей ОН и ПД, поэтому она практически не рассматривалась в исследованиях, за исключением единичных работ, например [24]. Наиболее показательной является величина прогиба бруса в плоскости ZOX (см. рис. 2) за счёт момента внутренних напряжений, возникающих после упрочнения.

В качестве примера на рис. 4 приведено распределение величины прогиба f первоначально плоского сечения $ABCD$ (см. рис. 2) по длине образца для вариантов упрочнения № 1 и № 3. Анализ графиков на рис. 4 и результаты



расчётов дают максимальную стрелу прогиба для варианта упрочнения № 1 около 206 мкм, а для варианта № 3 — 220 мкм.

В настоящей работе выполнено исследование влияния ОН на прогиб бруса в зависимости и от его толщины H .

В качестве модельной задачи использовался вариант упрочнения № 1, величина $H = \{10, 8, 6, 4, 2\}$ мм, предполагалось, что в области сжатия распределения ОН для всех вариантов расчёта одинаковое и соответствует эпюре на рис. 1, а, поэтому для каждой величины H параметры аппроксимации (9) пересчитывались по изложенной в разделе 2 методике.

На рис. 5 приведён график зависимости максимальной стрелы прогиба бруса f_{\max} от толщины бруса H , из которого следует существенное увеличение стрелы прогиба с уменьшением толщины. Так, например, при толщине $H = 2$ мм стрела прогиба $f_{\max} = 6.56$ мм, что является достаточно большой величиной при длине бруса 100 мм.

Отсюда следует вывод о необходимости учёта не только сформированных ОН, но и дрейфа геометрических параметров плоских деталей после упрочнения, особенно для тонких призматических образцов.

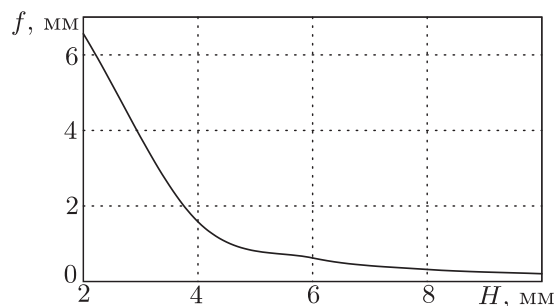


Рис. 5. Расчётные значения максимальной величины прогиба f_{\max} в зависимости от толщины бруса H

Fig. 5. The calculated values of the maximum deflection f_{\max} depending on beam thickness H

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработанный подход позволяет не только выполнить реконструкцию напряжённо-деформированного состояния после процедуры упрочнения, но и исследовать влияние остаточных напряжений на изменение геометрии бруса по отношению к первоначальному (неупрочнённому) состоянию.

Выполненные исследования важны в прикладной технологической практике, где поверхностное пластическое деформирование является штатной технологией упрочнения, поскольку, с одной стороны, наведённые ОН увеличивают ресурс изделий по многим показателям надёжности, а с другой стороны, как правило, имеются жёсткие требования на геометрические допуски формы деталей.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № РНФ 19-19-00062, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова).

Библиографический список

1. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y. On the affect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti-6-Al-4V at elevated temperatures up to 550 °C // Intern. J. Fatigue. 2012. Vol. 44. P. 292–302. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008>
2. Brockman R. A., Braisted W. R., Olson S. E. [et.al.]. Prediction and characterization of residual stresses from laser shock peening // Intern. J. Fatigue. 2012. Vol. 36. P. 96–108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.011>



