



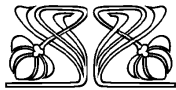
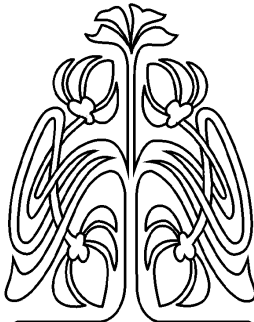
## МЕХАНИКА

УДК 539.3

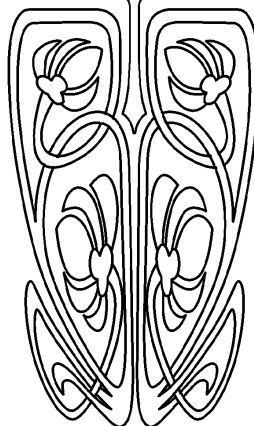
### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ТОЛСТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ–ПОЛОСЫ

П.Ф. Недорезов

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



Рассматривается вибрационный изгиб толстой пластинки-полосы при произвольном закреплении краев. В качестве исходных приняты уравнения трехмерной теории вязкоупругости, записанные в перемещениях. Понижение размерности краевой задачи выполняется методом сплайн-коллокации. Одномерная краевая задача решается численно методом дискретной ортогонализации. Отмечены некоторые новые эффекты, которые не могут быть описаны в рамках классической теории Кирхгофа.

#### Application of a Spline-Collocation Method to the Problems of Thick Viscoelastic Plate-Strip Vibrations

P.F. Nedorezov

Vibratory bend of a thick plate-strip with arbitrary edge fixing is considered. The equations of 3D viscoelastic theory in displacements are accepted as governing equations. Boundary problem dimensions reduction is realized with spline-collocation method. 1D boundary problem is solved numerically using discrete orthogonalization method. New effects that cannot be explained with the classic Kirhgof theory are mentioned.

Рассматриваются установившиеся колебания бесконечной в направлении  $y$  пластинки конечной ширины  $a$  и толщины  $h$  под действием распределенной по плоскости  $z = -h/2$  нагрузки интенсивности  $q(x, t)$

$$M' = Mf + g(x) \int_{-\infty}^t f(t-\tau) d\tau, M'' = \int_{-\infty}^t M(x, \tau) f(t-\tau) d\tau, 0 \leq x \leq a \quad (1)$$

Предполагается, что способы закрепления краев  $x = 0$  и  $x = a$  в направлении оси  $y$  остаются неизменными. Тогда  $v = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ , а остальные компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) не зависят от  $y$ .

Зависимости между ненулевыми компонентами напряжений и малых деформаций (механические свойства материала считаются независящими от температуры) определяются соотношениями линейного закона вязкоупругости

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \left( (1-\nu) \frac{\partial u(x, z, \tau)}{\partial x} + \nu \frac{\partial w(x, z, \tau)}{\partial z} \right) d\tau \\ &\quad (x \Leftrightarrow z; u \Leftrightarrow w; \nu = \text{const}), \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \left( \frac{\partial u(x, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, \tau)}{\partial x} \right) d\tau, \\ \sigma_y &= \nu(\sigma_x + \sigma_z), \end{aligned} \quad (2)$$

где обозначено  $A = 1/(1+\nu)(1-2\nu)$ .

Все характеристики НДС пластинки, соответствующие нагрузке (1), представляются в виде



$$V(x, z, t) = V^{(1)}(x, z) \cos \omega t + V^{(2)}(x, z) \sin \omega t.$$

Для составляющих  $u^{(k)}(x, z)$  и  $w^{(k)}(x, z)$  ( $k = 1, 2$ ) проекций вектора смещения в работе [1] получена система уравнений, которая после введения безразмерных величин преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + 2h_0^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi^2} + \frac{h_0}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \zeta} - (-1)^k 2 \sum_{n=1}^2 \delta_{k+n-1} u_n = 0, \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial \zeta^2} + h_0^2 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi^2} + \frac{h_0}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi \partial \zeta} - (-1)^k \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sum_{n=1}^2 \delta_{k+n-1} w_n = 0 \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\xi = x/a$ ,  $\zeta = z/h$  – безразмерные переменные,  $u_k(\xi, \zeta) = u^{(k)}(x, z)/h$  и  $w_k(\xi, \zeta) = w^{(k)}(x, z)/h$  ( $k = 1, 2$ ) – безразмерные составляющие проекций вектора смещения,

$$d_j = \frac{(1+\nu)E_j}{E_1^2 + E_2^2}, \delta_j = \rho \omega^2 h^2 d_j \quad (j = 1, 2), E_1 + iE_2 = \int_{-\infty}^t K(s) \exp(i\omega s) ds, E_3 = -E_1, \\ d_3 = -d_1, \delta_3 = -\delta_1.$$

В случае свободно опертых краев пластинки и нагрузки

$$q_0(x) = p_0 \sin \pi x, p_0 = \text{const} \quad (4)$$

рассмотренном в [1], [2], понижение размерности краевой задачи для системы (3) выполняется методом разделения переменных. Полученная одномерная задача решается численно методом дискретной ортогонализации. При более сложных, чем (4), законах изменения нагрузки или других способах закрепления переход от двумерных уравнений к одномерным можно осуществить методом сплайн-коллокации. Обзор работ, где применяется такой подход для решения разнообразных задач статики упругих пластинок и оболочек, приведен в [3].

