



ИНФОРМАТИКА

УДК 629.78

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Д. К. Андрейченко¹, К. П. Андрейченко², В. В. Кононов³

¹Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kр_andreichenko@renet.ru

²Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., kр_andreichenko@renet.ru

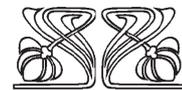
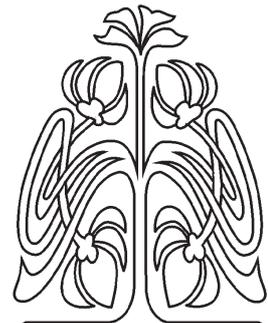
³Ассистент кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, valentin.kononov@gmail.com

На примере математического моделирования автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня развит параллельный алгоритм параметрического синтеза, позволяющий уменьшить время реагирования и ошибки стабилизации управляемых комбинированных динамических систем, некоторые конструктивные параметры которых непрерывно изменяются в фиксированном диапазоне.

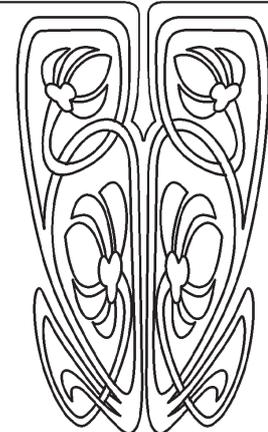
Ключевые слова: управляемые комбинированные динамические системы, математическое моделирование, параметрический синтез.

ВВЕДЕНИЕ

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой системы, связанные посредством граничных условий и условий связи обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях и служат математическими моделями ряда современных технических систем, например, автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня [1]. КДС с кусочно-непрерывной входной вектор-функцией $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{N_x}(t))^T$ и непрерывной выходной вектор-функцией $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_{N_y}(t))^T$, где $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y}$ рассмотрены в [2], и там же сформулированы и доказаны основные теоремы об устойчивости линейных и линеаризуемых КДС. Различные варианты параметрического синтеза, т. е. выбора значений параметров обратных связей управляемых КДС, обеспечивающих должное качество переходных процессов, рассмотрены в [3–5]. Выполнение параметрического синтеза требует значительных затрат машинного времени, и, следовательно, представляет интерес разработка параллельных алгоритмов параметрического синтеза. В работе [1] построены области устойчивости автономной системы стабилизации реактивного снаряда залпового огня. Однако при параметрическом синтезе системы стабилизации требуется обеспечить устойчивость и малое время регулирования для некоторого диапазона изменения угловой скорости вращения снаряда. В настоя-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





щей работе на примере системы стабилизации реактивного снаряда залпового огня с использованием стандартных средств Microsoft для параллельных вычислений на уровне задач [6], развит многопоточный алгоритм параметрического синтеза, позволяющий уменьшить время реагирования и ошибки стабилизации управляемых комбинированных динамических систем, некоторые конструктивные параметры которых изменяются в фиксированном диапазоне.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ КДС

После линеаризации и выполнения интегрального преобразования Лапласа по времени t ($f(t) \rightarrow f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt$) динамическая модель КДС представляется в виде матрицы передаточных функций $\Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ с элементами в форме квазирациональных дробей [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(\lambda) &= \Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), & \Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) &= [\Phi_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})], \\ \Phi_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) &= \frac{Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})}{D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})}, & k &= 1, 2, \dots, N_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_x, \end{aligned} \quad (1)$$

где $D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ — характеристический квазимногочлен, $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ — возмущающие квазимногочлены, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_p})^T \in \mathbb{R}^{N_p}$ — параметры обратных связей, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{N_s})^T \in \Omega_s \subset \mathbb{R}^{N_s}$ — конструктивные параметры, от которых зависят передаточные функции линеаризованной системы. Учет малой, но конечной диссипации энергии в математических моделях элементов КДС с распределенными по пространству параметрами приводит к тому, что $D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ и $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ аналитичны по λ при $\text{Re } \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$. Под обобщенной степенью характеристического квазимногочлена понимается такое $n \in \mathbb{R}$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = C_a(\mathbf{p}, \mathbf{s}), \quad 0 < |C_a(\mathbf{p}, \mathbf{s})| < \infty, \quad \text{Re } \lambda < -\infty. \quad (2)$$

Пусть $\Omega_p^{(st)} = \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}) \subset \mathbb{R}^{N_p}$ — область устойчивости КДС в пространстве параметров обратных связей \mathbf{p} при некотором фиксированном значении набора параметров \mathbf{s} . Из теорем об устойчивости КДС следует, что проверка принадлежности параметров обратных связей \mathbf{p} области устойчивости сводится к проверке условия [1]

$$\mathbf{p} \in \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}) \Rightarrow \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{n\pi}{2}. \quad (3)$$

