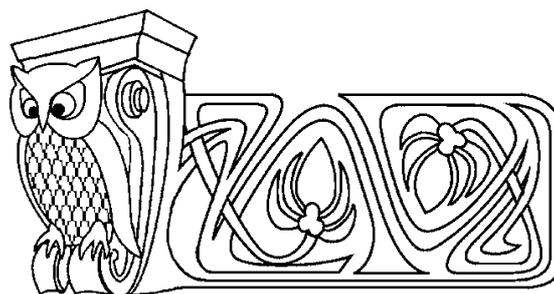




9. *Olver P.J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1985.
10. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
11. *Liu H., Li J.* Lie symmetry analysis and exact solutions for the extended mKdV equation // *Acta. Appl. Math.* 2010. Vol. 109. P. 1107–1119.
12. *Zhao X., Zhi H., Zhang H.* Improved Jacobi-function method with symbolic computation to construct new double-periodic solutions for the generalized Ito system // *Chaos Soliton Fract.* 2006. Vol. 28. P. 112–126.
13. *El-Wakil S.A., Madkour M.A., Abdou M.A.* New traveling wave solutions for nonlinear evolution equations // *Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 365. P. 429–438.
14. *Zhong W., Belic M R., Lu Y., Huang T.* Traveling and solitary wave solutions to the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81, 016605.
15. *Haldar K.* Effects of the shape of stenosis on the resistance to blood flow through an artery // *Bul. Math. Biol.* 1985. Vol. 47, № 4. P. 545–550.
16. *Mekheimer K.S., El Kot M.A.* Influence of magnetic field and hall currents on blood flow through a stenotic artery // *Appl. Math. Mech.* 2008. Vol. 29, № 8. P. 1093–1104.

УДК 531.381

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ КАНАЛА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ



Р.В. Агеев^{1*}, Т.В. Быкова^{1**}, Ю.Н. Кондратова²

¹Саратовский государственный технический университет,

*кафедра прикладной математики,

**кафедра теоретической механики;

²Саратовский государственный университет,

кафедра математической кибернетики и компьютерных наук

E-mail: r255@mail.ru, tbykova69@mail.ru,

KondratovaUN@info.sgu.ru

Рассмотрена задача математического моделирования динамических процессов в гидроопоре с упругим статором. Найдено решение динамической задачи гидроупругости гидроопоры, и построены ее амплитудные и фазовые частотные характеристики.

Ключевые слова: гидроупругость, вязкая жидкость, пластина, колебания.

Mathematical Modeling of Interaction Between Layer of Viscous Liquid and Elastic Walls of Channel, Which Was Installed on Vibration Foundation

R.V. Ageev^{1*}, T.V. Bykova^{1**}, J.N. Kondratova²

¹Saratov State Technical University,

*Chair of Applied Mathematics,

**Chair of Theoretical Mechanics;

²Saratov State University,

Chair of Mathematical Cybernetics and Computer Science

E-mail: r255@mail.ru, tbykova69@mail.ru,

KondratovaUN@info.sgu.ru

The article solves the problem of mathematical modeling dynamic processes in hydrosupport with elastic stator. The dynamic problem of hydroelasticity is found and amplitude and phase frequency characteristics of hydrosupport was built.

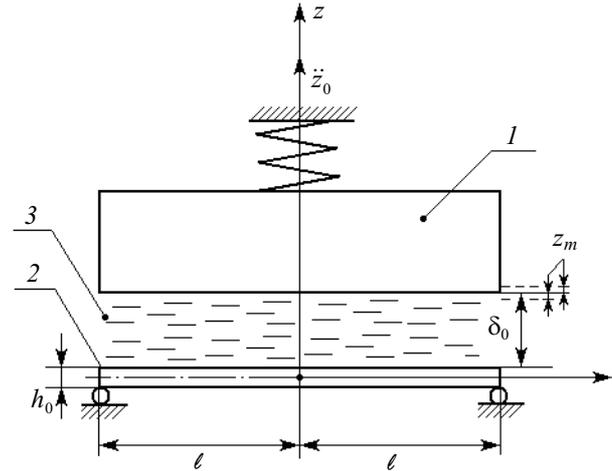
Key words: hydroelasticity, viscous fluid, plate, vacillating.