Считая, что края пластинки закреплены, будем искать функции  $u_k(\xi, \zeta)$  и  $w_k(\xi, \zeta)$  ( $k = 1, 2$ ) в виде

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) U_j(\zeta), \quad u_2(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) U_{j+N+1}(\zeta), \\ w_1(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\xi) W_j(\zeta), \quad w_2(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\xi) W_{j+N+1}(\zeta), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\varphi_j(\xi)$  и  $\psi_j(\xi)$  подобраны так, чтобы тождественно выполнялись условия закрепления краев  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ .

Например, если при  $\xi = 0, \xi = 1$  должны выполняться условия  $u = w = 0$  (жесткое закрепление), то функции  $\varphi_j(\xi)$  и  $\psi_j(\xi)$  выбираются в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) = \psi_0(\xi) = -4B_{3,-1}(\xi) + B_{3,0}(\xi), \quad \varphi_1(\xi) = \psi_1(\xi) = -B_{3,-1}(\xi) + B_{3,1}(\xi), \\ \varphi_j(\xi) = \psi_j(\xi) = B_{3,j}(\xi) \quad (j = 2, N-2), \quad \varphi_{N-1}(\xi) = \psi_{N-1}(\xi) = B_{3,N}(\xi) - B_{3,N+1}(\xi), \\ \varphi_N(\xi) = \psi_N(\xi) = B_{3,N}(\xi) - 4B_{3,N+1}(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Если край  $\xi = 1$  свободно оперт ( $\sigma_x = w = 0$  при  $\xi = 1$ ) при жестком закреплении края  $\xi = 0$ , то в качестве  $\varphi_n(\xi)$  ( $n = N-1, N$ ) следует принять

$$\varphi_{N-1}(\xi) = B_{3,N-1}(\xi) + B_{3,N+1}(\xi), \quad \varphi_N(\xi) = B_{3,N}(\xi),$$

а для остальных  $\varphi_n(\xi)$  ( $n = 0, N-2$ ) и для всех  $\psi_m(\xi)$  ( $m = 0, N$ ) остаются в силе соответствующие выражения из (6). Здесь через  $B_{3,p}(\xi)$  ( $p = -1, N+1$ ) обозначены кубические B-сплайны [4], построенные по системе узлов  $\xi = \xi_q = qh_x$  ( $q = -3, N+3$ ;  $h_x = 1/N$ ).

После подстановки (5) в (3) из требования, чтобы полученные соотношения выполнялись в точках коллокации  $\xi = x_r$  ( $r = 0, N$ ), следует система  $4N+4$  обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $U_k(\xi), W_k(\xi)$  ( $k = 0, 2N+1$ ). Последняя преобразуется в систему  $8N+8$  дифференциальных уравнений первого порядка и в векторной форме может быть записана в виде



$$\frac{d\bar{Y}}{d\zeta} = D\bar{Y}(\zeta), \tag{7}$$

где  $\bar{Y}(\zeta) = \{y_p(\zeta)\} = \{U_0, \dots, U_{2n+1}, W_0, \dots, W_{2n+1}, U'_0, \dots, U'_{2n+1}, W'_0, \dots, W'_{2n+1}\}$  – вектор неизвестных. Отличные от нуля компоненты  $d_{i,j}$  ( $i, j = \overline{0, 8N+7}$ ) матрицы  $D$  определяются формулами

$$\begin{aligned} i = \overline{0, 4N+3} \quad d_{i, i+4N+4} &= 1; \\ j = \overline{0, N}; i = \overline{4N+4, 5N+4} \quad s = i - 4N - 4 \quad d_{i,j} &= c_{s,j}^{(1)}, d_{i, j+N+1} = c_{s,j}^{(2)}, \\ d_{i, j+6N+6} &= c_{s,j}^{(5)}; \\ i = \overline{5N+5, 6N+5} \quad s = i - 5N - 5 \quad d_{i,j} &= -c_{s,j}^{(2)}, d_{i, j+N+1} = c_{s,j}^{(1)}, d_{i, j+7N+7} = c_{s,j}^{(5)}; \\ i = \overline{6N+6, 7N+6} \quad s = i - 6N - 6 \quad d_{i, j+2N+2} &= c_{s,j}^{(3)}, d_{i, j+3N+3} = c_{s,j}^{(4)}, d_{i, j+4N+4} = c_{s,j}^{(6)}; \\ i = \overline{7N+7, 8N+7} \quad s = i - 7N - 7 \quad d_{i, j+2N+2} &= -c_{s,j}^{(3)}, d_{i, j+3N+3} = c_{s,j}^{(3)}, \\ d_{i, j+5N+5} &= c_{s,j}^{(6)}; c_{i,j}^{(k)} - \text{компоненты матриц} \\ C_1 &= -2 \left[ h_0^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} A_0^{-1} A_2 + \delta_1 E \right], C_2 = -2\delta_2 E, C_3 = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[ \frac{h_0^2}{2} B_0^{-1} B_2 + \delta_1 E \right], \\ C_4 &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \delta_2 E, C_5 = -\frac{h_0}{1-2\nu} A_0^{-1} B_1, C_6 = -\frac{h_0}{2(1-\nu)} B_0^{-1} A_1, A_0 = \{\varphi_j(x_i)\}, \\ A_1 &= \{\varphi_j(x_i)\}, A_2 = \{\varphi_j''(x_i)\}, B_0 = \{\psi_j(x_i)\}, B_1 = \{\psi_j'(x_i)\}, B_2 = \{\psi_j''(x_i)\}, \end{aligned}$$

$E$  – единичная матрица размерности  $(N+1) \times (N+1)$ .