Применение адаптивного алгоритма изменения шага частоты ω позволяет достаточно быстро вычислить левую часть условия (3) при этом требуется вычислить характеристический определитель не более чем в нескольких десятках или сотнях точек мнимой оси. Фактически, условие (3) представляет собой быстрый алгоритм проверки устойчивости КДС. Если требуется улучшить качество переходных процессов при некотором фиксированном $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$, то в этом случае целесообразно выполнить параметрический синтез [5], т.е. выбор значений параметров обратных связей, на основе минимизации функции $F: \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}_0), & \mathbf{p} \in \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}_0) \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}_0), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{s})\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})\|^{-2} \right) \int_0^{\infty} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) d\omega, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) &= \|R_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^*(\omega)\|^2 + c_1 \|R_A'(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A'^*(\omega)\|^2 + \\ &+ c_2 \|R_A''(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A''^*(\omega)\|^2, \quad (\cdot)' = d(\cdot)/d\omega, \\ R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) &= \begin{cases} \text{Re } \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} \text{Re } [\Psi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s})], & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$



$$R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} (1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2}(1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})|^2 \right]^{1/2},$$

$$\Psi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \Phi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})/\lambda, \quad \nu = 1, 2, \dots, N_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_x,$$

\mathbf{p}_0 — набор параметров обратных связей в момент старта параметрического синтеза, t_0 — желаемое время регулирования. Поскольку функция (4) является негладкой, а размерность N_p пространства параметров обратных связей обычно не превышает нескольких десятков, для минимизации (4) обычно используется безградиентный метод Нелдера–Мида [7]. Пусть, далее,

$$\Omega^{(st)} = \bigcap_{\mathbf{s} \in \Omega_s} \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}) \quad (7)$$

— пересечение областей устойчивости. Проверка принадлежности параметров обратных связей сводится к проверке условий (3), поскольку

$$\mathbf{p} \in \Omega^{(st)} \iff \forall \mathbf{s} \in \Omega_s \quad \mathbf{p} \in \Omega_p^{(st)}(\mathbf{s}). \quad (8)$$

В ряде случаев требуется реализовать выбор параметров обратных связей \mathbf{p} так, чтобы улучшить качество переходных процессов для всех значений конструктивных параметров $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{N_s})^T \in \Omega_s$. Например, при проектировании автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня требуется обеспечить устойчивость и малое время регулирования для некоторого диапазона изменения угловой скорости вращения снаряда. В данном случае обобщением (4) служит вариант параметрического синтеза, основанный на минимизации функции:

$$F: \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \int_{\Omega_s} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds_1 \dots ds_{N_s}, & \mathbf{p} \in \Omega^{(st)}, \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega^{(st)}, \end{cases} \quad (9)$$

где функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ определена согласно (5). Поскольку целевая функция (9) является негладкой, а размерность N_p пространства параметров обратных связей не превышает нескольких десятков, для минимизации (9) также целесообразно использовать безградиентный метод Нелдера–Мида. При выполнении параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации областей устойчивости, необходимо лишь, чтобы при старте параметрического синтеза начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости: $\mathbf{p}_0 \in \Omega^{(st)}$.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Рассмотрим возможности распараллеливания вычислений при выполнении параметрического синтеза на основе (9). Проверка входящего в (9) условия (8) сводится к проверкам условий (3) при различных фиксированных значениях $\mathbf{s} \in \Omega_s$, которые могут быть выполнены независимо. Поскольку при проверке условия (3) используется адаптивный алгоритм изменения шага частоты ω , априорно оценить время выполнения проверки (3) невозможно. Более того, вычисление какого-либо характеристического определителя $D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ требует решения некоторой вспомогательной краевой задачи, которое может выполняться на основе различных алгоритмов в различных диапазонах изменения параметра λ . При этом нарушение любого из условий (3) означает завершение проверки условия (8). Следовательно, распараллеливание проверки условия (8) целесообразно выполнять на основе создания набора задач, каждая из которых связывается с проверкой условия (3) и запускается на выполнение на свободном в текущий момент времени вычислителе (процессоре, ядре процессора и т.д.). В зависимости от величин параметров \mathbf{p} и \mathbf{s} , величина $f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega)$, рассматриваемая как функция частоты ω , может характеризоваться высокими достаточно узкими пиками. Следовательно, при численном интегрировании в (5) требуется использовать адаптивные методы численного интегрирования, например, на основе адаптивных вариантов метода Гаусса, и невозможно априорно оценить характерное время



