



МЕХАНИКА

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОТ НЕРАВНОМЕРНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Э.В. Антоненко, Т.Э. Шульга*

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике;
*Саратовский государственный социально-экономический университет,
факультет информатики и информационных технологий
E-mail: vem@info.sgu.ru, *shulga@ssea.runnet.ru

Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с переменной вдоль продольной оси толщиной при действии осесимметричного изменяющегося вдоль оси оболочки радиального давления. Находится одна из величин в законе изменения давления, при которой происходит потеря устойчивости оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, теория оболочек, устойчивость оболочек, радиальная нагрузка, критическое давление, толщина оболочки, теория упругости.

Mathematical Models of Stability Loss of Nonuniform Cylindrical Shells Because of Nonuniform Radial Loading

E.V. Antonenko, T.E. Shulga*

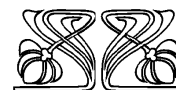
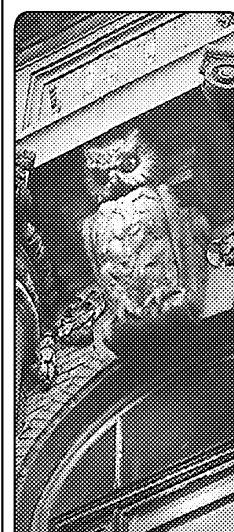
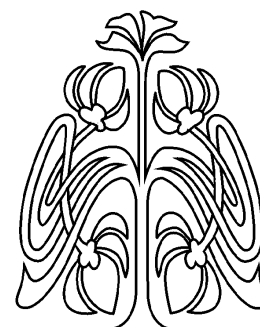
Saratov State University
Chair of Mechanics Computational Experiment;
*Saratov State Socio-Economical University
Faculty of Computer Sciences and Informational Technologies
E-mail: vem@info.sgu.ru, *shulga@ssea.runnet.ru

The circular cylindrical shell with variable thickness along the axis of elongation is considered. The axisymmetric radial pressure along the axis of shell is suggested. The one of values (for the law of pressure variation) which effects the stability loss of shell is determined.

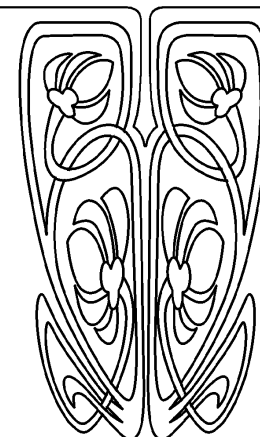
Key words: cylindrical shell, theory of shells, stability of shells, radial loading, critical pressure, shell thickness, the theory of elasticity.

Исследования устойчивости оболочек от действия неравномерно-го давления, по-видимому, начинаются с работ Б.О. Элмроса [1] и В.И. Моссаковского [2]. Решение некоторых задач для неоднородных оболочек с переменной радиальной нагрузкой имеется в работах [3, 4]. Однако в них рассматривались ситуации отдельно для неоднородности оболочки и отдельно от действия переменной нагрузки. На конференциях по механике деформированных тел, теории оболочек и в литературе [4–6] ставились задачи о получении зависимостей для расчета критического давления с учетом неоднородности оболочек и нагрузок, аналогичных зависимостям [7].

Задачу статической устойчивости будем решать в линейной постановке, используя классические зависимости теории оболочек [6, 8–10] и деформационных гипотез нерастяжимости поперечного сечения и отсутствия сдвигов в срединной поверхности. Применим энергетический метод в форме [9], используя две математические



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





модели задачи. Первая модель строится на получении дифференциального уравнения задачи. Математическое содержание задачи в этом случае сводится к нахождению собственных значений дифференциального уравнения при заданных граничных условиях. Искомая величина критического давления содержится в коэффициенте уравнения.

Вторая модель строится на использовании условия безразличного равновесия при потере устойчивости. В этой ситуации, согласно принципу виртуальных перемещений, сумма работ внутренних усилий и сил давления равна нулю. Это условие позволяет найти критическое давление без решения дифференциального уравнения задачи, что служит основанием для названия такого метода прямым.

Составим функционал энергии единицы длины оболочки, включая в него наиболее весомые в энергетическом отношении составляющие: энергию изгиба поперечного сечения от кольцевых изгибающих моментов m_φ и энергию депланаций от осевых напряжений σ_x :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \oint [m_\varphi \chi_\varphi + \sigma_x \delta(x) \varepsilon_x - p(x) R w \chi_\varphi] R d\varphi, \quad (1)$$

где последнее слагаемое есть работа сил переменного вдоль оболочки давления $p(x)$ на радиальных перемещениях, толщину оболочки $\delta(x)$ полагаем также переменной вдоль продольной оси оболочки x .

Все усилия и деформации в (1) выражаются через функцию радиальных перемещений $w(x, \varphi)$ и ее производные. Прогиб оболочки зададим в виде

$$w(x, \varphi) = \sum_n \psi_n(x) \cos n\varphi, \quad (2)$$

где $\psi_n(x)$ — неизвестные функции, меняющиеся по длине оболочки, $n = 2, 3, 4, \dots$ — числа натурального ряда, соответствующие количеству волн в поперечном сечении оболочки при потере устойчивости. Далее индекс n опускается.

