



ИНФОРМАТИКА

УДК 517.935.2

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д. К. Андрейченко¹, К. П. Андрейченко², Д. В. Мельничук³,
М. С. Портенко⁴

¹Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, andreichenkodk@gmail.com

²Андрейченко Константин Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., kp_andreichenko@renet.ru

³Мельничук Дмитрий Вадимович, магистрант факультета компьютерных наук и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, meldm007@gmail.com

⁴Портенко Марина Сергеевна, старший преподаватель кафедры информатики и программирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, msportenko@gmail.com

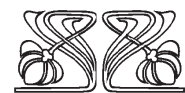
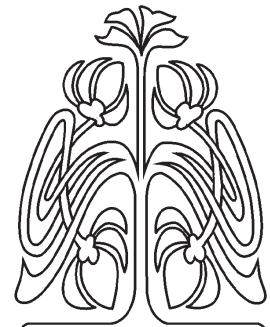
Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой связанные посредством граничных условий и условий связи системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. Под параметрическим синтезом понимают алгоритм выбора значений параметров обратных связей управляемых КДС, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов. В работе предложен адаптивный алгоритм параметрического синтеза управляемых КДС, в котором к множеству параметров оптимизации добавляются параметры желаемой вещественной частотной характеристики.

Ключевые слова: параметрический синтез, комбинированные динамические системы.

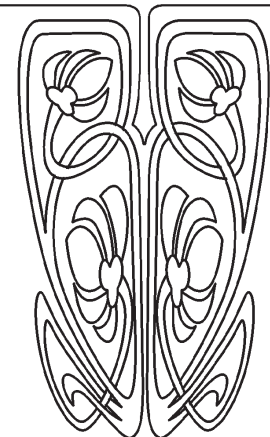
DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475

ВВЕДЕНИЕ

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях [1, 2]. Основные теоремы об устойчивости КДС сформулированы и доказаны в [1, 2], а необходимые для их применения теоремы об аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС — в [3]. Различные варианты параметрического синтеза управляемых КДС, т.е. алгоритма выбора



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





значений параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, рассмотрены в [2, 4–6]. Целью данной работы является развитие адаптивного алгоритма параметрического синтеза, в котором к множеству параметров оптимизации добавляются параметры «желаемой» вещественной частотной характеристики.

1. УПРАВЛЯЕМЫЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

На рис. 1 приведена структурная схема управляемой КДС с входной вектор-функцией $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ и характеризующей движение объектов управления с сосредоточенными по пространству параметрами выходной вектор-функцией $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$, где t — время. Здесь ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения, УЧП — уравнения в частных производных, ГУ — граничные условия, УС — условия связи, НУ — начальные условия. Уравнения движения КДС можно привести к виду, аналогичному [2, с. 8]

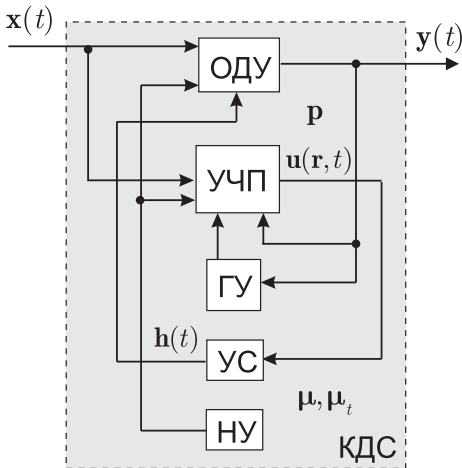


Рис. 1. Структурная схема КДС

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) dS, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})|_S = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (3)$$

Причем $\mathbb{H}(0, \boldsymbol{\mu}) \equiv 0$, $\mathbf{f}(0, 0, 0, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t) \equiv 0$, $\mathbb{F}(0, 0, 0, 0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t) \equiv 0$, $\mathbb{G}(0, 0, \boldsymbol{\mu}) \equiv 0$. Здесь $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_r}$ — независимые пространственные координаты, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$ — область, занятая объектами с распределенными по пространству параметрами, $S = \partial\Omega$ — граница области, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ характеризует движение объектов с распределенными по пространству параметрами, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_y} \times \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_\mu} \times \mathbb{R}^{N_t} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$, операторы \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} соответствуют уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи; $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$ — параметры обратных связей, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{N_\mu}$ — параметры типовых нелинейностей, $\boldsymbol{\mu}_t \in \mathbb{R}^{N_t}$ — параметры, характеризующие нестационарность, $(\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt$ либо $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$. Функция \mathbf{f} и операторы \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} достаточное число раз дифференцируемы по всем своим аргументам. При $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_t = 0$ КДС (1)–(3) является линейной и стационарной, т.е.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, 0, 0) = B(\mathbf{p})\mathbf{x} + C(\mathbf{p})\mathbf{y} + A(\mathbf{p})\mathbf{h}, \quad \mathbb{H}(\mathbf{u}, 0) = \mathbb{L}^{(H)}\mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, 0, 0) = \mathbb{L}_1^{(F)}\mathbf{u} + L_2^{(F)}\mathbf{x} + L_3^{(F)}\mathbf{y} + L_4^{(F)}\dot{\mathbf{y}}, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, 0) = \mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u} + L_2^{(G)}\mathbf{y}.$$

Здесь $A(\mathbf{p})$, $B(\mathbf{p})$, $C(\mathbf{p})$ — матрицы, элементы которых не зависят от координат \mathbf{r} ; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ — матрицы, элементы которых могут зависеть от координат \mathbf{r} , а линейные операторы $\mathbb{L}_1^{(F)}$, $\mathbb{L}_1^{(G)}$, $\mathbb{L}^{(H)}$ соответствуют линеаризованным уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи. После выполнения одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени t $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ уравнения линейной стационарной КДС принимают вид (5) и далее аналогично [2] либо [3, формулы (4)–(12)], динамическая модель КДС сводится к матрице передаточных функций (6):

$$\lambda \tilde{\mathbf{y}} = B(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}} + C(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{y}} + A(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{h}}, \quad \tilde{\mathbf{h}} = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\tilde{\mathbf{u}}) dS, \quad (5)$$

$$\lambda \tilde{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}\tilde{\mathbf{u}} + L_2^{(F)}\tilde{\mathbf{x}} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\tilde{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (\mathbb{L}_1^{(G)}\tilde{\mathbf{u}} + L_2^{(G)}\tilde{\mathbf{y}})|_S = 0;$$

