УДК 514.133

ОВАЛЬНЫЕ ЛИНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Н. Ромакина

Саратовский государственный университет
E-mail: romakinaln@mail.ru

Проведена классификация действительных невырожденных линий второго порядка гиперболической плоскости $\hat{H}$ положительной кривизны. Доказано, что основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой (невыпуклой) определяют на $\hat{H}$ семь типов несобственных и восемь типов собственных овальных линий. Для каждого типа собственных овальных линий построен присоединенный проективный репер и получено каноническое уравнение.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны, овальная линия плоскости $\hat{H}$, классификация собственных овальных линий плоскости $\hat{H}$.

Oval Lines of the Hyperbolic Plane of Positive Curvature

L. N. Romakina

The classification of real nondegenerate second-order lines of the hyperbolic plane $\hat{H}$ of positive curvature is obtained. It is proved that the basic geometric covariants and the property of line to be convex (nonconvex) determine seven types of intrinsic oval lines and eight types of nonintrinsic oval line on $\hat{H}$. For every intrinsic oval lines the associate projective frame is constructed and the canonical equation is received.

Key words: hyperbolic plane $\hat{H}$ of positive curvature, oval line of the plane $\hat{H}$, classification of intrinsic oval lines of the plane $\hat{H}$.

ВВЕДЕНИЕ

1. Гиперболическую плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны рассматриваем в проективной интерпретации Кэли–Клейна как внешнюю относительно овальной линии γ, называемой абсолютом, — область проективной плоскости P_2, на которой в качестве прямых приняты эллиптические прямые и лежащие в данной области части гиперболических и параболических прямых [1, 2]. В работах [3, 4] построены простые разбиения плоскости $\hat{H}$, обладающие симметриями, ячейкой которых является простой 4-контур [5]. При построении разбиений использованы *циклы*, линии второго порядка, являющиеся траекториями движений плоскости $\hat{H}$. В дальнейшем развитии теории разбиений, в частности при построении неизотропных разбиений плоскости $\hat{H}$, будут использованы и другие линии второго порядка этой плоскости. Кроме того, интерес к линиям второго порядка плоскости $\hat{H}$ как плоскости постоянной положительной кривизны, реализуемой также на сфере действительного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве, возникает в связи с решением проблемы Кеплера (см., например, [6]).

В данной работе проведем классификацию невырожденных действительных линий второго порядка плоскости $\hat{H}$ и дадим позиционные определения этих линий, характеризующие положение линии по отношению к абсолюту. На внутренней относительно абсолютной линии γ области плоскости P_2 реализуется полная плоскость Лобачевского, или гиперболическая плоскость отрицательной кривизны. Плоскости Лобачевского и $\hat{H}$ имеют общую фундаментальную группу G преобразований, являющуюся группой автоморфизмов овальной линии проективной плоскости. Классификация невырожденных действительных линий второго порядка плоскости Лобачевского в проективной интепретации Кэли–Клейна известна [1]. Согласно данной классификации на плоскости Лобачевского существует 12 инвариантных относительно группы G типов овальных линий, причем линии семи типов принадлежат овальным линиям проективной плоскости P_2, содержащим внешние относительно абсолюта точки, т. е. частично принадлежащим и плоскости $\hat{H}$. Указанная классификация овальных линий основана на классификации коллинеаций, являющихся произведением полярных преобразований двух овальных линий, т. е. на рассмотрении *геометрических ковариантов* двух квадрик проективной плоскости, а именно общих точек и общих касательных овальной линии с абсолютом. Назовем эти геометрические коварианты *основными*. При построении классификации учтены количество основных геометрических ковариантов и их природа (вещественность или мнимость).

Собственные овальные линии плоскости $\hat{H}$ в рассмотренной классификации не указаны. В данной работе докажем, что основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой определяют точно восемь типов собственных для плоскости $\hat{H}$ овальных линий. Для каждой собственной овальной линии плоскости $\hat{H}$ построим присоединенный канонический репер или семейство таких реперов и найдем каноническое уравнение линии. Метрические свойства линий докажем в следующих работах.

Названия несобственных овальных линий плоскости $\hat{H}$, употребляющиеся для линий в геометрии Лобачевского, не соответствуют свойствам этих линий в геометрии плоскости $\hat{H}$. Поэтому за каждой несобственной линией плоскости $\hat{H}$ закрепим новый термин. По аналогии с названиями линий второго порядка евклидовой плоскости линии, не имеющие общих действительных точек с абсолютом, называем эллипсами, линии, касающиеся абсолюта, — параболами, линии, пересекающие абсолют в двух вещественных точках, — гиперболами.