Кольцевые и осевые перемещения в силу принятых гипотез имеют вид

$$v = - \sum_n \frac{\psi(x)}{n} \sin n\varphi, \quad u = - \sum_n \frac{R}{n^2} \psi'(x) \cos n\varphi.$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по осевой координате x . Тогда изменение кривизны поперечных сечений, кольцевые изгибающие моменты, относительная осевая деформация и осевые нормальные напряжения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \chi_\varphi &= - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) = \sum_n \frac{n^2 - 1}{R^2} \psi(x) \cos n\varphi, & m_\varphi &= D \chi_\varphi, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = - \sum_n \frac{R^2}{n^2} \psi''(x) \cos n\varphi, & \sigma_x &= E \varepsilon_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) с учетом ортогональности тригонометрических функций дает

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_n \left\{ D(x) \frac{(n^2 - 1)^2}{R^4} \psi^2(x) + \frac{E \delta(x) R^2}{n^4} [\psi''(x)]^2 - \frac{n^2 - 1}{R} p(x) \psi^2(x) \right\} \pi R, \quad (4)$$

где учтено, что $\oint \cos^2 n\varphi d\varphi = \pi$, $D(x) = E \delta^3(x) / 12(1 - \mu^2)$.

Дифференциальное уравнение задачи потери устойчивости получим из условия минимума функционала (4), применяя уравнение Эйлера – Лагранжа вариационной задачи:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi'(x)} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi''(x)} \right) = 0. \quad (5)$$

Выполняя для (4) операции (5) получаем:

$$\psi^{IV}(x) + 2 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \psi'''(x) + \frac{\delta''(x)}{\delta(x)} \psi''(x) + \frac{n^4(n^2 - 1)}{R^3 E \delta(x)} \left(\frac{E(n^2 - 1) \delta^3(x)}{12(1 - \mu^2) R^3} - p(x) \right) \psi_n(x) = 0. \quad (6)$$



Полученное дифференциальное уравнение задачи для n -й функции продольной координаты $\psi(x)$ дает основание отказаться от представления функции $w(x, \varphi)$ в виде ряда (2) и задавать ее только одним членом этого ряда. Следовательно, символ суммы во всех предыдущих формулах может быть исключен. Это будет учтено ниже.

Для определения величины критического давления закон изменения давления в (6) необходимо представлять в форме, содержащей основной параметр этого давления, например,

$$p(x) = p_0 f(x). \tag{7}$$

Величина p_0 , которую будем называть критическим давлением, зависит, как это видно из (6), от функций $f(x)$ и граничных условий. Только для случая (7) можно говорить о задаче на собственные значения дифференциального уравнения.

Для оболочек с постоянной толщиной $\delta(x) = \delta_0$ при действии равномерного давления $p(x) = p_0$ из (6) как частный случай следует известное в теории оболочек дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Оно имеет аналитическое решение, приводящее, например, к формуле П.Ф. Попковича для критического давления.

Аналитическое определение величины p_0 из дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (6) не представляется возможным, численные решения связаны со значительными трудностями.

Предлагается более простая модель рассматриваемой задачи, следующая из принципа минимума потенциальной энергии U , когда в состоянии безразличного равновесия оболочки при потере устойчивости работа внутренних усилий равна работе внешних сил

$$U = \int_0^l \Gamma dx = 0, \tag{8}$$

где l – длина оболочки.

Условие (8) с учетом (4) и (7) позволяет получить формулу для критического давления:

$$\frac{p_0}{E} = \frac{\frac{n^2-1}{12(1-\mu^2)R^3} \int_0^l \delta^3(x) \psi^2(x) dx + \frac{R^3}{n^4(n^2-1)} \int_0^l \delta(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^l f(x) \psi^2(x) dx}. \tag{9}$$

Для оболочек средней длины, у которых число волн при потере устойчивости $n \geq 4$, в формуле (9) можно пренебречь единицей по сравнению с n^2 . Из условия минимума p_0 :

$$\frac{\partial p_0}{\partial n^2} = 0, \tag{10}$$

следует

$$p_0 = \frac{4}{3} \frac{\sqrt[4]{3I_1^3 I_2}}{I_3}, \tag{11}$$

где интегралы, входящие в (11), имеют вид

$$I_1 = \int_0^l \frac{E \delta^3(x)}{12(1-\mu^2)R^3} \psi^2(x) dx, \quad I_2 = \int_0^l E \delta(x) [\psi''(x)]^2 dx, \quad I_3 = \int_0^l f(x) \psi^2(x) dx.$$

При использовании (9) и (10) функции продольной координаты $\psi(x)$ должны задаваться и удовлетворять граничным условиям оболочки.