Разрабатывая математические модели для исследования динамических процессов в гидроопорах различных изделий, необходимо учитывать взаимодействие слоя жидкости с упругими элементами конструкций опор, образующих щелевой канал, в котором она находится. С данной проблемой связано развитие теории гидродинамической смазки [1], начало которой положено трудами Н.П. Петрова и О. Рейнольдса. Первоначально в рамках указанной теории рассматривались задачи об установившемся движении тонкого слоя жидкости (в канале, образованном твердыми стенками) без учета ее инерции и с удержанием части слагаемых уравнений Навье – Стокса, соответствующих силам вязкого трения. В последующих работах проводился учет конвективных членов инерции [2] и локального члена инерции [3] методом осреднения по толщине слоя. В работе [4] найдено приближенное аналитическое решение плоской задачи с учетом инерции движения тонкого слоя жидкости и упругой податливости одной из стенок канала, имеющей симметричные ребра жесткости. В предлагаемой работе исследуется плоская нестационарная задача с учетом влияния движения упругих стенок канала при наличии переносного гармонически изменяющегося по времени виброускорения и заданного гармонически пульсирующего перепада давления.



Гидроопора, установленная на вибрирующем основании, условно представлена на рисунке.

Имеется абсолютно жесткое тело — вибратор 1 опоры. Внутренняя поверхность вибратора является плоской и образует одну из стенок щелевого канала. Вибратор имеет длину b и ширину $2l$ и может совершать колебания в вертикальной плоскости. При этом частота его колебаний ω , а амплитуда колебаний вибратора z_m . Далее будем считать, что $b \gg 2l$. Вибратор имеет подвес (например, магнитный или пружинный), который обладает упругой податливостью, и может перемещаться в вертикальном направлении.



Вторую стенку щелевого канала образует упругая пластина — статор 2 опоры. Его ширина и длина совпадают с шириной и длиной вибратора. Торцы статора считаются свободно опертыми, а прогибы статора можно считать малыми.

Вязкая несжимаемая жидкость 3 полностью заполняет зазор между вибратором и статором. Средняя величина щелевого зазора равна δ_0 . Вибратор, статор и жидкость в щелевом зазоре заключены в едином корпусе, имеющем справа и слева торцевые полости, заполненные той же жидкостью, что и жидкость в щелевом зазоре. Эти полости выполнены так, что истечение в них жидкости из щелевого зазора можно считать свободным. Основание, на котором установлен корпус, совершает гармонические колебания в вертикальном направлении. В жидкости, находящейся в левой торцевой полости, поддерживается давление $p_0 + p_1^-(\omega t)$, p_0 — постоянный уровень давления. В правой полости поддерживается давление $p_0 + p_1^+(\omega t)$. Принимая во внимание, что $b \gg 2l$, будем рассматривать плоскую задачу.

Введем в рассмотрение декартовую систему координат $Oxyz$, связанную с абсолютно твердым корпусом опоры и совпадающую со срединной поверхностью упругого статора в невозмущенном состоянии.

Закон движения основания имеет вид

$$z_0 = E_z f_0(\omega t), \quad f_0(\omega t) = \sin(\omega t), \quad (1)$$

тогда виброускорение основания имеет вид

$$\ddot{z}_0 = -E_z \omega^2 f_0(\omega t). \quad (2)$$

Закон движения вибратора будем представлять как $z = z_m f_z(\omega t)$, а законы изменения давления на торцах $(p_1^+ + p_1^-)/2 = p_m f_p(\tau)$, $(p_1^+ - p_1^-)/2 = q_m f_p(\tau) = q_m \sin(\tau + \varphi_p)$. Далее будем полагать, что амплитуда виброускорения задается в единицах g , т. е. считаем, что $E_z \omega^2 = kg$, где k — коэффициент виброперегрузки.

Динамика рабочей жидкости в двумерном случае описывается системой уравнений Навье – Стокса и неразрывности [4, 5]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \\ \psi^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right], \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$



во введенных для рассматриваемой задачи безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\delta_0}{\ell} \gg 1, \quad \lambda = \frac{z_m}{\delta_0}, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z - h_0/2}{\delta_0}, \quad u_x = z_m \omega \frac{\ell}{\delta_0} U_\xi, \\ u_z = z_m \omega U_\zeta, \quad \text{Re} = \frac{\delta_0^2 \omega}{\nu} = 2\varepsilon^2, \quad p = p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P(\xi, \tau) - \rho \ddot{z}_0 (z - \delta_0 - h_0/2 - z_m). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь x, z — декартовы координаты, u_x, u_z — проекции вектора скорости жидкости на оси координат; p — давление; ρ, ν — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости; ψ, λ, Re — параметры, характеризующие задачу.

