УДК 517.51

КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. М. Водолазов[1], С. Ф. Лукомский[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vam21@yandex.ru

[2]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lukomskiids@info.sgu.ru

Доказано, что локальное поле положительной характеристики есть линейное пространство над конечным полем.

Ключевые слова: локальные поля, конечные поля, кратномасштабный анализ.

ВВЕДЕНИЕ

Последние годы активно изучаются вопросы построения всплесковых базисов на неархимедовых структурах: полях p-адических чисел, группах Виленкина, локальных полях и нуль-мерных группах. При построении всплесковых базисов на локальных полях используются методы, изложенные в [1], которые используют понятие примитивного (prime) элемента. В работах [2–5] получены аналоги некоторых основных фактов и методов классического и p-адического анализа. Приведем наиболее заметные из них. В работе [2] предлагается метод, с помощью которого по известной масштабирующей функции строятся вейвлеты. Этот метод сводится к построению некоторой унитарной матрицы. В работе [3] получены необходимые и достаточные условия, при которых функция будет масштабирубщей для некоторого кратномасштабного анализа (КМА). В работе [4] доказано, что две масштабирующие функции двух сопряженных КМА порождают биортонормированную вейвлет-систему. Отмеченные результаты имеют два существенных недостатка. Во-первых, они относятся только к полям положительной характеристики. Во-вторых, даже в этом случае удается построить только хааровские базисы. Мы хотим предложить иной взгляд на локальные поля положительной характеристики, который должен помочь перенести известные для групп Виленкина результаты на локальные поля.

1. ЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Под локальным полем K понимают топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции «$\dot{+}$», «$\cdot$» — сложения и умножения, для которых выполнены аксиомы поля. K является локально компактным, вполне не связным, не дискретным, полным топологическим пространством.

Так как K — локальное поле, то аддитивная группа K^+ есть локально компактная группа, в ней определены мера Хаара $\mu(x)$, причем $\mu(\alpha x) = |\alpha| \cdot \mu(x)$. Число $|\alpha|$ обладает свойствами:

1) $|\alpha| \geqslant 0$, $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$;
2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$;
3) $|\alpha \dot{+} \beta| \leqslant \max(|\alpha|, |\beta|)$ (ультраметрическое неравенство треугольника).

Поле $\mathbb{Q}_p$ — классический пример локального поля. В группе Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ можно ввести операцию умножения так, что она (группа) станет полем.

В поле K вводят оператор растяжения следующим образом. Единичный шар

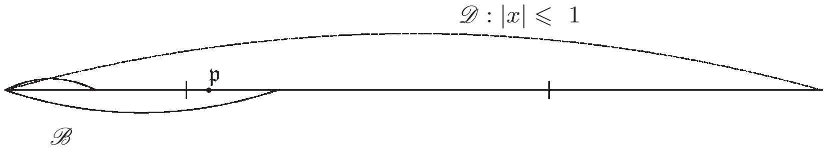
$$\mathscr{D} = \{x \in K : \ |x| \leqslant 1\}, \qquad \mu\mathscr{D} = 1,$$

является кольцом, в котором существует единственный максимальный идеал:

$$\mathscr{B} = \{x \in K : \ |x| < 1\}.$$

Элемент $\mathfrak{p} \in \mathscr{B}$ с наибольшей нормой $|\mathfrak{p}|$ называют примитивным элементом. Для него $\mu\mathscr{B} = |\mathfrak{p}| = \frac{1}{p^s}$, где p — простое, $s \in \mathbb{N}$. Если $x \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{B}$, то $|x| = 1$.

Справедливо равенство $\mathscr{B} = \mathfrak{p}\mathscr{D}$, и фактор кольцо $\mathscr{D}/\mathscr{B}$ изоморфно конечному полю $GF(p^t)$. Таким образом, с каждым локальным полем связано простое число p и пара натуральных s, t. Определенные выше объекты представлены графически на следующем рисунке:



Строение кольца $\mathscr{D}$

Любой элемент $x \in K$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \mathfrak{p}^l = \mathfrak{p}^l \sum_{\nu=0}^{+\infty} c_k \mathfrak{p}^k, \qquad c_l \in U, \qquad c_\nu \neq 0,$$

где U — множество представлений смежных классов фактор-группы $\mathscr{D}/\mathscr{B}$. По определению полагаем:

$$\mathscr{B}^k = \mathfrak{p}^k \mathscr{D} = \{x \in K : \ |x| \leqslant p^{-sk}\}.$$

Определение 1. *Оператор растяжения* $\mathscr{A}$ определяем равенством $\mathscr{A}x = x \cdot \frac{1}{\mathfrak{p}}$. Очевидно, что $|\mathscr{A}x| = |x|p^s$.

