



МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Э.Н. Ахмедова, И.М. Гусейнов*

Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку,
отдел функционального анализа
E-mail: aesmira@mail.ru

*Бакинский государственный университет,
кафедра прикладной математики
E-mail: hmhuseynov@gmail.com

В работе доказана единственность восстановления оператора Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами по спектральным данным и дан алгоритм построения потенциала.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Штурма – Лиувилля, собственные значения.

On Inverse Problem for Sturm – Liouville Operator with Discontinuous Coefficients

E.N. Akhmedova, H.M. Huseynov*

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku,
Department of Functional Analysis
E-mail: aesmira@mail.ru

*Baku State University,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: hmhuseynov@gmail.com

In the paper uniqueness of reconstruction of the Sturm – Liouville operator with discontinuous coefficients by spectral data is proved and algorithm of construction of the potential is provided.

Key words: inverse problem, Sturm – Liouville operator, eigenvalues.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим граничную задачу, порожденную на отрезке $[0, \pi]$ уравнением

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y \quad (1)$$

и граничными условиями

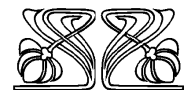
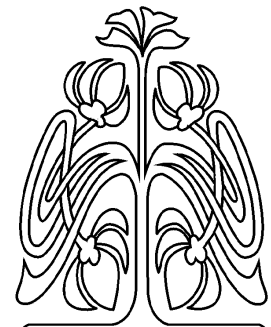
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q(x) \in L_2(0, \pi)$ — вещественнозначная функция, λ — комплексный параметр, а $\rho(x)$ — кусочно-постоянная функция:

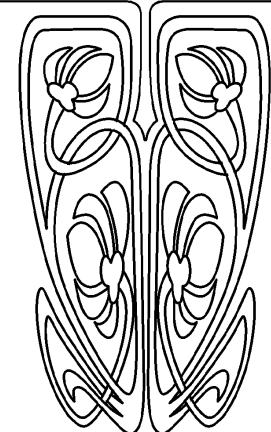
$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a, \\ \alpha^2, & a < x \leq \pi, \end{cases} \quad 0 < \alpha \neq 1. \quad (3)$$

В настоящей работе, используя аппарат операторов преобразования, доказана единственность определения граничной задачи (1)–(3) по заданным собственным значениям и нормировочным числам, дан алгоритм построения функции $q(x)$ по спектральным данным.

Единственности восстановления граничной задачи (1)–(3) по функции Вейля посвящена работа [1]. Обратная задача рассеяния



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





для уравнения (1) на полуоси с условием $y(0) = 0$ изучена в работах [2, 3]. Обзор работ, посвященных прямым и обратным задачам для уравнения вида (1) с различными условиями на $\rho(x)$, приведен в книге [4].

В случае $\rho(x) \equiv 1$ полные решения прямых и обратных задач в различных постановках хорошо известны (см. [4–6]).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В дальнейшем нам потребуется несколько вспомогательных утверждений (см. [7, 8]).

Теорема 1. Если $q(x) \in L_2(0, \pi)$, то при всех λ уравнение (1) имеет единственное решение $s(x, \lambda)$, удовлетворяющее условиям $s(0, \lambda) = 0, s'(0, \lambda) = 1$, представимое в виде

$$s(x, \lambda) = s_0(x, \lambda) + \int_0^{\mu^+(x)} A(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad (4)$$

где

$$s_0(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) \frac{\sin \lambda \mu^+(x)}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) \frac{\sin \lambda (2a - \mu^+(x))}{\lambda}$$

— решение уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$ с начальными условиями $s_0(0, \lambda) = 0, s'_0(0, \lambda) = 1$,

$$\mu^+(x) = x\sqrt{\rho(x)} + a(1 - \sqrt{\rho(x)}),$$

причем ядро $A(x, \cdot)$ принадлежит пространству $L_2(0, \mu^+(x))$. Функция $A(x, t)$ непрерывна, имеет частные производные в области $t \neq 2a - \mu^+(x)$ и

$$\frac{d}{dx} A(x, \mu^+(x)) = \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) q(x), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \{ A(x, 2a - \mu^+(x) + 0) - A(x, 2a - \mu^+(x) - 0) \} = \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) q(x). \quad (6)$$

Отметим, что при доказательстве теоремы 1 для определенности предполагалось, что выполняется условие $a(1+\alpha) > \pi\alpha$. Эта теорема справедлива и в общем случае, однако кроме линии $t = 2a - \mu^+(x)$ появляются и другие линии разрыва у функции $A(x, t)$.