В краевых условиях системы (3) учитываем, что скорость жидкости на вибраторе и статоре совпадает с их скоростями [4, 5]

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1 + \lambda f(\tau); \quad U_\xi = \psi \frac{u_{m1}}{z_m} \frac{\partial U}{\partial \tau}, \quad U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda \frac{w_{m1}}{z_m} W, \quad (5)$$

где $u = u_m U(\xi, \tau), w = w_m W(\xi, \tau)$ — перемещения статора в направлении оси Ox и Oz соответственно.

Условие свободного истечения жидкости в направлении оси Ox и в противоположном направлении принимают вид для давления

$$P = P_1^+ \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad P = P_1^- \quad \text{при} \quad \xi = -1. \quad (6)$$

Здесь $p_1^+ = \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P_1^+(\tau), p_1^- = \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P_1^-(\tau)$ — заданные давления на торцах.

Уравнение движения вибратора опоры согласно второму закону Ньютона имеет вид

$$m_1(\ddot{z} + \ddot{z}_0) + n_1 z = N_3. \quad (7)$$

Здесь m_1 — масса вибратора, n_1 — коэффициент упругой жесткости подвеса вибратора, N_3 — сила, действующая на вибратор со стороны слоя жидкости в зазоре опоры.

Уравнение динамики упругого статора (уравнение динамики балки-полоски) имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \ddot{z}_0 \right) = q_{zz}. \quad (8)$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость, $m_0 = \rho_0 h_0, \rho_0$ — плотность материала статора, q_{zz} — напряжения, действующие на внутреннюю поверхность статора со стороны слоя жидкости.

Выражение для напряжения q_{zz} , действующего на статор со стороны жидкости в безразмерных переменных (4), запишется как

$$q_{zz} = -p_0 - \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi^2} \left(P - 2\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) + \rho \delta_0 \ddot{z}_0 (\zeta - 1 - \lambda f_z(\tau)) \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W. \quad (9)$$

Уравнения динамики статора дополняются условиями его свободного опирания на торцах:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \ell; \quad (10)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = -\ell. \quad (11)$$

Принятые при постановке задачи допущения соответствуют общепринятым для динамических задач гидроупругости и задач теории гидродинамической смазки [1–5].

Для тонкого слоя жидкости в нулевом приближении по ψ уравнения динамики жидкости и соответствующие им граничные условия упрощаются, так как в них можно положить $\psi = 0$ [1, 2]. Учитывая, что перемещения вибратора значительно меньше толщины слоя жидкости, но одного порядка с прогибами статора, проведем решение задачи методом возмущений, рассматривая асимптотическое разложение по степеням малого параметра λ , ограничиваясь при этом первым членом разложения. При этом учтем, что рассматривается задача о регулярных возмущениях, в которой последующие



члены асимптотического разложения будут значительно меньше предыдущих во всем диапазоне изменений, как независимых переменных, так и физических параметров, что показано в работах по исследованию демпфирования на тонких слоях жидкости для поплавковых приборов навигации [6]. Это указывает на адекватность предлагаемой математической модели физическим процессам уже в первом приближении по λ .

В результате получаем линеаризованные уравнения динамики тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{Re} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (12)$$

и соответствующие им граничные условия для скоростей на непроницаемых поверхностях абсолютно жесткого вибратора и упругого геометрически нерегулярного статора:

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1; \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (13)$$

а также условия для гидродинамического давления на торцах (6).