3. *McClung R. C.* A literature survey on the stability and significance of residual stresses during fatigue // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2007. Vol. 30. P. 173–205. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1406-2695.2007.01102.x>
4. *Soady K. A.* Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance // *Mater. Sci. Technol.* 2013. Vol. 29, № 6. P. 673–651. DOI: <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>
5. *Terres M. A., Laalai N., Sidhom H.* Effect of nitriding and shot peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // *Mater. Design.* 2012. Vol. 35. P. 741–748. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>
6. *Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С.* Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям. Самара : Изд-во СЦН РАН, 2012. 125 с.
7. *Кравченко Б. А., Круцило В. Г., Гутман Г. Н.* Термопластическое упрочнение – резерв повышения прочности и надёжности деталей машин. Самара : Изд-во СамГТУ, 2000. 216 с.
8. *Иванов С. И.* К определению остаточных напряжений в цилиндре методом колец и полосок // *Остаточные напряжения : сб. науч. тр. Куйбышев : Изд-во КуАИ, 1971. Вып. 53. С. 32–42.*
9. *Иванов С. И.* Исследование остаточных касательных напряжений в цилиндрической детали методом колец // *Остаточные напряжения : сб. науч. тр. Куйбышев : Изд-во КуАИ, 1971. Вып. 53. С. 107–115.*
10. *Davidenkov N. N.* Calculation of Residual Stresses in Cold Drawn Tubes // *Zeitschrift für Metallkunde.* 1932. Vol. 24, № 25. P. 25–29.
11. *Бургер И. А.* Остаточные напряжения. М. : Машгиз, 1963. 232 с.
12. *Schajer G. S.* Advances in Hole-Drilling Residual Stress Measurements // *Exp. Mech.* 2010. Vol. 50, № 2. P. 159–168. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11340-009-9228-7>
13. *Fitspatrick M. E., Lodini A.* Analysis of Residual Stress by Diffraction using Neutron and Synchrotron Radiation. L. : CRC Press, 2003. 368 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203608999>
14. *Rouhaud E., Deslaef D., Lu J., Chaboche J.-L.* Modeling of residual stress, shot peening // *Handbook on Residual Stress / ed. Jian Lu. Society of Experimental Mechanics, 2005. P. 116–148.*
15. *Gallitelli D., Boyer D., Gelineau M., Colaitis Y. [et al.].* Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // *Comptes Rendus Mécanique.* 2016. Vol. 344, no. 4–5. P. 355–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
16. *Musinski W. D., McDowell D. L.* On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework: Application to Ni-base superalloy specimens // *Int. J. Mech. Sci.* 2015. Vol. 100. P. 195–208. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.020>
17. *Purohit R., Verma C. S., Rana R. S.* Simulation of shot peening process // *Material Today: Proceedings.* 2017. Vol. 4, № 2. P. 1244–1251. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.144>
18. *Xie L., Wang Ch., Wang L. [et al.].* Numerical analysis and experimental validation on residual stress distribution of titanium matrix composite after shot peening treatment // *Mech. Mat.* 2016. Vol. 99. P. 2–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.05.005>
19. *Jebahi M., Gakwaya A., Lévesque J. [et al.].* Robust methodology to simulate real shot peening process using discrete-continuum coupling method // *Int. J. Mech. Sci.* 2016. Vol. 107. P. 21–33. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.005>



20. Keller S., Chupakhin S., Staron P., Maawad E., Kashaev N., Klusemann B. Experimental and numerical investigation of residual stresses in laser shock peened AA2198 // *Jour. of Mater. Proc. Tech.* 2018. Vol. 255. P. 294–307. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.joatprotect.2017.11.023>
21. Badredding J., Rouhaud E., Micoulaut M., Rerny S. Simulation of shot dynamics for ultrasonic shot peening: Effects of process parameters // *Int. J. Mech. Sci.* 2014. Vol. 82. P. 179–190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.03.006>
22. Павлов В. Ф., Столяров А. К., Вакулюк В. С., Кирпичев В. А. Расчёт остаточных напряжений в деталях с концентраторами напряжений по первоначальным деформациям. Самара : Изд-во СНЦ РАН, 2008. 124 с.
23. Сазанов В. П., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С., Павлов В. Ф. Определение первоначальных деформаций в упрочнённом слое цилиндрической детали методом конечно-элементного моделирования с использованием расчётного комплекса PATRAN/NASTRAN // *Вестн. УГАТУ.* 2015. Т. 19, № 2 (68). С. 35–40.
24. Келлер И. Э., Трофимов В. Н., Владыкин А. В., Плюснин В. В., Петухов Д. С., Виндокуров И. В. К вопросу о реконструкции остаточных напряжений и деформаций пластины после дробеструйной обработки // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2018. Т. 22, № 1. С. 40–64. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1602>
25. Радченко В. П., Куров А. Ю. Влияние анизотропии поверхностного пластического упрочнения на формирование остаточных напряжений в цилиндрических деталях с надрезами полукруглого профиля // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2016. Т. 20, № 4. С. 675–690. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1513>
26. Сазанов В. П., Семенова О. Ю., Письмаров А. В., Чуриков Д. С. О влияние первоначальных радиальных деформаций на развитие усталостной трещины упрочнённых деталей из конструкционных сталей // *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия) : в 2 т. / под ред. В. П. Радченко.* Самара : Изд-во СамГТУ, 2019. Т. 1. С. 168–171.
27. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестн. ПНИПУ. Механика.* 2016. № 1. С. 93–112. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07>
28. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Исследование влияния анизотропии поверхностного пластического упрочнения на распределение остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах // *Вестн. ПНИПУ. Механика.* 2015. № 1. С. 130–147. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>
29. Саушкин М. Н., Радченко В. П., Павлов В. Ф. Метод расчёта полей остаточных напряжений и пластических деформаций в цилиндрических образцах с учётом анизотропии процесса поверхностного упрочнения // *ПМТФ.* 2011. Т. 52, № 2. С. 173–182.