Лемма 1. Корни λ_n^0 функции $\Delta_0(\lambda) = s_0(\pi, \lambda)$ отделены, т.е. $\inf_{n \neq k} |\lambda_n^0 - \lambda_k^0| > 0$.

Лемма 2. Существует постоянное $m > 0$, такое что при всех n

$$\lambda_n^0 \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0) \geq m \quad \left(\dot{\Delta}_0(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \Delta_0(\lambda) \right).$$

Теорема 2. а) граничная задача (1)–(3) имеет счетное множество простых собственных значений $\{\lambda_n^2\}_{n \geq 1}$. При этом

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{k_n}{n},$$

где λ_n^0 — нули функции

$$\Delta_0(\lambda) \equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\sin \lambda (\alpha\pi - \alpha a + a)}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\sin \lambda (-\alpha\pi + \alpha a + a)}{\lambda}$$

(т.е. $(\lambda_n^0)^2$ — собственные значения задачи (1)–(3) в случае $q(x) \equiv 0$), d_n — ограниченная последовательность:

$$d_n = \frac{1}{4\lambda_n^0 \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)} \left[\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \right) q(t) dt \times \cos \lambda_n^0 (\alpha\pi - \alpha a + a) - \right.$$



$$\left. - \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \right) q(t) dt \times \cos \lambda_n^0 (-\alpha\pi + \alpha a + a) \right],$$

$\{k_n\} \in l_2$;

b) собственные функции задачи (1)–(3) представимы в виде

$$s(x, \lambda_n) = s_0(x, \lambda_n^0) + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \leq C;$$

c) нормировочные числа $\alpha_n = \int_0^{\pi} \rho(x) s^2(x, \lambda_n) dx$ задачи (1)–(3) имеют вид

$$\alpha_n = \alpha_n^0 + \frac{t_n}{n},$$

где $\alpha_n^0 = \int_0^{\pi} \rho(x) s_0^2(x, \lambda_n^0) dx$ — нормировочные числа задачи (1)–(3) при $q(x) \equiv 0$, $\{t_n\} \in l_2$.

Теорема 3. 1) система собственных функций $\{s(x, \lambda_n)\}_{n \geq 1}$ граничной задачи (1)–(3) полна в $L_2(0, \pi; \rho)$;

2) если $f(x)$ — абсолютно непрерывная функция на отрезке $[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s(x, \lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) s(t, \lambda_n) dt,$$

причем ряд сходится равномерно на $[0, \pi]$;

3) для $f(x) \in L_2(0, \pi; \rho)$ ряд из 2) сходится в $L_2(0, \pi; \rho)$, причем имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_0^{\pi} \rho(x) |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |a_n|^2.$$

Лемма 3. Система функций $\{s_0(x, \lambda_n)\}_{n \geq 1}$ полна в пространстве $L_2(0, \pi; \rho)$.

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Под обратной задачей для граничной задачи (1)–(3) будем понимать восстановление функции $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n^2, \alpha_n\}_{n \geq 1}$.

Сначала мы покажем, что для решения $s(x, \lambda)$ существует треугольное представление:

$$s(x, \lambda) = s_0(x, \lambda) + \int_0^x \tilde{A}(x, t) s_0(t, \lambda) dt. \quad (7)$$

При $x < a$ это очевидно. Теперь пусть $x > a$. Тогда

$$s_0(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\sin \lambda(\alpha x - \alpha a + a)}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\sin \lambda(-\alpha x + \alpha a + a)}{\lambda}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin \lambda(\alpha x - \alpha a + a)}{\lambda} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} s_0(x, \lambda) + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} s_0(-\alpha x + \alpha a + a, \lambda).$$

