

МЕХАНИКА

УДК 622.233.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ МНОГООРУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

А. А. Битюрин

Ульяновский государственный технический университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
Email: denjgy0706@yandex.ru

Осуществляется математическое моделирование продольного упругого центрального удара многоступенчатого стержня о жесткую преграду при неударяющих связях. Математическое моделирование проводится путем точного аналитического решения волнового дифференциального уравнения методом Даламбера с заданием необходимых начальных и граничных условий. С применением формулы Эйлера получено аналитическое выражение для расчета критической предупредительной скорости, при которой наступает потеря устойчивости ступенчатого стержня.

Ключевые слова: удар, устойчивость, моделирование, скорость, деформация.

Mathematical Modelling of Critical Speed of the Multistage Core at Longitudinal Blow

A. A. Bityurin

Ulyanovsk State Technical University,
Chair of Theoretical and Applied Mechanics
E-mail: denjgy0706@yandex.ru

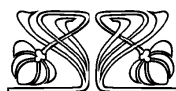
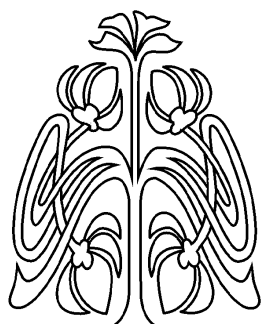
Mathematical modeling of longitudinal elastic central blow of a multistage core about a rigid barrier is carried out, at not keeping communications. Mathematical modeling is carried out by the exact analytical decision of the wave differential equation by a method of Dаламбера with the task of necessary initial and boundary conditions. With application of the formula of Euler analytical expression for calculation of critical pretonic speed at which there comes loss of stability of a step core is received.

Key words: blow, stability, modeling, speed, deformation.

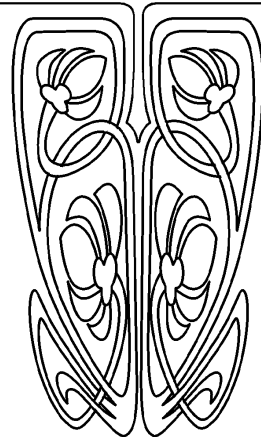
ВВЕДЕНИЕ

Устойчивое состояние формы равновесия деформированного элемента зависит от величины приложенной к нему продольной нагрузки. Достижение нагрузками критических значений равносильно разрушению рассматриваемого элемента или системы элементов, так как устойчивая форма равновесия будет утрачена, что связано с неограниченным ростом напряжений и деформаций. В качестве продольной сжимающей нагрузки может выступать в том числе и ударная сила, возникающая при взаимодействии ударного элемента с жестким препятствием или технологической средой. В этой связи вопрос потери устойчивости рабочих элементов (бойка, волновода и т. д.) имеющих на сегодня ударных механизмов и машин в процессе их работы стоит достаточно актуально.

Впервые задача о динамической устойчивости упругих стержней при мгновенном продольном действии сжимающей нагрузки, которая в дальнейшем сохраняет своё постоянное значение, была решена М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским в работе [1]. Позднее проводилось теоретическое исследование потери устойчивости мно-



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





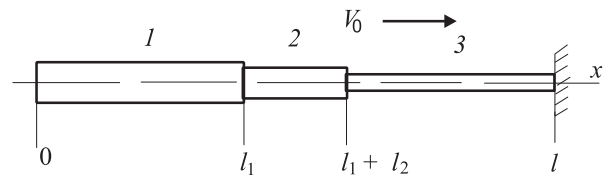
венно сжатого бесконечного упругого стержня методом малых возмущений [2], а также исследование потери устойчивости полубесконечного упругого стержня [3, 4]. В работах [5], [6] В. И. Малым предложен подход для исследования потери устойчивости стержней при больших и малых прогибах на основе асимптотического метода линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания при ударе полубесконечного упругого стержня телом большой массы, движущимся с постоянной скоростью.