вычисления значений $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ на основе (5). Более того, вычисление $f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega)$ согласно (6) требует решения вспомогательной линейной краевой задачи, которое может выполняться на основе различных алгоритмов в различных диапазонах изменения параметра ω . С другой стороны, при $\mathbf{p} \in \Omega^{(st)}$ функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ будет достаточно гладкой функцией своих аргументов, и при выполнении численно-интегрирования в (9) достаточно ограничиться некоторой квадратурной формулой с постоянным числом узлов, т. е.

$$\int_{\Omega_s} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds_1 \dots ds_{N_s} \approx \sum_{j=1}^{N_s} C_j f(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j). \quad (10)$$

Например, при $\mathbf{s} = \{s\}$, $\Omega_s = [s_{\min}, s_{\max}]$

$$\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} f(\mathbf{p}, s) ds \approx \frac{s_{\max} - s_{\min}}{6N_\Omega} \left[f(\mathbf{p}, s_{\min}) + f(\mathbf{p}, s_{\max}) + 4 \sum_{j=0}^{N_\Omega-1} f(\mathbf{p}, s_{2j+1}) + 2 \sum_{j=1}^{N_\Omega-1} f(\mathbf{p}, s_{2j}) \right],$$

$$s_j = s_{\min} + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2N_\Omega} j. \quad (11)$$

Следовательно, при вычислении (10) целесообразно создать набор задач, связанных с вычислением значений $f(\mathbf{p}, s_j)$ и запускаемых на выполнение на свободном в текущий момент времени вычислителе (процессоре, ядре процессора и т.д.).

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

В качестве примера рассмотрим задачу параметрического синтеза автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня из работы [1]. После приведения к безразмерным переменным и параметрам в пренебрежении величинами высшего порядка малости модельные уравнения автономной системы угловой стабилизации при нулевых начальных условиях принимают вид

$$\begin{aligned} \tau_0 \dot{\beta} + \beta &= -\tau_0(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2), & \tau_0 \dot{\alpha} + \alpha &= -\tau_0(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2), \\ m_1 \ddot{x}_0 - b\beta_1 &= N_{x_1} + P_{x_1}, & m_1 \ddot{y}_0 + b\alpha_1 &= N_{y_1} + P_{y_1}, \\ J_1 \ddot{\beta}_1 &= L_{y_1} + \xi_1 N_{x_1}, & J_1 \ddot{\alpha}_1 &= L_{x_1} - \xi_1 N_{y_1}, \\ J_2(\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2) &= L_{y_2} - \xi_2 N_{x_2}, & J_2(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) &= L_{x_2} + \xi_2 N_{y_2}, \\ m_2[\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + (1 + \xi_1 + \xi_2)\ddot{\beta}_1] &= N_{x_2} + m_2 a_z \beta_2 + P_{x_2}, \\ m_2[\ddot{y}_0 + \ddot{y}_1 - (1 + \xi_1 + \xi_2)\ddot{\alpha}_1] &= N_{y_2} - m_2 a_z \alpha_2 + P_{y_2}, \\ P_{x_2} &= n[\beta(t - \tau) \cos(\Omega\tau - \theta) + \alpha(t - \tau) \sin(\Omega\tau - \theta)], \\ P_{y_2} &= n[\beta(t - \tau) \sin(\Omega\tau - \theta) - \alpha(t - \tau) \cos(\Omega\tau - \theta)], \\ \ddot{x} + x'''' + \gamma \dot{x}'''' + \gamma \Omega y'''' + a_z[(m_2 + 1 - z)x'' - x'] &= -\ddot{x}_0 - (z + \xi_1)\ddot{\beta}_1, \\ \ddot{y} + y'''' + \gamma \dot{y}'''' - \gamma \Omega x'''' + a_z[(m_2 + 1 - z)y'' - y'] &= -\ddot{y}_0 + (z + \xi_1)\ddot{\alpha}_1, \\ x(0, t) = y(0, t) &= 0, & x'(0, t) = y'(0, t) &= 0, \\ x(1, t) = x_1(t), & y(1, t) = y_1(t), & x'(1, t) = \beta_2(t), & y'(1, t) = -\alpha_2(t), \\ N_{x_1} = -x'''(0, t) - \gamma \dot{x}'''(0, t) - \gamma \Omega y'''(0, t), & N_{y_1} = -y'''(0, t) - \gamma \dot{y}'''(0, t) + \gamma \Omega x'''(0, t), \\ N_{x_2} = x'''(1, t) + \gamma \dot{x}'''(1, t) + \gamma \Omega y'''(1, t) & N_{y_2} = y'''(1, t) + \gamma \dot{y}'''(1, t) - \gamma \Omega x'''(1, t), \\ L_{x_1} = -y''(0, t) - \gamma \dot{y}''(0, t) + \gamma \Omega x''(0, t), & L_{y_1} = x''(0, t) + \gamma \dot{x}''(0, t) + \gamma \Omega y''(0, t), \\ L_{x_2} = y''(1, t) + \gamma \dot{y}''(1, t) - \gamma \Omega x''(1, t), & L_{y_2} = -x''(1, t) - \gamma \dot{x}''(1, t) - \gamma \Omega y''(1, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) образуют комбинированную динамическую систему (КДС), содержащую обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, граничные условия, условия связи и начальные условия. Здесь $\mathbf{x}(t) = (P_{x_1}(t), P_{y_1}(t))^T$ — входная вектор-функция КДС, $\mathbf{y}(t) = (-\beta_1(t), \alpha_1(t))^T$ — выходная вектор-функция КДС, величины $\mathbf{p} = (\theta, n, \tau_0)^T$ представляют собой набор параметров обратных связей. При $a_z \ll 1$ уравнения (12) переходят в уравнения (1.12) из