2. В работе используем два типа канонических реперов плоскости $\hat{H}$.

Каноническим репером первого типа плоскости $\hat{H}$ назовем проективный репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины которого образуют автополярный трехвершинник первого рода относительно абсолютной линии γ, а единичная точка принадлежит касательным, проведенным к линии γ из вершин A_1 и A_2.

Каноническим репером второго типа плоскости $\hat{H}$ назовем проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины которого образуют автополярный трехвершинник второго рода относительно линии γ и единичная точка принадлежит абсолюту.

На примере реперов второго типа покажем, что на $\hat{H}$ семейство U^3_* (U^3) всех канонических реперов первого (второго) типа зависит от трех параметров.

Пусть $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ — канонический репер второго типа плоскости $\hat{H}$. Вершины A_1, A_2 и единичная точка E репера принадлежат абсолютной линии γ, следовательно, положение каждой из этих точек однозначно определено заданием одного параметра. Положение первых двух вершин репера однозначно определяет положение третьей его вершины, как полюса прямой, соединяющей вершины A_1, A_2, относительно абсолютной линии. Таким образом, фиксация всех точек репера R требует закрепления трех параметров, и семейство U^3 — трехпараметрическое.

В каждом репере R^* (R) первого (второго) типа линия γ задана уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (x_1 x_2 - x_3^2 = 0). \tag{1}$$

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОВАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ $\hat{H}$

Множество σ точек плоскости $\hat{H}$ назовем *невырожденной действительной линией второго порядка*, или *овальной линией* плоскости $\hat{H}$, если существует овальная линия σ' проективной плоскости P_2: $\sigma = \sigma' \cap \hat{H}$.

Если при этом $\sigma' = \sigma \cup \Gamma$, где Γ — множество общих действительных точек линии σ' с абсолютом, то линию σ назовем *собственной* овальной линией плоскости $\hat{H}$. Множество Γ содержит не более двух точек, которые вместе с мнимо-сопряженными точками множества $\sigma' \cap \gamma$ будем называть *несобственными* точками линии σ. Если для собственной овальной линии σ плоскости $\hat{H}$ множество Γ пустое, то линию σ назовем *конечной* овальной линией плоскости $\hat{H}$.

Пусть Q' — внутренность линии σ', множество $Q = Q' \cap \hat{H}$ назовем *внутренностью* линии σ на $\hat{H}$. Каждую точку множества Q назовем *внутренней* относительно σ. Овальную линию σ плоскости $\hat{H}$ назовем *выпуклой* (*невыпуклой*), если выпуклым (невыпуклым) является множество Q.

Под *выпуклым множеством* A плоскости $\hat{H}$ понимаем множество, любые две точки которого можно соединить таким отрезком плоскости $\hat{H}$ (эллиптической, гиперболической или параболической прямой), что все его точки принадлежат A.

Так как каждая овальная линия плоскости P_2 является выпуклой, то овальная линия σ плоскости $\hat{H}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда множество Q' не содержит точек абсолютной линии γ.

Будем говорить, что овальная линия σ плоскости $\hat{H}$ *касается абсолюта в точке* K, если линии σ' и γ касаются в точке K.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КЛАССИФИКАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ОВАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПЛОСКОСТИ $\hat{H}$

Пусть σ — собственная овальная линия плоскости $\hat{H}$, а σ' — содержащая ее овальная линия проективной плоскости P_2. В каждом проективном репере плоскости P_2 линия σ' задана общим уравнением вида

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \qquad \det\|a_{ij}\| \neq 0, \quad i,j = 1,2,3. \quad (2)$$

Докажем, что линия σ принадлежит одному из восьми типов овальных линий плоскости $\hat{H}$, определенных основными геометрическими ковариантами и свойством выпуклости линии.

I. Предположим, что линия σ' имеет, по крайней мере, одну общую действительную точку с абсолютной линией γ. Поместим в эту точку координатную вершину A_2 канонического репера R, выделяя тем самым из семейства U^3 двухпараметрическое подсемейство U^2. В точке A_2 линии σ и γ имеют общую касательную ($A_2A_3 : x_1 = 0$), так как в противном случае линия σ' содержит внутренние относительно абсолюта точки, и, следовательно, линия σ не является собственной для $\hat{H}$. Общее уравнение линии σ' в реперах R семейства U^2 принимает вид (2) при $a_{22} = 0$, $a_{23} = 0$:

$$a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0. \quad (3)$$

Координаты общих с абсолютом точек линии σ' являются решениями уравнения (3) и второго уравнения из (1).

