



Использование неравенства для контроля устойчивости, фактически, не приводит к увеличению вычислительных затрат, потому что оценка максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) осуществляется через ранее вычисленные стадии и не приводит к росту числа вычислений функции f . Такая оценка получается грубой. Однако применение контроля устойчивости в качестве ограничителя на рост шага позволяет избежать негативных последствий грубости оценки. Более того, в некоторых случаях это приводит к нестандартно высокому повышению эффективности алгоритма [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00106 и 11-01-00224).

Библиографический список

1. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin : Springer-Verlag, 2004. 614 p.
2. Byrne G. D., Hindmarsh A. C. ODE solvers: a review of current and coming attractions // J. of Comp. Phys. 1987. № 70. P. 1–62.
3. Rosenbrock H. H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer. 1963. № 5. P. 329–330.
4. Новиков В. А., Новиков Е. А., Юматова Л. А. Замораживание матрицы Якоби в методе типа Розенброка второго порядка точности // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1987. Т. 27, № 3. С. 385–390.
5. Новиков Е. А. Построение алгоритма интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений на неоднородных схемах // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 2. С. 272–275.
6. Новиков В. А., Новиков Е. А. Повышение эффективности алгоритмов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений за счет контроля устойчивости // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1985. Т. 25, № 7. С. 1023–1030.
7. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск : Наука, 1997. 197 с.
8. Новиков Е. А., Шитов Ю. А., Шокин Ю. И. Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 6. С. 1310–1314.
9. Новиков А. Е., Новиков Е. А. Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 1. С. 46–56.
10. Демидов Г. В., Юматова Л. А. Исследование точности неявных одношаговых методов. Препринт № 11. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1976. 22 с.
11. Новикова Е. А. Алгоритм переменного порядка и шага на основе явного трехстадийного метода типа Рунге–Кутты // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 1. С. 46–53.

УДК 519.71

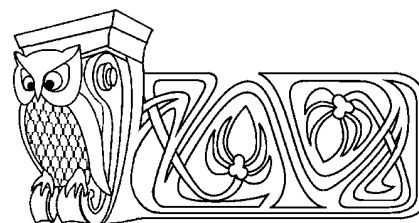
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

В. А. Подчукаев

Саратовская государственная юридическая академия
E-mail: sstu85@yandex.ru

Поставлена и решена задача аналитического конструирования по заданной математической модели динамической системы в пространстве состояний сопровождающей её математической модели в фазовом пространстве. Показано, что изображающая точка всякого решения динамической системы общего вида в пространстве состояний принадлежит гипертсфере со смещённым центром в фазовом пространстве (или эквивалентной ей центральной гипертсфере переменного радиуса). Сконструировано аналитическое представление центра смещения, объясняющее происхождение динамического хаоса бесконечными разрывами второго рода в координатах центра смещения. Показано, что эти разрывы порождены переходом через ноль соответствующих компонент вектора состояний.

Ключевые слова: динамическая система, обыкновенные однородные дифференциальные уравнения, гипертсфера, смещённый центр, динамический хаос.



Mathematical Model of Dynamic Chaos

V. A. Podchukaev

The problem of analytical designing on the set mathematical model of dynamic system in space of states of mathematical model accompanying it in phase space is put and solved. It is shown, that the representing point of any decision of dynamic system of a general view in space of states conditions belongs to hypersphere with the displaced centre in phase space (or to central hypersphere of variable radius equivalent to it). Analytical representation of the centre of the displacement, an explaining origin of dynamic chaos by infinite ruptures of the second sort in co-ordinates of the centre of displacement is designed. It is shown, that these ruptures are generated by transition through a zero corresponding a component of a vector of states.

Key words: dynamic system, ordinary homogeneous differential equations, hypersphere, displaced centre, dynamic chaos.



1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Невзирая на несколько десятилетий развития теории динамического хаоса, до сих пор нет сколь-нибудь внятного объяснения причин, его порождающих (см., например, [1]).

Этому обстоятельству можно дать следующее объяснение. Для простоты изложения ограничимся случаем динамических систем, описываемых обыкновенными однородными дифференциальными уравнениями в форме Коши

$$\dot{x} = P(x, t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in [0, \infty), \quad t_0 \geq 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где x — вектор состояний, x_0 — вектор начальных условий, t — время, $P(x, t)$ — заданная функциональная матрица, элементы которой определены и непрерывны вместе со своими частными производными по x и t в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$, что гарантирует существование единственного решения $x(t, t_0, x_0)$, проходящего через точку (t_0, x_0) , не являющуюся состоянием равновесия.