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})/D(\lambda, \mathbf{p})], \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}, \quad \Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_y, N_x)}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda, \mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad D(\bar{\lambda}, \mathbf{p}) = \overline{D(\lambda, \mathbf{p})}, \quad Q_{kj}(\bar{\lambda}, \mathbf{p}) = \overline{Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})}.$$

Аналитичность характеристического и возмущающих квазимногочленов $D(\lambda, \mathbf{p})$ и $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})$ при $\text{Re} \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$ устанавливается методами [3]. Обобщенная степень $n \in \mathbb{R}$ (обычно $n = N_u$)



квазимногочлена $D(\lambda, \mathbf{p})$ определяется из условия [2]

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda, \mathbf{p}) = C_a(\mathbf{p}), \quad 0 < |C_a(\mathbf{p})| < \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda > \sigma_0, \quad \sigma_0 \in (-\infty, 0).$$

Пусть $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^{N_p}$ — область устойчивости. Из теорем [1, 2] следуют быстрый алгоритм проверки устойчивости и уравнения возможных границ области устойчивости:

$$\mathbf{p} \in \Omega_{st} \Leftrightarrow \Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega, \mathbf{p}) = n\pi/2, \quad (7)$$

$$\partial\Omega_{st} \subset \{\mathbf{p} : \operatorname{Re} D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, \operatorname{Im} D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, 0 \leq \omega < \infty\}.$$

2. АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Параметрический синтез основан на минимизации среднеквадратического отклонения вещественной частотной характеристики системы от желаемой вещественной частотной характеристики [2, 4–6] и выполняется посредством минимизации функции

$$F : \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \mathbf{p} \in \Omega_{st}, \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega_{st}; \end{cases} \quad (8)$$

$$f(\mathbf{p}) = \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0)\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p})\|^{-2} \right) \int_0^\infty f(\omega, \mathbf{p}) d\omega,$$

$$f(\omega, \mathbf{p}) = \|R_A(\omega, \mathbf{p}) - R_A(0, \mathbf{p})R_A^*(\omega)\|^2 + c_1 \|R_A'(\omega, \mathbf{p}) - R_A(0, \mathbf{p})R_A^{*'}(\omega)\|^2 + c_2 \|R_A''(\omega, \mathbf{p}) - R_A(0, \mathbf{p})R_A^{*''}(\omega)\|^2, \quad (\cdot)' = d(\cdot)/d\omega,$$

$$R_A(\omega, \mathbf{p}) = [R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p})], \quad R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} \operatorname{Re} \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} \operatorname{Re}[\Psi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p})], & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$R_A^*(\omega) = \operatorname{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\}, \quad R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p})|^2 \right]^{1/2}, \quad \Psi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda} \Phi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}), \quad \nu = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x};$$

$$R^*(\omega) = [1 - (t_0\omega)^2]/[1 + (t_0\omega)^4]. \quad (10)$$

Здесь $c_1 = 0.003 \div 0.01$, $c_2 = 0.001 \div 0.003$, $\mathbf{p}_0 \in \Omega_{st}$ — значения параметров обратных связей в момент старта параметрического синтеза. Для минимизации целевой функции (8) используется безградиентный метод Нелдера – Мида. Обобщением (10) может служить «желаемая» вещественная частотная характеристика

$$R^*(\omega) = (1 + \alpha^2)[1 + \alpha^2 - 2(t_0\omega)^2]\{[1 + \alpha^2 - 2(t_0\omega)^2]^2 + 8(t_0\omega)^2\}^{-1}, \quad (11)$$

$$t_0^{(\min)} \leq t_0 \leq t_0^{(\max)}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}.$$

В адаптивном алгоритме параметрического синтеза t_0 и α вносятся в пространство параметров оптимизации, и выполняется минимизация функции $F : \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \in \Omega_{st} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}], \\ +\infty, & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \notin \Omega_{st} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}], \end{cases} \quad (12)$$

где $f(\mathbf{p})$ определяется в соответствии с (9), а вместо (10) используется (11).



3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД МНОГИХ МАСШТАБОВ

Пусть в (1), (2) $\mu \rightarrow 0$, $\mu_t \rightarrow 0$, но требуется изучить поведение системы вплоть до значений времени, когда влияние малых параметров становится существенным, т. е.

$$\begin{aligned} \mu &= \mu\mu^*, \quad \mu_t = \mu\mu_t^*, \quad \mu^* = O(1), \quad \mu_t^* = O(1), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \rightarrow +0, \quad 0 \leq t \leq O(1/\mu), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, \mu, \mu t), \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \mu, \mu t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mu)|_S &= 0, \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \mu) dS, \quad \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Полагаем, что уравнения (13) учитывают малое, но конечное демпфирование, значительно превосходящее характерную величину параметра μ . Аналогично (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, 0, t_1) &= B(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{x} + C(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{y} + A(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{h}, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, 0) = \mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(G)}\mathbf{y}, \\ \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, 0, t_1) &= \mathbb{L}_1^{(F)}(t_1)\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(F)}(t_1)\mathbf{x} + \mathbb{L}_3^{(F)}(t_1)\mathbf{y} + \mathbb{L}_4^{(F)}(t_1)\dot{\mathbf{y}}, \quad \mathbb{H}(\mathbf{u}, 0) = \mathbb{L}^{(H)}\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь матрицы $A, B, C, \mathbb{L}_2^{(F)}, \mathbb{L}_3^{(F)}, \mathbb{L}_4^{(F)}$ и линейный оператор $\mathbb{L}_1^{(F)}$ могут зависеть от «медленного» времени $t_1 = \mu t$. Для асимптотического интегрирования (13) воспользуемся методом «многих масштабов» [7] и будем полагать

$$\begin{aligned} t_j &= \mu^j t, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad t_0 \equiv t, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \mathbf{u}_j(\mathbf{r}, t_0, t_1, t_2, \dots), \\ \mathbf{y}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \mathbf{y}_j(t_0, t_1, t_2, \dots), \quad \mathbf{h}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \mathbf{h}_j(t_0, t_1, t_2, \dots), \quad (\dot{}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \partial(\cdot)/\partial t_j. \end{aligned} \tag{15}$$

