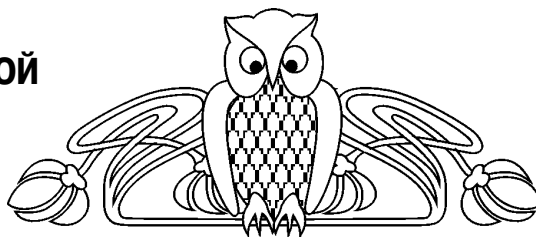




УДК 533.6.0116:532.529

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ГАЗОВУЮ И ГАЗОЖИДКОСТНУЮ СРЕДЫ



Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительного эксперимента в механике  
E-mail: matutinaa@mail.ru

**The Numerical Investigation of the Shock Wave Nonlinear Refraction on the Surface Which Separate Gaseous and Gas-liquid Mediums**

G.P. Shindyapin, A.A. Matutin

В работе рассматривается класс задач нелинейной рефракции ударных волн. Исследование сводится к решению краевых задач рефракции. Для решения полученных краевых задач построена асимптотическая теория взаимодействия ударных волн в газожидкостных средах (двухфазных), обобщающая теорию взаимодействия в однофазных средах. Построен численный метод решения краевых задач для областей со значительными градиентами параметров (областей коротких волн).

In work the class of tasks of a nonlinear refraction of shock waves is examined. Research is reduced to the decision of regional tasks of refraction. For the decision of the received regional tasks the theory of interaction of shock waves in gas-liquids environments (biphasic), generalizing the theory of interaction in single-phase environments is constructed asymptotic. The numerical method of the decision of regional tasks for areas with significant gradients of parameters (areas of short waves) is constructed.

Последние годы характеризуются интенсивным развитием теории взаимодействия ударных волн (УВ) в двухфазных газожидкостных средах (ГЖС) [5, 6, 8]. Проблема состоит в том, что скорость распространения малых возмущений ( $c_0$ ) в газожидкостных пузырьковых средах (жидкости с пузырьками газа) может быть на порядок меньше, чем в газе, и почти на два порядка, — чем в чистой жидкости, вследствие этого ударные волны в ГЖС возникают при сравнительно малых скоростях, чем в газе или чистой жидкости. Указанные обстоятельства имеют важное значение для развития теории взаимодействия УВ, практических приложений при конструировании подводных аппаратов и при транспортировке газожидкостных смесей по трубам и каналам. Как показывает теория [1, 2] и эксперимент [4, 5], исследования процессов взаимодействия УВ в высокодиспергированной (пузырьковой) среде для волн умеренной и малой интенсивности можно провести с помощью равновесной модели газожидкостной среды [2]. При достаточно больших величинах масштаба давления ( $\alpha_1^* \leq \alpha \leq \alpha_2^*$ ) газожидкостной смеси УВ могут оставаться достаточно слабыми, и, например, перепады давления могут достигать  $10^3$  атмосфер в водовоздушной среде.

### КЛАСС ЗАДАЧ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕФРАКЦИИ

Различные ударно-волновые структуры возникают (рис. 1) при падении плоской ударной волны AR (BR) интенсивности  $P_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$  под углом  $\alpha$  со свободной поверхностью OA, которая разделяет газовую и газожидкостную среды с давлением  $p_0$  и массовыми газосодержаниями  $\gamma^+$  сверху и  $\gamma^-$  снизу от OA. При этом возникает преломленный фронт ADQ, распространяющийся под некоторым углом  $\beta$  в верхней области, и фронт отраженной волны ABS (BNS) в нижней области. За фронтами УВ возникают в общем случае области возмущений  $G^+$ ,  $G^-$ , границами которых, кроме указанных фронтов являются линии слабого разрыва DK, CE, AFE или фронт ударной волны CB. Частным случаем рефракции является случай отражения УВ от свободной поверхности (рис. 1, c), когда в верхней области, за фронтом преломленной ударной волны (AD) изменениями параметров можно пренебречь.

В зависимости от конкретных значений параметров  $P_{10}$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  возникают различные ударно-волновые структуры: нерегулярная (рис. 1, a) ( $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$ ), регулярная (рис. 1, в) ( $\alpha_1^* \leq \alpha \leq \alpha_2^*$ ) и регулярная рефракция с образованием ударной волны замыкающей зону разряжения (рис. 1, c).



