УДК 629.78,519.6

Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата

И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83; научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24, PankratovIA@info.sgu.ru

Сапунков Яков Григорьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24, SapunkovYaG@gmail.com

Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24, ChelnokovYuN@gmail.com

В кватернионной постановке рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор ускорения от реактивной тяги) является ограниченным по модулю. В ходе решения задачи требуется определить оптимальную ориентацию этого вектора в пространстве. При этом необходимо минимизировать длительность процесса переориентации орбиты КА. Для описания движения центра масс КА использовано кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА. Поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Учет известного частного решения уравнения для переменной, сопряженной к истинной аномалии, позволил упростить уравнения задачи. Задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений 15-го порядка. Для численного решения полученной краевой задачи был осуществлен переход к безразмерным переменным. При этом в фазовых и сопряженных уравнениях появился характерный безразмерный параметр задачи. Построен оригинальный численный алгоритм нахождения неизвестных начальных значений сопряженных переменных, являющийся комбинацией методов Рунге – Кутты 4-го порядка точности, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска. Использование двух методов решения краевых задач позволило повысить точность решения рассматриваемой краевой задачи оптимального управления. Приведены примеры численного решения задачи для случая, когда отличие между начальной и конечной ориентациями орбиты КА составляет единицы (или десятки) градусов в угловой мере. Построены графики изменения компонент кватерниона ориентации орбиты КА; переменных, характеризующих форму и размеры орбиты КА; оптимального управления. Приведен анализ полученных решений. Установлены особенности и закономерности процесса оптимальной переориентации орбиты КА.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион.

Поступила в редакцию: 05.03.2019 / Принята: 24.05.2019 / Опубликована: 02.03.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-93-104

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что космический аппарат (КА) движется в пространстве под действием тяги реактивного двигателя, сообщающего КА вектор ускорения $\boldsymbol{p}$. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА меняет свою форму и свои размеры, т. е. является деформируемой фигурой. Рассмотрим следующую задачу: требуется определить ограниченное по модулю управление $\boldsymbol{p}$:

$$0 \leqslant p \leqslant p_{\max} < \infty, \qquad p = |\boldsymbol{p}|, \tag{1}$$

переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]

$$\begin{gathered}
\frac{dr}{dt} = v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{fM}{r^2} + p_1, \quad \frac{dc}{dt} = rp_2, \quad 2\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, \\
\boldsymbol{\Omega}_\xi = \frac{p_3 r}{c}\left(\cos\varphi \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{i}_2\right) - \frac{r}{c^2 - fMr}\cos\varphi \cdot \\
\cdot \left(cp_1\cos\varphi - \left(c + \frac{fMr}{c}p_2\sin\varphi\right)\boldsymbol{i}_3\right), \\
\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} - \frac{r}{c^2 - fMr}\cos\varphi \cdot \left(cp_1\cos\varphi - \left(c + \frac{fMr}{c}p_2\sin\varphi\right)\right),
\end{gathered} \tag{2}$$

из заданного начального состояния

$$t = 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \boldsymbol{\Lambda}(0) = \boldsymbol{\Lambda}^0 \tag{3}$$

в конечное состояние

$$t = t^* = ?, \quad c(t^*) = c(0) = c^0, \quad e_{or}(t^*) = e_{or}(0), \quad \boldsymbol{\Lambda}(t^*) = \pm\boldsymbol{\Lambda}^* \tag{4}$$

за минимальное время.

Здесь $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор КА, проводимый из центра притяжения, $r = |\boldsymbol{r}|$; v_1 — проекция вектора скорости КА на направление его радиус-вектора; c — модуль момента орбитальной скорости КА; f — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего тела (Земли); p_k, $k = \overline{1,3}$ — компоненты вектора ускорения от тяги реактивного двигателя; $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\boldsymbol{i}_1 + \Lambda_2\boldsymbol{i}_2 + \Lambda_3\boldsymbol{i}_3$ — нормированный кватернион ориентации орбиты КА, $\boldsymbol{i}_k$, $k = \overline{1,3}$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; φ — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите.