Рассмотрим отдельно возможные случаи: $a_{11} = 0$ и $a_{11} \neq 0$.

1. При $a_{11} = 0$ линия σ' задана уравнением

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0 \quad (4)$$

и содержит еще одну действительную общую с абсолютом точку A_1.

1.1. Если в уравнении (4) линии σ' $a_{13} = a_{33} + 2a_{12} = 0$, то σ' совпадает с абсолютной линией γ, этот случай нас не интересует.

1.2. При $a_{13} = 0$, $a_{33} + 2a_{12} \neq 0$ уравнение (4) можно записать в виде

$$qx_3^2 - x_1x_2 = 0, \qquad q \in \mathbb{R}, \qquad q \neq 1, \qquad q \neq 0. \quad (5)$$

Линия (5) касается абсолюта в точках A_1, A_2. Если $q > 1$, то линия (5) принадлежит плоскости Лобачевского и согласно известной классификации является эквидистантой.

Для $q < 1$ возможны варианты. Точка A_3 как точка пересечения действительных касательных ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) к линии (5) в точках A_2, A_1 является внешней относительно этой линии. Учитывая это, получаем, что при $0 < q < 1$ ($q < 0$) координаты (x_i), $i = 1, 2, 3$, каждой внутренней относительно линии (5) точки удовлетворяют неравенству

$$qx_3^2 - x_1x_2 < 0 \qquad (qx_3^2 - x_1x_2 > 0). \quad (6)$$

Если $0 < q < 1$ ($q < 0$), то каждая точка абсолютной линии γ является внутренней (внешней) относительно линии (5), т.е. линия (5) является невыпуклой (выпуклой).

Невыпуклую (выпуклую) овальную линию, касающуюся в двух действительных точках абсолюта, назовем *гиперболическим* (*эллиптическим*) *циклом*.

Уравнение (5) при $0 < q < 1$ ($q < 0$) назовем *каноническим* уравнением гиперболического (эллиптического) цикла плоскости $\hat{H}$ в репере второго типа. Неравенство (6) при $0 < q < 1$ ($q < 0$) определяет внутренность гиперболического (эллиптического) цикла (5).

1.3. При $a_{13} \neq 0$, $a_{33} + 2a_{12} = 0$ уравнение (4) можно записать в виде

$$x_3^2 - x_1x_2 - px_1x_3 = 0, \qquad p \in \mathbb{R}, \qquad p \neq 0. \quad (7)$$

На линии (7) найдутся точки и внешние, и внутренние относительно абсолюта. Например, при любом p точки $H_{1,2}\left(2 : 2 : p \pm \sqrt{p^2+4}\right)$ принадлежат различным областям относительно абсолютной линии γ. Следовательно, линия (7) не является собственной для плоскости $\hat{H}$.

1.4. При $a_{13} \neq 0$, $a_{33} + 2a_{12} \neq 0$ линия (4) имеет три различные, общие с абсолютом точки: A_1, A_2, $A\left((a_{33}+2a_{12})^2 : 4a_{13}^2 : -2a_{13}(a_{33}+2a_{13})\right)$, следовательно, содержит и внутренние относительно абсолюта точки, т.е. σ не является собственной на $\hat{H}$.

Таким образом, в случае $a_{11} = 0$ получили два типа собственных овальных линий плоскости $\hat{H}$: гиперболический и эллиптический циклы.

2. При $a_{11} \neq 0$ линия σ' (3) пересекает абсолют в точках с координатами

$$\left(\left(a_{13} \pm \sqrt{D}\right)^2 : a_{11}^2 : -a_{11}\left(a_{13} \pm \sqrt{D}\right)\right), \qquad D = a_{13}^2 - 2a_{11}a_{12} - a_{11}a_{33}. \tag{8}$$

2.1. Пусть $D = 0$. Если при этом $a_{13} = 0$, то $a_{33} + 2a_{12} = 0$, и уравнение (3) можно записать в виде

$$qx_1^2 - x_3^2 + x_1x_2 = 0, \qquad q \in \mathbb{R}, \qquad q \neq 0. \tag{9}$$

Линия (9) касается абсолюта в четырежды взятой точке A_2.

При $q < 0$ ($q > 0$) все точки линии (9), за исключением точки касания, находятся внутри (вне) абсолюта. Следовательно, при $q < 0$ линия является орициклом плоскости Лобачевского, а при $q > 0$ — собственной овальной линией на $\hat{H}$.