Границы областей существования различных ударноволновых структур обычно определяются при решении локальных задач рефракции в окрестности точки А (выполнение условий динамической совместности [1]), однако в случае нерегулярной рефракции (рис. 1, а) анализ усложняется ввиду отхода точки В от фронта Маха.

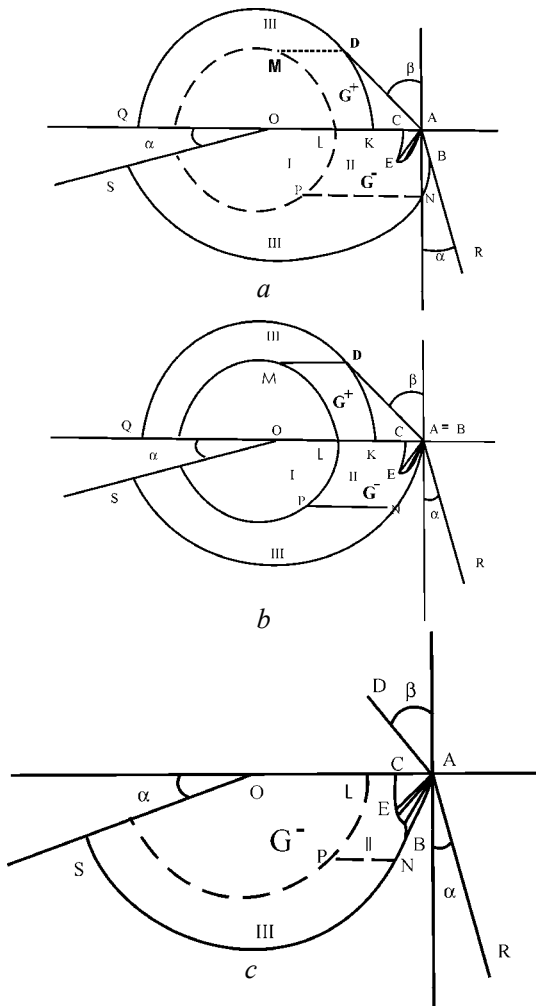


Рис. 1

Математическое моделирование процессов рефракции связано с рассмотрением движения газожидкостной среды в областях возмущения  $G^+$ ,  $G^-$ , где параметры течения удовлетворяют основным уравнениям динамики (законам сохранения массы, импульса, энергии и дифференциальному уравнению состояния).

Уравнения движения ГЖС в автомодельных переменных  $\xi = x/c_0t$ ,  $\eta = y/c_0t$  имеют вид [2]

$$\begin{aligned} (u - c_0\xi) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ (u - c_0\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ (u - c_0\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ (u - c_0\xi) \frac{\partial s}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial s}{\partial \eta} &= 0, \quad dp = c^2 d\rho + A ds, \\ \gamma &= \text{const.} \end{aligned} \quad (1)$$

Используя уравнение состояния для жидкости  $\rho_1 = f(p) = \rho^*(1 + p/k)$  и газа  $p = R\rho_1 T$ , получают уравнение состояния двухфазной смеси в виде [2]

$$\begin{aligned} p \left[ \frac{a}{\rho} - \frac{b}{\rho^*(1 + p/k)} \right] &= c_v T, \\ a &= (1 + \gamma)b, \quad b = \frac{c_v}{\gamma R}, \quad c_v = \frac{c_{v1} + c_{v2}\gamma}{1 + \gamma}. \end{aligned}$$

Используя уравнение состояния, получают выражение для квадрата адиабатической скорости звука  $c^2$  и коэффициента А

$$c^2 = \frac{(1 + a)(k + p)^2}{a(k + p)^2 - bk^2} \frac{\rho}{\rho^*}, \quad A = \frac{T\rho^2 c^2}{(1 + a)p}.$$

На фронте ударной волны  $\xi = \xi(\eta)$  условия динамической совместности ( $P = (p - p_1)/B$ ,  $B = \rho_0 c_0^2$ ) имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{[(\xi - \eta\xi') - (\frac{u_1}{c_0} - \xi' \frac{v_1}{c_0})]^2}{1 + \xi'^2} &= N(P), \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{N(P)}{N(P) - P}, \quad \xi' = \frac{d\xi}{d\eta}, \\ P &= \frac{\rho_1}{\rho_0} [(\xi - \eta\xi') - (\frac{u_1}{c_0} - \xi' \frac{v_1}{c_0})] (\frac{u}{c_0} - \frac{u_1}{c_0}), \quad \frac{v}{c_0} - \frac{v_1}{c_0} = -\xi' (\frac{u}{c_0} - \frac{u_1}{c_0}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u_1, v_1, \rho_1$  параметры перед фронтом ударной волны.