В поставленной задаче заданы начальные значения фазовых координат КА r, v_1, c, φ, $\boldsymbol{\Lambda}$ и эксцентриситета орбиты КА e_{or}, вычисляемого либо по формуле [2, 3]

$$e_{or} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2}\left(v_1^2 + \frac{c^2}{\mu^2} - 2\frac{\mu}{r}\right)}, \quad \mu = fM,$$

либо по формуле

$$e_{or} = \frac{r \cdot v_1}{c \sin\varphi - r v_1 \cos\varphi},$$

также заданы значения компонент кватерниона $\mathbf{\Lambda}^*$.

Конечные значения фазовых координат принадлежат многообразию (4). Конечное значение момента времени t^* не фиксируется и подлежит определению в результате решения задачи. Поэтому эта задача — задача с подвижным правым концом. Отметим, что в отличие от работ [4, 5] величины больших полуосей начальной и конечной орбит в общем случае не совпадают, т. е. размер конечной орбиты КА может отличаться от размера его начальной орбиты. Отметим также, что ввиду своей сложности задача о быстродействии другими авторами решалась редко (можно отметить работы [6–9]). В основном минимизировались затраты рабочего тела или характеристическая скорость.

Известно, что задача межорбитального перелета КА значительно упрощается, если начальная и конечная орбиты лежат в одной плоскости. Становится возможным аналитически (точно или приближенно) найти оптимальные траектории перехода. Этим обусловлено значительное количество публикаций в данной области. Чаще всего минимизировался расход рабочего тела. Отметим работы И. С. Григорьева, К. Г. Григорьева [10–13], С. Н. Кирпичникова с соавторами [14, 15]. Задачи оптимального управления решаются на основе принципа максимума. Краевые задачи принципа максимума решаются численно методом стрельбы. В настоящей статье рассмотрена общая задача переориентации орбиты КА. На форму и размеры начальной и конечной орбит дополнительных ограничений не наложено.

В отличие от управления угловым движением твердого тела, где уже довольно давно применяются кватернионные модели, в подавляющем большинстве работ, посвященных переориентации орбиты КА, используются уравнения движения в традиционных угловых элементах орбиты. Отметим также, что некоторые авторы [16, 17] применяют кватернионный подход для построения аналитического решения уравнений невозмущенной пространственной задачи двух тел во вращающейся системе координат. В большинстве работ задача сводится к численному решению нелинейных краевых задач высокой размерности, полученных с помощью применения принципа максимума Л. С. Понтрягина. Аналитическое исследование дифференциальных уравнений ориентации орбиты в классических угловых элементах (и получающихся краевых задач) — достаточно сложная задача. Отметим работы С. А. Ишкова, В. В. Салмина и др. [18, 19]. Повышение эффективности численного решения задач в этой области, по-видимому, может быть получено при использовании кватернионных моделей орбитального движения КА. В настоящей работе развиваются исследования изучаемой задачи, начатые в [20].

Четыре компоненты Λ_j кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ удовлетворяют условию $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$, поэтому краевое кватернионное условие в (4), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\operatorname{vect}\left[\tilde{\mathbf{\Lambda}}(t^*) \circ \mathbf{\Lambda}^*\right] = \mathbf{0}, \tag{5}$$

эквивалентное трем скалярным (в (5) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион). Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

2. ЗАКОН ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [21]. Для этого введем дополнительные переменные ρ, s_1, e, χ и $\mathbf{M} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1\boldsymbol{i}_1 + \mathrm{M}_2\boldsymbol{i}_2 + \mathrm{M}_3\boldsymbol{i}_3$, сопряженные по отношению к фазовым переменным r, v_1, c, φ и $\boldsymbol{\Lambda}$. Известно [20], что уравнение для переменной χ имеет частное решение

$$\chi = N_3/2. \tag{6}$$

В этом случае функция Гамильтона – Понтрягина примет вид

$$H = -1 + \rho v_1 + s_1\left(\frac{c^2}{r^3} - \frac{fM}{r^2} + p_1\right) + erp_2 + \chi\frac{c}{r^2} + p_3\frac{r}{2c}\left(\mathrm{N}_1\cos\varphi + \mathrm{N}_2\sin\varphi\right),$$