[8]. В задаче (12) роль набора параметров \mathbf{s} играет угловая скорость вращения снаряда, т.е. $\mathbf{s} = \{\Omega\}$, $\Omega_s = [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ После выполнения в 12 одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени t

$$\tilde{f}(\lambda) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt, \quad f(t) = L^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{\lambda t} dt \quad (13)$$

динамическая модель системы стабилизации сводится к матрицам $\Phi(\lambda)$ и $\Phi^0(\lambda)$ передаточных функций:

$$\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad (\tilde{x}_0(\lambda), \tilde{y}_0(\lambda))^T = \Phi^0(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(\lambda) & \Phi_{12}(\lambda) \\ \Phi_{21}(\lambda) & \Phi_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \Phi^0(\lambda) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^0(\lambda) & \Phi_{12}^0(\lambda) \\ \Phi_{21}^0(\lambda) & \Phi_{22}^0(\lambda) \end{bmatrix}, \\ \Phi_{11}(\lambda) = \Phi_{22}(\lambda) &= \frac{1}{2}[\Pi(\lambda) + \overline{\Pi(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_1(\lambda)}{D(\lambda)}, \\ \Phi_{12}(\lambda) = -\Phi_{21}(\lambda) &= \frac{i}{2}[\Pi(\lambda) - \overline{\Pi(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_2(\lambda)}{D(\lambda)}, \\ \Phi_{11}^0(\lambda) = \Phi_{22}^0(\lambda) &= \frac{1}{2}[\Pi^0(\lambda) + \overline{\Pi^0(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_1^0(\lambda)}{\lambda D(\lambda)}, \\ \Phi_{12}^0(\lambda) = -\Phi_{21}^0(\lambda) &= \frac{i}{2}[\Pi^0(\lambda) - \overline{\Pi^0(\bar{\lambda})}] = \frac{Q_2^0(\lambda)}{\lambda D(\lambda)}, \end{aligned} \quad (15)$$