Первое условие представляет собой дифференциальное уравнение для нахождения фронта  $\xi = \xi(\eta)$  ударной волны.



На линиях слабого разрыва DK, CE, AFE, где параметры непрерывны, имеем условия

$$u = u_1, v = v_1, \rho = \rho_1, p = p_1 \text{ т. е. } P = 0. \quad (3)$$

На свободной поверхности OA  $\xi = \xi(\eta)$  или  $F(\xi, \eta) = 0$

$$u_n^{(+)} = u_n^{(-)} = u_n, p^{(+)} = p^{(-)}. \quad (4)$$

Решение системы (1) описывающее волну разрежения, имеет вид ( $tg\theta = (\eta - \eta_A) / (\xi - \xi_A)$ )

$$\frac{u}{c_0} = \alpha \beta \sin \theta \sin \alpha (\theta + c) + \beta \cos \theta \cos \alpha (\theta + c) + \xi_A, \quad (5)$$

$$\frac{v}{c_0} = -\alpha \beta \cos \theta \sin \alpha (\theta + c) + \beta \sin \theta \cos \alpha (\theta + c) + \eta_A.$$

Здесь  $\beta = \pm \sqrt{D / (R_0 - 1)}$ ,  $\alpha = \sqrt{(R_0 - 1) / R_0}$ . Постоянные  $c, D$  в решении (5) находятся при задании условий на переднем фронте централизованной волны, представляющем границу с однородным потоком  $u = u_1, v = v_1, tg\theta = tg\theta_1$ .

Параметры (5) могут использоваться при записи граничных условий на «звуковой линии» AFE  $W^2 = (u - c_0 \xi)^2 + (v - c_0 \eta)^2 = c^2$ , а также при определении параметров фронта СЕВ, замыкающего зону разрежения. В случае возникновения ударной волны, возникающей за зоной разрежения, положение фронта ударной волны определяется в соответствии с условием (2), где параметры  $u_1, v_1$  перед фронтом на участке BE задаются решением (5).

### ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ РЕФРАКЦИИ

Существующие различные ударно-волновые режимы рефракции (см. рис. 1) и соответствующие области существования (в пространстве  $P_{10}, \alpha, \gamma^+, \gamma^-$ ) устанавливаются при решении локальных задач в окрестности точки А [2]. Границы областей существования различных ударно-волновых структур определяются с помощью критериев перехода из одной области в другую, которые имеют физический смысл.

Так, границу типа А существования регулярной рефракции (см. рис. 2) получим при  $W = c_1 (P_{10} = \varepsilon_{10} P_0 / B_0, \varepsilon_{10} = (p_1 - p_0) / p_0)$ , т. е. когда скорость за падающим фронтом (рис. 1, с) равна скорости звука

$$\alpha = \alpha_1^*, \cos \alpha_1 = N^{1/2}(P_{10}, \gamma^-) \left( \left( \frac{c_1}{c_0} \right)^2 + 2P_{10} - \frac{P_{10}^2}{N(P_{10}, \gamma^-)} \right), \quad (6)$$

границу типа В (см. рис. 2) получим при условии  $\beta = 0$  (для области существования  $\cos \leq 1$ ):

$$\alpha = \alpha_2^*, \cos \alpha_2 = \frac{c_0^- N^{1/2}(P_{10}, \gamma^-)}{c_0^+ N^{1/2}(P_{30}, \gamma^+)}, \quad (7)$$

границу типа С, когда решение рефракции с волной разрежения существует в определенном диапазоне газосодержаний  $\gamma^- (0 \leq \gamma^- \leq \gamma^{*-})$ . Верхний предел значений  $\gamma^- = \gamma^{*-}$  соответствует минимально возможному разрежению  $\varepsilon_{20}$  при фиксированной интенсивности падающей волны  $P_{10}$  (см. рис. 2) получим (исключая  $\varepsilon_{20}$  из системы уравнений [2]  $H = 0, \partial H / \partial \gamma^- = 0$ )

$$\alpha = \alpha_3^*, \alpha_3 = \alpha_3(\varepsilon_{10}, \gamma^+). \quad (8)$$