где N_j, $j = \overline{1,3}$ — компоненты кватерниона $\mathbf{N} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{M}$.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$\begin{gathered}
\frac{ds_1}{dt} = -\rho, \\
\frac{d\rho}{dt} = 3s_1\frac{c^2}{r^4} - 2\frac{s_1 fM - \chi c}{r^3} - ep_2 - \frac{p_3}{2c}\left(\mathrm{N}_1\cos\varphi + \mathrm{N}_2\sin\varphi\right), \\
\frac{de}{dt} = -2c\frac{s_1}{r^3} - \frac{\chi}{r^2} + p_3\frac{r}{2c^2}\left(\mathrm{N}_1\cos\varphi + \mathrm{N}_2\sin\varphi\right), \\
2\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi.
\end{gathered} \tag{7}$$

Закон оптимального в смысле быстродействия управления (т. е. закон управления, удовлетворяющий необходимому условию оптимальности) находится из условий максимума функции H по переменной $\boldsymbol{p}$ с учетом наложенного ограничения (1) и имеет вид

$$\boldsymbol{p}^o = p_{\max}\boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|, \quad \boldsymbol{n} = s_1\boldsymbol{i}_1 + er\boldsymbol{i}_2 + \frac{r}{2c}\left(\mathrm{N}_1\cos\varphi + \mathrm{N}_2\sin\varphi\right)\boldsymbol{i}_3. \tag{8}$$

Условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа, имеют вид:

$$t = t^*, \quad \rho - \frac{s_1}{v_1 \cdot r^2}\left(1 - \frac{r}{c^2}\right) = 0, \quad \Lambda_0^*\mathrm{M}_0 + \Lambda_1^*\mathrm{M}_1 + \Lambda_2^*\mathrm{M}_2 + \Lambda_3^*\mathrm{M}_3 = 0. \tag{9}$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (7), (8) 15-го порядка и тринадцатью краевыми условиями (3), (4), (5), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (9) и равенством

$$H^o\,|_{t^*} = 0,$$

имеющим место для оптимального управления $\boldsymbol{p}^o$ и оптимальной траектории.

3. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Фазовые Λ_j и сопряженные M_j переменные являются безразмерными. Безразмерные переменные r^b, t^b и компоненты управления p_k^b связаны с размерными переменными r, t и управлениями p_k соотношениями: $r = Rr^b$, $t = Tt^b$, $p_k = p_{\max}p_k^b$, $k = \overline{1,3}$, где R — характерное расстояние (в его качестве принималась величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); V, T — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями: $V = C/R$, $T = R^2/C$. Здесь C — характерная секторная скорость.

Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появляется характерный безразмерный параметр $N = p_{\max}R^3/C^2$.

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид (здесь и далее верхние индексы у безразмерных переменных опускаются):

$$
\begin{gathered}
\frac{dr}{dt} = v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} + N \cdot p_1, \quad \frac{dc}{dt} = N \cdot r \cdot p_2, \quad 2\frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \\
\mathbf{\Omega}_\xi = N \cdot \frac{p_3 \cdot r}{c}\left(\cos\varphi \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{i}_2\right) - N \cdot \frac{r}{c^2 - r}\cos\varphi \times \\
\times \left(cp_1\cos\varphi - \left(c + \frac{r}{c}p_2\sin\varphi\right)\boldsymbol{i}_3\right), \\
\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} - N \cdot \frac{r}{c^2 - r}\cos\varphi \cdot \left(cp_1\cos\varphi - \left(c + \frac{r}{c}p_2\sin\varphi\right)\right).
\end{gathered} \tag{10}
$$

Начальные условия интегрирования этой системы

$$
t = 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}^0 \tag{11}
$$

являются заданными.

Для правого конца траектории КА имеем условия

$$
t = t^* =?, \quad c(t^*) = c(0) = c^0, \quad e_{or}(t^*) = e_{or}(0), \quad \mathrm{vect}\left[\tilde{\mathbf{\Lambda}}(t^*) \circ \mathbf{\Lambda}^*\right] = 0, \tag{12}
$$

где $\mathbf{\Lambda}^*$ — заданная кватернионная величина.

Ограничение по управлению в безразмерном виде: $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leqslant 1$.