Выполнение поставленных задач сводилось либо к аналитическому, либо к численному решению линеаризованного дифференциального уравнения четвертого порядка, а также системы дифференциальных уравнений движения стержня с начальной прогибью. Недостатком такого подхода является очевидная трудность математического решения, сопряженная с громоздкими математическими выкладками, а также удовлетворительная сходимость результатов математического моделирования и экспериментальных данных лишь в узком интервале изменения той или иной характеристики, связанная с накоплением погрешности вычислений в ходе проведения математических операций. Задача о потере устойчивости неоднородных ступенчатых стержней при ударе в работах [1–9] не рассматривалась.

Ниже приводится расчет критической предупредной скорости неоднородного многоступенчатого стержня, имеющего три однородных участка различной длины и площади поперечных сечений. Решается волновое дифференциальное уравнение точным аналитическим методом Даламбера. С применением метода характеристик строится диаграмма относительной продольной деформации, с помощью которой рассчитываются критические значения силы и предупредной скорости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрена модель продольного удара многоступенчатого стержня о жесткую преграду (рис. 1). Длина начального участка ступенчатого стержня равна l_1 , второго участка — l_2 , третьего — $l_3 = l - (l_1 + l_2)$, масса стержня m , предупредная скорость стержня V_0 . Все участки стержня состоят из одного материала. Используется волновая модель продольного удара [10, 11].



Движение поперечных сечений однородных участков стержня описывается волновыми дифференциальными уравнениями:

Рис. 1. Схема удара неоднородного многоступенчатого стержня о жесткую преграду при неударяющих связях

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ — продольное перемещение поперечного сечения начального участка 1, второго участка 2 и третьего конечного участка 3 многоступенчатого стержня соответственно, x — координата сечения, t — время, a — скорость распространения продольной волны деформации [10, 11].

Начальные условия определяют состояние участков стержня перед его соударением с жесткой преградой, при $t = t_0 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial t} = V_0, & \quad \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial t} = V_0, & \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial t} = V_0, & & \quad \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial x} = V_0. & \end{aligned}$$



Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения $x = l$ при взаимодействии участка 3 неоднородного стержня с жесткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

а также определяют равенство сил и условия сопряжения в сечениях $x = l_1$ и $x = l_1 + l_2$ однородных участков 1, 2 и 3 при непосредственном их взаимодействии:

$$EA_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = EA_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad EA_2 \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = EA_3 \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t},$$

где E — модуль упругости первого рода, A_1, A_2, A_3 — площади поперечных сечений однородных участков 1, 2 и 3 соответственно [10, 11].

Разрыв контакта в ударном сечении $x = l$ происходит при условии отрицательной скорости этого сечения:

$$\frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} < 0.$$

Повторный удар с жесткой преградой может возникнуть после разрыва контакта в ударном сечении при условии его положительной скорости:

$$\frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} > 0.$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение дифференциальных уравнений (1)–(3) реализуется точным аналитическим методом Даламбера в виде суммы двух функций [10, 11]

$$u_1(x, t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_1,$$

$$u_2(x, t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2,$$

$$u_3(x, t) = f_3(at - x) + \varphi_3(at + x), \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l,$$

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = -f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a[f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x)],$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = -f'_2(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a[f'_2(at - x) + \varphi'_1(at + x)],$$

$$\frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x} = -f'_3(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} = a[f'_3(at - x) + \varphi'_3(at + x)],$$

где $f_1(at - x), f_2(at - x), f_3(at - x)$ — функции, описывающие прямые волны, распространяющиеся соответственно по участкам 1, 2 и 3 в направлении оси Ox ; $\varphi_1(at + x), \varphi_2(at + x), \varphi_3(at + x)$ — функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по участкам 1, 2 и 3 в противоположном направлении; $f'_1(at - x), f'_2(at - x), f'_3(at - x), \varphi'_1(at + x), \varphi'_2(at + x), \varphi'_3(at + x)$ — производные функций.