Сила, действующая на вибратор со стороны слоя жидкости, в нулевом приближении по λ и ψ определяется только нормальным напряжением и имеет вид

$$N_z = \int_0^b \int_{-1}^1 \left(p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P - \rho \delta_0 \ddot{z}_0 (\zeta - 1) \right) \ell d\xi dy \quad \text{при} \quad \zeta = 1. \quad (14)$$

Подставляя (14) в уравнение движения вибратора (7), получим

$$m_1 \ddot{z}_0 + m_1 \ddot{z} + n_1 z = 2\ell b p_0 + \frac{\ell b \rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 P d\xi. \quad (15)$$

Учитывая в уравнении движения статора опоры безразмерные переменные (4), получим в нулевом приближении по ψ и λ уравнение для определения прогиба статора:

$$-w_m \left\{ \frac{D}{\ell^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + m_0 \omega^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\ddot{z}_0}{w_m \omega^2} \right) \right\} = p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P + \rho \delta_0 \ddot{z}_0, \quad (16)$$

граничные условия которого — условия свободного опирания:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1; \quad W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = -1. \quad (17)$$

Проводя решение задачи динамики жидкости (12) с граничными условиями (13), (6) при гармоническом законе движения вибратора, найдем давление в жидкости:

$$P = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) \left[2\varepsilon^2 \alpha \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \int_0^1 \int_\xi^\xi \left(2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi + \\ + \frac{1}{2} (\xi - 1) \frac{w_m}{z_m} \int_{-1}^1 \int_0^\xi \left(2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi + \frac{1}{2} (P_1^+ + P_1^-) + \frac{1}{2} \xi (P_1^+ - P_1^-), \quad (18)$$

где α, γ — частотозависимые коэффициенты (см. [4]).

Учитывая (18) в (16), получим интегриродифференциальное уравнение динамики статора:

$$w_m \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\ell^4}{D} m_0 (\omega^2 w_m \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \ddot{z}_0 (1 + \frac{\rho \delta_0}{m_0})) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\ell^4 m_0 \omega^2}{D \psi^2} \frac{\rho \delta_0}{m_0 \text{Re}} \left\{ \left[p_0 + \frac{1}{2} \xi (p_1 - p_2) + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \right] \frac{\psi^2 z_m}{\rho \nu \lambda \omega} + \right. \\
 &+ \frac{z_m}{2} (\xi^2 - 1) \left[2 \varepsilon^2 \alpha \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12 \gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + w_m \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} \left(2 \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12 \gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi + \\
 &\left. + \frac{1}{2} (\xi - 1) w_m \int_{-1}^1 \int_0^{\xi} \left(2 \varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12 \gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi \right\}. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Прогибы статора с учетом граничных условий (19) представим в виде

$$w = w_m W = w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left((R_k^0 + R_k(\tau)) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + Q_k \sin k \pi \xi \right). \tag{20}$$

Коэффициенты в выражении для прогиба статора (20) с верхним индексом 0 являются постоянными и соответствуют постоянному уровню давления p_0 .

Подставляя (20) в (18) и раскладывая все функции от ξ , входящие в правую часть (18) в ряды по $\cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi$ и в ряды по $\sin k \pi \xi$, а затем решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение для режима установившихся гармонических колебаний, с учетом того, что $f_z(\tau) = \sin(\tau + \varphi_z)$, $(p_1^+ + p_1^-)/2 = p_m f_p(\tau) = p_m \sin(\tau + \varphi_p)$, $(p_1^+ - p_1^-)/2 = q_m f_p(\tau) = q_m \sin(\tau + \varphi_p)$, находим выражение для $Q_k(\tau)$, R_k^0 и $R_k(\tau)$:

$$\begin{aligned}
 Q_k &= \frac{2(-1)^k}{k\pi} \frac{q_m}{D w_m} \left[A_{psk} \frac{df_p}{d\tau} + B_{psk} f_p \right], & R_k^0 &= \left(\frac{2\ell}{(2k-1)\pi} \right)^4 \frac{p_0}{D w_m} \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi}, \\
 R_k &= \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left\{ \frac{z_m}{w_m} \left[A_{ck} \frac{df_z}{d\tau} + B_{ck} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} \right] + \frac{p_m}{D w_m} \left[A_{pck} \frac{df_p}{d\tau} + B_{pck} f_p \right] + \right. \\
 &\left. + m_0^* \omega^2 \frac{E_z}{D w_m} \left[-A_{pck} \frac{df_0}{d\tau} + B_{pck} \frac{d^2 f_0}{d\tau^2} \right] \right\}, \tag{21}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{psk} &= -\frac{a_{2sk}}{a_{1sk}^2 + a_{2sk}^2}, & B_{psk} &= \frac{a_{1sk}}{a_{1sk}^2 + a_{2sk}^2}, & A_{ck} &= \frac{a_{1ck} c_{2ck} - a_{2ck} c_{1ck}}{a_{1ck}^2 + a_{2ck}^2}, \\
 B_{ck} &= -\frac{a_{1ck} c_{1ck} + a_{2ck} c_{2ck}}{a_{1ck}^2 + a_{2ck}^2}, & A_{pck} &= -\frac{a_{2ck}}{a_{1ck}^2 + a_{2ck}^2}, & B_{pck} &= \frac{a_{1ck}}{a_{1ck}^2 + a_{2ck}^2}, \\
 m_0^* &= (m_0 + \rho h_0), & a_{1sk} &= \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^4 - D^{-1} [m_0 + M_{sk}] \omega^2, & a_{2sk} &= D^{-1} 2K_{sk} \omega, \\
 a_{1ck} &= \left(\frac{2k-1}{2\ell} \pi \right)^4 - D^{-1} [m_0 + M_{ck}] \omega^2, & a_{2ck} &= D^{-1} 2K_{ck} \omega, & c_{1ck} &= D^{-1} M_{ck} \omega^2, \\
 c_{2ck} &= -D^{-1} 2K_{ck} \omega, & M_{sk} &= \frac{\rho \nu \omega}{h_0 \psi^2} \left[\frac{1}{k\pi} \right]^2 \frac{2\varepsilon^2 \alpha}{\omega^2}, & 2K_{sk} &= \frac{12 \gamma \omega}{2\varepsilon^2 \alpha} M_{sk}, \\
 M_{ck} &= \frac{\rho \nu \omega}{h_0 \psi^2} \left[\frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^2 \frac{2\varepsilon^2 \alpha}{\omega^2}, & 2K_{ck} &= \frac{12 \gamma \omega}{2\varepsilon^2 \alpha} M_{ck}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, прогиб статора с учетом (21) имеет вид

$$\begin{aligned}
 w &= w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left\{ \left(\frac{2\ell}{(2k-1)\pi} \right)^4 \frac{p_0}{D w_m} + \frac{z_m}{w_m} \left[A_{ck} \frac{df_z}{d\tau} + B_{ck} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} \right] + \right. \right. \\
 &+ \frac{p_m}{D w_m} \left[A_{pck} \frac{df_p}{d\tau} + B_{pck} f_p \right] + m_0^* \omega^2 \frac{E_z}{D w_m} \left[-A_{pck} \frac{df_0}{d\tau} + B_{pck} \frac{d^2 f_0}{d\tau^2} \right] \left. \right\} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + \\
 &\left. + \frac{2(-1)^k}{k\pi} \frac{q_m}{D w_m} \left[A_{psk} \frac{df_p}{d\tau} + B_{psk} f_p \right] \sin k \pi \xi \right\rangle. \tag{22}
 \end{aligned}$$



Осуществляя подстановку выражения для давления (18) с учетом выражения (22) в уравнение динамики вибратора (15), получим

$$(m_1 + M_z) \ddot{z} + 2K_z \dot{z} + n_1 z = 2\ell b \left(p_0 + \frac{1}{2}(1 + M_p)(p_1^+ + p_1^-) + \frac{1}{2}T_p(\dot{p}_1^+ + \dot{p}_1^-) \right) - M_{z0} \ddot{z}_0 - 2K_{z0} \dot{z}_0. \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_z \omega^2 &= 2\ell b \frac{\rho\nu\omega}{\delta_0\psi^2} \left[\frac{2\varepsilon^2\alpha}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^4 (12\gamma A_{ck} - 2\varepsilon^2\alpha B_{ck}) \right], \\ 2K_z \omega &= 2\ell b \frac{\rho\nu\omega}{\delta_0\psi^2} \left[4\gamma - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^4 (12\gamma B_{ck} + A_{ck}2\varepsilon^2\alpha) \right], \\ M_p &= \frac{\rho\nu\omega}{D\delta_0\psi^2} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^4 \left[2\varepsilon^2\alpha B_{pck} + 12\gamma A_{pck} \right], \\ T_p \omega &= \frac{\rho\nu\omega}{D\delta_0\psi^2} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^4 \left[2\varepsilon^2\alpha A_{pck} - 12\gamma B_{pck} \right], \\ M_{z0} &= m_0^* 2\ell b \frac{\rho\nu\omega}{D\delta_0\psi^2} \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^4 (-2\varepsilon^2\alpha B_{pck} - 12\gamma A_{pck}) \right], \\ 2K_{z0} &= m_0^* 2\ell b \frac{\rho\nu\omega^2}{D\delta_0\psi^2} \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^4 (A_{pck}2\varepsilon^2\alpha - 12\gamma B_{pck}) \right]. \end{aligned}$$