Система сопряженных уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{ds_1}{dt} = -\rho, \\
\frac{d\rho}{dt} = 3s_1\frac{c^2}{r^4} - 2\frac{s_1 - \chi c}{r^3} - Nep_2 - N\frac{p_3}{2c}\left(\mathrm{N}_1\cos\varphi + \mathrm{N}_2\sin\varphi\right), \\
\frac{de}{dt} = -2c\frac{s_1}{r^3} - \frac{\chi}{r^2} + N \cdot p_3\frac{r}{2c^2}\left(\mathrm{N}_1\cos\varphi + \mathrm{N}_2\sin\varphi\right), \\
2\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \circ \mathbf{\Omega}_\xi.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Отметим, что безразмерное дифференциальное уравнение для переменной χ было заменено частным решением (6).

Условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа, в безразмерных переменных имеют вид

$$t = t^*, \quad \rho - \frac{s_1}{v_1 \cdot r^2}\left(1 - \frac{r}{c^2}\right) = 0, \\ \Lambda_0^* \mathrm{M}_0 + \Lambda_1^* \mathrm{M}_1 + \Lambda_2^* \mathrm{M}_2 + \Lambda_3^* \mathrm{M}_3 = 0. \tag{14}$$

Таким образом, в безразмерных переменных задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (10), (13) 15-го порядка и тринадцатью краевыми условиями (11), (12), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (14) и равенством гамильтониана нулю в конце движения. При этом закон оптимального управления аналогичен (8).

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Алгоритм численного решения задач реализует комбинацию метода Рунге – Кутта 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска [22].

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [23] (a_{or} — большая полуось орбиты):

$$e_{or} = 0.8257, \quad a_{or} = 37936238.7597\,\text{м}, \\ \varphi_0 = 2.954779\,\text{рад.}, \quad p_{\max} = 0.101907\,\text{м/с}^2, \quad N = 0.35;$$

для начального положения КА

$$\Lambda_0^0 = 0.679417, \quad \Lambda_1^0 = -0.245862, \quad \Lambda_2^0 = -0.539909, \quad \Lambda_3^0 = -0.353860;$$

для конечного положения КА

вариант 1 (малое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = 0.678275, \quad \Lambda_1^* = -0.268667, \quad \Lambda_2^* = -0.577802, \quad \Lambda_3^* = -0.366116;$$

вариант 2 (большое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = -0.440542, \quad \Lambda_1^* = -0.522476, \quad \Lambda_2^* = -0.125336, \quad \Lambda_3^* = -0.719189.$$

Значения выбранных масштабирующих множителей равны: $R = 37000000.0$ м, $V = 3282.220738$ м/с, $C = 121442167306.088539$ м/с^2, $T = 11272.855470$ с. Указанные значения этих величин отвечают значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в [24].

Ориентации начальной и конечной орбит КА характеризуются параметрами Эйлера Λ_j^0 и Λ_j^*, $j = \overline{0,3}$, Если в варианте 1 эти значения близки (отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов: $\Delta\Omega_u = \Omega_u(t_0) - \Omega_u(t^*) = -3.30°$, $\Delta I = I(t_0) - I(t^*) = -1.51°$, $\Delta\omega_\pi = \omega_\pi(t_0) - \omega_\pi(t^*) = -1.59°$), то в варианте 2 они существенно отличаются (отличие ориентаций орбит в угловой мере составляет десятки градусов: $\Delta\Omega_u = -32.00°$, $\Delta I = -117.57°$, $\Delta\omega_\pi = 39.96°$).

На рис. 1, 2 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для обоих вариантов исходных данных.