Перейдем к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны $\tilde{f}'(at - x) = f'(at - x) / \frac{V_0}{a}$; $\tilde{\varphi}'(at + x) = \varphi'(at + x) / \frac{V_0}{a}$, деформацию в сечении и его скорость $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -\tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$, $\tilde{\nu}(x, t) = \frac{\nu(x, t)}{V_0} = \tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$.

В случае удара неоднородного многоступенчатого стержня о жесткую преграду, возникает ряд трудностей в определении критической ударной нагрузки, вызывающей потерю устойчивого состояния, поскольку в данном случае в процессе удара функция относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}$ будет кусочно-линейная [10, 11].



Пусть в момент времени $T = t_i$ один из однородных участков произвольного многоступенчатого стержня находится под действием системы продольных сил P_1, P_2, \dots, P_n , для которого построена диаграмма относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}$ (рис. 2, а). Эти силы действуют в различных поперечных сечениях стержня, расстояния до которых от переходного сечения с другим однородным участком известны: b_1, b_2, \dots, b_n . Величину продольной силы P_i на рассматриваемом однородном участке по закону Гука [12], используя данные диаграммы, представим в виде

$$P_i = EA \frac{V_0}{a} (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{i-1}). \quad (5)$$

Учитывая жесткую связь рассматриваемого однородного участка с последующим, отбросим последующий однородный участок, заменяя его жесткой заделкой. Таким образом, получаем схему нагружения рассматриваемого участка для расчета на устойчивость как для жестко заделанного стержня, длина которого равна длине этого участка (рис. 2, б).

Для расчета рассматриваемого однородного участка стержня на устойчивость при продольной сжимающей нагрузке можно заменить данную систему продольных сил (рис. 2, б) одной силой, действующей на свободном торце, которую обозначим $P_{\text{экв}}$ (рис. 3).

Величину продольной силы $P_{\text{экв}}$ можно считать по известной зависимости, приводимой в [12], если известны величины сил P_1, P_2, \dots, P_n и координаты их приложения b_1, b_2, \dots, b_n , а также длина l_1

$$P_{\text{экв}} = \left[\pm P_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 \pm P_2 \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 \pm \dots \pm P_i \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 \pm P_n \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Здесь знак «+» берется в случае, если соответствующая продольная сила сжимающая и знак «-», если сила растягивающая.

В формулах (5) и (6) a — скорость распространения продольной волны деформации в данном материале стержня, E — модуль упругости, A — площадь поперечного сечения рассматриваемого однородного участка, $\tilde{\varepsilon}_i$ — относительная продольная деформация на i -м отрезке рассматриваемого однородного участка многоступенчатого стержня.

Для тонких однородных участков ($l > 15d$, где l и d — соответственно длина и диаметр рассматриваемого участка) при расчете на устойчивость применима формула Эйлера [12]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (7)$$

где J_{min} — минимальный момент инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей инерции, μ — коэффициент приведения длины, зависящий от схемы закрепления стержня [12], l — длина рассматриваемого однородного участка. В данном случае это будет длина l_1 , поскольку через l обозначена общая длина ступенчатого стержня. Если рассматриваемый однородный участок, имеющий свободный торец, жестко связан с последующим (см. рис. 2, а), то коэффициент приведения

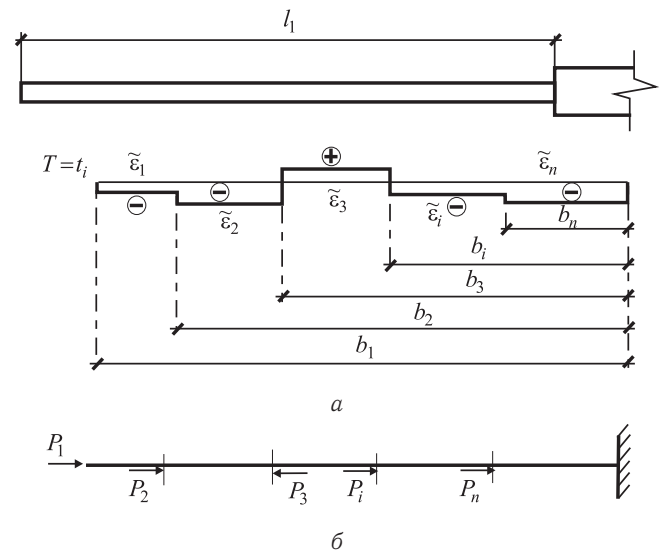


Рис. 2. Однородный участок произвольного многоступенчатого стержня: а – диаграмма относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}$; б – схема нагружения для расчета на устойчивость жестко заделанного стержня