Как показывает локальный анализ задачи рефракции и дальнейший анализ, в случае раздела газ и ГЖС в широком диапазоне газосодержаний  $\gamma^+, \gamma^-$  и интенсивностей ударной волны  $P_{10}$  интенсивность преломленной волны  $P_{30}$  и изменение давления за ней в верхней области  $G^+$  оказывается незначительным по сравнению с интенсивностью  $P_{10}$  и изменением давления в нижней области (т.е.  $P = 0$  в области  $G^+$ ). Это обстоятельство позволяет решения задач рефракции в этом случае сводить к решению задач отражения ударной волны от свободной поверхности для  $G^-$  и не рассматривать течение в верхней области.

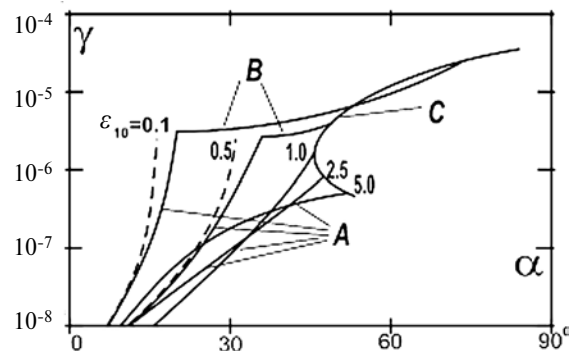


Рис. 2



## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ РЕФРАКЦИИ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Для решения задач рефракции (см. рис. 1) ударной волны можно использовать метод асимптотических разложений, основанный на выделении областей значительных градиентов – областей коротких волн [1, 6, 7]. Это позволяет расчленить области течения  $G^+$ ,  $G^-$  на ряд подобластей:

- область I – со сравнительно малыми градиентами параметров, где течение описывается с помощью линейной теории и решение находится аналитически;
- область III – значительных градиентов, примыкающих к фронту ударной волны, где течение описывается системой нелинейных квазиодномерных уравнений, которые интегрируются аналитически;
- область II – нелинейных двумерных течений со значительными градиентами параметров в окрестности точек взаимодействия ударных волн, где течение описывается системой нелинейных уравнений и соответственная краевая задача решается численно.

В дальнейшем ограничимся при изучении задач рефракции на разделе газ и газожидкостная среда задачами отражения. В этом случае при асимптотическом анализе, когда в верхней области  $G^+$  параметры изменяются незначительно по сравнению с  $P_{10}$ , их изменения можно пренебречь, считая течения однородными и рассматривать в общем случае задачи рефракции как задачи отражения ударной волны от свободной поверхности [1, 2, 7]. В рамках асимптотической теории [1, 2] в этом случае свободная поверхность не деформируется. Таким образом, на свободной поверхности имеем условия  $P = 0$ ,  $Y = 0$ .

Как было отмечено выше, асимптотический анализ позволяет свести рассмотрение задач рефракции (отражения) к решению краевых задач для области II нелинейной рефракции, граничными условиями для которых будут выступать условия срачивания с решениями в областях I и III.

### КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Область II, примыкающая к точке взаимодействия УВ, характеризуется большими градиентами параметров. При малых углах взаимодействия  $\alpha$  – величина угла входит в решение краевой задачи через параметр подобия  $\alpha^v$ :

$$\alpha^v = \frac{tg\alpha}{P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma)} = \frac{tg\alpha}{\varepsilon_{10}^{1/2} L_0^{1/2}(\gamma)}, \quad L_0(\gamma) = \frac{P_0}{\rho_0 c_0^2} R_0(\gamma), \quad \varepsilon_{10} = \frac{P_1 - P_0}{P_0}. \quad (9)$$

Введем асимптотическое разложение в области II в виде [1]:

$$r = \frac{R}{c_0 t} = 1 - P_{10} R_0(\gamma) \delta, \quad \theta = P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma) Y, \quad \frac{\nu}{c_0} = P_0^{3/2} R_0^{1/2} \nu + \dots, \quad (10)$$

$$\frac{u}{c_0} = P_{10} \mu + \dots, \quad H = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10} H^{(1)} + \dots, \quad P^* = \frac{P - P_0}{\rho_0 c_0^2} = P_{10}^* P^{(1)} + \dots$$