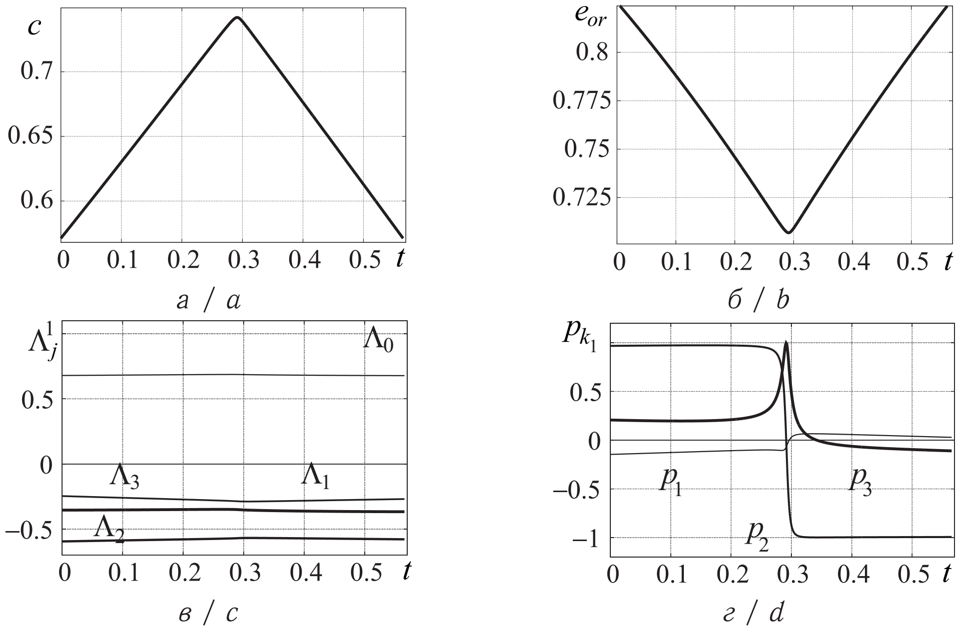

Рис. 1. Эллиптическая орбита, вариант 1: *а* — модуль момента орбитальной скорости КА; *б* — эксцентриситет орбиты КА; *в* — компоненты кватерниона ориентации орбиты КА; *г* — оптимальное управление

Fig. 1. Elliptical orbit, variant 1: *a* — modulus of the moment of the spacecraft orbital velocity; *b* — eccentricity of the spacecraft orbit; *c* — components of quaternion of the spacecraft orbit orientation; *d* — optimal control

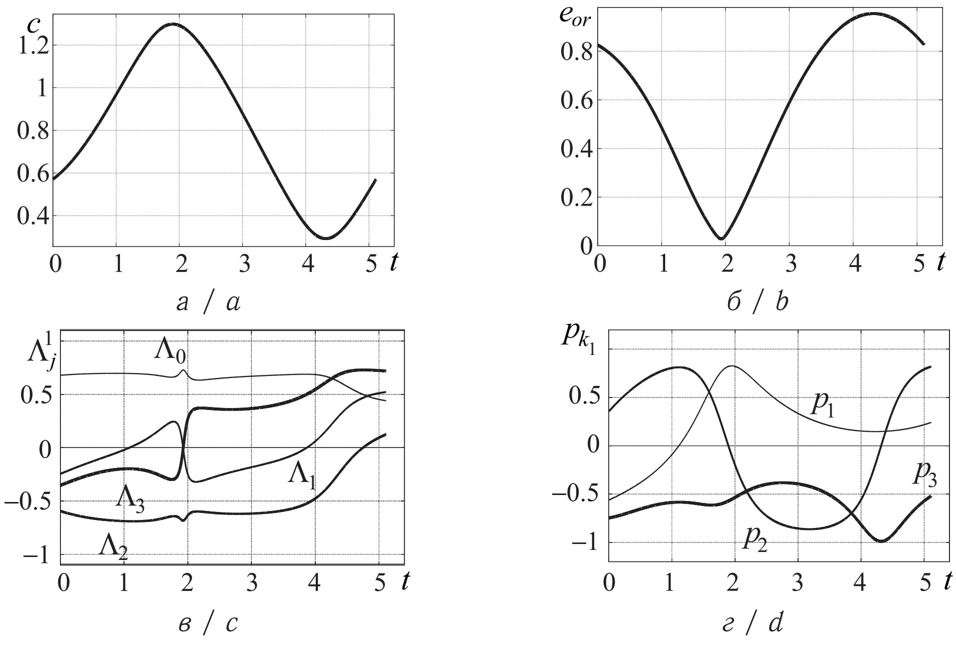

Рис. 2. Эллиптическая орбита, вариант 2: *а* — модуль момента орбитальной скорости КА; *б* — эксцентриситет орбиты КА; *в* — компоненты кватерниона ориентации орбиты КА; *г* — оптимальное управление