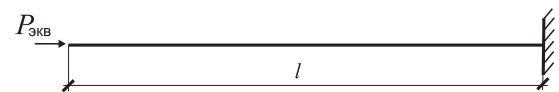


Рис. 3



длины для рассматриваемого однородного участка μ принимается равным 2 [12]. Аналогичным путем можно рассматривать любой однородный участок многоступенчатого стержня, и в зависимости от его связей с другими участками или с жесткой преградой μ будет принимать значения от 0.7 до 2 [12].

Необходимо отметить, что в данном случае речь идет о динамической задаче, тогда как формула Эйлера применяется в случае статического нагружения. Ударная сила, действующая на ступенчатый стержень в результате волновых преобразований, рассматривается как постоянная статическая нагрузка в течение малого промежутка времени.

Для выполнения условия сохранения устойчивого состояния многоступенчатого стержня необходимо, чтобы $P_{\text{экр}} < P_{\text{кр}}$, т.е. используя (5)–(7) и учитывая, что для круглого поперечного сечения $J_{\text{мин}} = \frac{\pi d^4}{64}$, получим

$$V_0 < V_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 d^2 a}{16(\mu l)^2} \left[\tilde{\varepsilon}_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1) \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_2) \left(\frac{b_3}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_3) \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_i) \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (8)$$

В формуле (8) положительные значения $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n$ берутся со знаком плюс, отрицательные — минусом. Эта формула применима для расчета критической предупредительной скорости многоступенчатой стержневой системы с любым числом однородных участков.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим продольный удар многоступенчатого стержня о жесткую преграду с длинами участков $l_1 = 0.4l, l_2 = 0.2l, l_3 = 0.4l$, соотношением площадей поперечных сечений каждого предыдущего участка к последующему: $\tilde{A} = A_1/A_2 = A_2/A_3 = 2$. Методом характеристик построено поле состояний (рис. 4).