Условия для составляющих напряжений  $\sigma_z^{(k)}$  и  $\tau_{xz}^{(k)}$  при  $\zeta = \pm 1/2$ , записанные в перемещениях,

$$\text{при } \zeta = -1/2 \quad \nu h_0 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} + (1-\nu) \frac{\partial w_k}{\partial \zeta} = (-1)^{k-1} d_k q_0(\xi), \quad \frac{\partial u_k}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} = 0;$$

$$\text{при } \zeta = 1/2 \quad \nu h_0 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} + (1-\nu) \frac{\partial w_k}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} = 0 \quad (k = 1, 2)$$

после подстановки выражений (5) и поточечного удовлетворения в точках коллокации  $\xi = x_r$  дают граничные условия для функции  $\bar{Y}(\zeta)$ . Эти условия в векторной форме имеют вид

$$H_1 \bar{Y}(-1/2) = \bar{e}_1, \quad H_2 \bar{Y}(1/2) = \bar{e}_2, \tag{8}$$

где  $H_1 = \{h_{i,j}\}$ ,  $H_2 = \{h_{i+4N+4,j}\}$ ,  $\bar{e}_1 = \{e_i\}$ ,  $\bar{e}_2 = \{e_{i+4N+4}\}$  ( $i = \overline{0, 4N+3}$ ;  $j = \overline{0, 8N+7}$ ) – известные матрицы и векторы.

Краевые задачи (7), (8) решаются численно методом дискретной ортогонализации, который, как показывают решения многочисленных тестовых задач, обеспечивает получение практически точных результатов.

После определения значений функции  $\bar{Y}(\zeta)$  для фиксированных  $\zeta = \zeta_m$  составляющие проекций вектора смещения вдоль прямых  $\zeta = \zeta_m$  вычисляются по формулам (5), а для составляющих напряжений имеют место соотношения:

$$\sigma_x^{(k)} = A \sum_{j=0}^N \sum_{p=0,1} (-1)^p E_{k+p} \left[ (1-\nu) h_0 \varphi_j'(\xi) Y_{j+p(N+1)}(\zeta) + \nu \psi_j(\zeta) Y_{j+(p+6)(N+1)}(\zeta) \right] \\ (x \Leftrightarrow z; \nu \Leftrightarrow 1-\nu);$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \sum_{j=0}^N \sum_{p=0,1} (-1)^p E_{k+p} \left[ \varphi_j(\xi) Y_{j+(p+4)(N+1)}(\zeta) + h_0 \psi_j'(\zeta) Y_{j+(p+2)(N+1)}(\zeta) \right].$$

Оценка достоверности результатов, получаемых при изложенном подходе, проводилась на примере задачи о колебаниях пластинки со свободно опертыми краями под действием нагрузки (4). При расчетах принято  $a = 1.0$  м,  $h_0 = 0.15$ ,  $p_0 = 1.0$  Па,  $\nu = 0.4$ ,  $E_1 = 2.7 \cdot 10^9$  Па,  $E_2/E_1 = \text{tg } \delta = 0.015$ ,  $\rho = 1250$  кг/м<sup>3</sup> (ма-



териал ЭД-6 МА),  $\omega = 5034c^{-1}$ ,  $N = 40$ ,  $M = 20$ . Отличие полученных результатов от соответствующих результатов вычислений по методике работы [2] составляет менее 1%, что подтверждает эффективность предлагаемого подхода.

Были исследованы также колебания пластинок с относительной толщиной  $h_0 = 0.025 \div 0.25$  под действием нагрузки (1) при  $q_0(\xi) = p_0 = \text{const}$  для свободно опёртых или жестко заделанных обоих краев. В табл. 1 (свободное опирание) и 2 (жесткая заделка) приведены значения первых трех критических частот  $\omega_k$  и (с учетом симметрии) максимальных амплитуд  $\max w$  прогиба точек срединной плоскости. В этих же таблицах даны помеченные звездочкой (\*) значения указанных величин, вычисленные по методике работы [5], когда в качестве исходных приняты уравнения, основанные на гипотезах Кирхгоффа, с учетом инерции вращения. Для величин  $\max w(\zeta, 0)$  и  $\max w^*(\zeta, 0)$  в скобках указаны значения  $\zeta$ , при которых эти величины получаются.

Таблица 1

$h_0$	$\omega_k, c^{-1}$	$\max w(\zeta, 0)$	$\omega_k^*, c^{-1}$	$\max w^*(\zeta, 0)$
0.025	114	8.231-3 (0.500)	114	8.246-3 (0.500)
	1020	3.367-5 (0.175); 3.345-5 (0.500)	1025	3.401-5 (0.175); 3.432-5 (0.500);
	2789	2.681-6 (0.100); 2.551-6 (0.300); 2.499-6(0.500)	2838	2.670-6 (0.100); 2.664-6 (0.300); 2.671-6 (0.500)
0.050	228	5.017-4 (0.500)	228	5.169-4 (0.500)
	1974	2.240-6 (0.175); 2.241-6 (0.500)	2037	2.135-6 (0.175); 2.145-6 (0.500)
	5148	1.908-7 (0.100); 1.872-7 (0.300); 1.865-7 (0.500)	5567	1.660-7 (0.100); 1.674-7 (0.300); 1.659-7 (0.500)
0.075	339	1.041-4 (0.500)	342	1.027-4 (0.500)
	2826	4.738-7 (0.175); 4.764-7 (0.500)	3021	4.215-7 (0.175); 4.239-7 (0.500)
	6973	4.429 -8 (0.100); 4.363-8 (0.300); 4.370-8 (0.500)	8113	3.298 -8 (0.100); 3.285-8(0.300); 3.300-8 (0.500)
0.100	448	3.315-5 (0.500)	455	3.253-5 (0.500)
	3559	1.632-7 (0.175); 1.644-7 (0.500)	3967	1.334-7 (0.175); 1.341-7 (0.500)
	8325	1.691-8 (0.100); 1.672-8 (0.300); 1.674-8 (0.500)	10407	1.044-8 (0.100); 1.038-8 (0.300); 1.045-8 (0.500)
0.125	555	1.383-5 (0.500)	567	1.325-5 (0.500)
	4178	7.413-8 (0.175); 7.461-8(0.500);	4867	5.470-8 (0.175); 5.482-8(0.500);
	9323	8.439-9 (0.100); 8.342-9 (0.300); 8.371-9 (0.500)	12427	4.277-9 (0.100); 4.246-9(0.300); 4.282-9 (0.500)
0.150	658	6.779-6 (0.500)	679	6.426-6 (0.500)
	4695	4.002-8 (0.175); 4.024-8 (0.500)	5711	2.638-8 (0.175); 2.646-8 (0.500)
	10065	4.957-9 (0.100); 4.901-9 (0.300); 4.929-9 (0.500)	14173	2.064-9 (0.100); 2.050-9(0.300); 2.067-9 (0.500)