Определение 2. *Множество сдвигов* определяется равенством

$$I_K = \{g = a_{-1}\mathfrak{p}^{-1} \dot{+} a_{-2}\mathfrak{p}^{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-\nu}\mathfrak{p}^{-\nu} : \ \nu \in \mathbb{N}, a_{-j} \in GF(p^s)\}.$$

Имея оператор растяжения и множество сдвигов, можно определить КМА в $L_2(K)$ стандартным образом.

Определение 3. Пусть K — локальное поле положительной характеристики, $\mathfrak{p}$ есть примитивный элемент, I_K — множество сдвигов. *КМА в* $L_2(K)$ есть множество подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ таких, что

1) $V_n \subset V_{n+1}$;

2) $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = K$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} K_n = \{0\}$;

3) $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathscr{A}x) = f(\mathfrak{p}^{-1}x) \in V_{n+1}$;

4) существует $\varphi \in L_2(K)$ такая, что $(\varphi(x \dot{-} h))_{h\in I_K}$ — ортонормированный базис (или базис Рисса) в V_0. $\varphi(x)$ называется *scaling function*.

В таком виде определение дано в работе [2].

2. КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ

Поле K называется *конечным*, если $\sharp K < +\infty$. Известно [6], что число элементов в конечном поле K равно p^m при некотором простом p и $m \in \mathbb{N}$. Конечное поле порядка p^m обычно обозначают $GF(p^m)$. При $m = 1$ $GF(p^m)$ есть кольцо (поле) классов вычетов по модулю p и $GF(p) = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Операция сложения в $GF(p)$ определяется равенством $a \dot{+} b = (a+b) \bmod p$, т. е. это остаток от деления $a+b$ на p. Операция умножения определяется равенством $a \cdot b = \underbrace{a \dot{+} a \dot{+} \ldots \dot{+} a}_{b}$.

Пусть $m \geqslant 2$, тогда существует неприводимый над полем $GF(p)$ многочлен $p_m(x)$ степени m. Элементами поля $GF(p^m)$ являются векторы $(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$ длины m, где $a_j \in GF(p)$.

Операция сложения определяется покоординатно, т. е. $(a_j) \dot{+} (b_j) = ((a_j + b_j) \bmod p)_{j=0}^{m-1}$. Для того чтобы определить $\mathbf{ab}$, векторы $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) \in GF(p^m)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}) \in GF(p^m)$ надо представить в виде формальных многочленов:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1},$$

а элементы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ умножить как многочлены над полем $GF(p)$, тогда получим многочлен

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} a_j b_k x^{j+k} = \sum_{l=0}^{2m-2} x^l \sum_{k,j:\, k+j=l} a_j b_k,$$

в котором коэффициенты $\beta_l = \sum\limits_{k,j:\,k+j=l} a_j b_k$ вычисляются по операциям в поле $GF(p)$. После этого делим $Q(x)$ с остатком на $p_m(x)$. Коэффициенты полученного остатка $\mathbf{H}$ и есть произведение $\mathbf{ab}$.

Известно [6], что неприводимый многочлен $p_m(x)$ над полем $GF(p)$ существует для любого $m \geqslant 2$. Существуют алгоритмы нахождения $p_m(x)$.

3. ЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В дальнейшем мы будем рассматривать только поля положительной характеристики. Пусть p — простое число, $s \in \mathbb{N}$, $GF(p^s)$ — конечное поле. Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно (теорема Ковальского – Понтрягина [7]) множеству формальных степенных рядов:

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad a_i \in GF(p^s).$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов, т. е. если

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, \qquad b = \sum_{i=k}^{\infty} b_i t^i,$$

то

$$a \dot{+} b = \sum_{i=k}^{\infty} (a_i \dot{+} b_i) t^i, \qquad a_i \dot{+} b_i = (a_i + b_i) \bmod p, \qquad ab = \sum_{l=2k}^{\infty} t^l \sum_{i,j:i+j=l} (a_i b_j).$$

Топология в $F^{(s)}$ задается базой окрестностей нуля

$$F_n^{(s)} = \left\{ a = \sum_{j=n}^{\infty} a_j t^j \,\middle|\, a_j \in GF(p^s) \right\}.$$

Если $a = \sum\limits_{j=n}^{\infty} a_j t^j$, $a_n \neq 0$, то по определению полагаем $\|a\| = (p^{-s})^n$ и, значит,

$$F_n^{(s)} = \{x \in F^{(s)} : \|x\| \leqslant (p^{-s})^n\}$$

Обозначим через $F^{(s)+}$ аддитивную группу поля $F^{(s)}$. Окрестности $F_n^{(s)}$ являются компактными подгруппами группы $F^{(s)+}$, обозначим их через $F_n^{(s)+}$. Они обладают следующими свойствами: 1) $\dots \subset F_1^{(s)+} \subset F_0^{(s)+} \subset F_{-1}^{(s)+} \dots$; 2) $F_n^{(s)+}/F_{n+1}^{(s)+} \cong GF(p^s)^+$ и $\sharp(F_n^{(s)+}/F_{n+1}^{(s)+}) = p^s$.

Поэтому можно считать, что локальное поле $F^{(s)}$ характеристики p состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей $a = (\dots, 0_{n-1}, a_n, \dots, a_0, a_1, \dots)$, $a_j \in GF(p^s)$, в которых лишь конечное число элементов a_j с отрицательными номерами отлично от нуля, операции сложения и умножения определены равенствами

$$a \dot{+} b = ((a_i \dot{+} b_i))_{i \in \mathbb{Z}}, \qquad ab = \left(\sum_{i,j:i+j=l} (a_i b_j) \right)_{l \in \mathbb{Z}}, \tag{1}$$

где операции «$\dot{+}$» и «$\cdot$» — сложение и умножение в поле $GF(p^s)$.

В этом случае

$$\|a\| = \|(\dots, 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)\| = (p^{-s})^n, \quad \text{если} \quad a_n \neq 0,$$
$$F_n^{(s)} = \{a = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} : a_j \in GF(p^s);\ a_j = 0\ \forall\ j < n\},$$
$$\dots \subset F_1^{(s)} \subset F_0^{(s)} \subset F_{-1}^{(s)} \dots,$$

$F_n^{(s)}$ — компактные подгруппы в $F^{(s)+}$ и $\sharp(F_n^{(s)}/F_{n+1}^{(s)}) = p^s$.

Отсюда сразу следует, что при $s = 1$ $F^{(1)+}$ есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. Верно и обратное: во всякой группе Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$ можно ввести операцию умножения равенством (1). С такой операцией умножения $(\mathfrak{G}, \dot{+}, \cdot)$ становится полем, изоморфным $F^{(1)}$, единичный элемент имеет вид $e = (\dots, 0, 0_{-1}, 1_0, 0_1, \dots)$.

Теорема 1. *При $s > 1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ поля $F^{(s)}$ изоморфна произведению групп Виленкина, т. е.*

$$F^{(s)+} \cong F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \dots \times F^{(1)+} = (F^{(1)+})^s.$$

Этот изоморфизм переводит базу топологии группы $F^{(s)+}$ в базу топологии произведения $F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \dots \times F^{(1)+}$ групп Виленкина.

Доказательство. Пусть $a = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in F^{(s)}$. Так как $a_j \in GF(p^s)$, то

$$a_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)}), \qquad a_j^{(l)} \in GF(p).$$

Определим отображение

$$\varphi : F^{(s)+} \to (F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \dots \times F^{(1)})) = (F^{(1)+})^s$$

равенством

$$\varphi(a) = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s-1)}), \qquad \alpha^{(0)} = (a_j^{(0)})_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \dots, \quad \alpha^{(s-1)} = (a_j^{(s-1)})_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Очевидно, что φ отображает $F^{(s)+}$ на $(F^{(1)+})^s$ взаимно однозначно. Кроме того,

$$\varphi(a \dot{+} b) = \varphi(a) \dot{+} \varphi(b), \tag{2}$$

$$\varphi(F_n^{(s)+}) = F_n^{(1)+} \times F_n^{(1)+} \times \dots F_n^{(1)+} = (F_n^{(1)+})^s. \tag{3}$$