Подстановка формальных степенных рядов (15) в (13) и приравнивание слагаемых при одинаковых степенях малого параметра μ с учетом (14) приводит к результату:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{y}_0 / \partial t_0 &= B(\mathbf{p}t_1)\mathbf{x} + C(\mathbf{p}t_1)\mathbf{y}_0 + A(\mathbf{p}t_1)\mathbf{h}_0, \quad \mathbf{h}_0 = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{u}_0 dS, \\ \partial \mathbf{u}_0 / \partial t_0 &= \mathbb{L}_1^{(F)}(t_1)\mathbf{u}_0 + \mathbb{L}_2^{(F)}(t_1)\mathbf{x} + \mathbb{L}_3^{(F)}(t_1)\mathbf{y}_0 + \mathbb{L}_4^{(F)}(t_1)\partial \mathbf{y}_0 / \partial t_0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ (\mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u}_0 + \mathbb{L}_2^{(G)}\mathbf{y}_0)|_S &= 0; \quad \mathbf{y}_0(0, 0, \dots) = 0, \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, 0, 0, \dots) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

В качестве начальных условий $\mathbf{y}_0|_{t_0=0} = \mathbf{f}_1(t_1, t_2, \dots)$, $\mathbf{u}_0|_{t_0=0} = \mathbf{f}_2(\mathbf{r}, t_1, t_2, \dots)$ можно задать любые достаточно гладкие функции \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 параметров t_1, t_2, \dots , такие, что $\mathbf{f}_1(0, 0, \dots) = 0$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{r}, 0, 0, \dots) \equiv 0$. При учете малого, но конечного демпфирования и асимптотической устойчивости (16) влияние $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ будет экспоненциально затухать с ростом t_0 и с учетом (15) будет иметь порядок $O(\mu)$ при $0 \leq t \leq O(1/\mu)$. Можно полагать $\mathbf{y}_0(0, t_1, t_2, \dots) = 0$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, 0, t_1, t_2, \dots) = 0$, т. е. $\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{h}_0$ зависят лишь от t_0 и t_1 , и

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t, \mu t) + O(\mu), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t, \mu t) + O(\mu), \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0(t, \mu t) + O(\mu), \quad 0 \leq t \leq O(1/\mu).$$

Здесь функции $\mathbf{y}_0(t, t_1), \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t, t_1), \mathbf{h}_0(t, t_1)$ — решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= B(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{x} + C(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{y} + A(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{h}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}(t_1)\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(F)}(t_1)\mathbf{x} + \mathbb{L}_3^{(F)}(t_1)\mathbf{y} + \mathbb{L}_4^{(F)}(t_1)\dot{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{r} \in \Omega, \quad (\mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(G)}\mathbf{y})|_S &= 0, \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{u} dS, \quad \mathbf{y}(0) = 0, \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

зависящих от параметра t_1 . Пусть при $t \geq 0$ $|\mathbf{x}(t)| < \infty$. Для справедливости асимптотических разложений необходимо, в частности, условие асимптотической устойчивости КДС (17) при всех $0 \leq t_1 \leq O(1)$.

После выполнения интегрального преобразования Лапласа по времени t линеаризованная модель (17) сводится к матрице передаточных функций [3, формулы (4)–(12)]

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}, t_1) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, t_1)/D(\lambda, \mathbf{p}, t_1)], \quad \tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda, \mathbf{p}, t_1)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad t_1 = \mu t, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x},$$



которая зависит от «медленного» времени. Аналогично КДС (1)–(3) со слабой нелинейностью и нестационарностью с асимптотической погрешностью $O(|\mu|) = O(|\mu_t|)$ отображается в семейство линейных стационарных КДС с матрицей передаточных функций:

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{t}_1) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{t}_1)/D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{t}_1)], \quad \mathbf{t}_1 = \mu_t t, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}.$$

4. СИНТЕЗ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ КДС

Пусть линеаризованная модель КДС задается матрицей передаточных функций:

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})/D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})], \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x},$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$ — параметры обратных связей, $\mathbf{s} \in \Omega_s \subset \mathbb{R}^{N_s}$ — конструктивные параметры. Пусть $\Omega_{st} = \Omega_{st}(\mathbf{s}) \subset \mathbb{R}^{N_p}$ — область устойчивости, $\Omega^{(st)} = \bigcap_{\mathbf{s} \in \Omega_s} \Omega_{st}(\mathbf{s})$, причем

$$\mathbf{p} \in \Omega_{st}(\mathbf{s}) \Leftrightarrow \Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = n\pi/2, \quad \mathbf{p} \in \Omega^{(st)} \Leftrightarrow \forall \mathbf{s} \in \Omega_s \quad \mathbf{p} \in \Omega_{st}(\mathbf{s}).$$

Требуется выбрать параметры \mathbf{p} так, чтобы улучшить качество переходных процессов сразу для всех линейных моделей КДС при $\mathbf{s} \in \Omega_s$. После применения метода «многих масштабов» к КДС (1)–(3) при выполнении параметрического синтеза семейства линеаризованных моделей КДС в множество компонент вектора \mathbf{s} включаются либо непосредственно «медленные времена» $\mathbf{t}_1 = \mu_t t$, либо характерные параметры задачи, которые изменяются в зависимости от \mathbf{t}_1 . Обобщением (8) служит параметрический синтез семейства линеаризованных моделей КДС [5] ($R^*(\omega)$ определено согласно (10))

$$F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \mathbf{p} \in \Omega^{(st)}, \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega^{(st)}; \end{cases} \quad (18)$$

$$f(\mathbf{p}) = \int_{\Omega_s} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds_1 \dots ds_{N_s},$$

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{s})\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{s})\|^2 \right) \int_0^\infty f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) d\omega,$$

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) = \|R_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^*(\omega)\|^2 +$$

$$+ c_1 \|R'_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^{*'}(\omega)\|^2 + c_2 \|R''_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^{*''}(\omega)\|^2,$$

$$(\cdot)' = d(\cdot)/d\omega, \quad R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \begin{cases} \operatorname{Re} \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} \operatorname{Re}[\Psi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s})], & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$R_A^*(\omega) = \operatorname{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\}, \quad R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})|^2 \right]^{1/2}, \quad \Psi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{\lambda} \Phi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}), \quad \nu = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}.$$

При $\mathbf{p} \in \Omega^{(st)}$ функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ является достаточно гладкой, и при вычислении $f(\mathbf{p})$ используются квадратурные формулы с постоянным числом узлов. В адаптивном алгоритме вместо (10) используется «желаемая» вещественная частотная характеристика (11), $f(\mathbf{p})$ вычисляется на основе (19), параметры t_0, α вносятся в пространство параметров оптимизации и минимизируется функция $F: \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \in \Omega^{(st)} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}], \\ +\infty, & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \notin \Omega^{(st)} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}]. \end{cases} \quad (20)$$

5. ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$, $\mathbf{W}_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$, $k = 1, 2, \dots$ — полная система функций в области Ω ; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_S)$, $\Gamma_k: S \rightarrow \mathbb{R}^{N_G}$, $k = 1, 2, \dots$ — полная система функций на $S = \partial\Omega$. Полагаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega + N_S} u_k(t) \mathbf{W}_k(\mathbf{r}). \tag{21}$$

Для того чтобы приближенно выполнить уравнения (2), требуем [2] выполнение следующих условий:

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t) \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega, \quad k = \overline{1, N_\Omega},$$

$$\int_S \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS = 0, \quad k = \overline{1, N_S}, \tag{22}$$

где $(\cdot) \cdot (\cdot)$ — скалярное произведение векторов соответствующей размерности. Из (1), (3), (22), (21) следует задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая далее интегрируется численно «жестко устойчивым» ФДН-методом:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(0) = 0, \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N_y}, u_1, u_2, \dots, u_{N_u})^T.$$

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

Пусть поворот системы координат характеризуется углами $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, и

$$A(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

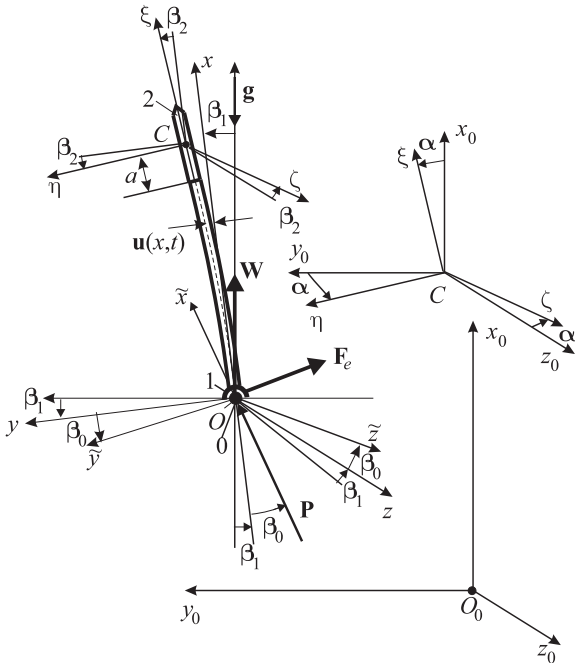


Рис. 2. Расчетная схема

Рассмотрим систему угловой стабилизации подвижного объекта управления — ракеты с учетом упругих деформаций ее корпуса (рис. 2).

Объект движется относительно неподвижной системы координат $O_0x_0y_0z_0$ под действием силы \mathbf{P} , притяжения к Земле и возмущающей силы $\mathbf{F}_e = (0, F_{e_{y_0}}, F_{e_{z_0}})^T$. Система координат $Oxyz$ связана с телом 1, а $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ и $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{1,3})^T$ характеризуют его линейные и угловые перемещения относительно $O_0x_0y_0z_0$. Линейные $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ и угловые $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \beta_{2,3})^T$ смещения тела 2 относительно $Oxyz$ вызваны упругими перемещениями $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T = \mathbf{u}(x, t)$ осевой линии корпуса. Углы поворота $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ тела 2 относительно $O_0x_0y_0z_0$ измеряет гиросtabilизатор, и формируются управляющие моменты M_{c_2} и M_{c_3} , под действием которых тело 0 поворачивается на углы $\boldsymbol{\beta}_0 = (0, \beta_{0,2}, \beta_{0,3})^T$ относительно $Oxyz$.



Пусть $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z})^T$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = (\Omega_{1x}, \Omega_{1y}, \Omega_{1z})^T$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = (\Omega_{2x}, \Omega_{2y}, \Omega_{2z})^T$ — относительная и абсолютные угловые скорости тел 0, 1, 2, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$, $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)^T$ — действующие в поперечных сечениях корпуса внутренние силы и моменты сил. После приведения к безразмерным переменным модельные уравнения КДС принимают вид