Окончание табл. 1

$h_0$	$\omega_k, c^{-1}$	$\max w(\xi, 0)$	$\omega_k^*, c^{-1}$	$\max w^*(\xi, 0)$
0.175	757	3.738-6 (0.500)	791	3.381-6 (0.500)
	5125	2.430-8 (0.175); 2.442-8 (0.500)	6498	1.424-8 (0.175); 1.427-8 (0.500)
	10624	3.240-9 (0.100); 3.209-9 (0.300); 3.219-9 (0.500)	15665	1.115-9 (0.100); 1.106-9(0.300); 1.117-9 (0.500)
0.200	851	2.246-6 (0.500)	899	2.033-6 (0.500)
	5484	1.606-8 (0.175); 1.611-8 (0.500)	7225	8.349-8 (0.175); 8.365-8 (0.500)
	11051	2.278-9 (0.100); 2.265-9 (0.300); 2.264-9 (0.500)	16931	6.541-10 (0.100); 6.475-10 (0.300); 6.560-10 (0.500)
0.225	941	1.341-6 (0.500)	1007	1.269-6 (0.500)
	5783	1.130-8 (0.175); 1.134-8 (0.500)	7892	5.212-9 (0.175); 5.224-9 (0.500)
	11388	1.691-9 (0.100); 1.674-9 (0.300); 1.682-9 (0.500)	18000	4.088-10 (0.100); 4.039-10(0.300); 4.104-10 (0.500)
0.250	1028	9.721-7 (0.500)	1114	8.328-7 (0.500)
	6035	8.343-9 (0.175); 8.366-9 (0.500)	8502	3.420-9 (0.175); 3.425-9 (0.500)
	11649	1.307-9 (0.100); 1.292-9 (0.300); 1.302-9 (0.500)	18902	2.685-10 (0.100); 2.649-10 (0.300); 2.700-10 (0.500)

Таблица 2

$h_0$	$\omega_k^*, c^{-1}$	$\max w$	$\omega_k^*, c^{-1}$	$\max w^*$
0.025	272	1.353-3 (0.500)	259	1.674-3 (0.500)
	1391	2.376-5 (0.200); 2.171-5 (0.500)	1395	2.388-5 (0.200); 2.234-5 (0.500);
	3360	2.598-6 (0.125); 2.227-6 (0.325); 2.238-6(0.500)	3433	2.495-6 (0.125); 2.316-6 (0.325); 2.349-6 (0.500)
0.050	515	1.059-4 (0.500)	517	1.049-4 (0.500)
	2624	1.710-6 (0.200); 1.570-6 (0.500)	2769	1.499-6 (0.200); 1.399-6 (0.500)
	5992	2.133-7 (0.125); 1.893-7 (0.325); 1.911-7 (0.500)	6730	1.577-7 (0.125); 1.460-7 (0.325); 1.480-7 (0.500)
0.075	754	2.193-5 (0.500)	775	2.067-5 (0.500)
	3627	4.031-7 (0.200); 3.674-7 (0.500)	4102	2.977-7 (0.200); 2.771-7 (0.500)
	7816	5.681 -8 (0.125); 4.982-8 (0.325); 5.105-8 (0.500)	9781	3.168 -8 (0.125); 2.921-8 (0.325); 2.959-8 (0.500)
0.100	973	7.383-6 (0.500)	1030	6.552-6 (0.500)
	4403	1.556-7 (0.200); 1.405-7 (0.500)	5378	9.502-8 (0.200); 8.805-8 (0.500)
	9044	2.372-8 (0.125); 2.096-8 (0.300); 2.157-8 (0.500)	12516	1.026-8 (0.125); 9.395-9 (0.325); 9.523-9 (0.500)