Следовательно, при $x > a$ из представления (4) имеем:

$$\begin{aligned} s(x, \lambda) &= s_0(x, \lambda) + \int_0^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = s_0(x, \lambda) + \int_0^a A(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt + \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \\ &= s_0(x, \lambda) + \int_0^a A(x, t) s_0(t, \lambda) dt + \alpha \int_a^x A(x, \alpha t - \alpha a + a) \frac{\sin \lambda(\alpha t - \alpha a + a)}{\lambda} dt = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= s_0(x, \lambda) + \int_0^a A(x, t) s_0(t, \lambda) dt + \\
 &+ \alpha \int_a^x A(x, \alpha t - \alpha a + a) \left[\frac{2\alpha}{1+\alpha} s_0(t, \lambda) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} s_0(-\alpha t + \alpha a + a, \lambda) \right] dt = \\
 &= s_0(x, \lambda) + \int_0^a A(x, t) s_0(t, \lambda) dt + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha} \int_a^x A(x, \alpha t - \alpha a + a) s_0(t, \lambda) dt + \\
 &\quad + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^a A(x, 2a - t) s_0(t, \lambda) dt.
 \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо представление (7), где

$$\tilde{A}(x, t) = \begin{cases} A(x, t), & 0 < t < x < a, \\ A(x, t), & x > a, \quad 0 < t < -\alpha x + \alpha a + a, \\ A(x, t) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} A(x, 2a - t), & -\alpha x + \alpha a + a < t < a < x, \\ \frac{2\alpha^2}{1+\alpha} A(x, \alpha t - \alpha a + a), & a < t < x. \end{cases}$$

Используя (5)–(6), нетрудно показать, что функция $\tilde{A}(x, t)$ непрерывна при $t = 2a - \mu^+(x)$ и

$$\frac{d}{dx} \tilde{A}(x, x) = \frac{1}{2} q(x). \tag{8}$$

Теорема 4. При каждом фиксированном $x \in (0, \pi]$ ядро $\tilde{A}(x, t)$ из представления (7) удовлетворяет линейному интегральному уравнению:

$$\tilde{A}(x, t) + F(x, t) + \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) F(\xi, t) d\xi = 0, \quad 0 < t < x, \tag{9}$$

где

$$F(x, t) = \rho(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s_0(t, \lambda_n) s_0(x, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(t, \lambda_n^0) s_0(x, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right). \tag{10}$$

Доказательство. Из (4) имеем:

$$s_0(x, \lambda) = s(x, \lambda) + \int_0^x B(x, t) s(t, \lambda) dt. \tag{11}$$

Используя (7) и (11), имеем:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{s(x, \lambda_n) s_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{s_0(x, \lambda_n) s_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} + \frac{s_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) s_0(\xi, \lambda_n) d\xi \right), \\
 \sum_{n=1}^N \frac{s(x, \lambda_n) s_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{s(x, \lambda_n) s(t, \lambda_n)}{\alpha_n} + \frac{s(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^t B(t, \xi) s(\xi, \lambda_n) d\xi \right).
 \end{aligned}$$

Сравнивая последние равенства получаем

$$\Phi_N(x, t) = I_{N1}(x, t) + I_{N2}(x, t) + I_{N3}(x, t) + I_{N4}(x, t),$$

где

$$\Phi_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{s(x, \lambda_n) s(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(x, \lambda_n^0) s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right),$$



$$\begin{aligned}
 I_{N1}(x, t) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{s_0(x, \lambda_n) s_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(x, \lambda_n^0) s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right), \\
 I_{N2}(x, t) &= \sum_{n=1}^N \frac{s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) s_0(\xi, \lambda_n^0) d\xi, \\
 I_{N3}(x, t) &= \sum_{n=1}^N \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) \left(\frac{s_0(t, \lambda_n) s_0(\xi, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(t, \lambda_n^0) s_0(\xi, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) d\xi, \\
 I_{N4}(x, t) &= - \sum_{n=1}^N \frac{s(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^t B(t, \xi) s(\xi, \lambda_n) d\xi.
 \end{aligned}$$

Пусть $f(x) \in AC[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$. Согласно теореме о разложении по собственным функциям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \frac{s(x, \lambda_n) s(t, \lambda_n)}{\alpha_n} dt = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \frac{s_0(x, \lambda_n^0) s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} dt = f(x). \quad (12)$$