Множества $F_n^{(s)+}$ образуют базу окрестностей нуля в $F^{(s)+}$, множества $(F_n^{(1)+})^s$ образуют базу окрестностей нуля в $(F^{(1)+})^s$. Поэтому из (2) и (3) следует, что отображение φ переводит базу топологии группы $F^{(s)+}$ в базу топологии произведения $F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \dots \times F^{(1)+}$ групп Виленкина. □

4. ГРУППА ВИЛЕНКИНА КАК ЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО НАД ПОЛЕМ $GF(p)$

Пусть $(G, \dot{+})$ — p-ичная группа Виленкина. В ней можно ввести операцию умножения на число $\lambda \in Z_p = GF(p)$ равенством

$$a\lambda = \underbrace{a \dot{+} a \dot{+} \dots \dot{+} a}_{\lambda}$$

Определим модуль числа $\lambda \in Z_p$ как

$$|\lambda| = \begin{cases} 1, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

и норму элемента a равенством

$$\|a\| = p^{-n}, \tag{4}$$

если

$$a = (\dots 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad a_j \in Z_p, \qquad a_n \neq 0.$$

Нетрудно проверить, что $(G, \dot{+}, \cdot\lambda)$ есть линейное пространство, и равенство (4) определяет неархимедову норму. Таким образом, $(G, \dot{+}, \cdot\lambda)$ можно рассматривать как линейное нормированное пространство на полем Z_p. Известно, что любой элемент a из группы Виленкина единственным образом представим в виде ряда

$$a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g_n, \qquad \lambda_n \in Z_p,$$

где (g_n) — фиксированная базисная последовательность, т. е. $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Это означает, что система (g_n) есть базис линейного пространства. Очевидно, что если в группе Виленкина ввести операцию умножения равенством (1), то с такой операцией умножения $(\mathfrak{G}, \dot{+}, \cdot)$ становится полем, изоморфным $F^{(1)}$.

5. ЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ КАК ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим теперь локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p. Его элементы — бесконечные последовательности

$$a = (\dots, 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots), \qquad a_j \in GF(p^s),$$

т. е.

$$a_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)}), \qquad a_j^{(\nu)} \in GF(p).$$

Норма в $F^{(s)}$ определена равенством $\|a\| = p^{-sn}$ если $a_n \neq 0$. Так как

$$\lambda a = (\dots 0_{-1}, \lambda, 0_1, \dots)(\dots 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots) = (\lambda + 0x + 0x^2 + \dots)(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots) =$$
$$= \lambda a_n x^n + \lambda a_{n+1} x^{n+1} + \dots = (\dots 0_{n-1}, \lambda a_n, \lambda a_{n+1}, \dots),$$

то произведение λa определяется покоординатно. Если мы теперь определим модуль числа $\lambda \in GF(p^s)$ как

$$|\lambda| = \begin{cases} 1, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

и норму элемента a при $a_n \neq 0$ равенством $\|a\| = p^{-ns}$, то $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ и поле $F^{(s)}$ можно рассматривать как линейное нормированное пространство над конечным полем $GF(p^s)$, и у нас полная аналогия со случаем группы Виленкина.

Обозначим для краткости $K := F^{(s)}$, $K_n = F_n^{(s)}$, и выберем фиксированный элемент $g \in K_1 \setminus K_2$. Известно [1], что любой элемент $a \in K$ однозначно представим в виде

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n g^n, \tag{5}$$

где λ_n — представители смежных классов фактор группы K_0/K_1. Справедливо более общее утверждение

Теорема 2. *Пусть $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фиксированная базисная последовательность в K, т. е. $g_n \in K_n \setminus K_{n+1}$. Любой элемент $a \in K$ однозначно представим в виде ряда*

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n g_n, \qquad \lambda_n \in GF(p^s).$$

Доказательство. Выбираем произвольное $a \in K$. Если $a = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0$. Тогда существует $n \in \mathbb{Z}$, что $a \in K_n^+ \setminus K_{n+1}^+$. Это означает, что

$$a = (\dots 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots), \qquad a_j \in GF(p^s), \qquad a_n \neq 0.$$