Образец для цитирования:

Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е. Исследование влияния остаточных напряжений на геометрические параметры поверхностно упрочнённого бруса // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2019. Т. 19, вып. 4. С. 464–478. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-464-478>



Influence of Residual Stresses on Geometric Parameters of Surface-Strengthened Beam

V. P. Radchenko, O. S. Afanaseva, V. E. Glebov

Vladimir P. Radchenko, <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia; Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1 Michurinsky Prospekt, Moscow 119192, Russia, radchenko.vp@samgtu.ru

Olga S. Afanaseva, <https://orcid.org/0000-0001-8660-2990>, Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia, afanaseva.os@samgtu.ru

Victor E. Glebov, Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia, gve5770200@mail.ru

The comprehensive study of the formation of residual stresses and plastic deformations in prismatic samples of the EP742 alloy after ultrasonic hardening and their influence on the geometric parameters of the beam was conducted. Phenomenological model for the reconstruction of residual stress fields is proposed, and the verification of its adequacy to experimental data with four hardening modes is performed. The correspondence of the calculated and experimental data is observed. To assess the effect of the formed residual stresses on the geometric parameters of the beam the calculation method for initial strains based on using the analogy between the initial (permanent) plastic deformations and temperature deformations in an inhomogeneous temperature field is applied. This enabled us to reduce the consideration of the problem to the boundary value problem of thermoelasticity, which was further solved by numerical methods. The detailed study showed that residual stresses lead to bending effects. For a beam $100 \times 10 \times 10$ mm, the calculated value of the arrow of maximum deflection was $210 \mu\text{m}$. The kinetics of changes in this quantity is determined depending on the beam thickness which in the calculations ranged from 2 to 10 mm with the same distribution of residual stresses in the hardened layer. It is shown that the magnitude of the deflection nonlinearly increases with a decreasing thickness while with a thickness of 2 mm it is 6.6 mm with a beam length of 100 mm. Illustrated material in the form of graphic and tabular information on the calculation results is given.

Keywords: ultrasonic hardening, flat specimens, residual stresses, reconstruction, change in geometric parameters, experimental data.

Received: 23.04.2019 / Accepted: 10.06.2019 / Published: 02.12.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. RSF 19-19-00062, Lomonosov Moscow State University).

References

1. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y. On the affect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti-6-Al-4V at elevated temperatures up to 550°C . *Intern. J. Fatigue*, 2012, vol. 44, pp. 292–302. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008>
2. Brockman R. A., Braisted W. R., Olson S. E. [et. al.]. Prediction and characterization of residual stresses from laser shock peening. *Intern. J. Fatigue*, 2012, vol. 36, pp. 96–108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.011>



3. McClung R. C. A literature survey on the stability and significance of residual stresses during fatigue. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2007, vol. 30, pp. 173–205. DOI: <https://doi.org/10.11111/j.1406-2695.2007.01102.x>
4. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance. *Mater. Sci. Technol.*, 2013, vol. 29, no. 6, pp. 673–651. DOI: <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>
5. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach. *Mater. Design*, 2012, vol. 35, pp. 741–748. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>
6. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakuluk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniya ustalosti poverkhnostno uprochnionnykh detalei po ostatochnym napriazheniyam* [Prediction of fatigue resistance of surface reinforced parts by residual stresses]. Samara, Izd-vo STsN RAN, 2012. 125 p. (in Russian).
7. Kravchenko V. A., Krucilo V. G., Gutman G. N. *Termoplasticheskoe uprochnenie – rezerva povysheniya prochnosti i nadjozhnosti detalej mashin* [Thermoplastic Hardening – Reserve for Increased Strength and Reliability of Machine Parts]. Samara, Izd-vo SamGTU, 2000. 216 p. (in Russian).
8. Ivanov S. I. To determination of residual stresses in the cylinder by means of rings and strips. *Ostatochnye napriazheniya* [Residual tension. Collected papers]. Kujbyshev, Izd-vo KuAI, 1971. Iss. 53, pp. 32–42 (in Russian).
9. Ivanov S. I. Examination of residual tangential stresses in cylindrical part by means of rings. *Ostatochnye napriazheniya* [Residual tension. Collected papers]. Kujbyshev, Izd-vo KuAI, 1971. Iss. 53, pp. 107–115 (in Russian).
10. Davidenkov N. N. Calculation of Residual Stresses in Cold Drawn Tubes. *Zeitschrift für Metallkunde*. 1932, vol. 24. no. 25, pp. 25–29.
11. Birger I. A. *Ostatochnye napriazheniya* [Residual tension]. Moscow, Mashgiz, 1963. 232 p. (in Russian).
12. Schajer G. S. Advances in Hole-Drilling Residual Stress Measurements. *Exp. Mech.* 2010, vol. 50. no. 2, pp. 159–168. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11340-009-9228-7>
13. Fitzpatrick M. E., Lodini A. *Analysis of Residual Stress by Diffraction using Neutron and Synchrotron Radiation*. London, CRC Press, 2003. 368 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203608999>
14. Rouhaud E., Deslaef D., Lu J., Chaboche J.-L. Modeling of residual stress, shot peening. In: *Handbook on Residual Stress*, ed. Jian Lu. Society of Experimental Mechanics. 2005, pp. 116–148.
15. Gallitelli D., Boyer D., Gelineau M., Colaitis Y. [et al.]. Simulation of sHot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure. *Comptes Rendus Mécanique*, 2016, vol. 344, no. 4–5, pp. 355–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
16. Musinski W. D., McDowell D. L. On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework: Application to Ni-base superalloy specimens. *Int. J. Mech. Sci.*, 2015, vol. 100, pp. 195–208. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.020>
17. Purohit R., Verma C. S., Rana R. S. Simulation of shot peening process. *Material Today: Proceedings*, 2017, vol. 4, no. 2, pp. 1244–1251. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.144>
18. Xie L., Wang Ch., Wang L. [et al.]. Numerical analysis and experimental validation on residual stress distribution of titanium matrix composite after shot peening treatment. *Mech. Mat.*, 2016, vol. 99, pp. 2–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.05.005>
19. Jebahi M., Gakwaya A., Lévesque J. [et al.]. Robust methodology to simulate real shot peening process using discrete-continuum coupling method. *Int. J. Mech. Sci.*, 2016, vol. 107, pp. 21–33. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.005>