Будем полагать, что решение $x(t, t_0, x_0)$ детерминированной системы, описываемой уравнением (1) (подстановка которого в (1) обращает его в тождество), известно. Проблема хаоса была идентифицирована в процессе построения (по известным решениям в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$) фазовых портретов этих решений в фазовом пространстве R^n . Собственно фазовое пространство не содержит оси времени t (в то время как изображающая точка самого фазового портрета однозначно определяется текущими значениями компонент соответствующего решения $x(t, t_0, x_0)$). Классические примеры динамического хаоса позволяют говорить о «странном» (случайном, непредсказуемом и т. д.) поведении фазовых портретов детерминированных систем. Ясно, что «странный» характер такого поведения проистекает из перехода от пространства размерности $(n+1)$, каковым является пространство состояний $R^n \times [0, \infty)$, к фазовому пространству R^n размерности n , в явном виде не содержащему времени (а включающему его лишь посредством изображающих точек решения, зависящих от времени).

В дальнейшем уравнение (1) будем называть математической моделью детерминированной системы в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$. Отметим, что общепринятой математической модели той же системы, но уже в фазовом пространстве R^n , на единицу меньшей размерности, до сих пор нет.

Сконструируем такую модель, исходя из математической модели в пространстве состояний.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

2.1. Случай кососимметрической функциональной матрицы $P(x, t)$

Рассмотрим случай, когда функциональная матрица $P(x, t)$ в уравнении (1) является кососимметрической, т. е. удовлетворяет условию $P(x, t) = -P^T(x, t)$.

Лемма [2, с. 100]. *Изображающая точка всякого решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (1) с кососимметрической матрицей $P(x, t)$ принадлежит гиперсфере*

$$x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) = x_0^T x_0 \quad (2)$$

в фазовом пространстве R^n .

Предложенный в [2] алгоритм перехода от математической модели (1) в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$ к математической модели (2) в фазовом пространстве R^n включает следующие операции:

1) умножение обеих частей уравнения (1) слева на транспонированный вектор состояний x^T ;

2) применение к полученному в п. 1 результату следующего тождества для кососимметрических матриц [3, свойство 10.61]

$$x^T P(x, t)x \equiv 0, \quad (3)$$

которое позволяет представить этот результат в виде

$$x^T \frac{dx}{dt} = 0; \quad (4)$$

3) интегрирование полученного в п. 2 результата в пределах от t_0 до t ;

4) замены в полученном равенстве $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, $x(t_0) = x_0$ и представлении полученного результата в каноническом виде гиперсферы (2) [4].



2.2. Случай функциональной матрицы $P(x, t)$ общего вида

Будем рассматривать заданную в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$ математическую модель динамической системы (1) в предположении, что функциональная матрица $P(x, t)$ этой модели является матрицей общего вида, т. е. может быть представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц:

$$P(x, t) \equiv \frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} + \frac{P(x, t) - P^T(x, t)}{2},$$

что дает основание записать уравнение (1) в виде

$$\dot{x} = \left[\frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} + \frac{P(x, t) - P^T(x, t)}{2} \right] x. \quad (5)$$

Сформулируем задачу — требуется для математической модели динамической системы (в пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$) общего вида (5) сконструировать сопровождающую её математическую модель в фазовом пространстве R^n .

Теорема. *Изображающая точка всякого решения уравнения (5) $x(t, t_0, x_0)$ общего вида принадлежит гиперсфере со смещённым центром:*

$$x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) + 2G^T[x(t, t_0, x_0), x_0]x(t, t_0, x_0) = x_0^T x_0 \quad (6)$$

или центральной гиперсфере переменного радиуса:

$$\begin{aligned} \{x(t, t_0, x_0) + G[x(t, t_0, x_0), x_0]\}^T \{x(t, t_0, x_0) + G[x(t, t_0, x_0), x_0]\} = \\ = x_0^T x_0 + G^T[x(t, t_0, x_0), x_0]G[x(t, t_0, x_0), x_0], \end{aligned} \quad (7)$$

за исключением «выколотых точек» центра смещения $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$:

$$G[x(t, t_0, x_0), x_0] = -\frac{1}{2} \text{col} \left[x_1(t, t_0, x_0) - \frac{x_{0,1}^2}{x_1(t, t_0, x_0)}, \dots, x_n(t, t_0, x_0) - \frac{x_{0,n}^2}{x_n(t, t_0, x_0)} \right], \quad (8)$$

обусловленных бесконечными разрывами второго рода в его координатах, определяемых переходом через ноль соответствующих координат вектора решения уравнения (5).