Овальную линию плоскости $\hat{H}$, касающуюся абсолюта в четырех слившихся точках, назовем *орициклом*.

Уравнение (9) при $q > 0$ назовем *каноническим* уравнением орицикла плоскости $\hat{H}$ в репере второго типа.

Точка A_3 лежит на касательной A_2A_3 к орициклу (9), следовательно, является внешней относительно него. С учетом этого находим неравенство, определяющее внутренность орицикла (9): $qx_1^2 - x_3^2 + x_1x_2 > 0$. Так как для орицикла плоскости $\hat{H}$ в уравнении (9) $q > 0$, то вся абсолютная линия, за исключением точки касания, лежит внутри орицикла.

Если $a_{13} \neq 0$, то, так как $D = 0$, координаты (8) определяют одну действительную общую точку $K\left(a_{13}^2 : a_{11}^2 : -a_{11}a_{13}\right)$ линии σ' (9) с абсолютом, отличную от точки A_2. Касательная $k\left(a_{11}^2 : a_{13}^2 : 2a_{11}a_{13}\right)$ к линии σ' в точке K является общей касательной с абсолютом. Следовательно, линия (9) касается в двух действительных точках абсолюта, т. е. σ является либо гиперболическим, либо эллиптическим циклом.

2.2. Если $D > 0$, то координаты (8) определяют две различные действительные точки $K_{1,2}$ пересечения линии σ с абсолютом. Если ни одна из точек $K_{1,2}$ не совпадает с точкой A_2, то линия σ' имеет внутренние относительно абсолюта точки, т.е. σ не является собственной линией плоскости $\hat{H}$. Если одна из точек $K_{1,2}$ совпадает с A_2, то другая точка не является точкой касания линий σ' и γ. В этом случае на σ' также есть внутренние относительно абсолюта точки, и σ не является собственной на $\hat{H}$.

2.3. Если $D < 0$, то кроме точки A_2 линия σ' имеет две общие мнимо-сопряженные точки $J_{1,2}$ с абсолютом. В этом случае линии σ' и γ можно рассматривать как две окружности расширенной евклидовой плоскости с абсолютными точками $J_{1,2}$. Поскольку A_2 — точка касания σ' и γ, то возможны только два варианта расположения линий σ' и γ: касание внутренним и касание внешним образом. Кроме действительной общей касательной в точке A_2 линии σ' и γ в первом случае имеют две общие мнимо-сопряженные касательные, во втором — две различные действительные касательные. Если линии касаются внутренним (внешним) образом, то линия σ, будучи внешней относительно γ, не является (является) выпуклой.

Собственную выпуклую (невыпуклую) овальную линию плоскости $\hat{H}$, касающуюся абсолюта в действительной точке и имеющую с ним две общие мнимо-сопряженные точки, назовем *выпуклой* (*невыпуклой*) *эллиптической параболой*.

Найдем канонические уравнения эллиптических парабол.

Уравнение (3) при $D < 0$ определяет эллиптическую параболу в реперах двухпараметрического семейства U^2 всех канонических реперов с фиксированной вершиной A_2 в точке касания параболы с абсолютом. Помещая на параболу точку $E_{12}(-1 : 1 : 0)$, выделим из семейства U^2 однопараметрическое подсемейство U^1, в котором уравнение параболы примет вид

$$x_1^2 + a_{33}x_3^2 + x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0, \qquad a_{33} \neq 0. \tag{10}$$

Общие касательные $k_{1,2}$ линии (10) с абсолютом имеют в реперах семейства U^1 координаты:

$$k_{1,2}\left(1:\left(\frac{a_{13}\pm\sqrt{a_{33}\left(1+a_{33}-a_{13}^2\right)}}{a_{13}^2-a_{33}}\right)^2:2\frac{a_{13}\pm\sqrt{a_{33}\left(1+a_{33}-a_{13}^2\right)}}{a_{13}^2-a_{33}}\right).$$