Подставляя (10) в систему (1) получим систему уравнений коротких волн:

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + \nu_y + \mu = 0, \quad \mu_y = \nu_\delta, \quad \mu = P^{*(1)}. \quad (11)$$

Условия на фронтах УВ  $\delta = \delta^*(Y)$  имеют вид ( $\mu_1, \nu_1$  – параметры перед фронтом УВ)

$$\left(\frac{d\delta}{dY}\right)^2 = 2\delta - (\mu - \mu_1), \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta}{dY} + (\nu - \nu_1) = 0. \quad (12)$$

Первое уравнение (12) является дифференциальным уравнением для определения фронта ударной волны.

На линии слабого разрыва

$$\mu = \mu_1, \quad \nu = \nu_1. \quad (13)$$

Условия срачивания с решениями в областях I и III имеют соответственно вид [2]

$$\mu = -\frac{1}{\pi} \arctg \frac{Y - \alpha^v}{\sqrt{-2\delta}} - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{Y + \alpha^v}{\sqrt{-2\delta}}, \quad \delta \rightarrow -\infty, \quad -\infty \leq Y \leq 0, \quad (14)$$

$$\mu = 1 + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{Y + \alpha^n}\right)^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi^2 (\delta - 1)(Y + \alpha^v)^2}{2}}\right), \quad Y \rightarrow -\infty, \quad -\infty \leq \delta \leq 1. \quad (15)$$



На свободной поверхности

$$\mu = P^{*(1)} = 0, \quad Y = 0. \quad (16)$$

Для решения краевой задачи (11)–(16) в области II удобно свести систему (11) к одному уравнению второго порядка для функции  $\mu(\delta, Y)$ :

$$(\mu^2 - 2\delta\mu)_{\delta\delta} + \mu_{YY} + 3\mu_{\delta\delta} = 0, \quad \mu = P^{*(1)}. \quad (17)$$

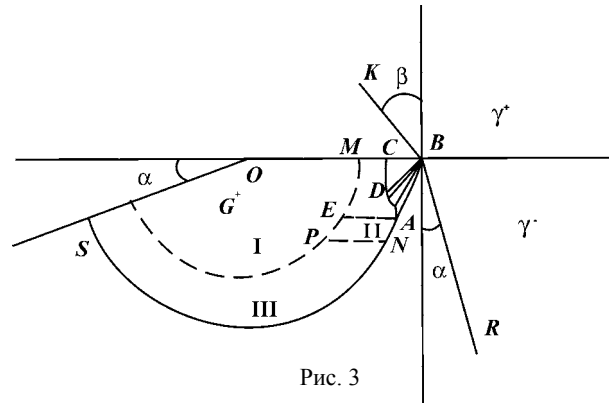
Дифференциальное уравнение фронта УВ и условие на фронте (12) можно, используя уравнения (11) и (12), записать в виде

$$(5\delta'^2 - 2\delta + 2\mu_1)\delta'' - (5 + \mu_{\delta} - 3\mu_{1\delta})\delta'^2 + (3\mu_{1Y} + \nu_{1\delta})\delta' + 2(\mu_{\delta} + 1)\delta - (2\mu_{\delta} + 1)\mu_1 + \nu_{1Y} = 0. \quad (18)$$

Окончательно задача свелась к решению уравнения (17) в области II для функции  $\mu(\delta, Y)$ , удовлетворяющей условиям (14), (15), (16), (12), (13) и (18). В каждом конкретном случае постановка краевой задачи конкретизируется. Например, в задаче отражения, соответствующей рис. 1, а, вместе с решением краевой задачи определяется положение фронта ударной волны АВ, а в задаче, соответствующей рис. 1, с, – фронта ударной волны СВ.

### ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Для решения краевых задач (11)–(16) применяется метод последовательных приближений, который сводит исходную краевую задачу для уравнений коротких волн с неизвестной границей, к серии краевых задач с фиксированной границей. Проиллюстрируем этот метод на примере задачи отражения с образованием УВ замыкающей зону разрезания. Процесс начинается с задания начального поля  $\mu(\delta, Y)$  фронт CDA (рис. 3) и начального положения фронта УВ. Начальное поле  $\mu(\delta, Y)$  находится по методу прямых; начальное положение ударных фронтов устанавливается с использованием условий в характерных точках С, D, А [9].