Доказательство. Используя алгоритм доказательства леммы, умножим обе части уравнения (5) на транспонированный вектор состояний x^T , получив

$$x^T \dot{x} = x^T \frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} x + x^T \frac{P(x, t) - P^T(x, t)}{2} x.$$

С учетом тождества (3) для кососимметрических матриц представим полученный результат в виде

$$x^T \frac{dx}{dt} = x^T \frac{P(x, t) + P^T(x, t)}{2} x.$$

Откуда после интегрирования в пределах от t_0 до t находим

$$\frac{x^T x}{2} \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t x^T(\tau) \frac{P(x, \tau) + P^T(x, \tau)}{2} x(\tau) d\tau.$$

Умножая обе части этого равенства на 2 и раскрывая результат интегрирования левой части, получим

$$x^T(t)x(t) - x_0^T x_0 = \int_{t_0}^t x^T(\tau)[P(x, \tau) + P^T(x, \tau)]x(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Интеграл правой части (9) в соответствии с канонической формой гиперквадрик общего вида [4, с. 340] должен быть представлен посредством следующей билинейной формы:

$$-2G^T[x(t), x_0]x(t) = \int_{t_0}^t x^T(\tau)[P(x, \tau) + P^T(x, \tau)]x(\tau) d\tau. \quad (10)$$



Подстановка левой части (10) в правую часть (9) после замены $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ позволяет полученный результат записать в виде (6) или, что то же самое, (7).

Из сравнения (6) с (7) видно, что вектор $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$ определяет координаты центра смещения.

В дальнейшем (6), (7) будем называть математическими моделями динамической системы общего вида (1) в фазовом пространстве R^n .

Таким образом, как в общем случае, так и в случае кососимметрических матриц, геометрическим местом изображающих точек решения динамической системы в фазовом пространстве является гиперсфера. Для кососимметрических матриц — это гиперсфера постоянного радиуса $\sqrt{x_0^T x_0}$, а в случае функциональных матриц $P(x, t)$ общего вида — гиперсфера переменного радиуса $\sqrt{x_0^T x_0 + G^T[x(t, t_0, x_0), x_0]G[x(t, t_0, x_0), x_0]}$.

Будем рассматривать (10) как уравнение, в котором вектор состояний и интеграл правой части известны, а вектор $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$ подлежит определению. Иными словами, с позиций линейной алгебры задача определения этого вектора не доопределена, и как следствие её решение не единственно.

Поэтому какого-либо конструктивизма к рассматриваемой проблеме результат, зафиксированный в виде (10) [5], не прибавляет, хотя сам вектор $G[x(t, t_0, x_0), x_0]$ может рассматриваться в качестве нового инструмента исследований.

Наполним этот вектор конструктивным содержанием.

Принимая во внимание исходное уравнение (1), запишем правую часть (10) в виде

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x^T(\tau)[P(x, \tau) + P^T(x, \tau)]x(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^t [x^T(\tau)\frac{dx(\tau)}{d\tau} + \frac{dx^T(\tau)}{d\tau}x(\tau)]d\tau = \int_{t_0}^t 2x^T(\tau)dx(\tau) = \\ &= x^T(\tau)x(\tau)|_{t_0}^t = x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) - x_0^T x_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n [x_i^2(t, t_0, x_0) - x_{0,i}^2] = \sum_{i=1}^n \frac{[x_i^2(t, t_0, x_0) - x_{0,i}^2]}{x_i(t, t_0, x_0)} x_i(t, t_0, x_0). \end{aligned}$$