Окончание табл.2

$h_0$	$\omega_k^*, c^{-1}$	max w	$\omega_k^*, c^{-1}$	max w*
0.125	1171	3.263-5 (0.500)	1284	2.686-6 (0.500)
	4992	7.792-8 (0.200); 6.993-8 (0.500);	6582	3.927-8 (0.200); 3.625-8 (0.500);
	9887	1.236-8 (0.125); 1.120-8 (0.300); 1.149-8 (0.500)	14908	4.322-9 (0.125); 3.921-9 (0.325); 3.982-9 (0.500)
0.150	1347	1.713-6 (0.500)	1536	1.296-6 (0.500)
	5439	4.551-8 (0.200); 4.078-8 (0.500)	7708	1.918-8 (0.200); 1.759-8 (0.500)
	10495	7.463-9 (0.100); 6.803-9 (0.300); 7.016-9 (0.500)	16961	2.153-9 (0.100); 1.933-9 (0.325); 1.968-9 (0.500)
0.175	1500	1.013-6 (0.500)	1785	6.994-7 (0.500)
	5783	2.945-8 (0.175); 2.637-8 (0.500)	8748	1.049-8 (0.200); 9.558-9 (0.500)
	10942	4.911-9 (0.100); 4.536-9 (0.300); 4.678-9 (0.500)	18699	1.206-9 (0.125); 1.072-9 (0.325); 1.091-9 (0.500)
0.200	1634	6.536-7 (0.500)	2030	4.102-7 (0.500)
	6054	2.048-8 (0.175); 1.832-8 (0.500)	9702	6.246-9 (0.200); 5.644-9 (0.500)
	11286	3.433-9 (0.100); 3.205-9 (0.300); 3.317-9 (0.500)	20171	7.366-10 (0.150); 6.416-10 (0.325); 6.594-10 (0.500)
0.225	1749	4.504-7 (0.500)	2272	2.561-7 (0.500)
	6272	1.496-8 (0.175); 1.340-8 (0.500)	10572	3.968-9 (0.200); 3.552-9 (0.500)
	11553	2.464-9 (0.100); 2.381-9 (0.300); 2.419-9 (0.500)	21405	4.825-10 (0.150); 4.107-10 (0.325); 4.252-10 (0.500)
0.250	1848	3.264-7 (0.500)	2510	1.680-7 (0.500)
	6451	1.1433-8 (0.175); 1.019-8 (0.500)	11360	2.651-9 (0.200); 2.349-9 (0.500)
	11764	1.912-9 (0.100); 1.816-9 (0.300); 1.884-9 (0.500)	22442	3.327-10 (0.150); 2.765-10 (0.325); 2.887-10 (0.500)

Форму деформированной срединной плоскости свободно опертой пластинки при различных значениях  $\omega$  иллюстрируют графики, изображенные на рис.1 и 2. На рис.1 для  $h_0 = 0.100$  показаны графики функций  $W_i^{(1)}(\xi) = k_i w_1(\xi, 0) (i = \overline{1,5})$ , где кривая 1 соответствует значениям  $\omega = \omega_1, k_1 = 10^6$ ; кривая 2 –  $\omega = \omega_2, k_2 = 10^8$ ; кривая 3 –  $\omega = \omega_3, k_3 = 10^9$ ; кривая 4 –  $\omega = 13000c^{-1}, k_4 = 10^9$  и кривая 5 –  $\omega = 20000c^{-1}, k_5 = 10^9$ .

Аналогичные графики функций  $W_i^{(2)}(\xi) = n_i w_2(\xi, 0)$  изображены на рис. 2. Эти графики построены для тех же значений  $h_0$  и  $\omega$ , что и на рис. 1;  $n_1 = 10^5, n_2 = 10^7, n_3 = 10^8, n_4 = n_5 = 10^{10}$ .

Колебания пластинки под действием нагрузки (1) с достаточной степенью условности подразделяются на следующие виды:

- чисто изгибные, когда сечения, перпендикулярные оси  $x$ , перемещаются вдоль оси  $z$  и поворачиваются, оставаясь плоскими или искривляясь;
- планарные, при которых точки сечения, перпендикулярного оси  $x$ , получают одинаковые перемещения в направлении  $x$ ;



- изгибно-планарные с преобладанием изгибной составляющей,
- планарно-изгибные с преобладанием планарной составляющей.