При решении задач применяют метод конечных разностей [1] второго порядка точности, приводящий первое уравнение (17) к виду

$$4(\mu_{i,j} - \delta_j)(\mu_{i+1,j} - 2\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j}) + (\mu_{i+1,j}^2 - 2\mu_{i+1,j}\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j}^2) + 2\frac{\Delta_i^2}{\Delta_j^2}(\mu_{i,j+1} - 2\mu_{i,j} + \mu_{i,j-1}) - \Delta_i(\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}) = 0. \quad (19)$$

Значения искомой функции в приграничных узлах к фронту CDA (см. рис. 3) берутся по формуле квадратичной интерполяции, учитывающей значение в двух внутренних узлах и на фронте ( $\mu^*$ ) (d – расстояние от приграничного узла до фронта)

$$\mu_{i,j} = \frac{2h^2\mu^*}{(d+h)(d+2h)} + \frac{2d\mu_{i-1,j}}{(d+h)} - \frac{d\mu_{i-2,j}}{(d+2h)}. \quad (20)$$

Соответственно другие граничные условия (14), (15) примут вид

$$\mu_{1,j} = -\frac{1}{\pi} \arctg \frac{Y_j - \alpha''}{\sqrt{2\delta_0}} - \frac{1}{\rho} \arctg \frac{Y_j + \alpha''}{\sqrt{2\delta_0}};$$

$$\mu_{i,1} = 1 + K^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta_i - 1}{K^2}}\right), \quad K^2 = \frac{2}{\pi^2 (H + \alpha'')^2}.$$



Дифференциальное уравнение фронта и условия на нем примут вид

$$(5\delta_j'^2 - 2\delta_j + 2\mu_{1,i})\delta_j'' - [5 + \frac{\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta_j} - 3(\mu_{1d})_{i,j}] \delta_j'^2 + [3(\mu_{1y})_{i,j} + (\nu_{1d})_{i,j}] \delta_j' + 2(\frac{\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta_j} + 1)\delta_j - (2\frac{\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta_j} + 1)\mu_{1,j} + (\nu_{1y})_{i,j} = 0, \mu_j^* = 2\delta_j - \delta_j'^2 - \mu_1. \quad (21)$$

На линии слабого разрыва получим

$$\delta_j = 1, \mu_j = 1. \quad (22)$$

Задача (14)–(19) решается методом секущих (f – левая часть уравнения (19)) [2]:

$$\mu_{i,j}^{(k+1)} = \mu_{i,j}^{(k)} - \frac{f(\mu_{i-1,j}^{(k)}, \mu_{i+1,j}^{(k)}, \mu_{i,j}^{(k)}, \mu_{i,j-1}^{(k)}, \mu_{i,j+1}^{(k)})}{f'_{\mu_{i,j}}(\mu_{i-1,j}^{(k)}, \mu_{i+1,j}^{(k)}, \mu_{i,j}^{(k)}, \mu_{i,j-1}^{(k)}, \mu_{i,j+1}^{(k)})} \quad (23)$$

где  $f'_{\mu_{i,j}} = 4(\mu_{i+1,j} - 2\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j}) - 8(\mu_{i,j} - \delta_j) - 4\left(\frac{\Delta i}{\Delta j}\right)^2$ .

Таким образом, решение краевой задачи для внутренних узлов состоит в применении алгоритма (23) совместно с условиями для граничных узлов (20). Уточнение фронта ударной волны (21) также производится по методу секущих.

Начальное приближение для поля давления строится по методу прямых ( $Y = 0, Y = Y_A, Y = -H, (H \gg 1)$ ) [1, 2]:

$$\mu(\delta, Y) = \left[ \frac{Y^2(3H + Y)}{2H^3} - \frac{Y_A(3H + Y_A)Y(2H^2 + 3HY + Y^2)}{2H^3(2H^2 + 3HY_A + Y_A^2)} \right] \mu_- + \frac{Y(2H^2 + 3HY + Y^2)}{Y_A(2H^2 + 3HY_A + Y_A^2)} \mu_0, \quad \mu_- = 1 - K^2(-H) \left( \sqrt{1 - \frac{\delta - 1}{K^2(-H)}} - 1 \right). \quad (24)$$

Функция  $\mu_0 = \mu_0(\delta)$  вычисляется при подстановке (24) в (17) на прямой  $Y = Y_A$  (при удовлетворении условий в точке A ( $\mu = \mu_0, \delta = 1, Y = Y_A$ ) и в точке E ( $\delta = -\delta_0, \mu = \mu_1, Y = Y_A$ )):

$$\mu_0 = \mu_A - (\mu_A - \mu^*) \sqrt{(\delta_A - \delta)(\mu_A - \mu^*)^{-1}}. \quad (25)$$

Ударный фронт CDA замыкает область разрежения DBA, в которой давление падает от  $\mu = 1$  до  $\mu = 0$ . Начальное положение фронта находится в полиномиальном виде [1], при построении которого учитываются условия в характерных точках (C, D, A).