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Omega}_1 &= B(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_1) \dot{\boldsymbol{\beta}}_1, & \boldsymbol{\Omega}_2 &= A^T(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_2) \boldsymbol{\Omega}_1 + B(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_2) \dot{\boldsymbol{\beta}}_2, & E &= \text{diag}\{1, 1, 1\}, \\
 \omega_{0x} &= -\dot{\beta}_{0,2} \sin(\mu_1 \beta_{0,3}), & \omega_{0y} &= \dot{\beta}_{0,2} \cos(\mu_1 \beta_{0,3}), & \omega_{0z} &= \dot{\beta}_{0,3}, \\
 m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= A(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_1) \mathbf{Q}(0, t) - \mathbf{F}_e + a_x [(1 + m_2) A(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_1) \boldsymbol{\Phi}(0, \boldsymbol{\beta}_0) + m_1 \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_0)], \\
 \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \mu_1^{-1} (A(\mu_1 \boldsymbol{\alpha}) A(\mu_1 \boldsymbol{\beta}) - E) (1, 0, 0)^T = (\Phi_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \Phi_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))^T, \\
 J_0(\dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0) + J^{(1)} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1 \times (J_0 \boldsymbol{\omega}_0 + J^{(1)} \boldsymbol{\Omega}_1) &= \mathbf{M}(0, t), & J^{(1)} &= \text{diag}\{J_{1k}, J_1, J_1\}, \\
 J_0[\dot{\Omega}_{1y} + \dot{\omega}_{0y} + \mu_1(\Omega_{1z} \omega_{0x} - \Omega_{1x} \omega_{0z})] &= M_2^{(c)} \cos(\mu_1 \beta_{0,3}) + M_3^{(c)} \sin(\mu_1 \beta_{0,3}) \times \\
 &\times \sin(\mu_1 \beta_{0,2}), & J_0[\dot{\Omega}_{1z} + \dot{\omega}_{0z} + \mu_1(\Omega_{1x} \omega_{0y} - \Omega_{1y} \omega_{0x})] &= M_3^{(c)} \cos(\mu_1 \beta_{0,2}), \\
 \alpha_2 &= -\frac{1}{\mu_1} \arcsin(\mu_1 \Phi_3(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1)), & \alpha_3 &= \frac{1}{\mu_1} \arcsin \frac{\mu_1 \Phi_2(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{\cos(\mu_1 \alpha_2)}, & f_1(z) &= \text{tg } z, \\
 M_3^{(c)} &= \mathbb{S}_3[\alpha_3] - p_1 \dot{\beta}_{0,3} - p_2 \mu_2^{-1} f_1(\mu_2 \beta_{0,3}), & M_2^{(c)} &= \mathbb{S}_2[\alpha_2] - p_6 \dot{\beta}_{0,2} - p_7 \mu_2^{-1} f_1(\mu_2 \beta_{0,2}), \\
 \mathbb{S}_3[\alpha] &= \frac{1}{\mu_3} f_2(\mu_3 \mathbb{S}_3^{(L)}[\alpha]), & \mathbb{S}_3^{(L)}[\alpha] &= p_3 \frac{d\alpha}{dt} + p_4 \alpha + p_5 \int_0^t \alpha(\xi) d\xi, \\
 \mathbb{S}_2[\alpha] &= \frac{1}{\mu_3} f_2(\mu_3 \mathbb{S}_2^{(L)}[\alpha]), & \mathbb{S}_2^{(L)}[\alpha] &= p_8 \frac{d\alpha}{dt} + p_9 \alpha + p_{10} \int_0^t \alpha(\xi) d\xi, & f_2(z) &= \text{th } z, \\
 m_2 \mathbf{w}_2 &= a_x m_2 [\boldsymbol{\Phi}(0, \mu_1(0, \beta_{2,2}, \beta_{2,3}))^T - \boldsymbol{\Phi}^*(0, \mu_1 \boldsymbol{\beta}_1)] - A(\mu_1(0, \beta_{2,2}, \beta_{2,3}))^T \mathbf{Q}(1, t), \\
 \mathbf{w}_2 &= A^T(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_1) \ddot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \mathbf{R}_2 + \mu_1(\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathbf{R}_2) \boldsymbol{\Omega}_1 - \mu_1 \Omega_{1x}^2 \mathbf{R}_2 - 2\mu_1 \boldsymbol{\Omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2 + \ddot{\mathbf{r}}_2, \\
 \boldsymbol{\Phi}^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \mu_1^{-1} (A^T(\mu_1 \boldsymbol{\alpha}) A^T(\mu_1 \boldsymbol{\beta}) - E) (1, 0, 0)^T = (\Phi_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \Phi_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \Phi_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))^T, \\
 J^{(2)} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 + \mu_1 \boldsymbol{\Omega}_2 \times J^{(2)} \boldsymbol{\Omega}_2 &= -A^T((\mu_1 \boldsymbol{\beta}_{2,1}, 0, 0)^T) \mathbf{M}(1, t) + (a, 0, 0)^T \times \\
 &\times A^T((\mu_1 \boldsymbol{\beta}_{2,1}, 0, 0)^T) \mathbf{Q}(1, t), & \mathbf{R}_2 &= (1 + a, 0, 0)^T + \mu_1 \mathbf{r}_2, & J^{(2)} &= \text{diag}\{J_{2k}, J_2, J_2\};
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \frac{1}{\mu_1} \left[(1 - \mu_1^2 (u_y'^2 + u_z'^2))^{1/2} - 1 \right], & L_{21} &= \mu_1 u'_y, & L_{31} &= \mu_1 u'_z, & L_{33} &= (1 - L_{31}^2)^{1/2}, \\
 L_{11} &= (L_{33}^2 - L_{21}^2)^{1/2}, & L_{12} &= -L_{21}/L_{33}, & L_{22} &= L_{11}/L_{33}, & L_{13} &= -L_{31} L_{22}, & L_{23} &= L_{31} L_{12}, \\
 \kappa_1 &= u'_z (L_{12} L'_{22} - L_{22} L'_{12}), & \kappa_2 &= u'_z L_{22} L'_{11} - u_y'' L_{23} - u_z'' L_{33}, & \kappa_3 &= -u_y' \frac{L'_{11}}{L_{33}} + u_y'' L_{22}, \\
 \ddot{u}_y + (A^T(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_1) \ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot (0, 1, 0)^T - (\mu_1 \dot{\Omega}_{1x} u_z - \dot{\Omega}_{1z} (x + \mu_1 u_x)) + \\
 + \mu_1 [(x + \mu_1 u_x) \Omega_{1x} + \mu_1 u_z \Omega_{1z}] \Omega_{1y} - \mu_1^2 (\Omega_{1x}^2 + \Omega_{1z}^2) u_y + 2\mu_1 (\Omega_{1x} \dot{u}_z - \Omega_{1z} \dot{u}_x) = \\
 = L_{21} (Q'_1 + \mu_1 (\kappa_2 Q_3 - \kappa_3 Q_2)) + L_{22} (Q'_2 - \mu_1 (\kappa_1 Q_3 - \kappa_3 Q_1)) + \\
 + L_{23} (Q'_3 + \mu_1 (\kappa_1 Q_2 - \kappa_2 Q_1)) - a_x [\Phi_2^*(0, \boldsymbol{\beta}_1) + ((m_2 + 1 - x) u_y')'], \\
 \ddot{u}_z + (A^T(\mu_1 \boldsymbol{\beta}_1) \ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot (0, 0, 1)^T + \mu_1 \dot{\Omega}_{1x} u_y - \dot{\Omega}_{1y} (x + \mu_1 u_x) + \\
 + \mu_1 [(x + \mu_1 u_x) \Omega_{1x} + \mu_1 u_y \Omega_{1y}] \Omega_{1z} - \mu_1^2 (\Omega_{1x}^2 + \Omega_{1y}^2) u_z - 2\mu_1 (\Omega_{1x} \dot{u}_y - \Omega_{1y} \dot{u}_x) = \\
 = L_{31} (Q'_1 + \mu_1 (\kappa_2 Q_3 - \kappa_3 Q_2)) + L_{33} (Q'_3 + \mu_1 (\kappa_1 Q_2 - \kappa_2 Q_1)) - \\
 - a_x [\Phi_3^*(0, \boldsymbol{\beta}_1) + ((m_2 + 1 - x) u_z')'], \\
 Q''_1 - \mu_1^2 (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) Q_1 = \mu_1 \{-a_x (m_2 + 1 - x) (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) + \kappa'_3 Q_2 - \kappa'_2 Q_3 + \\
 + 2\kappa_3 Q'_2 - 2\kappa_2 Q'_3 - \mu_1 \kappa_1 (\kappa_2 Q_2 + \kappa_3 Q_3) - (\dot{u}_x'^2 + \dot{u}_y'^2 + \dot{u}_z'^2) + \\
 + (\Omega_{1x} L_{11} + \Omega_{1y} L_{21} + \Omega_{1z} L_{31})^2 - (\Omega_{1x}^2 + \Omega_{1y}^2 + \Omega_{1z}^2) + \\
 + 2[L_{11} (\Omega_{1y} \dot{u}'_z - \Omega_{1z} \dot{u}'_y) - L_{21} (\Omega_{1x} \dot{u}'_z - \Omega_{1z} \dot{u}'_x) + L_{31} (\Omega_{1x} \dot{u}'_y - \Omega_{1y} \dot{u}'_x)]\}, & (\cdot)' &= \partial(\cdot)/\partial x; \\
 u_y(0, t) &= 0, & u'_y(0, t) &= 0, & u_y(1, t) &= y_2 - a \Phi_2(0, \boldsymbol{\beta}_2), & u'_y(1, t) &= \cos(\mu_1 \beta_{2,2}) \frac{\sin(\mu_1 \beta_{2,3})}{\mu_1}, \\
 u_z(0, t) &= 0, & u'_z(0, t) &= 0, & u_z(1, t) &= z_2 - a \Phi_3(0, \boldsymbol{\beta}_2), & u'_z(1, t) &= -\frac{1}{\mu_1} \sin(\mu_1 \beta_{2,2}),
 \end{aligned} \tag{25}$$