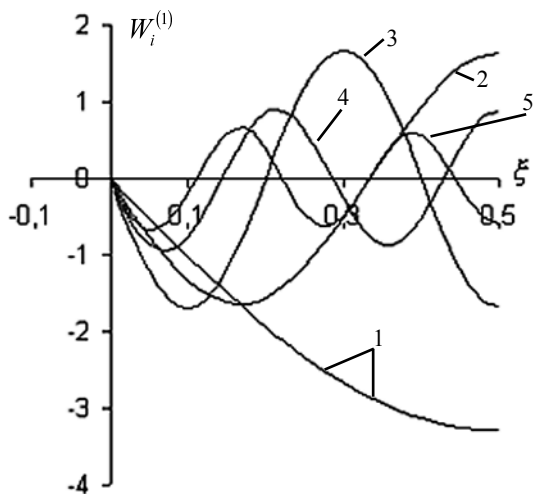


Рис.1

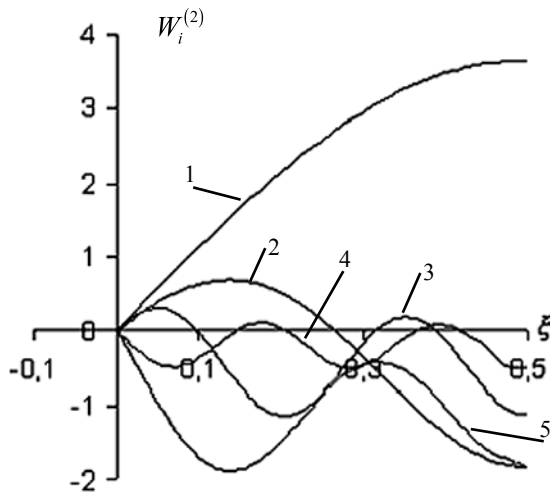


Рис.2

Вид колебаний пластинки определяется значениями толщины  $h_0$  и частоты  $\omega$ . В свободно опертой пластинке при  $\omega = \omega_1$  и  $h_0 \leq 0.250$  колебания будут чисто изгибными, причем при  $h_0 \leq 0.250$  сечения  $\xi = \text{const}$  остаются плоскими и незначительно искривляются при больших значениях  $h_0$ ; величины  $w_i$  при  $h_0 \leq 0.150$  с высокой точностью можно считать постоянными. Составляющие нормального напряжения  $\sigma_x$  линейно меняются по толщине, линейность составляющей  $\sigma_x^{(2)}$  сохраняется до  $h_0 \leq 0.250$  и незначительно нарушается для  $\sigma_x^{(1)}$  (при  $h_0 \leq 0.125$ ).

Иная картина колебаний наблюдается при  $\omega = \omega_2$ . В тонких пластинках ( $h_0 \leq 0.075$ ) колебания в любой момент времени  $t$  будут чисто изгибными при линейном изменении по толщине составляющих тангенциального смещения и напряжения  $\sigma_x$ .

При  $h_0 = 0.075$  в моменты времени  $t_i^{(1)}$  ( $\cos \omega t_i^{(1)} = 1$ ) точка, в которой  $u_1 = 0$ , смещается со срединной плоскости, занимая разные положения для разных сечений ( $\zeta = -0.30$  при  $\xi = 0.00$ ,  $\zeta = 0.15$  при  $\xi = 0.175$ ,  $\zeta = 0.05$  при  $\xi = 0.25$ ,  $\zeta = 0.0$  при  $\xi = 0.30$ ), что соответствует планарно-изгибной форме колебаний. В моменты времени  $t_i^{(2)}$  ( $\sin \omega t_i^{(2)} = 1$ ) распределение по толщине составляющей  $u_2$  симметрично (для  $w_2$  и  $\sigma_x^{(2)}$  антисимметрично) относительно срединной плоскости, причем закон изменения  $u_2$  и  $\sigma_x^{(2)}$  близок к линейному. Составляющая  $w_2$  незначительно меняется по толщине, закон изменения  $w_1$  более неравномерный. Аналогичные закономерности имеют место и для  $h_0 = 0.100$  и  $h_0 = 0.125$  при нелинейном законе изменения по толщине величин  $u_2$  и  $\sigma_x^{(2)}$  в моменты времени  $t = t_i^{(2)}$ .

В толстых пластинках ( $h_0 \geq 0.150$ ) при второй критической частоте колебания можно идентифицировать как планарно-изгибные при  $t = t_i^{(1)}$  и изгибно-планарные при  $t = t_i^{(2)}$ .

При  $\omega = \omega_3$  картина колебаний ещё более усложняется. В тонкой пластинке ( $h_0 = 0.025$ ) точки срединной плоскости в моменты времени  $t = t_i^{(1)}$  получают ненулевые тангенциальные смещения, которые, как и  $\sigma_x^{(1)}$ , меняются по толщине по линейному закону, составляющая  $w_1 = \text{const}$ , что соответствует изгибно-планарной форме колебаний; при  $t = t_i^{(2)}$  колебания будут чисто изгибными.

При  $h_0 = 0.05$  составляющие прогиба  $w_i$  по толщине сечения постоянны, законы изменения величин  $u_i$  и  $\sigma_x^{(i)}$  в моменты времени  $t = t_i^{(1)}$  соответствуют планарно-изгибным, а в моменты времени  $t = t_i^{(2)}$  в отдельных сечениях чисто изгибным.

В более толстых пластинках ( $h_0 = 0.075 \div 0.150$ ) колебания будут планарно-изгибными при  $t = t_i^{(1)}$  и изгибно-планарными при  $t = t_i^{(2)}$ . Дальнейшее увеличение толщины пластинки приводит к уменьшению



планарной составляющей в моменты времени  $t = t_i^{(1)}$  и изгибной составляющей при  $t = t_i^{(2)}$ . Отметим также, что в пластинках с толщиной  $h_0 = 0.175 \div 0.225$  при  $t = t_i^{(1)}$  все точки пластинки смещаются по вертикали в направлении, противоположном направлению действия нагрузки.

Аналогичные закономерности, естественно, при иных, более низких значениях  $h_0$  наблюдаются и при жестком закреплении краев пластинки.

Кроме указанных особенностей, в рассматриваемом случае, как и при нагрузке (4) [2], в моменты времени  $t_i^{(1)}$  наблюдается «подтягивание», при котором отдельные точки нагруженной поверхности  $\zeta = -1/2$  смещаются по направлению действия нагрузки, а смещение точек поверхности  $\zeta = 1/2$  происходит в противоположном направлении. При этом в отличие от [2] «подтягивание» происходит не для всех  $0 < \zeta < 1$ , а только в некоторых окрестностях отдельных значений  $\zeta$ . Например, в свободно опертой пластинке с толщиной  $h_0 = 0.100$  «подтягивание» имеет место в окрестности сечения  $\zeta = 0.500$  при  $4950c^{-1} < \omega < 5010c^{-1}$  и  $14855c^{-1} < \omega < 16335c^{-1}$ . При  $12865c^{-1} < \omega < 13195c^{-1}$  «подтягивание» наблюдается вблизи  $\zeta = 0.100$ , а при  $14025c^{-1} < \omega < 14825c^{-1}$  – вблизи  $\zeta = 0.175$ . Для  $h_0 = 0.125$  «подтягивание» происходит в окрестности сечения  $\zeta = 0.250$  при  $\omega = \omega_2$ , а для  $h_0 = 0.250$  и  $\omega = \omega_3$  – при  $0.095 \leq \zeta \leq 0.260$ . Графики изменения по толщине пластинки составляющих смещения  $w$  при «подтягивание» для  $h_0 = 0.100$  и  $\omega = 14500c^{-1}$  показаны на рис. 3, где кривая 1 соответствует значениям  $kw_1(0.175; \zeta)$ , а кривая 2 –  $kw_2(0.175; \zeta)$ ; кривые 3 и 4 изображают изменение функций  $kw_1(0.500; \zeta)$  и  $kw_2(0.500; \zeta)$ ,  $k = 10^{10}$ .