Касательные $k_{1,2}$ выпуклой (невыпуклой) параболы являются действительными (мнимо-сопряженными). Пусть $k_1 \cap k_2 = N$. Фиксируя последний параметр, поместим вершину A_1 в точку пересечения прямой NA_2 с абсолютом. После этой фиксации вершина A_3 определена однозначно как пересечение касательных к абсолюту в точках A_1, A_2. Как четвертая гармоническая для тройки точек A_1, A_2, E_{12} однозначно определена точка $E_{12}(1:1:0)$, следовательно, и единичная точка E репера из U^1 может быть определена как одна из двух точек пересечения прямой A_3E_{12} с абсолютом. Итак, из семейства U^1 выделили два репера R и R'. Положим, что точка N имеет в этих реперах координаты $(q+1:-q:0)$, где $q \neq -1$, $q \neq 0$, так как иначе касательные $k_{1,2}$ совпадают, и линия σ' касается абсолюта дважды, это противоречит определению параболы. Координаты точек параболы в реперах R, R' удовлетворяют уравнению

$$x_1^2+qx_3^2+x_1x_2=0, \qquad q\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

При $q<-1$ линия (11) содержит внутренние относительно абсолюта точки, т.е. линия σ не является собственной линией плоскости $\hat{H}$.

При $q>-1$ каждая точка линии (11), за исключением точки касания, является внешней относительно абсолюта.

При $q>0$ $(-1<q<0)$ касательные $k_{1,2}$ являются действительными (мнимо-сопряженными), следовательно, при $q>0$ $(-1<q<0)$ парабола (11) является выпуклой (невыпуклой). Уравнение (11) при $q>0$ $(-1<q<0)$ назовем *каноническим* уравнением выпуклой (невыпуклой) эллиптической параболы.

Внутренность выпуклой (невыпуклой) эллиптической параболы (11) определена неравенством

$$x_1^2+qx_3^2+x_1x_2<0, \quad q>0 \qquad (x_1^2+qx_3^2+x_1x_2>0, \quad -1<q<0).$$

Итак, случай $a_{11}\neq 0$ определяет три типа собственных овальных линий на $\hat{H}$: орицикл, выпуклую эллиптическую параболу, а также невыпуклую эллиптическую параболу.

II. Предположим, что линия σ' не имеет действительных общих точек с абсолютом. Тогда множество $\sigma'\cap\gamma$ содержит четыре мнимые точки. Поскольку линии σ' и γ — действительные, то четверка указанных точек состоит из двух пар мнимо-сопряженных точек. Обозначим их $J_{1,2}$, $L_{1,2}$. Рассмотрим линии σ' и γ как окружности расширенной евклидовой плоскости с абсолютными точками $J_{1,2}$. Нас интересуют лишь те варианты взаимного расположения линий σ' и γ, когда линия σ' находится вне линии γ. Линия γ может быть внешней или внутренней относительно σ'. Точки в парах $J_{1,2}$, $L_{1,2}$ совпадать не могут, так как при совпадении две мнимо-сопряженные точки сливаются в действительную точку, а линии σ' и γ действительных общих точек не имеют.

Предположим, что $J_1=L_1$, тогда $J_2=L_2$, и точки $J_{1,2}$, являясь мнимо-сопряженными, становятся точками касания линий σ' и γ. Мнимые касательные к линиям σ' и γ в точках $J_{1,2}$ пересекаются во внутренней относительно каждой из линий σ', γ точке. Следовательно, в случае совпадения точек из различных пар $J_{1,2}$, $L_{1,2}$ линия γ расположена внутри линии σ'. Полюсы прямой J_1J_2 относительно линий σ' и γ в этом случае совпадают. На расширенной евклидовой плоскости окружности σ', γ являются концентрическими.

Таким образом, если линии σ' и γ не имеют общих действительных точек, то возможны только три варианта их взаимного расположения: 1) линии σ', γ пересекаются в четырех различных попарно мнимо-сопряженных точках, линия γ лежит внутри линии σ'; 2) линии σ', γ пересекаются в дважды взятых мнимо-сопряженных точках; 3) линии σ', γ пересекаются в четырех различных попарно мнимо-сопряженных точках, линия γ лежит вне линии σ'.

В первом (третьем) случае овальную линию σ плоскости $\hat{H}$, принадлежащую линии σ', назовем *невыпуклым* (*выпуклым*) *эллипсом*, во втором — *гиперциклом*. Гиперцикл является частным случаем невыпуклого эллипса, по некоторым своим метрическим свойствам он аналогичен окружности евклидовой плоскости.

Наиболее простой вид уравнения рассмотренных трех линий имеют в каноническом репере R^* первого типа. Присвоим точкам $J_{1,2}$ в репере R^* координаты $(\pm i : 1 : 0)$, полюс прямой J_1J_2 относительно линии σ' поместим на прямую A_2A_3, а в случае гиперцикла — в точку A_3. Тогда каноническое уравнение эллипса примет вид

$$x_1^2 + (x_2 + qx_3)^2 - r^2 x_3^2 = 0, \qquad q \in \mathbb{R}, \qquad q \neq 0, \qquad r \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

где для выпуклого эллипса $|r| < |q| - 1$, для невыпуклого — $|r| > |q| + 1$.