$$\begin{aligned}
 Q'_1(0, t) + \mu_1(\kappa_2(0, t)Q_3(0, t) - \kappa_3(0, t)Q_2(0, t)) &= \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot A(\mu_1\beta_1)(1, 0, 0)^T + \\
 + a_x\Phi_1^*(0, \beta_1), \quad Q'_1(1, t) + \mu_1(\kappa_2(1, t)Q_3(1, t) - \kappa_3(1, t)Q_2(1, t)) &= a_x\Phi_1^*(\beta_2, \beta_1) + \\
 + \mu_1a(\Omega_{2\eta}^2 + \Omega_{2\zeta}^2) + (1, 0, 0)^T \cdot A^T(\mu_1\beta_2)w_2, \quad x_2 &= u_x(1, t) + a\Phi_1(0, \beta_2); \\
 M_1 = I_k \left(\beta_{2,1} + \gamma\dot{\beta}_{2,1} - \int_0^1 \kappa_1 dx \right), \quad M_2 = \kappa_2 - \gamma\dot{u}_z'', \quad M_3 = \kappa_3 + \gamma\dot{u}_y'', & \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= -M'_3 + \mu_1(\kappa_2M_1 - \kappa_1M_2), \quad Q_3 = M'_2 + \mu_1(\kappa_3M_1 - \kappa_1M_3); \\
 \beta_1(0) = \dot{\beta}_1(0) = \beta_2(0) = \dot{\beta}_2(0) = \beta_{0,2}(0) = \dot{\beta}_{0,2}(0) = \beta_{0,3}(0) = \dot{\beta}_{0,3}(0) = & \\
 = \mathbf{r}_1(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_2(0) = z_2(0) = \dot{z}_2(0) = u_y(x, 0) = \dot{u}_y(x, 0) = u_z(x, 0) = \dot{u}_z(x, 0) = 0. & \quad (27)
 \end{aligned}$$

Здесь входная и выходная вектор-функции суть $\mathbf{x}(t) = (F_{e_{y_0}}(t), F_{e_{z_0}}(t))^T$, $\mathbf{y}(t) = (\beta_{1,3}(t), \beta_{2,3}(t), \beta_{1,2}(t), \beta_{2,2}(t))^T$, параметры обратных связей $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{10})^T$, (23) — обыкновенные дифференциальные уравнения, (24) — уравнения в частных производных, (25) — граничные условия, (26) — условия связи, (27) — начальные условия, вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$ характеризует типовые нелинейности, $\mu_t = \{\mu_4\}$, параметр $\mu_4 \in [0, \infty)$ характеризует изменение перегрузки по закону $a_x(t) = a_x^{(\min)} + (a_x^{(\max)} - a_x^{(\min)})e^{-\mu_4 t}$, $t \geq 0$. При $\mu = 0$ (23)–(27) линеаризуются и распадаются на два независимых подмножества, которые переходят друг в друга. В линейной стационарной КДС $a_x = Const$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$.

При моделировании системы стабилизации приняты значения параметров

$$J_0 = 0.00003, \quad m_1 = 0.0667, \quad J_1 = 0.00009728, \quad m_2 = 0.333, \quad J_2 = 0.00345, \quad (28)$$

$$J_0 = 0.02, \quad m_1 = 0.3, \quad J_1 = 0.07, \quad m_2 = 0.2, \quad J_2 = 0.05. \quad (29)$$

Также принято $\gamma = 0.01$, $a = 0.166667$, $J_{2k} = 0.2$, $J_k = 2$, $a_x^{(\min)} = 0.2$, $a_x^{(\max)} = 2$, $F_{e_{y_0}}(t) = 1(t)$, $F_{e_{z_0}}(t) = 1(t) - 1(t - 1)$, где $1(t)$ — функция единичного скачка Хевисайда.

На рис. 3 показаны границы (7) областей устойчивости в плоскости $p_1 = 3$, $p_2 = 10$, $p_3 = 6$ для набора параметров (28) и в плоскости $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 5.3$, для набора параметров (29). Пересечение областей устойчивости $\Omega^{(st)}$ выделено затенением.