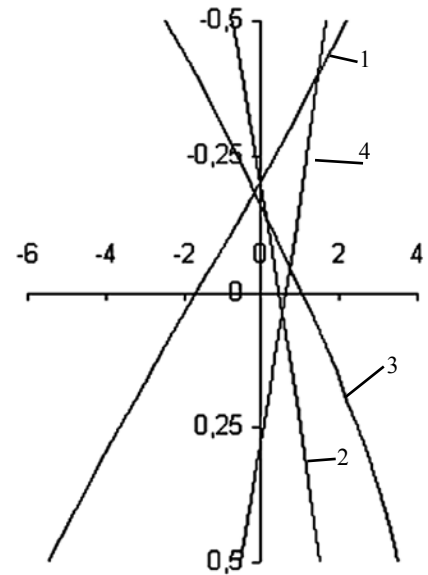


Рис. 3

Аналогичное явление имеет место и при жестком закреплении краев, причем диапазон частот и протяженность зон «подтягивания» по ширине пластинки увеличиваются по сравнению со случаем свободно опертых краев.

Отметим также, что при некоторых значениях частоты  $\omega$  и  $h_0 \geq 0.05$  в отдельных сечениях (при достаточно узком интервале значений  $\zeta$ ) функция  $w_1(\zeta, \zeta)$  может дважды менять знак. В качестве примера на рис. 4 приведены графики  $w_1(\zeta, \zeta)$  в пластинках с относительной толщиной  $h_0 = 0.100$  при шарнирном опирании ( $\omega = 7800c^{-1}, \xi = 0.150$ ) и при жестком защемлении краев ( $\omega = 10550c^{-1}, \xi = 0.100$ ). Графики величин  $u_1$  для тех же значений  $h_0, \omega$  и  $\zeta$  показаны на рис. 5. Кривые 1 на рис. 4,5 соответствуют случаю шарнирного закрепления, а кривые 2 – жестко заделанным краям пластинки.

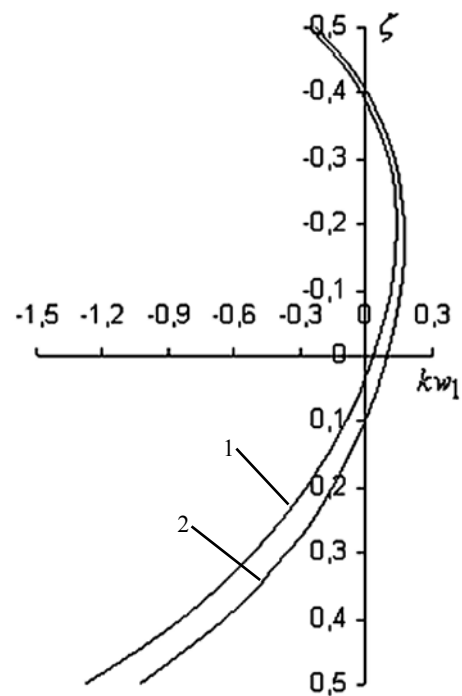


Рис. 4

Анализ данных таблиц показывает, что классическая теория качественно верно описывает искривление срединной плоскости пластинки во всем диапазоне рассмотренных частот. При этом значения  $\omega_k^*$  получаются



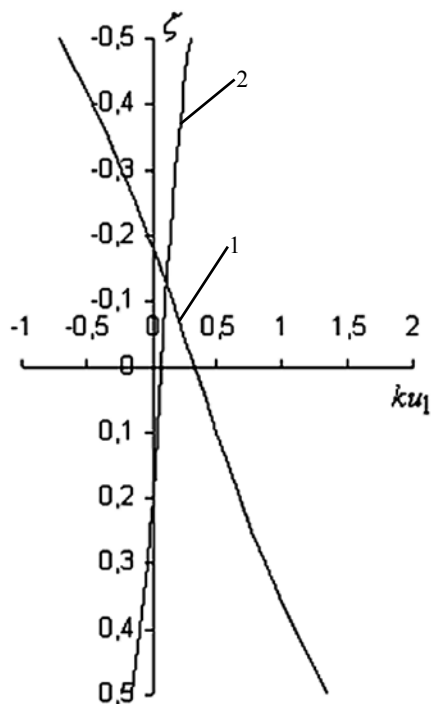


Рис. 5

больше, а  $\max w^*$  – меньше соответствующих точных значений.

Погрешность приближенных результатов существенно зависит от толщины  $h_0$  и частоты  $\omega$ , а также способа закрепления краев. Например, в случае свободно опертых краев погрешность определения по классической теории первой критической частоты и соответствующей ей максимальной амплитуды прогиба не превосходит 5% при  $h_0 \leq 0.15$ . Такая же погрешность для значения  $\omega_2^*$  получается при  $h_0 \leq 0.05$ , а для  $\omega_3^*$  – только при  $h_0 \leq 0.025$ . В случае жесткой заделки погрешность «классического» значения  $\omega_1^*$  составляет 2.8% при  $h_0 = 0.075$ , но повышается до 5.8% при  $h_0 = 0.100$ .