Решение уравнения (23), соответствующее заданному гармоническому закону пульсации давления в жидкости и гармоническому закону виброускорения основания, имеет вид

$$z = h_0 + z_m f_z(\tau) = \frac{2\ell b}{n_1} p_0 + p_m \Pi_{zp}(\omega) \sin(\tau + \varphi_p + \Psi_p) + E_z \omega^2 \Pi_{z0}(\omega) \sin(\tau + \varphi_0 + \Psi_0). \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Pi_{zp}(\omega) &= \frac{2\ell b \sqrt{Q_{cp}^2 + Q_{sp}^2}}{n_1}, & \Psi_p &= \arctg \frac{Q_{cp}}{Q_{sp}}, & \Pi_{z0}(\omega) &= \frac{\sqrt{Q_{c0}^2 + Q_{s0}^2}}{n_1 \omega^2}, & \Psi_{p0} &= -\arctg \frac{Q_{s0}}{Q_{c0}}, \\ Q_{cp} &= \frac{\bar{a}_1 \bar{c}_2 - \bar{a}_2 \bar{c}_1}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}, & Q_{sp} &= \frac{\bar{a}_2 \bar{c}_2 + \bar{a}_1 \bar{c}_1}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}, & \bar{a}_1 &= \frac{n_1 - [m_1 + M_z] \omega^2}{n_1}, & Q_{c0} &= \frac{\bar{a}_1 \bar{c}_{20} - \bar{a}_2 \bar{c}_{10}}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}, \\ Q_{s0} &= -\frac{\bar{a}_2 \bar{c}_{20} + \bar{a}_1 \bar{c}_{10}}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}, & \bar{c}_{10} &= (M_{z0} + m_1) \omega^2, & \bar{c}_{20} &= -2K_{z0} \omega, & \bar{a}_2 &= \frac{2K_z \omega}{n_1}, \\ & & \bar{c}_1 &= (1 + M_p), & \bar{c}_2 &= T_p \omega. \end{aligned}$$

Таким образом, определены амплитудные частотные характеристики $\Pi_{zp}(\omega)$, $\Pi_{z0}(\omega)$ и фазовые частотные характеристики Ψ_p , Ψ_{p0} вибратора опоры на пульсации давления на торцах и виброускорение основания.

Учитывая закон движения вибратора (24) в прогибе статора (22), закон движения упругого статора можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left\{ \left(\frac{2\ell}{(2k-1)\pi} \right)^4 D^{-1} p_0 + p_m \Pi_{wpc}(\omega) \sin(\tau + \varphi_p + \Psi_{wpc}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E_z \omega^2 \Pi_{w0c}(\omega) \sin(\tau + \varphi_0 + \Psi_{w0c}) \right\} \cos \left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{\ell} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(-1)^k}{k\pi} q_m \Pi_{wps}(\omega) \sin(\tau + \varphi_p + \Psi_{wps}) \sin k\pi\xi, \right. \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\Pi_{wpc}(\omega) = D^{-1} \sqrt{\left(A_{pck} + \frac{D2\ell b [A_{ck} Q_{sp} - B_{ck} Q_{cp}]}{n_1} \right)^2 + \left(B_{pck} - \frac{D2\ell b [A_{ck} Q_{cp} + B_{ck} Q_{sp}]}{n_1} \right)^2},$$



$$\Pi_{w0c}(\omega) = m_0^* D^{-1} \sqrt{\left(A_{psc} + \frac{D[A_{ck}Q_{so} + B_{ck}Q_{co}]}{n_1 m_0^* \omega^2} \right)^2 + \left(B_{psc} + \frac{D[A_{ck}Q_{co} - B_{ck}Q_{so}]}{n_1 m_0^* \omega^2} \right)^2},$$