Внутренность эллипса (12) определена неравенством $x_1^2 + (x_2 + qx_3)^2 - r^2 x_3^2 < 0$.

Каноническое уравнение гиперцикла имеет вид $x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_3^2 = 0$, $r \in (0; 1)$. Внутренность гиперцикла определена неравенством $x_1^2 + x_2^2 - r^2 x_3^2 < 0$.

Итак, все возможные случаи расположения собственных овальных линий по отношению к абсолюту рассмотрены. Доказана основная теорема классификации собственных овальных линий плоскости $\hat{H}$.

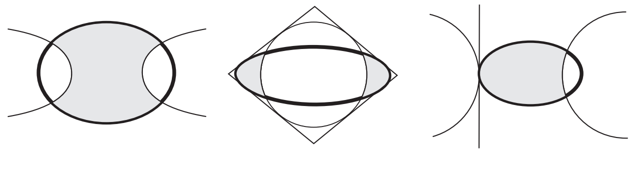
Теорема. *Основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой определяют восемь типов собственных овальных линий плоскости $\hat{H}$: гиперболический и эллиптический циклы, орицикл, выпуклую и невыпуклую эллиптические параболы, выпуклый и невыпуклый эллипсы, гиперцикл.*

3. ПОЗИЦИОННЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОВАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПЛОСКОСТИ $\hat{H}$

Согласно проведенным в параграфе 2 рассуждениям все собственные овальные линии плоскости $\hat{H}$ относятся к восьми типам. Несобственные овальные линии плоскости $\hat{H}$ принадлежат овальным линиям проективной плоскости, содержащим также и линии плоскости Лобачевского, и образуют семь типов. Приведем все 15 типов овальных линий плоскости $\hat{H}$. Для несобственных овальных линий на $\hat{H}$ в скобках укажем названия соответствующих овальных линий в геометрии Лобачевского.

1. *Однополостная бигипербола* (выпуклая гипербола) — линия, пересекающая абсолют в четырех вещественных точках и имеющая с ним четыре общие мнимые касательные. Однополостная бигипербола состоит из двух связных ветвей, ее внутренность является связным множеством на плоскости $\hat{H}$ (рис. 1, *а*).

2. *Двуполостная бигипербола* (вогнутая гипербола) — линия, пересекающая абсолют в четырех вещественных точках и имеющая с ним четыре общие вещественные касательные. Двуполостная бигипербола состоит из двух связных ветвей, а ее внутренность — из двух связных областей плоскости $\hat{H}$ (рис. 1, *б*).



а *б* *в*

Рис. 1. Однополостная бигипербола (*а*), двуполостная бигипербола (*б*), однополостная двухветвевая гиперболическая парабола (*в*). Абсолют плоскости $\hat{H}$ изображен тонкой линией, овальные линии — жирными линиями, а их внутренности — серой заливкой

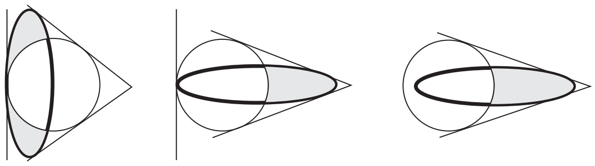
3. *Однополостная двухветвевая гиперболическая парабола* (выпуклая гиперболическая парабола) — линия, касающаяся абсолюта в одной точке, пересекающая его в двух вещественных точках и имеющая с ним две общие мнимые и одну действительную касательные. Линия состоит из двух связных ветвей, внутренность линии на $\hat{H}$ — связное множество (рис. 1, *в*).

4. *Двуполостная двухветвевая гиперболическая парабола* (одноветвевая вогнутая гиперболическая парабола) — линия, касающаяся абсолюта в одной точке, пересекающая его в двух вещественных точках и имеющая с ним три общие вещественные касательные. На плоскости $\hat{H}$ линия имеет две связные ветви. Внутренность линии состоит из двух связных областей плоскости $\hat{H}$ (рис. 2, *а*).

5. *Одноветвевая гиперболическая парабола* (двухветвевая вогнутая гиперболическая парабола) — линия, касающаяся абсолюта в одной точке, пересекающая его в двух вещественных точках и имеющая с ним три общие вещественные касательные. На плоскости $\hat{H}$ линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — связное множество на $\hat{H}$ (рис. 2, *б*).