Тогда существует $\lambda_n \in GF(p^s)$ так, что

$$a = \lambda_n g_n \dot{+} \alpha_{n+1}, \qquad \alpha_{n+1} \in K_{n+1}.$$

В самом деле, так как $g_n \in K_n \setminus K_{n+1}$, то

$$g_n = (\dots 0_{n-1}, g_n^{(n)}, g_{n+1}^{(n)}, \dots), \qquad g_n^{(n)} \neq 0.$$

Выбираем $\lambda_n \in GF(p^s)$ так, чтобы $\lambda_n g_n^{(n)} = a_n$. Тогда

$$\lambda_n g_n = (\dots 0_{n-1}, \lambda_n g_n^{(n)}, \lambda_n g_{n+1}^{(n)} \dots) = (\dots 0_{n-1}, a_n, \tilde{a}_{n+1} \dots).$$

Поэтому

$$a \dot{-} \lambda_n g_n = (\dots 0_{n-1}, 0_n, a_{n+1} - \tilde{a}_{n+1} \dots) = \alpha_{n+1} \in K_{n+1}^+,$$

т. е. $a = \lambda_n g_n \dot{+} \alpha_{n+1}$. Продолжая этот процесс получаем утверждение теоремы. □

Следствие. *Если $g \in K_1 \setminus K_2$, то $g^n \in K_n \setminus K_{n+1}$ и в равенстве* (5) *можно взять $g_n = g^n$.*

Определение 4. Оператор

$$\mathscr{A} : a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n g_n \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n g_{n-1}$$

назовем *оператором растяжения*.

Замечание. Если $g_n = g^n$ и $a = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g^n$, то $ag^{-1} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g^{n-1}$, т. е. в этом случае оператор растяжения может быть определен равенством $\mathscr{A}x = g^{-1}x$ (можно сравнить с определением 1).

6. МНОЖЕСТВО ХАРАКТЕРОВ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ КАК ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Множество X характеров локального поля положительной характеристики образует абелеву группу с операцией произведения характеров $(\chi * \phi)(a) = \chi(a) \cdot \phi(a)$. Обратный элемент определяется как $\chi^{-1}(a) = \overline{\chi(a)}$, а единичным элементом является характер $e(a) \equiv 1$.

Определение 5. Определим *характеры* r_n *поля* $F^{(s)}$ следующим образом. Если $a = (\dots, 0_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots)$, $a_j \in GF(p^s)$, $a_j = \left(a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)}\right)$, $a_j^{(\nu)} \in GF(p)$, то $r_n(a) = e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^{(l)}}$, где $n = ks+l$ и $0 \le l < s$. Функции r_n назовем *функциями Радемахера*.

Лемма 1. *Любой характер* $\chi \in X$ *однозначно представим в виде произведения*

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_n = \overline{0, p-1},$$

в котором множителей с положительными номерами конечное число.

Доказательство. Так как аддитивная группа $F^{(s)+}$ есть группа Веленкина, то функции $r_{ks+l}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} x_{ks+l}}$, где $x = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots)$, $\mathbf{x}_k = (x_{ks+0}, x_{ks+1}, \dots, x_{ks+(s-1)})$ есть функции Радемахера в $F^{(s)+}$, и любой характер χ, определенный на $F^{(s)+}$, можно представить в виде произведения

$$\chi = \prod_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_n = \overline{0, p-1}, \qquad n = ks + l. \qquad \square$$

Запишем характер χ в виде

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} \cdot r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \cdot \dots \cdot r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$$

и обозначим $\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} \cdot r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \cdot \dots \cdot r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$, где $\mathbf{a}_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(s-1)}) \in GF(p^s)$. Положим по определению $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k})^{\mathbf{b}_k} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k}$, $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in GF(p^s)$. В этом случае

$$\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = (\mathbf{r}_k^{(1,0,\dots,0)})^{\mathbf{a}_k} = \mathbf{r}_k^{(a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(s-1)})} = r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}},$$

Поэтому χ можно представить в виде произведения

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}. \tag{6}$$

Определим возведение характера в степень $\mathbf{b} \in GF(p^s)$ равенством

$$\chi^{\mathbf{b}} = \left(\prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}\right)^{\mathbf{b}} = \prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{b}}.$$

Лемма 2. *Справедливо равенство* $\mathbf{r}_k^{\mathbf{u} \dot{+} \mathbf{v}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}$.