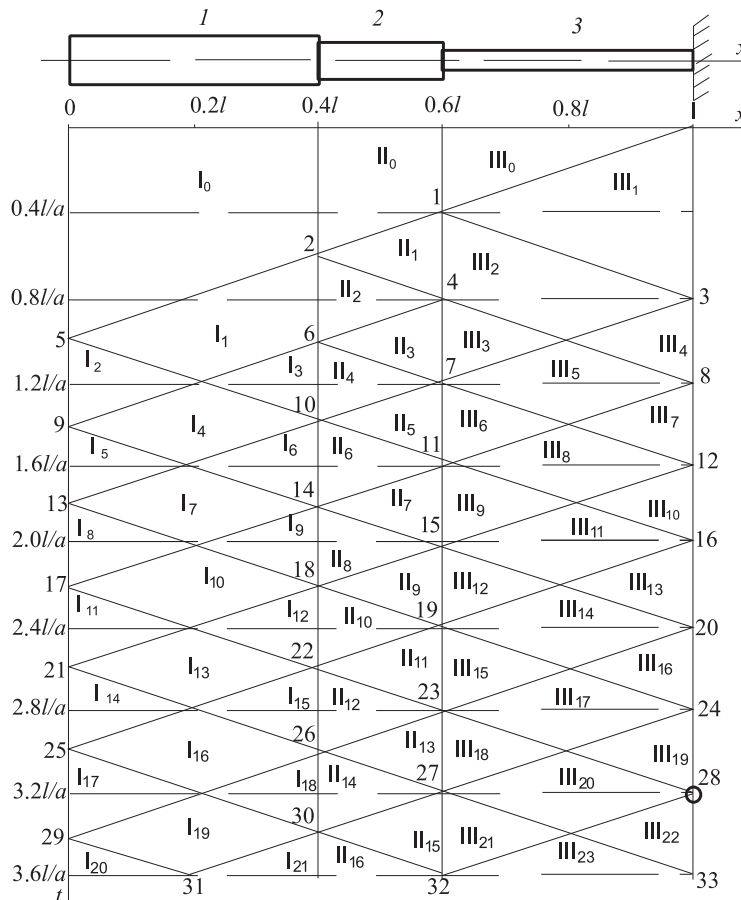


Рис. 4. Поле состояний



Области состояний I_0-I_{21} , II_0-II_{16} , III_0-III_{23} с соответствующими значениями $\tilde{f}'(at - x_j)$, $\tilde{\varphi}'(at + x_j)$, $\tilde{\varepsilon}(x, t)$, $\tilde{\nu}(x, t)$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, продольную деформацию и скорость поперечных сечений.

Длительность состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат t , которые имеют точки наклонных линий для этого сечения.

В момент удара стержня о жесткую преграду ($t = 0$) в ударном сечении $x = l$ формируется новая обратная волна, параметры которой определяются из условия (4):

$$\tilde{f}'(at - l) + \tilde{\varphi}'(at + l) = 0, \quad \tilde{f}'(at - l) = -\tilde{\varphi}'(at + l),$$

т. е. формируемая в ударном сечении $x = l$ обратная волна соответствует параметрам падающей волны с обратным знаком. Поскольку падающая прямая волна $\tilde{f}'(at - l) = -0.5$, то отраженная от ударного сечения новая обратная волна $\tilde{\varphi}'(at + l) = 0.5$ (см. рис. 4, линия $l-1$).

Данными волнами будут охвачены поперечные сечения в области первого состояния третьего участка III_1 . Относительная продольная деформация в соответствующих сечениях третьего участка $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -1$, относительная скорость $\tilde{\nu}(x, t) = 0$. Длительность данного состояния для произвольного сечения третьего участка определяется разностью ординат t , которые имеют точки линии $l-1$ и $l-3$ для этого сечения. В момент времени $t = 0.4l/a$ обратная волна $\tilde{\varphi}'_3(at + l) = -0.5$ достигнет переходного сечения $x = l_1 + l_2 = 0.6l$. В этот же момент времени слева на данное сечение будет падать прямая волна $\tilde{f}'(at - 0) = 0.5$. По этой причине в переходном сечении слева сформируется новая обратная волна $\tilde{\varphi}'_2(at + 0.6l) = -0.17$ (см. рис. 4, линия $l-2$) и новая прямая волна $\tilde{f}'_3(at - 0.6l) = 0.83$ (см. рис. 4, линия $l-3$). В области первого состояния второго участка II_1 поперечные сечения будут охвачены прямой волной $\tilde{f}'_0(at - 0) = 0.5$ и обратной волной $\tilde{\varphi}'_2(at + 0.6l) = -0.17$. Относительная продольная деформация в сечениях второго участка $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -0.67$, относительная скорость $\tilde{\nu}(x, t) = 0.33$. Длительность данного состояния определяется разностью ординат точек наклонных линий $l-2$ и $l-4$ для соответствующего сечения.

Далее переходим к построению диаграммы относительной продольной деформации (рис. 5), используя поле состояний (см. рис. 4).