6. *Гипербола* (полугипербола) — линия, пересекающая абсолют в двух вещественных точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные. На плоскости $\hat{H}$ линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — связное множество на $\hat{H}$ (рис. 2, *в*).

7. *Парабола* (соприкасающаяся парабола) — линия, касающаяся абсолюта в одной тройной точке, пересекающая его в одной точке и имеющая с ним две общие вещественные касательные. На плоскости $\hat{H}$ линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — связное множество на $\hat{H}$ (рис. 3, *а*).

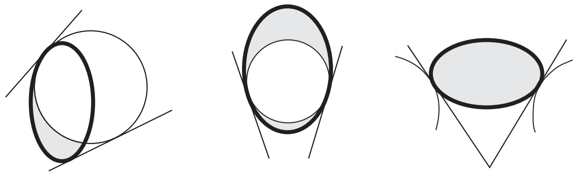


а *б* *в*

Рис. 2. Двуполостная двухветвевая гиперболическая парабола (*а*), одноветвевая гиперболическая парабола (*б*), гипербола (*в*). См. обозначения на рис. 1

8. *Гиперболический цикл* — линия, касающаяся абсолюта в двух точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные. Каждая точка абсолюта является внутренней относительно гиперболического цикла. На $\hat{H}$ линия имеет две связные ветви, ее внутренность состоит из двух связных областей (рис. 3, *б*).

9. *Эллиптический цикл* — линия, касающаяся абсолюта в двух точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные. Каждая точка абсолюта (эллиптического цикла) является внешней относительно эллиптического цикла (абсолюта). На плоскости $\hat{H}$ линия имеет две связные ветви, ее внутренность — выпуклое связное множество на $\hat{H}$ (рис. 3, *в*).



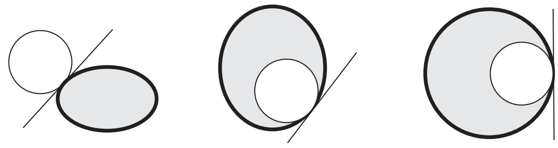
а *б* *в*

Рис. 3. Парабола (*а*), гиперболический цикл (*б*), эллиптический цикл (*в*). См. обозначения на рис. 1

10. *Выпуклая эллиптическая парабола* — линия, касающаяся абсолюта в двойной точке, пересекающая его в двух мнимо-сопряженных точках и имеющая с ним одну общую вещественную касательную. Каждая точка абсолюта (выпуклой эллиптической параболы) является внешней относительно выпуклой эллиптической параболы (абсолюта). На плоскости $\hat{H}$ линия имеет одну связную ветвь. Внутренность линии — выпуклое связное множество на $\hat{H}$ (рис. 4, *а*).

11. *Невыпуклая эллиптическая парабола* — линия, касающаяся абсолюта в двойной точке, пересекающая его в двух мнимо-сопряженных точках и имеющая с ним одну общую вещественную касательную. Каждая точка абсолюта является внутренней относительно невыпуклой эллиптической параболы. На плоскости $\hat{H}$ линия имеет одну связную ветвь, ее внутренность — связное множество (рис. 4, *б*).

12. *Орицикл* — линия, касающаяся абсолюта в четырех слившихся точках и имеющая с ним одну общую вещественную касательную. Каждая точка абсолюта является внутренней относительно орицикла. На плоскости $\hat{H}$ линия имеет одну связную ветвь, ее внутренность — связное множество (рис. 4, *в*).

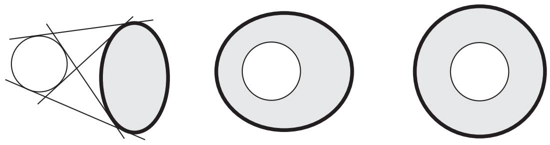


а *б* *в*

Рис. 4. Выпуклая эллиптическая парабола (*а*), невыпуклая эллиптическая парабола (*б*), орицикл (*в*). См. обозначения на рис. 1

13. *Выпуклый эллипс* — конечная линия, пересекающая абсолют в четырех мнимых точках и имеющая с ним четыре общие вещественные касательные. Каждая точка абсолюта (выпуклого эллипса) является внешней относительно выпуклого эллипса (абсолюта). На плоскости $\hat{H}$ линия связна. Внутренность линии — выпуклое связное множество (рис. 5, *а*).