Доказательство. По определению функций Радемахера имеем для $x = \left(x_k^{(l)}\right)$:

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}, x) = (\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}}, x)(\mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}, x) = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} u_{ks+l}^{(l)} x_k^{(l)}} \cdot \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} v_{ks+l}^{(l)} x_k^{(l)}} = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} (u_{ks+l}^{(l)} + v_{ks+l}^{(l)}) x_k^{(l)}} = (\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}+\mathbf{v}}, x). \quad \square$$

Теорема 2. *Множество характеров поля* $F^{(s)}$ *есть линейное пространство* $(X, *, \cdot^{GF(p^s)})$ *над конечным полем* $GF(p^s)$ *с произведением в качестве внутренней операции и возведением в степень* $\mathbf{a} \in GF(p^s)$ *в качестве внешней операции.*

Доказательство. 1. Проверим, что $\chi^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \chi^{\mathbf{u}} \chi^{\mathbf{v}}$, для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in GF(p^s)$. Пусть $\chi^{\mathbf{u}} = \prod\limits_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{u}}$, $\chi^{\mathbf{v}} = \prod\limits_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{v}}$. По лемме 2

$$\chi^{\mathbf{u}} \chi^{\mathbf{v}} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{u}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{v}} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k (\mathbf{u} \dot{+} \mathbf{v})} = \chi^{\mathbf{u} \dot{+} \mathbf{v}}.$$

2. Проверим, что $\chi_1^{\mathbf{u}}\chi_2^{\mathbf{u}} = (\chi_1\chi_2)^{\mathbf{u}}$. Пусть $\chi_1^{\mathbf{u}} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\mathbf{u}}$, $\chi_2^{\mathbf{u}} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{b}_k\mathbf{u}}$. Тогда снова по лемме 2

$$\chi_1^{\mathbf{u}}\chi_2^{\mathbf{u}} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\mathbf{u}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{b}_k\mathbf{u}} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{(\mathbf{a}_k\dot{+}\mathbf{b}_k)\mathbf{u}} = (\chi_1\chi_2)^{\mathbf{u}}.$$

3. Так как единицей в мультипликативной группе поля $GF(p^s)$ является элемент $\mathbf{1} = (1, 0, \dots, 0)$, то $\chi^{\mathbf{1}} = \chi^{(1,0,\dots,0)} = \prod\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{1}} = \prod\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = \chi$.

4. Равенство $(\chi^{\mathbf{u}})^{\mathbf{v}} = \chi^{\mathbf{uv}}$ выполнено по определению.

Таким образом, все аксиомы внешней операции выполнены. Справедливость аксиом внутренней операции очевидна из леммы 2. $\square$

Из (6) сразу следует, что аннулятор $(F_k^{(s)})^{\perp}$ состоит из характеров вида $\chi = \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{a}_{k-1}}\mathbf{r}_{k-2}^{\mathbf{a}_{k-2}}\dots$ Очевидно также, что

1) последовательность функций Радемахера $(\mathbf{r}_k)$ образует базис пространства $(X, *, \cdot^{GF(p^s)})$;

2) любая последовательность характеров $\chi_k \in (F_{k+1}^{(s)})^{\perp} \setminus (F_k^{(s)})^{\perp}$ также образует базис пространства $(X, *, \cdot^{GF(p^s)})$.

Теорема 4. *Пусть* $g_j = (\dots, \mathbf{0}_{j-1}, (1, 0, \dots, 0)_j, \mathbf{0}_{j+1}, \dots) \in F^{(s)}$, $\mathbf{a}_k, \mathbf{u} \in GF(p^s)$. *Тогда для любых* $k \neq j$ $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}, \mathbf{u}g_j) = 1$.