причем характеристический и возмущающие квазимногочлены суть

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \Delta(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})}, \\ Q_1(\lambda) &= [\Delta_{\varphi_1}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} + \overline{\Delta_{\varphi_1}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ Q_2(\lambda) &= i[\Delta_{\varphi_1}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} - \overline{\Delta_{\varphi_1}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ Q_1^0(\lambda) &= [\Delta_{w_0}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} + \overline{\Delta_{w_0}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ Q_2^0(\lambda) &= i[\Delta_{w_0}(\lambda)\overline{\Delta(\bar{\lambda})} - \overline{\Delta_{w_0}(\bar{\lambda})}\Delta(\lambda)]/2, \\ D(\bar{\lambda}) &= \overline{D(\lambda)}, \quad Q_\nu(\bar{\lambda}) = \overline{Q_\nu(\lambda)}, \quad Q_\nu^0(\bar{\lambda}) = \overline{Q_\nu^0(\lambda)}, \quad \nu = 1, 2, \\ \Pi(\lambda) &= \frac{\Delta_{\varphi_1}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \Pi^0(\lambda) = \frac{\Delta_{w_0}(\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \psi_{11}(\lambda) & \psi_{12}(\lambda) & \lambda\psi_{13}(\lambda) & \psi_{14}(\lambda) \\ \psi_{21}(\lambda) & \psi_{22}(\lambda) & \psi_{23}(\lambda) & \psi_{24}(\lambda) \\ \psi_{31}(\lambda) & \psi_{32}(\lambda) & \lambda\psi_{33}(\lambda) & \psi_{34}(\lambda) \\ \psi_{41}(\lambda) & \psi_{42}(\lambda) & \lambda\psi_{43}(\lambda) & \psi_{44}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi_1}(\lambda) &= -\det[\psi_{\nu j}(\lambda)], \quad \nu = 1, 3, 4; \quad j = 1, 2, 4, \\ \Delta_{w_0}(\lambda) &= -\det[\psi_{\nu j}(\lambda)], \quad \nu = 1, 3, 4; \quad j = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(1)}(\lambda) - L_1^{(1)}(\lambda)], \\ \psi_{12}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(2)}(\lambda) - L_1^{(2)}(\lambda)], \\ \psi_{13}(\lambda) &= \lambda[J_1 + (1 + \gamma(\lambda - i\Omega))(\xi_1 N_1^{(3)}(\lambda) - L_1^{(3)}(\lambda))], \\ \psi_{14}(\lambda) &= [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_1 N_1^{(4)}(\lambda) - L_1^{(4)}(\lambda)], \\ \psi_{21}(\lambda) &= m_1 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(1)}(\lambda), \\ \psi_{22}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(2)}(\lambda), \\ \psi_{23}(\lambda) &= b - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]\lambda^2 N_1^{(3)}(\lambda), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \psi_{24}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_1^{(4)}(\lambda), \\
 \psi_{31}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(1)}(\lambda) + L_2^{(1)}(\lambda)], \\
 \psi_{32}(\lambda) &= -[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(2)}(\lambda) + L_2^{(2)}(\lambda)], \\
 \psi_{33}(\lambda) &= \lambda[J_2 - (1 + \gamma(\lambda - i\Omega))(\xi_2 N_2^{(3)}(\lambda) + L_2^{(3)}(\lambda))], \\
 \psi_{34}(\lambda) &= J_2 \lambda^2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)][\xi_2 N_2^{(4)}(\lambda) + L_2^{(4)}(\lambda)], \\
 \psi_{41}(\lambda) &= (1 + \tau_0 \lambda)(m_2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(1)}(\lambda)), \\
 \psi_{42}(\lambda) &= (1 + \tau_0 \lambda)(m_2 \lambda^2 - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(2)}(\lambda)), \\
 \psi_{43}(\lambda) &= -m_2(1 + \xi_1 + \xi_2)\lambda(1 + \tau_0 \lambda) - n\tau_0 e^{-i\theta - \tau(\lambda - i\Omega)} - [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]\lambda N_2^{(3)}(\lambda)(1 + \tau_0 \lambda), \\
 \psi_{44}(\lambda) &= m_2 a_z(1 + \tau_0 \lambda) - n\tau_0 e^{-i\theta - \tau(\lambda - i\Omega)} - (1 + \tau_0 \lambda)[1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]N_2^{(4)}(\lambda).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Входящие в (15)–(17) вспомогательные функции $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, являются решением следующих вспомогательных линейных краевых задач:

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 u(z, \lambda) + [1 + \gamma(\lambda - i\Omega)]u''''(z, \lambda) + a_z[(m_2 + 1 - z)u''(z, \lambda) - u'(z, \lambda)] &= -\delta_j^1 + \delta_j^3(z + \xi_1), \\
 u(0, \lambda) = 0, \quad u'(0, \lambda) = 0, \quad u(1, \lambda) = \delta_j^2, \quad u'(1, \lambda) = -\delta_j^4, \\
 N_1^{(j)}(\lambda) = -u'''(0, \lambda), \quad N_2^{(j)}(\lambda) = u'''(1, \lambda), \\
 L_1^{(j)}(\lambda) = -u''(0, \lambda), \quad L_2^{(j)}(\lambda) = u''(1, \lambda), \quad j = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь δ_j^ν — символ Кронекера. При умеренных и средних значениях $|\lambda|$ линейные краевые задачи (18) решались численно [1] на основе проекционного метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций ортогональных полиномов Чебышева 1 рода. Вычисление вспомогательных функций $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, при этом сводится к решению вспомогательной системы линейных уравнений, коэффициенты которой зависят от λ . Проверка аналитичности приближенных выражений для функций $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, в той области изменения параметра λ , где применялся проекционный метод Галеркина, сводилась к проверке отсутствия в указанной области корней определителя вспомогательной системы линейных уравнений, что легко проверялось при помощи принципа аргумента. При $|\lambda| \gg 1$ выполнялось асимптотическое интегрирование (18) на основе метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна, и приближенные выражения для вспомогательных [1] функций $N_k^{(j)}(\lambda)$, $L_k^{(j)}(\lambda)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, оказывались аналитическими в правой комплексной полуплоскости (λ) и вблизи мнимой оси.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим результаты параметрического синтеза системы стабилизации со следующими безразмерными расчетными параметрами: $m_1 = 0.06$, $m_2 = 0.1$, $J_1 = 0.015$, $J_2 = 0.02$, $\gamma = 0.01$, $\tau = 0.07$, $\xi_1 = 0.03$, $\xi_2 = 0.5$, $a_z = 10$, $\Omega_{\min} = 5$, $\Omega_{\max} = 9$. Параметрический синтез системы стабилизации выполнялся на основе (9) по матрице (15) для значений $t_0 = 1$ и $N_\Omega = 20$. На рис. 1, 2 приведены импульсные переходные функции системы угловой стабилизации, вычисленные до и после параметрического синтеза. Импульсные переходные функции соответствуют входному возмущению в форме $P_{x_1}(t) = 0$, $P_{y_1}(t) = p_{y_1} \delta(t - 0)$, где $\delta(t)$ — импульсная функция Дирака, определяются соотношениями $\alpha_1(t) = p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{22}(\lambda)]$, $\beta_1(t) = -p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{12}(\lambda)]$, $y_0(t) = p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{22}^0(\lambda)]$, $x_0(t) = p_{y_1} L^{-1}[\Pi_{12}^0(\lambda)]$ и вычислялись на основе эффективного алгоритма [9] численного обращения одностороннего интегрального преобразования Лапласа. Импульсные переходные функции на рис. 1, 2 соответствуют значениям угловой скорости вращения снаряда $\Omega = 5$ и 9 соответственно. Пунктиром показаны импульсные переходные функции до выполнения параметрического синтеза, им соответствуют значения параметров обратных связей $\theta = 0.5$, $n = 0.06$, $\tau_0 = 7$. Сплошной линией показаны импульсные переходные функции после выполнения параметрического синтеза, им соответствуют значения параметров обратных связей $\theta = 0.342$, $n = 1.167$, $\tau_0 = 0.083$. Как видно, выполнение параметрического синтеза