14. *Невыпуклый эллипс* — конечная линия, пересекающая абсолют в четырех мнимых точках и имеющая с ним четыре общие мнимые касательные. Каждая точка абсолюта является внутренней



а *б* *в*

Рис. 5. Выпуклый эллипс (*а*), невыпуклый эллипс (*б*), гиперцикл (*в*). См. обозначения на рис. 1

относительно невыпуклого эллипса. На плоскости $\hat{H}$ линия связна. Внутренность линии — связное множество на $\hat{H}$ (рис. 5, *б*).

15. *Гиперцикл* — конечная линия, касающаяся абсолюта в двух парах совпадающих мнимых точек и имеющая с ним две общие мнимо-сопряженные касательные. Каждая точка абсолюта является внутренней относительно гиперцикла. На плоскости $\hat{H}$ линия и ее внутренность связны (рис. 5, *в*).

Замечание. Две квадрики проективной плоскости, кроме основных, имеют и другие геометрические ковarианты, которые необходимо учитывать при построении полной классификации овальных линий. Например, если две квадрики имеют две общие действительные точки, то полюсы прямой, соединяющей эти точки, относительно заданных линий, также являются геометрическими ковариантами квадрик. Положение полюсов относительно самих квадрик инвариантно в проективных преобразованиях проективной плоскости, следовательно, каждый возможный вариант этого положения определит самостоятельный тип овальных линий на плоскостях $\hat{H}$ и Лобачевского. Поэтому, к примеру, множество всех гипербол плоскости $\hat{H}$ (или полугипербол плоскости Лобачевского) состоит в соответствующей классификации из девяти G-неэквивалентных типов (рис. 6).

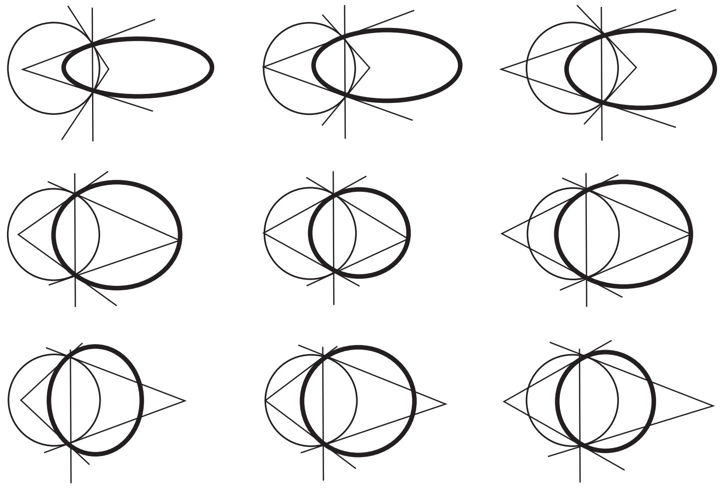


Рис. 6. Представители различных типов гипербол плоскости $\hat{H}$

Известны и другие классификации овальных линий плоскости Лобачевского (см., например, [7–12]). В классификациях работ [9–12] указаны и некоторые собственные линии плоскости $\hat{H}$, идеальные для плоскости Лобачевского. В работах [10–12] классификации основаны на фокально-директориальных свойствах линий 2-го порядка и двойственным к ним свойствам. В данной работе, строя классификацию собственных овальных линий плоскости $\hat{H}$, мы ограничились рассмотрением свойства выпуклости линии и основных ее геометрических ковариантов.

Библиографический список

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М. : ГИТТЛ, 1955.
2. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969.
3. *Ромакина Л. Н.* Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 9. С. 83–116.
4. *Ромакина Л. Н.* Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 69–72.
5. *Ромакина Л. Н.* Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 14–26.
6. *Пронько Г. П.* Проблема Кеплера в пространстве постоянной кривизны // ТМФ. 2008. Т. 155, № 2. С. 317–326.
7. *Liebmann H.* Nichteuklidische Geometrie. Leipzig, 1912.
8. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1936.
9. *Каган В. Ф.* Основания геометрии : в 2 ч. Ч. II. М. : ГТТИ, 1956.
10. *Певзнер С. Л.* Фокально-директориальные свойства кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского // Изв. вузов. Математика. 1960. № 6. С. 18–194.
11. *Певзнер С. Л.* Свойства кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского, двойственные фокально-директориальным // Изв. вузов. Математика. 1961. № 5. С. 39–50.
12. *Певзнер С. Л.* Детальная классификация нераспадающихся кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского с помощью фокально-директориальных инвариантов // Изв. вузов. Математика. 1962. № 6. С. 85–90.