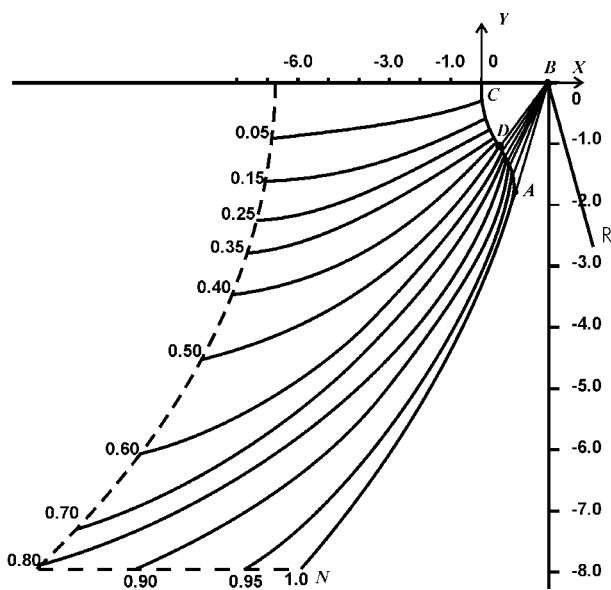


Рис. 4

На рис. 4 построены ударно-волновая структура и поле давления, соответствующие случаю отражения от свободной поверхности, разделяющей газ и ГЖС с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения при  $\alpha^v = 2.147$ . Приведенные результаты (см. рис. 4) соответствуют классу задач отражения УВ от свободной поверхности, разделяющей газ и ГЖС с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения, с различными интенсивностями  $\epsilon_{10}$ , углами наклона  $\alpha$  в средах с различными газосодержаниями  $\gamma$ , для которых параметр подобия  $\alpha^v$  фиксирован.

Результаты расчета показывают, что в потоке за волной разрежения формируется «висячая» УВ CDA. Впервые, как показал анализ, указанный эффект возникает при  $\alpha^v = 2,098$ . Протяженность УВ возрастает при возрастании параметра  $\alpha^v$  ( $\alpha^v \geq 2.098$ ).



При решении краевой задачи для получения окончательной точности ( $\varepsilon = 0,005$ ) потребовалось решение серии из двух краевых задач. В каждой серии итерационный процесс по полю потребовал 12 итераций. При реализации итерационного процесса по полю и фронту потребовал порядка 15 итераций.

Полученные результаты качественно соответствуют экспериментальным данным [3–5]. Отмечено также, что установленные при локальном анализе границы перехода  $\alpha^v = \alpha_1^{v*} = 1,0$  – от нерегулярного отражения к регулярному и  $\alpha^v = \alpha_2^{v*} = 2,098$  от регулярного к регулярному с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения, соотносятся с экспериментальными данными [4, 5]. Построенные поля давления качественно соответствуют данным, полученным в эксперименте, и позволяют провести детальный анализ полей давления и скоростей и исследовать возникающие особенности в случае отражения с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения.