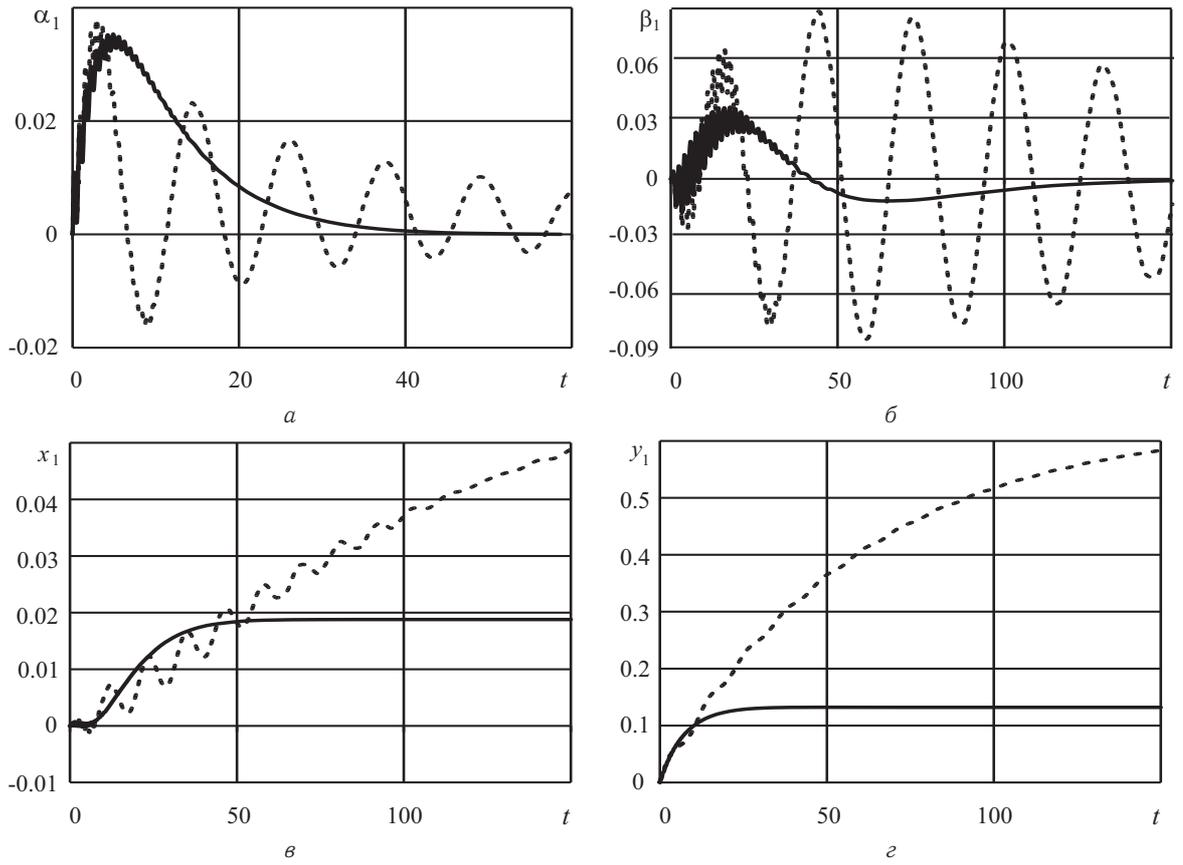


Рис. 1. Импульсные переходные функции для $\Omega = 5$

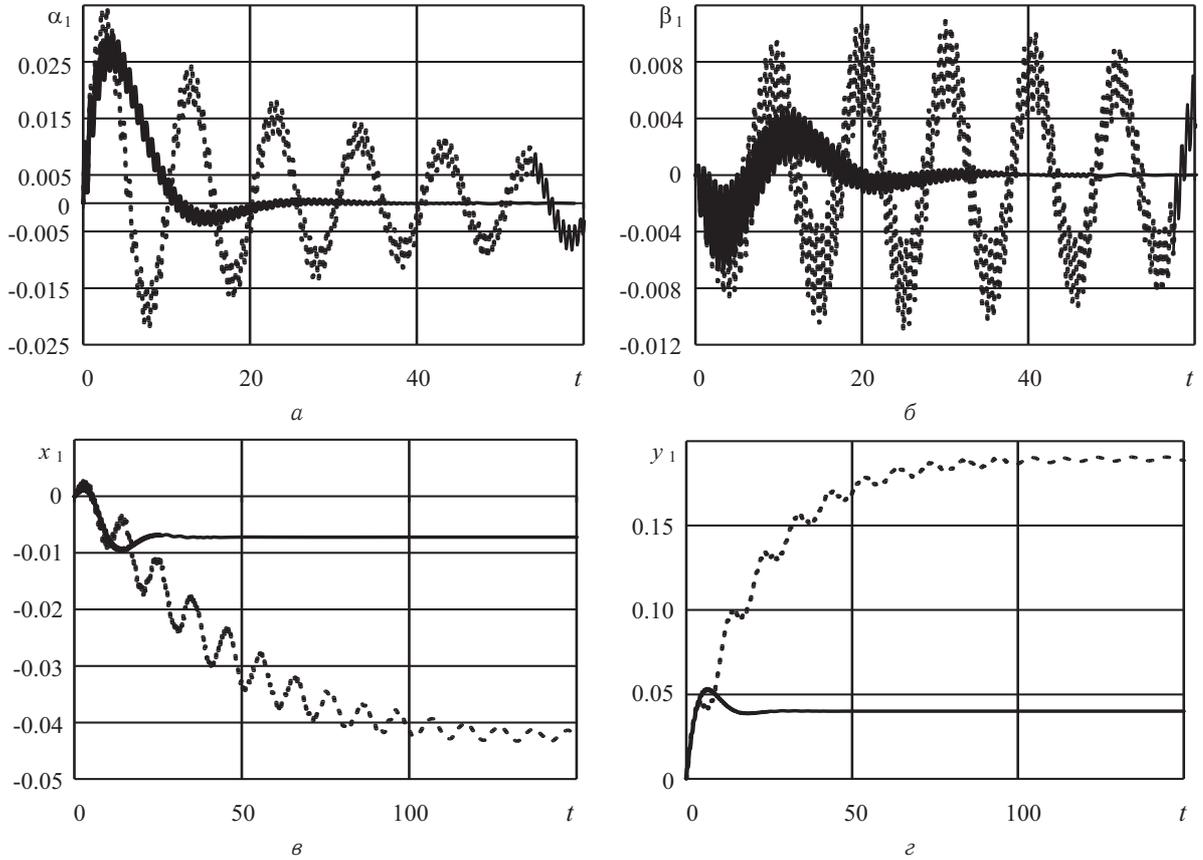


Рис. 2. Импульсные переходные функции для $\Omega = 9$



позволяет значительно уменьшить характерное время регулирования и улучшить качество переходных процессов на всем диапазоне изменения угловой скорости вращения снаряда $\Omega \in [5, 9]$.