Используя (12), вычисляем:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \Phi_N(x, t) dt \right| = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \sum_{n=1}^N \left(\frac{s(x, \lambda_n) s(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(x, \lambda_n^0) s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) dt \right| \leq \\
 &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \sum_{n=1}^N \frac{s(x, \lambda_n) s(t, \lambda_n)}{\alpha_n} dt - f(x) \right| + \right. \\
 &\left. + \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \sum_{n=1}^N \frac{s_0(x, \lambda_n^0) s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} dt - f(x) \right| \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Кроме того, равномерно по $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) I_{N1}(x, t) dt = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \sum_{n=1}^N \left(\frac{s_0(x, \lambda_n) s_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(x, \lambda_n^0) s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) dt = \int_0^{\pi} f(t) F(x, t) dt, \\
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) I_{N2}(x, t) dt = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \sum_{n=1}^N \frac{s_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) s_0(\xi, \lambda_n^0) d\xi dt = \int_0^x f(t) \tilde{A}(x, t) dt, \\
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) I_{N3}(x, t) dt = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \rho(t) f(t) \sum_{n=1}^N \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) \left(\frac{s_0(t, \lambda_n) s_0(\xi, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(t, \lambda_n^0) s_0(\xi, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) d\xi dt =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi f(t) \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) F(\xi, t) d\xi dt, \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi \rho(t) f(t) I_{N4}(x, t) dt &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi \rho(t) f(t) \sum_{n=1}^N \frac{s(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^t B(t, \xi) s(\xi, \lambda_n) d\xi dt = \\
 &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{s(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^\pi s(\xi, \lambda_n) \rho(\xi) \left(\frac{1}{\rho(\xi)} \int_\xi^\pi \rho(t) f(t) B(t, \xi) dt \right) d\xi = - \frac{1}{\rho(x)} \int_x^\pi \rho(t) f(t) B(t, x) dt.
 \end{aligned}$$

Доопределив $\tilde{A}(x, t) = B(x, t) = 0$ при $x < t$, в силу произвольности $f(x)$ приходим к соотношению

$$\tilde{A}(x, t) + F(x, t) + \int_0^x \tilde{A}(x, \xi) F(\xi, t) d\xi - \frac{\rho(t)}{\rho(x)} B(t, x) = 0.$$

При $t < x$ отсюда получаем (9). Теорема доказана.

Теорема 5. При каждом фиксированном $x \in (0, \pi]$ уравнение (9) имеет единственное решение $\tilde{A}(x, \cdot)$ в $L_2(0, x)$.

Доказательство. Так как (9) является уравнением Фредгольма второго рода, то для доказательства теоремы достаточно показать, что уравнение

$$\tilde{A}(t) + \int_0^x \tilde{A}(\xi) F(\xi, t) d\xi = 0 \tag{13}$$

имеет только нулевое решение $\tilde{A}(t) = 0$.

Пусть $\tilde{A}(t)$ — ненулевое решение уравнения (13). Тогда

$$\int_0^x \rho(t) \tilde{A}^2(t) dt + \int_0^x \int_0^x \rho(t) \tilde{A}(t) \tilde{A}(\xi) F(\xi, t) d\xi dt = 0,$$

или

$$\int_0^x \rho(t) \tilde{A}^2(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^x \rho(t) \tilde{A}(t) s_0(t, \lambda_n) dt \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \left(\int_0^x \rho(t) \tilde{A}(t) s_0(t, \lambda_n^0) dt \right)^2 = 0.$$

Учитывая равенство Парсеваля

$$\int_0^x \rho(t) f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \left(\int_0^x \rho(t) f(t) s_0(t, \lambda_n^0) dt \right)^2$$

для функции $f(t) = \tilde{A}(t) \in L_2(0, x)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^x \rho(t) \tilde{A}(t) s_0(t, \lambda_n) dt \right)^2 = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_0^x \rho(t) \tilde{A}(t) s_0(t, \lambda_n) dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Отсюда в силу леммы 3 получаем, что $\tilde{A}(t) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. Граничная задача (1)–(3) однозначно определяется по спектральным данным $\{\lambda_n^2, \alpha_n\}_{n \geq 1}$.