20. Keller S., Chupakhin S., Staron P., Maawad E., Kashaev N., Klusemann B. Experimental and numerical investigation of residual stresses in laser shock peened AA2198. *Jour. of Mater. Proc. Tech.*, 2018, vol. 255, pp. 294–307. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.j0atprotect.2017.11.023>
21. Badredding J., Rouhaud E., Micoulaut M., Rerny S. Simulation of shot dynamics for ultrasonic shot peening: Effects of process parameters. *Int. J. Mech. Sci.*, 2014, vol. 82, pp. 179–190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.03.006>
22. Pavlov V. F., Stoljarov A. K., Vakuljuk V. S., Kirpichev V. A. *Raschiot ostatochnykh napriazheniy v detaliakh s kontsentratorami napriazheniy po pervonachal'nyim deformatsiyam* [Calculation of residual stresses in parts with stress concentrators by initial deformations]. Samara, Izd-vo SNTs RAN, 2008. 124 p. (in Russian).
23. Sazanov V. P., Kirpichev V. A., Vakuljuk V. S., Pavlov V. F. The Definition of initial deformations in the cylindrical parts surface layer by Finite Elements Modeling method using PATRAN/NASTRAN program complex. *Vestnik UGATU*, 2015, vol. 19, no. 2 (68), pp. 35–40 (in Russian).
24. Keller I. E., Trofimov V. N., Vladykin A. V., Plusnin V. V., Petukhov D. S., Vindokurov I. V. On the reconstruction of residual stresses and strains of a plate after shot peening. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 40–64 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1602>
25. Radchenko V. P., Kurov A. Yu. Effect of anisotropy of surface plastic hardening on formation of residual stresses in cylindrical samples with semicircular notch. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 675–690 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1513>
26. Sazanov V. P., Semenova O. Yu., Pismarov A. V., Churikov D. S. On the influence of the original radial deformations on the development of the fatigue cracks of strengthened parts from construction steels. In: *Proc. of the XI All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May 27–30, 2019, Samara, Russian Federation) : in 2 vols. Samara, Izd-vo SamGTU, 2019. Vol. 1. pp. 168–171 (in Russian).
27. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. A mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the high-temperature creep conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07>
28. Radchenko V. P., Pavlov V. Ph., Saushkin M. N. Investigation of surface plastic hardening anisotropy influence on residual stresses distribution in hollow and solid cylindrical specimens. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 130–147. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>
29. Saushkin M. N., Radchenko V. P., Pavlov V. F. Method of Calculating the fields of residual stresses and plastic strains in cylindrical specimens with allowance for surface hardening anisotropy. *Jour. of Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 303–310. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894411020180>

Cite this article as:

Radchenko V. P., Afanaseva O. S., Glebov V. E. Influence of Residual Stresses on Geometric Parameters of Surface-Strengthened Beam. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 464–478 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-464-478>