Fig. 2. Elliptical orbit, variant 2: *a* — modulus of the moment of the spacecraft orbital velocity; *b* — eccentricity of the spacecraft orbit; *c* — components of quaternion of the spacecraft orbit orientation; *d* — optimal control

При малом отличии в ориентациях начальной и конечной орбит КА (вариант 1) длительность процесса переориентации орбиты КА составила 0.565439 безразмерных единиц, или 1.771 ч. Заметим, что при $t = 0.296730$ резко меняются законы изменения компонент оптимального управления (со сменой знака). До этого времени модуль момента орбитальной скорости КА практически линейно увеличивался, а затем он начинает уменьшаться. И, напротив, эксцентриситет орбиты КА вначале линейно уменьшается, а после $t = 0.296730$ начинает увеличиваться, достигая своего первоначального значения в конце движения. Компоненты кватерниона ориентации орбиты КА являются медленно изменяющимися переменными.

При большом отличии в ориентациях начальной и конечной орбит КА (вариант 2) длительность процесса переориентации орбиты КА составила 5.112605 безразмерных единиц, или 16.009 ч. Заметим, что при $t = 1.933729$ орбита КА близка к круговой. Затем эксцентриситет орбиты начинает увеличиваться. Максимальное значение эксцентриситета (близкое к единице) больше его начального значения. Также при $t = 1.933729$ модуль момента орбитальной скорости КА достигает своего максимального значения. В этой же точке фазовые переменные Λ_0, Λ_2 имеют локальные экстремумы, а Λ_1, Λ_3 меняют знак.

Отметим выявленную неединственность численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА, связанную с нелинейностью дифференциальных уравнений задачи. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления получены различные решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них было выбрано то, при котором переориентация орбиты КА происходит за меньшее время.

Отметим также, что в отличие от работы [20] авторам удалось получить решение в случае, когда отличие в ориентациях начальной и конечной орбит КА составляет десятки градусов. При этом комбинирование двух методов решения краевых задач позволило повысить точность численного решения краевой задачи с 0.002 до 10^{-9} безразмерных единиц.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

Библиографический список

1. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 92–107.

2. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М. : Наука, 1976. 864 с.

3. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968. 799 с.

4. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-3-87-95

5. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92

6. *Кирпичников С. Н., Бобкова А. Н., Оськина Ю. В.* Минимальные по времени импульсные перелеты между круговыми компланарными орбитами // Космические исследования. 1991. Т. 29, № 3. С. 367–374.
7. *Григорьев И. С., Григорьев К. Г., Петрикова Ю. Д.* О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. 2000. Т. 38, № 2. С. 171–192.
8. *Kiforenko B. M., Pasechnik Z. V., Kyrychenko S. B., Vasiliev I. Yu.* Minimum time transfers of a low-thrust rocket in strong gravity fields // Acta Astronautica. 2003. Vol. 52, iss. 8. P. 601–611. DOI: https://doi.org/10.1016/S0094-5765(02)00130-3
9. *Fazelzadeh S. A., Varzandian G. A.* Minimum-time earth-moon and moon-earth orbital maneuevers using time-domain finite element method // Acta Astronautica. 2010. Vol. 66, iss. 3–4. P. 528–538. DOI: https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2009.07.021
10. *Григорьев К. Г., Федына А. В.* Оптимальные перелеты космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между компланарными круговыми орбитами // Космические исследования. 1995. Т. 33, № 4. С. 403–416.
11. *Рыжов С. Ю., Григорьев И. С.* К проблеме решения задач оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелетов КА // Космические исследования. 2006. Т. 44, № 3. С. 272–280.
12. *Григорьев И. С., Григорьев К. Г.* Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4. С. 358–366.
13. *Григорьев И. С., Григорьев К. Г.* Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. II // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 6. С. 553–563.
14. *Кирпичников С. Н., Бобкова А. Н.* Оптимальные импульсные межорбитальные перелеты с аэродинамическими маневрами // Космические исследования. 1992. Т. 30, № 6. С. 800–809.
15. *Кирпичников С. Н., Кулешова Л. А., Костина Ю. Л.* Качественные свойства энергетически оптимальных орбит импульсных полетов между круговыми компланарными орбитами при заданном времени старта // Космические исследования. 1996. Т. 34, № 2. С. 170–179.
16. *Condurache D., Martinusi V.* Quaternionic Exact Solution to the Relative Orbital Motion Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol. 33, № 4. P. 1035–1047. DOI: https://doi.org/10.2514/1.47782
17. *Condurache D., Burlacu A.* Onboard Exact Solution to the Full-Body Relative Orbital Motion Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39, № 12. P. 2638–2648. DOI: https://doi.org/10.2514/1.G000316
18. *Ишков С. А., Романенко В. А.* Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1997. Т. 35, № 3. С. 287–296.
19. *Салмин В. В., Соколов В. О.* Приближенный расчет маневров формирования орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1991. Т. 29, № 6. С. 872–888.
20. *Афанасьева Ю. В., Челноков Ю. Н.* Задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата как деформируемой фигуры // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 125–138.
21. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.

22. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.

23. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 5. С. 488–505.

24. *Бордовицына Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с.

Образец для цитирования:
Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 93–104. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-93-104

Quaternion Models and Algorithms for Solving the General Problem of Optimal Reorientation of Spacecraft Orbit

I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov

Ilia A. Pankratov, https://orcid.org/0000-0002-5325-9310, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia, PankratovIA@info.sgu.ru

Yakov G. Sapunkov, https://orcid.org/0000-0001-7149-5117, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia, SapunkovYaG@gmail.com

Yuriy N. Chelnokov, https://orcid.org/0000-0003-4901-5767, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia, ChelnokovYuN@gmail.com

The problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit is considered in quaternion formulation. Control (vector of the acceleration of the jet thrust) is limited in magnitude. To solve the problem it is required to determine the optimal orientation of this vector in space. It is necessary to minimize the duration of the process of reorientation of the spacecraft orbit. To describe the motion of the center of mass of the spacecraft we used quaternion differential equation of the orientation of the spacecraft orbit. The problem was solved using the maximum principle of L. S. Pontryagin. Accounting the known particular solution of the equation for the variable conjugated to a true anomaly, we allowed to simplify the equations of the problem. The problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit is reduced to a boundary value problem with a moving right end trajectory described by a system of nonlinear differential equations of the fifteenth order. For the numerical solution of the obtained boundary value problem the transition to dimensionless variables was carried out. At the same time a characteristic dimensionless parameter of the problem appeared in the phase and conjugate equations. The original numerical algorithm for finding unknown initial values of conjugate variables, which is a combination of the 4th order Runge–Kutta method, modified Newton method and gradient descent method is constructed. The use of two methods for solving boundary value problems has improved the accuracy of the boundary value problem solution of optimal control. Examples of numerical solution of the problem are given for the case when the difference between the initial and final orientations of the spacecraft orbit equals to a few (or tens of) degrees in angular measure. Graphs of component changes of the spacecraft orbit orientation quaternion; variables characterizing the shape and dimensions of the spacecraft orbit; optimal control are plotted. The analysis of the obtained solutions is given. The features and regularities of the optimal reorientation of the spacecraft orbit are established.

Keywords: spacecraft, orbit, optimal control, quaternion.

Received: 05.03.2019 / Accepted: 24.05.2019 / Published: 02.03.2020

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00205).