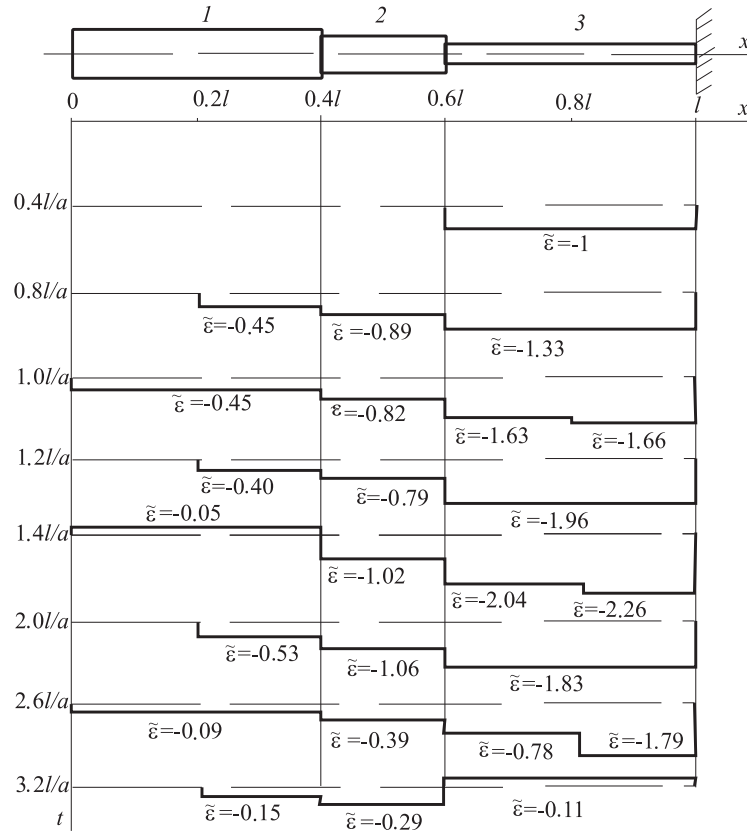


Рис. 5. Диаграмма относительной продольной деформации



Анализируя диаграмму, можно сделать вывод, что максимальное значение деформации имеет место на третьем однородном участке ступенчатого стержня при $t = 1.4l/a$ (на отрезке $0.6l \times 0.8l$ $\tilde{\epsilon}_{\max} = -2.04$, на отрезке $0.8l \times l$ $\tilde{\epsilon}_{\max} = -2.26$). Следовательно, в данный момент времени при достижении предупредательной скорости некоторого критического значения третий однородный участок может потерять устойчивость. Для расчета критической предупредательной скорости используем полученную формулу (8). Учитывая данные диаграммы (см. рис. 5) и подставляя соответствующие величины в (8), учитывая длину $l_3 = 0.4l$ и $\mu = 0.7$ [12] в соответствии со схемой закрепления рассматриваемого участка, получим $V_{кр} = 0.38 \frac{\pi^2 d^2 a}{(l)^2}$. Таким образом, потеря устойчивости ступенчатого стержня возможна при $t = 1.4l/a$, поскольку при рассчитанной величине предупредательной скорости $V_{кр}$, в данный момент времени может быть достигнуто критическое значение продольной силы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применяя рассмотренный подход, можно рассчитать минимальную величину критической предупредательной скорости, при которой ступенчатая стержневая система любой конфигурации теряет устойчивое состояние при продольном ударе. Таким образом, волновая модель с применением метода характеристик и формулы Эйлера позволяет получить достаточно простое решение задачи потери устойчивости ступенчатого стержня при продольном ударе. При расчете на устойчивость стержневых элементов, у которых $l < 15d$, целесообразно применять численные методы расчета, основанные на законе сохранения механической энергии.

В случае гибких тонких стержней, у которых длина превышает диаметр более чем в 100 раз, необходимо вести расчет, исходя из того, что элемент конструкции подвергается действию нагрузок, превосходящих критическую. В этом случае для практических целей важно исследовать закритическую деформацию сжатых стержней. Кроме того, этот вопрос имеет большое теоретическое значение, так как позволяет установить случаи неприменимости линейных уравнений и уточнить критерии устойчивости.

Библиографический список

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
2. Малышев Б. М. Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М. : ГИТТЛ, 1962. 880 с.
4. Малый В. И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.
5. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.
6. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.
7. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М. : Машиностроение, 1978. 312 с.
8. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М. : Наука, 1987. 352 с.
9. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1974. 808 с.
10. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М. : Наука, 1985. 354 с.
11. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Моделирование продольного удара однородных стержней при неударяющих связях // Вестн. УлГТУ. 2005. № 3. С. 23–25.
12. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1989. 732 с.