$\Pi_{wps}(\omega) = D^{-1} \sqrt{A_{psk}^2 + B_{psk}^2}$ — амплитудные частотные характеристики упругого статора демпфера,

$$\Psi_{wpc} = \arctg \frac{A_{psc} + \frac{D2lb}{n_1} [A_{ck}Q_{sp} - B_{ck}Q_{cp}]}{B_{psc} - \frac{D2lb}{n_1} [A_{ck}Q_{cp} + B_{ck}Q_{sp}]}, \quad \Psi_{w0c} = \arctg \frac{A_{psc} + \frac{D}{n_1 m_0^* \omega^2} (A_{ck}Q_{so} + B_{ck}Q_{co})}{B_{psc} + \frac{D}{n_1 m_0^* \omega^2} [A_{ck}Q_{co} - B_{ck}Q_{so}]},$$

$\Psi_{wps} = \arctg \frac{A_{psk}}{B_{psk}}$ — фазовые частотные характеристики упругого статора демпфера.

Таким образом, найдено решение динамической задачи гидроупругости гидропоры, которое позволяет исследовать ее динамику и находить резонансные частоты колебаний ее вибратора и статора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00177-а).

Библиографический список

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
3. Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. М.: Машиностроение, 1987. 126 с.
4. Попов В.С. Динамическая задача гидроупругости вибропоры с пластиной подкрепленной ребрами жесткости // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2008. № 3, вып.1. С. 7–13.
5. Гориков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
6. Коновалов С.В. Теория виброустойчивости акселерометров. М.: Машиностроение, 1991. 272 с.

УДК 531/534:[57+61]

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ СТРУКТУРНОЙ АДАПТАЦИИ КОСТНОЙ ТКАНИ

Ю.В. Акулич, П.А. Брюханов, М.В. Мерзляков, А.В. Сотин

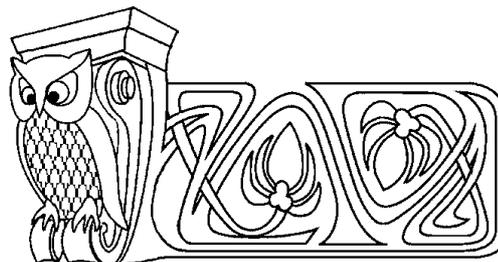
Пермский государственный технический университет, кафедра теоретической механики
E-mail: Y.Akulich@yandex.ru, auv@cpl.pstu.ac.ru, sotin@mail.ru

Для кортикальной и трабекулярной костной ткани предлагаются определяющие соотношения функциональной адаптации структуры, устанавливающие связь скорости изменения радиуса пор с деформационным стимулом адаптации и активностью костных клеток. Развитый подход учёта клеточной активности является альтернативой известному экспериментальному методу Frost'a базовых многоклеточных единиц и позволяет распространить клеточный механизм ремоделирования на процесс функциональной адаптации.

Ключевые слова: костная ткань, структурная адаптация, определяющее соотношение, деформационный стимул, активность костных клеток.

ВВЕДЕНИЕ

В первых работах по теории адаптационной пороупругости, использующих термодинамический подход, определяющее соотношение функциональной адаптации структуры костной ткани (закон ремоделирования в зарубежных публикациях) получено в виде кинетического уравнения [1]:



The Constitutive Equations for the Bone Tissue Structural Adaptation

Yu.V. Akulich, P.A. Bruchanov, M.V. Merzlyakov, A.V. Sotin

Perm State Technical University,
Chair of Theoretical Mechanics
E-mail: Y.Akulich@yandex.ru, auv@cpl.pstu.ac.ru, sotin@mail.ru

The constitutive relationships for cortical and trabecular bone tissue structural adaptation are offered. These constitutive equations connect the rate of change of the porous radius with the strain adaptive stimulus and the bone cells activation. The used approach takes account of bone cells activation and it is alternative to the known experimental Frost's Basic Multicellular Units method. That approach allows spreading the cellular remodeling mechanism on the functional adaptation process.

Key words: bone tissue, structural adaptation, constitutive relationship, strain stimulus, bone cells activation.