Следующий алгоритм позволяет построить функцию $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n^2, \alpha_n\}_{n \geq 1}$.

Алгоритм. 1. По заданным числам $\{\lambda_n^2, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ строится функция $F(x, t)$ по формуле (10).

2. Находится функция $\tilde{A}(x, t)$ из уравнения (9).

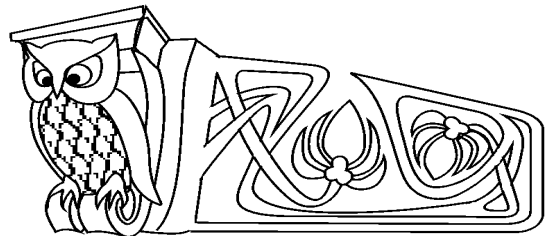
3. Вычисляется $q(x)$ по формуле (8).

Библиографический список

1. Akhmedova E.N. The definition of one class of Sturm – Liouville operators with discontinuous coefficients by Weyl function // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan. 2005. V. XXII (XXX). P. 3–8.
2. Гасымов М.Г. Прямые и обратные задачи спектрального анализа для одного класса уравнений с разрывными коэффициентами // Неклассические методы в геофизике: Материалы Междунар. конф. Новосибирск, 1977. С. 37–44.
3. Гусейнов И.М., Пашаев Р.Т. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка // УМН. 2002. Т. 57, № 3. С. 147–148.
4. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М., 2007. 384 с.
5. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального оператора по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19, вып. 2. С. 3–63.
6. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев, 1977. 331 с.
7. Akhmedova E.N. On representation of solution of Sturm – Liouville equation with discontinuous coefficients // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan. 2002. V. XVI (XXIV). P. 5–9.
8. Akhmedova E.N., Huseynov H.M. On eigenvalues and eigenfunctions of one class of Sturm – Liouville operators with discontinuous coefficients // Transactions of NAS of Azerbaijan. 2003. V. XXIII, № 4. P. 7–18.

УДК 517.51

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ В ТОЧКЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ЛАГРАНЖА



Л.В. Борисова, А.В. Шаталина

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: ShatalinaAV@info.sgu.ru

Получен аналог признака Р. Салема для тригонометрического интерполяционного процесса Лагранжа по матрице равноотстоящих узлов.

Ключевые слова: интерполирование, интерполяционный процесс, равноотстоящие узлы, сходимости в точке.

The Problem of Convergence in Point Trigonometric Interpolation Process of Lagrange

L.V. Borisova, A.V. Shatalina

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: ShatalinaAV@info.sgu.ru

An analogue of the characteristic of R. Salem is obtained for a trigonometric Lagrange interpolation process on the matrix of equally spaced nodes.

Key words: interpolation process, equidistant nodes, convergence at point.

Один из основных вопросов теории интерполирования состоит в выяснении для данной матрицы M узлов интерполирования условий на функцию $f \in C$, обеспечивающих равномерную или поточечную сходимости интерполяционного процесса Лагранжа $\{Z_n(M, f, x)\}$. Признаком сходимости интерполяционных процессов Лагранжа, построенных для конкретных матриц, посвящено большое количество работ. Укажем работы С.Н. Бернштейна [1], Д.Л. Бермана [2], Г.Н. Неваи [3], А.А. Привалова [4].

В данной работе получен аналог признака Р. Салема [5] для тригонометрического интерполяционного процесса Лагранжа по матрице равноотстоящих узлов в точке $x \in [-\pi; \pi]$.

Пусть $M^T = \{t_{k,n}\}$, $t_{k,n} = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $-n \leq k \leq n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ – матрица равноотстоящих узлов интерполирования на $[-\pi; \pi]$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $f \in C_{2\pi}$ тригонометрический интерполяционный многочлен $T_n(x, f)$ в точке $x \in [-\pi; \pi]$ запишем в виде

$$T_n(x, f) = \sum_{k=-n}^n f_{k,n} \frac{\sin(m_n(t_{k,n} - x))}{2m_n \sin \frac{t_{k,n} - x}{2}}, \quad (1)$$

где $m_n = n + 1/2$ и $f_{k,n} = f(t_{k,n})$.