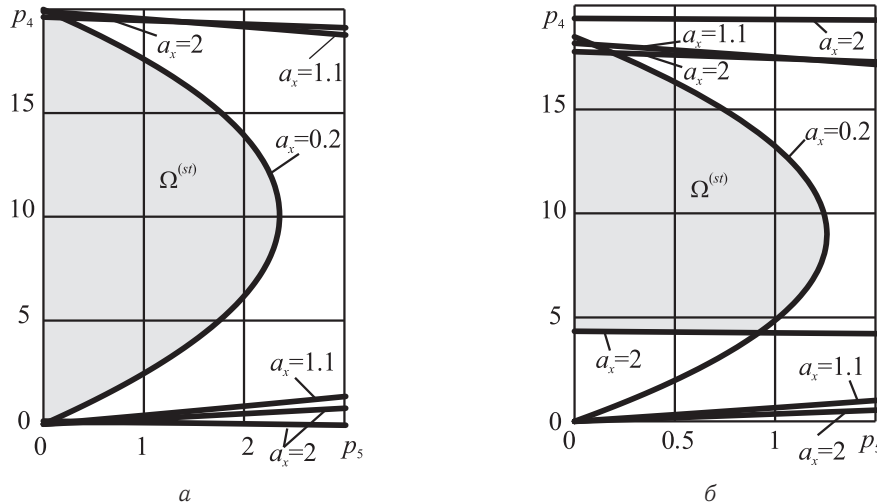


Рис. 3. Области устойчивости: а — для параметров (28), б — для параметров (29)

Параметрический синтез семейства линеаризованных моделей КДС выполнялся в предположении $\mathbf{s} = \{a_x\}$, $\Omega_s = [a_x^{(\min)}, a_x^{(\max)}]$. На рис. 4 приведена зависимость от времени компоненты $\beta_{1,3}(t)$ выходной вектор-функции линейной стационарной модели ($a_x = Const$) до выполнения параметрического синтеза (показана пунктиром, $p_1 = 3$, $p_2 = 10$, $p_3 = 6$, $p_4 = 10$, $p_5 = 1$ для набора параметров (28) и $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 5.3$, $p_4 = 10$, $p_5 = 0.65$ для набора параметров (29)), после выполнения параметрического синтеза на основе (18) (показана штриховой линией, $t_0 = 1$, $p_1 = 2.987$, $p_2 = 4.451$, $p_3 = 4.793$, $p_4 = 1.986$, $p_5 = 1.986$ для набора параметров (28) и $t_0 = 1$, $p_1 = 2.462$, $p_2 = 3.484$, $p_3 = 7.265$, $p_4 = 3.972$, $p_5 = 0.9145$ для набора параметров (29)) и после выполнения параметрического синтеза согласно (20) (показана сплошной линией, $t_0^{(\min)} = 0.05$, $t_0^{(\max)} = 3$, $\alpha_{\max} = 4$, $p_1 = 3.090$,



$p_2 = 5.008, p_3 = 5.720, p_4 = 2.392, p_5 = 0.5052$ для набора параметров (28) и $t_0^{(\min)} = 0.05, t_0^{(\max)} = 3, \alpha_{\max} = 7, p_1 = 3.226, p_2 = 4.428, p_3 = 9.420, p_4 = 3.871, p_5 = 0.8052$ для набора параметров (29).

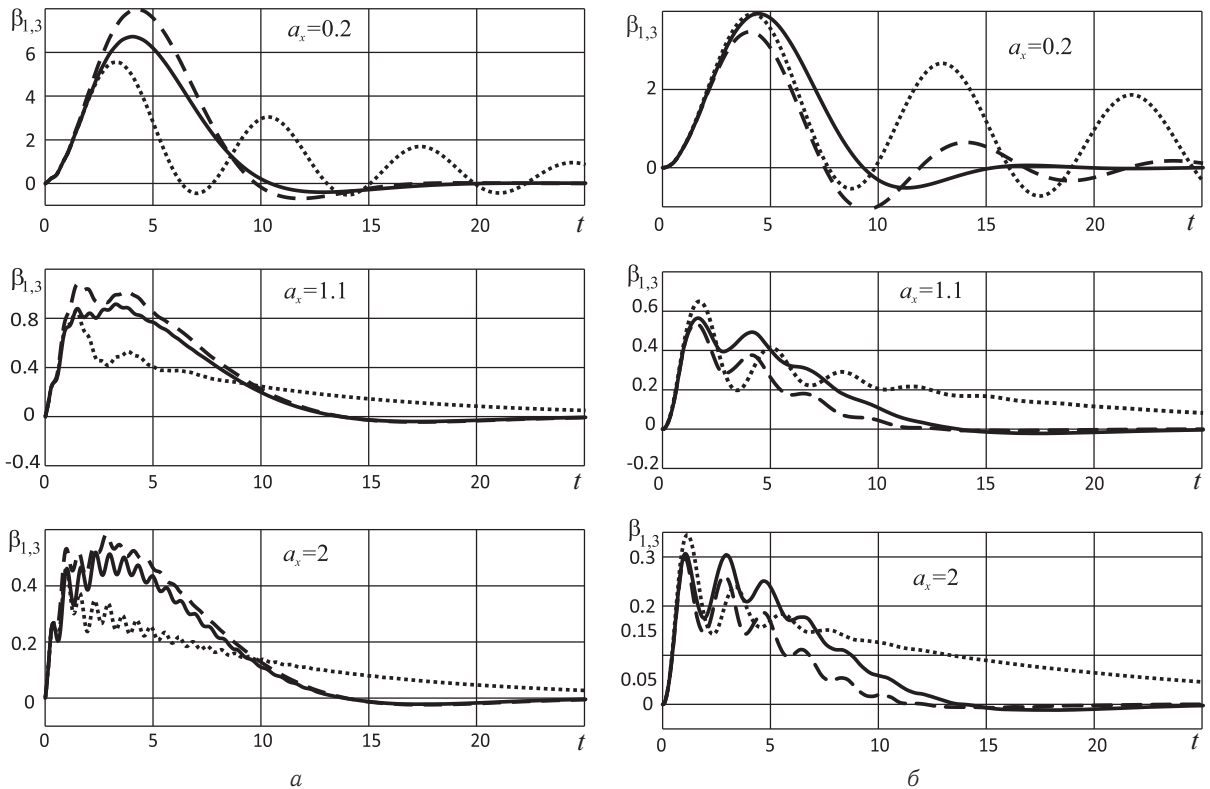


Рис. 4. Выходные функции: а — для параметров (28), б — для параметров (29)

Области устойчивости в пространстве параметров обратных связей характеризуются малой протяженностью, однако оба алгоритма параметрического синтеза (18) и (20) позволяют успешно подавить ошибки системы стабилизации во всем диапазоне изменения перегрузок $a_x^{(\min)} \leq a_x \leq a_x^{(\max)}$. В целом адаптивный алгоритм (20) более эффективен.

После параметрического синтеза выполнялось численное моделирование на основе проекционно-го метода Галеркина выходных вектор-функций исходной нелинейной КДС ($p_{k+5} = p_k, k = \overline{1, 5}$). На рис. 5 представлены результаты численного моделирования компоненты $\beta_{1,3}$ выходных вектор-функций исходной нелинейной нестационарной КДС (23)–(27) при $\mu_1 = 0.015, \mu_2 = 0.1, \mu_3 = 0.04, \mu_4 = 0.05$ для набора параметров (28) и при $\mu_1 = 0.05, \mu_2 = 0.12, \mu_3 = 0.05, \mu_4 = 0.05$ для параметров (29) (показаны сплошной линией), а также ее линейного стационарного аналога при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ для параметров (28) и (29) (показаны штриховой линией).