Распараллеливание процедуры параметрического синтеза выполнялось на основе параллельных шаблонов Microsoft Concurrency Runtime [6], специально разработанных для поддержки параллельности на уровне задач. Эффективность распараллеливания для системы стабилизации с параметрами на четырехъядерном процессоре Intel Core2 i7 3610QM характеризуют данные в таблице, где приводится характерное время численного моделирования (в минутах):

№ теста	Последовательная версия	Многопоточная версия
1	787	222
2	788	220
3	782	223
4	789	221
5	785	223

Переход от последовательной версии к параллельной сокращает характерное время параметрического синтеза ориентировочно в 3,5 раза. Несколько меньшее, чем четырехкратное, ускорение вычислительного процесса объясняется интенсивным обменом данными с оперативной памятью, а также значительным объемом (6 МБ) общей для всех ядер кэш-памяти уровня 3.

Библиографический список

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В. О влиянии продольных перегрузок на устойчивость автономной системы угловой стабилизации реактивного снаряда залпового огня // Докл. Академии военных наук. 2012. № 5(54). С. 5–13.
2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
3. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 76–89.
4. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С. Выбор параметров систем и динамический анализ газореактивных систем стабилизации с упругими стержнями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 101–114.
5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С. Выбор оптимальных параметров комбинированных динамических систем // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратов. зимн. шк. Саратов : ООО «Изд-во «Научная книга», 2012. С. 8–9.
6. Campbell C., Miller A. Parallel programming with Microsoft Visual C++. Microsoft Press, 2011. 172 с.
7. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М. : Радио и связь, 1988. 128 с.
8. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории автономных систем угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 141–156.
9. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 1030–1044.

Parallel Algorithm of Optimal Parameters Calculation for the Single Channel Angular Stabilization System

D. K. Andreichenko¹, K. P. Andreichenko², V. V. Kononov¹

¹Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, kp_andreichenko@renet.ru, valentin.kononov@gmail.com

²Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Polytechnicheskaya st., 77, kp_andreichenko@renet.ru

On the instance of mathematical modeling of an independant angular stabilization system of rocket missiles of a volley fire developed a parallel algorithm for parametric synthesis, which allows to reduce the response time and stabilization errors of the operated combined dynamic systems, for which some design parameters change continuously in a fixed range.

Key words: operated hybrid dynamic systems, mathematical modeling, parametric synthesis.



References

1. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. The effect of longitudinal forces on the stability of the autonomous system angular stabilization missile salvo fire. *Military Sciences Academy Reports*, 2012, no. 5(54), pp. 5–13 (in Russian).
2. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.* 2000, no. 3, pp. 54–69 (in Russian).
3. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. Dynamic analysis and the choice of model parameters gyroscopic integrator of linear accelerations on floating platform. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2008, no. 4, pp. 76–89 (in Russian).
4. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Choice of system parameters and dynamic analysis of the gas jet stabilization systems with elastic rods. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2012. № 4, pp. 101–114 (in Russian).
5. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Vybora optimal'nykh parametrov kombinirovannykh dinamicheskikh sistem [Choice of optimal parameters combination of dynamic systems]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia. Materialy 16 Saratovskoi zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and their applications. Materials of 16th Saratov Winter School], Saratov, 2012, pp. 8–9 (in Russian).
6. Campbell C., Miller A. *Parallel programming with Microsoft Visual C++*. Microsoft Press, 2011. 172 p.
7. Bunday B. *Basic optimization methods*. Edward Arnold, 1984. [Rus. ed. : Bandi B. *Metody optimizatsii. Vvodnyi kurs*. Moscow, Radio i sviaz', 1988, 128 p.]
8. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of autonomous angular stabilization systems of missiles for salvo firing. *J. of Computer and Systems Sciences Intern.*, 2009, no. 3, pp. 141–156 (in Russian).
9. Andreichenko D. K. An efficient algorithm for numerical inversion of the Laplace transform. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, vol. 40, iss. 7, pp. 987–1000.