Отметим, что полученное выражение сконструировано исходя из условия, что для всех $x_i(t, t_0, x_0) \neq 0, i = \overline{1, n}$, справедливо тождество

$$\frac{x_i(t, t_0, x_0)}{x_i(t, t_0, x_0)} \equiv 1.$$

Подобное представление позволяет единственным образом выделить искомый вектор G из билинейной формы левой части (10) в виде (8). Теорема доказана.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Факт получения (8) достаточно красноречив, позволяя связать динамический хаос с бесконечными разрывами второго рода [6, с. 221] в отдельных компонентах вектора G при переходе через ноль знаменателей соответствующих компонент вектора решения уравнения (1). Другими словами, управление хаосом осуществляется посредством вектора центра смещения G , не бравшимся в рассмотрение в многочисленных исследованиях динамического хаоса ранее. Тем самым указанные точки разрыва являются своего рода «выколотыми» точками центра смещения, влекущими за собой «случайный» характер поведения фазового портрета при прохождении этих точек. Отметим, что окрестности «выколотых» точек вряд ли могут быть зафиксированы соответствующим выбором шага интегрирования при численных методах построения фазовых портретов. Полученный результат, вскрывающий причины динамического хаоса, требует динамической компьютерной визуализации, связывающей якобы случайные эффекты фазовых портретов с точками разрыва в компонентах вектора центра смещения, порождающих эти эффекты.



Библиографический список

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 294 с.
2. Подчукаев В. А. Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.
3. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Пензов Ю. Е. Аналитическая геометрия. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1972. 364 с.
5. Подчукаев В. А., Звягина А. С. Новое доказательство гипотезы Ж. А. Пуанкаре // Докл. Академии воен. наук. 2009. № 5(40). С. 115–123.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

УДК 501.1

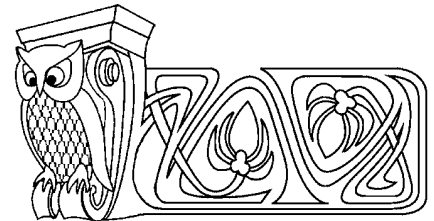
ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА ОТНОСИТЕЛЬНО L -ФУНКЦИЙ АРТИНА ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Д. С. Степаненко

Саратовский государственный университет
E-mail: stepanenko.dmitry@gmail.com

В работе рассматривается задача аналитического продолжения L -функций Артина числовых полей. Приводится уточнение результата Брауэра, а именно показывается, что в случае неглавного характера возможные полюсы L -функций должны лежать на критической прямой.

Ключевые слова: L -функция Артина, теорема Брауэра.



On Verification of Brauer's Theorem Concerning Artin's L -Functions of Number Fields

D. S. Stepanenko

This paper investigates problem of analytic continuation of Artin's L -functions. One refinement of Brauer's theorem was obtained. It states that in the case of non-main character all possible poles of Artin's L -functions should lay on the critical line.

Key words: Artin's L -function, Brauer's theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть K — конечное неабелево расширение числового поля k степени n , G — группа Галуа этого расширения, $\rho: G \rightarrow M_{n \times n}$ — представление этой группы в группу матриц с комплексными коэффициентами, χ — характер этого представления, т. е. при каждом $g \in G$: $\chi(g) = \text{Sp}(M(g))$, \wp — простой идеал поля k , β — неразветвленный простой идеал поля K , лежащий над \wp . Обозначим через $F[\wp]$ автоморфизм Фробениуса группы Галуа расширения полей вычетов $O/\wp \subset O_1/\beta$, где O и O_1 — кольца целых элементов полей k и K соответственно.

L -функция Артина определяется следующим образом:

$$L(s, \chi, K|k) = \prod_{\rho} |E - M(F[\wp])N(\wp)^{-1}|^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

где $|E - M(g)\lambda|$ — характеристический многочлен матрицы $M(g)$, а произведение берется по всем неразветвленным идеалам \wp поля k .

Эту функцию впервые определил и изучил Артин в 1923 году в работе [1].

Отметим, что в случае абелева расширения $k \subset K$ L -функция Артина за вычетом множителей, относящихся к разветвленным простым идеалам, совпадает с L -функцией Дирихле поля k .

В начале 1930-х годов Артин высказал предположение, что в случае неглавного характера L -функция (1) является целой функцией.

В настоящее время гипотеза Артина доказана только в ряде случаев. В частности, в случае, когда порядок группы G свободен от квадратов и в случае, когда порядок группы G является степенью простого числа.

В 1948 году Брауэр доказал, что L -функция (1) является мероморфной функцией, которая в случае неглавного характера является регулярной и не обращается в нуль при $\sigma \geq 1$ и возможные полюсы этой функции могут располагаться только в критической полосе $0 < \sigma < 1$.

В данной работе мы уточняем результат Брауэра, а именно доказываем, что возможные полюсы могут лежать только на критической прямой $\sigma = 1/2$.