### Библиографический список

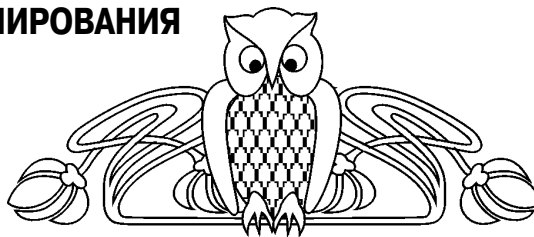
1. Шиндяпин Г.П., Ковалев А.Д. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред. Пособие. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Ч.2.
2. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997.
3. Паркин Б.П., Гилмор Ф.Р., Броуд Г.Л. Ударные волны в воде с пузырьками воздуха. Подводные и подземные взрывы. М.: Мир, 1974. С. 152–258.
4. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. и др. Экспериментальные исследования ударных волн в жидкости с пузырьками газа // Волновые процессы в двухфазных системах / ИТФ СОАН СССР. Новосибирск, 1975.
5. Кедринский В.К., Вишков В.А., Дудникова Г.И., Шокин Ю.И. Усиление ударных волн при столкновении и фокусировке в пузырьковых средах // Докл. АН. 1998. Т. 361, № 1. С. 41–44.
6. Шиндяпин Г.П. Аналитическое исследование ударно-волновых структур и потоков при отражении и взаимодействии относительно слабых ударных волн // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 15 (18).
7. Вельмисов П.А., Шиндяпин Г.П. Асимптотическое исследование взаимодействий слабых ударных волн // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1972. Вып. 1 (4).
8. Шиндяпин Г.П., Матутин А.А. Анализ ударно-волновых структур и потоков при нелинейной рефракции ударных волн // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. С. 162–165.
9. Шиндяпин Г.П. Об особенностях «сверхзвукового» взаимодействия слабых ударных волн и задаче преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 3(6).



УДК 533.6.011

## ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Г.П. Шиндяпин, Я.Г. Сапунков, С.П. Шевырѐв,  
В.А. Поршнеv, Н.В. Федорец, В. Н. Федорец



Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительного эксперимента в механике,  
кафедра прикладной информатики  
E-mail: shev@sgu.ssn.runnet.ru

**Problems of Mathematical Modeling of Knocking Engine for  
Perspective Aircrafts**

**G.P. Shindyapin, Y.G. Sapunkov, S.P. Shevyrev,  
V.A. Porchnev, N.V. Fedorets, V.N. Fedorets**

В работе приводится одна из разработанных авторами методик по расчёту газодинамических параметров в импульсном детонационном двигателе с диффузором, которая не уступает мировому уровню. Построенная математическая модель и вычислительный эксперимент с этой моделью показывают, что диффузор увеличивает КПД детонационного двигателя.

This research contains one of the world-class developed authorized approaches of computing gas-dynamic properties for pulse knocking engine with diffuser. Constructed mathematical model and computational experiment on it demonstrates that diffuser is increasing knocking engine efficiency.

Развитие авиационной и ракетно-космической техники определяется в основном энергетическими возможностями силовых установок, в качестве которых выступают реактивные двигатели. Современные реактивные двигатели достигли своего совершенства и дальнейшее их развитие будет осуществляться эволюционным путѐм, т.е. за счёт доработок отдельных конструкторских решений. Для революционного развития двигателей необходимо решить принципиально новые научные задачи.

Одним из возможных путей улучшения экономичности двигателей является переход от цикла с подводом тепла при постоянном давлении ( $p=\text{const}$ ) к циклу с подводом тепла при постоянном объѐме ( $V=\text{const}$ ). Доказано [4, 8], что при таком переходе можно обеспечить повышение термического КПД цикла в 1,3 – 1,5 раза.

Однако попытки практической реализации двигателей, использующих цикл  $V=\text{const}$ , предпринимавшиеся неоднократно на протяжении многих десятилетий, неизменно заканчивались неудачей. Это объясняется как сложностью процессов, проходящих в детонационной камере и в основных узлах и системах двигателя, так и сложностью устройств, инерционностью и низкой пропускной способностью механизмов этих двигателей, организацией газодинамического управления и др.

В работах [6, 10, 26] поставлены проблемы, которые необходимо решить при разработке энергосиловых детонационных установок, и намечены пути их решения. Особое внимание уделено разработке этих установок применительно к летательным аппаратам (детонационные двигатели).

В настоящей работе: 1) рассматриваются математические и физические аспекты проблемы детонационных двигателей; 2) обсуждается разработанная авторами модель детонационного двигателя, а также методики расчёта газодинамических параметров в импульсном детонационном двигателе с диффузором; 3) оцениваются перспективы развития и применения детонационных двигателей.

### РАЗРАБОТКА ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ – ПЕРСПЕКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ В РАЗВИТИИ ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Тепловые двигатели – значительный и разнообразный по способам технической реализации преобразования энергии класс двигателей, в которых энергия первичных источников вначале преобразуется в тепловую энергию рабочего тела, а затем в механическую или кинетическую энергию направленного движения струи.