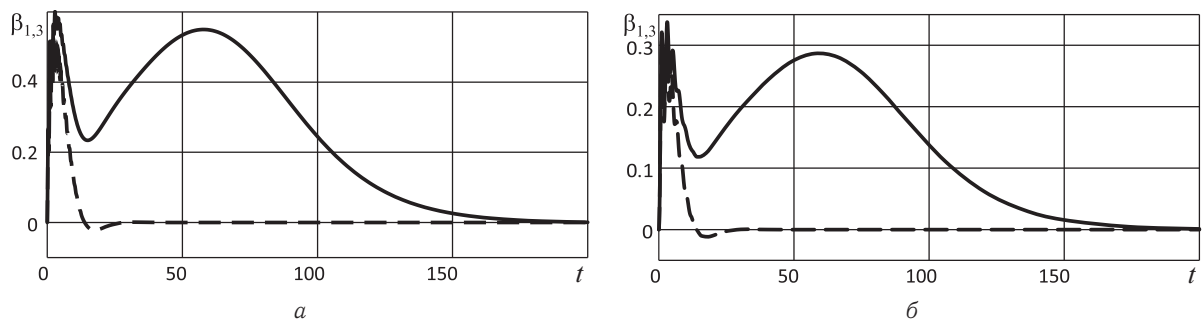


Рис. 5. Выходные функции а — для параметров (28), б — для параметров (29)

Значительное отличие результатов объясняется тем, что безразмерная перегрузка a_x плавно убывает, при уменьшении a_x в рассматриваемом диапазоне изменения перегрузок в линейной стационарной системе затухание переходных процессов уменьшается, а характерная величина выходной



вектор-функции — увеличивается. Тем не менее параметрический синтез по линеаризованной модели позволяет успешно стабилизировать исходную нелинейную систему во всем диапазоне изменения перегрузок.

Библиографический список

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : Райт-Экспо, 2013. 144 с.
3. Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К. Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 208–217. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217.
4. Андрейченко Д. К., Ерофтиев А. А., Мельничук Д. В. Распараллеливание параметрического синтеза по схеме «портфель задач» на основе технологии MPI // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 222–228. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В. Параллельный алгоритм вычисления оптимальных параметров одноканальной системы угловой стабилизации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 109–117.
6. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С. Выбор параметров систем и динамический анализ газореактивных систем стабилизации с упругими стержнями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 101–114.
7. Найфэ А. Н. Методы возмущений. М. : Мир, 1976. 456 с.

Образец для цитирования:

Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С. Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems

D. K. Andreichenko¹, K. P. Andreichenko², D. V. Melnichuk³, M. S. Portenko⁴

¹Dmitry K. Andreichenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, andreichenkodk@gmail.com

²Konstantin P. Andreichenko, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, kp_andreichenko@renet.ru

³Dmitry V. Melnichuk, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, meldm007@gmail.com

⁴Marina S. Portenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, msporkenko@gmail.com

Hybrid dynamical systems (HDS) are connected by means of the boundary conditions and the constraint's conditions systems of ordinary differential equations and partial differential equations with the corresponding initial conditions. Under the parametric synthesis we understand the algorithm for selecting parameters of feedbacks of controlled HDS, providing the required quality of transients. This paper proposes an adaptive algorithm for parametric synthesis of controlled HDS in which the parameters of "desired" real frequency characteristics are added to the set of optimization parameters.

Key words: parametric synthesis, hybrid dynamical systems.

References

1. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, vol. 39, no. 3, pp. 383-398.
2. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. *Modelirovanie, analiz i sintez kombinirovannykh dinamicheskikh sistem. Uchebnoe posobie* [Modeling, analysis and synthesis of combined dynamical systems. Tutorial]. Saratov, Rait-Ekspo Publ., 2013. 144 p. ISBN 978-5-4426-0018-6 (in Russian).
3. Portenko M. S., Melnichuk D. V., Andreichenko D. K. Analyticity conditions of characteristic and disturbing quasipolynomials of hybrid dynamical systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 208–217 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217.



4. Andreichenko D. K., Eroftiev A. A., Melnichuk D. V. Parallelization of parametric synthesis by “problems portfolio” scheme based on MPI technology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 222–228 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
5. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. Parallel algorithm of optimal parameters calculation for the single channel angular stabilization system. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 109–117 (in Russian).
6. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Parameter Selection and Dynamic Analysis of Gas Jet Stabilization Systems with Elastic Rods. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 573–586. DOI: 10.1134/S1064230712030021.
7. Nayfeh A. H. *Perturbation methods*. New York, Wiley, 1973. 425 p. (Russ. ed. : Nayfeh A. *Metody vozmushchenij*. Moscow, Mir, 1976. 456 p.)

Please cite this article in press as:

Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Melnichuk D. V., Portenko M. S. Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 465–475 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

УДК 519.1

ИНДЕКСЫ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ПАЛЬМ

А. В. Жаркова

Жаркова Анастасия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ZharkovaAV3@gmail.com

Рассматривается динамическая система двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм. Дерево называется пальмой, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Данная система в зависимости от размерности состояний разбивается на конечные подсистемы. Состояниями конечной динамической системы являются все возможные ориентации данной пальмы, которые естественным образом кодируются двоичными векторами, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данной ориентации пальмы является ориентация, полученная из исходной путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходной ориентацией пальмы и её образом нет. Предлагается алгоритм вычисления индексов состояний системы, находится глубина бассейна системы заданной размерности.

Ключевые слова: двоичный вектор, глубина, индекс, конечная динамическая система, пальма, сверхстройное (звездобразное) дерево.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-475-484

ВВЕДЕНИЕ

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. Здесь можно выделить следующие три основные конструкции, получившие самостоятельное значение в теории графов: минимальное расширение графа [1], T-неприводимое расширение графа [2], бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [3]. В модели [3] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем, и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [4, 5]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса. В указанных выше работах по отказоустойчивости графовых систем основные результаты получены для систем, в основе которых лежат цепи, циклы и частные типы деревьев. К числу деревьев, для которых найдено описание как минимальных, так и T-неприводимых расширений, относятся пальмы [1, 2]. Дерево