Доказательство. Так как $\mathbf{u}g_j = (\dots, \mathbf{0}_{j-1}, (u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(s-1)})_j, \mathbf{0}_{j+1}, \dots)$, то

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}, \mathbf{u}g_j) = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^{(l)} u^{(l)}} = \prod_{l=0}^{s-1} e^0 = 1. \qquad \square$$

Теоремы 3 и 4 позволяют использовать методы, развитые в работах [8–10], для построения КМА на локальных полях положительной характеристики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Библиографический список

1. *Taibleson M. H.* Fourier Analysis on Local Fields. Princeton : Princeton Univ. Press, 1975.
2. *Jiang H., Li D., Jin N.* Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 294. P. 523–532.
3. *Behera B., Jahan Q.* Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions // Adv. Pure Appl. Math. 2012. Vol. 3. P. 181–202.
4. *Behera B, Jahan Q.* Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic // Communications in Math. Anal. 2013. Vol. 15, № 2. P. 52–75.
5. *Behera B, Jahan Q.* Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395. P. 1–14.
6. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля : в 2 т. М. : Мир, 1988.
7. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М. : Наука, 1966.
8. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, № 1. P. 42–65.
9. *Lukomskii S. F.* Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups. Preprint arxiv.org/abs/1303.5635.
10. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.

MRA on Local Fields of Positive Characteristic

A. M. Vodolasov, S. F. Lukomskii

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, vam21@yandex.ru, lukomskiisf@info.sgu.ru

We prove that the local field of positive characteristic is a vector space over a finite field.

Key words: local fields, finite fields, multiresolution analysis.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00102).

References

1. Taibleson M. H. *Fourier Analysis on Local Fields*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1975.
2. Jiang H., Li D., Jin N. Multiresolution analysis on local fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol. 294, pp. 523–532.
3. Behera B, Jahan Q. Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions. *Adv. Pure Appl. Math.*, 2012, vol. 3, pp. 181–202.
4. Behera B., Jahan Q. Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic. *Communications in Math. Anal.*, 2013, vol. 15, no 2, pp. 52–75.
5. Behera B, Jahan Q. Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 395, pp. 1–14.
6. Lidl R., Niederreiter H. *Finite fields*. Encyclopedia Math. Appl., vol. 20, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1983.
7. Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I. *Teoriia predstavlenii i avtomorfnye funktsii* [Representation Theory and Automorphic Functions]. Moscow, Nauka, 1966 (in Russian).
8. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 42–65.
9. Lukomskii S. F. *Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups*. Preprint arxiv.org /abs/1303.5635.
10. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, no. 6, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.

УДК 517.518

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $\mathbf{P}$-ИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ И VMO

С. С. Волосивец

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

В настоящей статье доказаны некоторые теоремы вложения типа П. Л. Ульянова для пространств Гельдера, связанных с метриками $\mathbf{P}$-ичных пространств Харди, VMO, а также L^1 и равномерной метрикой на группах Виленкина. Установлена их неулучшаемость. Даны достаточные условия сходимости ряда Фурье по мультипликативной системе в пространстве Харди и в равномерной метрике.

Ключевые слова: $\mathbf{P}$-ичное пространство Харди, $\mathbf{P}$-ичное пространство VMO, теоремы вложения, неулучшаемость, равномерная сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, не меньших 2. Обозначим через $\mathbb{Z}(p_k)$ дискретную циклическую группу $\{0, 1, \dots, p_k - 1\}$ порядка p_k со сложением по модулю p_k и определим $G = G(\mathbf{P})$ как прямое произведение $\mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с операцией $\oplus$, мерой μ и топологией, соответствующими прямому произведению. Элементами G являются последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, где $x_k \in \mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Важную роль при этом играют подгруппы $G_n = \{x \in G : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, и смежные классы $G_n(y) = y \oplus G_n = \{x \in G : x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in G$. Если $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $m_0 = 1$, то мера $\mu(G_n(y))$ равна m_n^{-1} ($\mu(G) = 1 = m_0^{-1}$). Известно, что $G_n(y)$ являются одновременно открытыми и компактными. Аналоги функций Радемахера на группе G задаются формулами $r_k(x) = \exp(2\pi i x_k / p_k)$. Если

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \qquad n_k \in \mathbb{Z}(p_k), \tag{1}$$

есть $\mathbf{P}$-ичное представление $n \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $\chi_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} r_k^{n_k}(x)$, $x \in G$ (на самом деле произведение конечно). Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, называемая системой характеров группы G, ортонормирована на G и полна в $L^1(G)$. Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in G$, верны равенства

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \qquad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}, \tag{2}$$

где $\ominus$ — операция, обратная к $\oplus$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, 3]. Далее считаем, что $p_n \le N$, $n \in \mathbb{N}$.