Поэтому, так как расчет на прочность обычно проводится только при первой критической частоте, которой соответствуют наибольшие значения амплитуд характеристик НДС, можно считать, что классическая теория Кирхгофа для рассматриваемого класса задач обеспечивает высокую точность решения при относительной толщине полосы  $h_0 < 0.100$ .

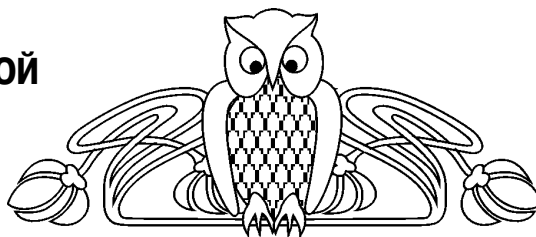
#### Библиографический список

1. Недорезов П.Ф. Установившиеся поперечные колебания вязкоупругой пластинки-полосы // Теоретическая и прикладная механика. Харьков: Изд-во «Основа», 2002. Вып. 35. С.139–146.
2. Недорезов П.Ф. О колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы, свободно опертой по краям // Нелинейная динамика механических и биологических систем: Межвуз. науч. сб. / Сарат. техн. ун-т, Саратов, 2004. Вып. 2. С. 20–27.
3. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, №6. С.3–26.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. Недорезов П.Ф. Об учете поперечных сдвигов и инерции вращения при вибрационном изгибе вязкоупругой пластинки-полосы // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып.14. С. 144–151.



УДК 533.6.0116:532.529

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ГАЗОВУЮ И ГАЗОЖИДКОСТНУЮ СРЕДЫ



Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительного эксперимента в механике  
E-mail: matutinaa@mail.ru

**The Numerical Investigation of the Shock Wave Nonlinear Refraction on the Surface Which Separate Gaseous and Gas-liquid Mediums**

G.P. Shindyapin, A.A. Matutin

В работе рассматривается класс задач нелинейной рефракции ударных волн. Исследование сводится к решению краевых задач рефракции. Для решения полученных краевых задач построена асимптотическая теория взаимодействия ударных волн в газожидкостных средах (двухфазных), обобщающая теорию взаимодействия в однофазных средах. Построен численный метод решения краевых задач для областей со значительными градиентами параметров (областей коротких волн).

In work the class of tasks of a nonlinear refraction of shock waves is examined. Research is reduced to the decision of regional tasks of refraction. For the decision of the received regional tasks the theory of interaction of shock waves in gas-liquids environments (biphasic), generalizing the theory of interaction in single-phase environments is constructed asymptotic. The numerical method of the decision of regional tasks for areas with significant gradients of parameters (areas of short waves) is constructed.

Последние годы характеризуются интенсивным развитием теории взаимодействия ударных волн (УВ) в двухфазных газожидкостных средах (ГЖС) [5, 6, 8]. Проблема состоит в том, что скорость распространения малых возмущений ( $c_0$ ) в газожидкостных пузырьковых средах (жидкости с пузырьками газа) может быть на порядок меньше, чем в газе, и почти на два порядка, – чем в чистой жидкости, вследствие этого ударные волны в ГЖС возникают при сравнительно малых скоростях, чем в газе или чистой жидкости. Указанные обстоятельства имеют важное значение для развития теории взаимодействия УВ, практических приложений при конструировании подводных аппаратов и при транспортировке газожидкостных смесей по трубам и каналам. Как показывает теория [1, 2] и эксперимент [4, 5], исследования процессов взаимодействия УВ в высокодиспергированной (пузырьковой) среде для волн умеренной и малой интенсивности можно провести с помощью равновесной модели газожидкостной среды [2]. При достаточно больших величинах масштаба давления ( $\alpha_1^* \leq \alpha \leq \alpha_2^*$ ) газожидкостной смеси УВ могут оставаться достаточно слабыми, и, например, перепады давления могут достигать  $10^3$  атмосфер в водовоздушной среде.

### КЛАСС ЗАДАЧ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕФРАКЦИИ

Различные ударно-волновые структуры возникают (рис. 1) при падении плоской ударной волны AR (BR) интенсивности  $P_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$  под углом  $\alpha$  со свободной поверхностью OA, которая разделяет газовую и газожидкостную среды с давлением  $p_0$  и массовыми газосодержаниями  $\gamma^+$  сверху и  $\gamma^-$  снизу от OA. При этом возникает преломленный фронт ADQ, распространяющийся под некоторым углом  $\beta$  в верхней области, и фронт отраженной волны ABS (BNS) в нижней области. За фронтами УВ возникают в общем случае области возмущений  $G^+$ ,  $G^-$ , границами которых, кроме указанных фронтов являются линии слабого разрыва DK, CE, AFE или фронт ударной волны CB. Частным случаем рефракции является случай отражения УВ от свободной поверхности (рис. 1, c), когда в верхней области, за фронтом преломленной ударной волны (AD) изменениями параметров можно пренебречь.

В зависимости от конкретных значений параметров  $P_{10}$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  возникают различные ударно-волновые структуры: нерегулярная (рис. 1, a) ( $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$ ), регулярная (рис. 1, б) ( $\alpha_1^* \leq \alpha \leq \alpha_2^*$ ) и регулярная рефракция с образованием ударной волны замыкающей зону разряжения (рис. 1, c).