References

1. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: II. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 85–99. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1022359831200
2. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Riabov Yu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike* [Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 864 p. (in Russian).
3. Duboshin G. N. *Nebesnaia mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Main tasks and methods]. Moscow, Nauka, 1968. 799 p. (in Russian).
4. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. About a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 87–95 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-3-87-95
5. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation Using Quaternion Equations of Orbital System of Coordinates Orientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 84–92 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92
6. Kirpichnikov S. N., Bobkova A. N., Os'kina Yu. V. Minimum-time impulse transfers between coplanar circular orbits. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1991, vol. 29, no. 3, pp. 367–374 (in Russian).
7. Grigoriev K. G., Grigoriev I. S., Petrikova Yu. D. The fastest maneuvers of a spacecraft with a jet engine of a large limited thrust in a gravitational field in a vacuum. *Cosmic Research*, 2000, vol. 38, no. 2, pp. 160–181.
8. Kiforenko B. M., Pasechnik Z. V., Kyrychenko S. B., Vasiliev I. Yu. Minimum time transfers of a low-thrust rocket in strong gravity fields. *Acta Astronautica*, 2003, vol. 52, iss. 8, pp. 601–611. DOI: https://doi.org/10.1016/S0094-5765(02)00130-3
9. Fazelzadeh S. A., Varzandian G. A. Minimum-time earth-moon and moon-earth orbital maneuevers using time-domain finite element method. *Acta Astronautica*, 2010, vol. 66, iss. 3–4, pp. 528–538. DOI: https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2009.07.021
10. Grigorev K. G., Fedyna A. V. Optimal flights of a spacecraft with jet engine large limited thrust between coplanar circular orbits. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1995, vol. 33, no. 4, pp. 403–416 (in Russian).
11. Ryzhov S. Yu., Grigoriev I. S. On solving the problems of optimization of trajectories of many-revolution orbit transfers of spacecraft. *Cosmic Research*, 2006, vol. 44, iss. 3, pp. 258–267. DOI: https://doi.org/10.1134/S0010952506030105
12. Grigoriev I. S., Grigoriev K. G. The use of solutions to problems of spacecraft trajectory optimization in impulse formulation when solving the problems of optimal control of trajectories of a spacecraft with limited thrust engine: I. *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 4, pp. 339–347. DOI: https://doi.org/10.1134/S0010952507040077
13. Grigoriev I. S., Grigoriev K. G. The use of solutions to problems of spacecraft trajectory optimization in impulse formulation when solving the problems of optimal control of

trajectories of a spacecraft with limited thrust engine: II. *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 6, pp. 523–534. DOI: https://doi.org/10.1134/S0010952507060093

14. Kirpichnikov S. N., Bobkova A. N. Optimal impulse interorbital flights with aerodynamic maneuvers. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1992, vol. 30, no. 6, pp. 800–809 (in Russian).
15. Kirpichnikov S. N., Kuleshova L. A., Kostina Yu. L. A qualitative analysis of impulsive minimum-fuel flight paths between coplanar circular orbits with a given launch time. *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, no. 2, pp. 156–164.
16. Condurache D., Martinusi V. Quaternionic Exact Solution to the Relative Orbital Motion Problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, vol. 33, no. 4, pp. 1035–1047. DOI: https://doi.org/10.2514/1.47782
17. Condurache D., Burlacu A. Onboard Exact Solution to the Full-Body Relative Orbital Motion Problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 2638–2648. DOI: https://doi.org/10.2514/1.G000316
18. Ishkov S. A., Romanenko V. A. Forming and correction of a high-elliptical orbit of an earth satellite with low-thrust engine. *Cosmic Research*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 268–277.
19. Salmin V. V., Sokolov V. O. Approximate calculation of the formation manoeuvres of the satellite orbit the Earth with a small engine thrusts. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1991, vol. 29, no. 6, pp. 872–888 (in Russian).
20. Afanas'eva Yu. V., Chelnokov Yu. N. The problem of optimal control of the orientation of an orbit of a spacecraft as a deformable figure. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 4, pp. 621–634. DOI: https://doi.org/10.1134/S106423070804014X
21. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaia teoriia optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1983. 393 p. (in Russian).
22. Moiseev N. N. *Chislennye metody v teorii optimal'nykh sistem* [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow, Nauka, 1971. 424 p. (in Russian).
23. Chelnokov Yu. N. The Use of Quaternions in the Optimal Control Problems of Motion of the Center of Mass of a Spacecraft in a Newtonian Gravitational Field: III. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 5, pp. 460–477. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1026098216710
24. Bordovitsyna T. V. *Sovremennye chislennye metody v zadachakh nebesnoi mekhaniki* [Modern numerical methods in problems of celestial mechanics]. Moscow, Nauka, 1984. 136 p. (in Russian).

Cite this article as:
Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Quaternion Models and Algorithms for Solving the General Problem of Optimal Reorientation of Spacecraft Orbit. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 93–104 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-93-104