В настоящей статье представлены результаты расчетов по формуле (11) для четырех схем закрепления краев оболочки. Функции продольной координаты $\psi(x)$ двух видов представлены в табл.1. Численный эксперимент, выполненный авторами, показал, что для однородных оболочек при равномерном давлении результаты расчетов при рассмотренных видах функций $\psi(x)$ практически не отличаются, если удовлетворяются граничные условия задачи. В данной работе функции $\psi(x)$ задавались в виде



Таблица 1

Граничные условия

Номер схемы	Граничные условия	Виды функций $\psi(x)$	Коэффициент α
1	$\psi(0) = 0$ $\psi''(0) = 0$	$A \sin \frac{m\pi x}{l}$	π
	$\psi(l) = 0$ $\psi''(l) = 0$	$x^4 - 2lx^3 + l^3x$	
2	$\psi(0) = 0$ $\psi'(0) = 0$	$A \sin^2 \frac{m\pi x}{l}$	1, 5 π
	$\psi(l) = 0$ $\psi'(l) = 0$	$x^4 - 2lx^3 + l^2x^2$	
3	$\psi(0) = 0$ $\psi'(0) = 0$	$A (1 - \cos \frac{\pi x}{2l})$	0, 6 π
	$\psi''(l) = 0$ $\psi'''(l) = 0$	$x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2$	
4	$\psi(0) = 0$ $\psi'(0) = 0$ $\psi(l) = 0$ $\psi''(l) = 0$	$2x^4 - 5lx^3 + 3l^2x^2$	1, 25 π

полиномов. В этих случаях получаем формулу для расчета критического давления в форме [7]. При коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$ имеем

$$n_0^2 = 2,39\alpha \frac{R}{l} \sqrt{\frac{R}{\delta_0}}, \quad (12)$$

$$p_0 = 0,293\alpha E \frac{R}{l} \left(\frac{\delta_0}{R}\right)^{2,5},$$

где α — коэффициент критичности, учитывающий граничные условия. При граничных условиях Новье из (12) следует формула П.Ф. Папковича ($\alpha = \pi$).

Рассмотрена устойчивость оболочки с линейно изменяющейся толщиной

$$\delta(x) = \delta_0(1 - \beta \frac{x}{l}), \quad \beta = \frac{\delta_0 - \delta_l}{\delta_0}. \quad (13)$$

Радиальная нагрузка также принималась линейно изменяющейся по длине оболочки:

$$p(x) = p_0(1 - \gamma \frac{x}{l}), \quad \gamma = \frac{p_0 - p_l}{p_0}. \quad (14)$$

В формулах (13) и (14) β и γ — показатели изменяемости толщины оболочки и давления, δ_0 и p_0 — толщина оболочки и давление в сечении $x=0$, δ_l и p_l — эти же параметры на краю оболочки $x = l$.

Подстановка выражений $\delta(x)$ и $p(x)$ вида (13) и (14) в формулы (9) и (11) учетом (10) дают зависимости для расчета числа волн при потере устойчивости и величины критического давления в виде аналогичном (12):

$$n^2 = n_0^2 f(\beta), \quad p_0 = 0,293\alpha E \frac{R}{l} \left(\frac{\delta_0}{R}\right)^{2,5} k_\delta k_p, \quad (15)$$

где $f(\beta)$, k_δ и k_p — корректирующие функции, учитывающие изменение толщины и давления по длине оболочки. Аналитические выражения корректирующих функций для рассмотренных схем граничных условий приведены в табл. 2.

Таблица 2

Выражения корректирующих функций

Номер схемы	$f(\beta)$	k_δ	k_p
1	$\sqrt[4]{\frac{1 - 0,5\beta}{\varphi_1(\beta)}}$ $\varphi_1(\beta) = 1 - 1,5\beta + 0,85\beta^2 - 0,174\beta^2$	$\sqrt[4]{(1 - 0,5\beta)\varphi_1^3(\beta)}$	$\frac{1}{1 - 0,5\gamma}$
2	$\sqrt[4]{\frac{1 - 0,5\beta}{\varphi_2(\beta)}}$ $\varphi_2(\beta) = 1 - 1,5\beta + 0,818\beta^2 - 0,159\beta^2$	$\sqrt[4]{(1 - 0,5\beta)\varphi_2^3(\beta)}$	$\frac{1}{1 - 0,5\gamma}$
3	$\sqrt[4]{\frac{1 - 0,167\beta}{\varphi_3(\beta)}}$ $\varphi_3(\beta) = 1 - 2,415\beta + 2,01\beta^2 - 0,573\beta^2$	$\sqrt[4]{(1 - 0,167\beta)\varphi_3^3(\beta)}$	$\frac{1}{1 - 0,802\gamma}$
4	$\sqrt[4]{\frac{1 - 0,417\beta}{\varphi_4(\beta)}}$ $\varphi_4(\beta) = 1 - 0,698\beta + 1,04\beta^2 - 0,226\beta^2$	$\sqrt[4]{(1 - 0,417\beta)\varphi_4^3(\beta)}$	$\frac{1}{1 - 0,565\gamma}$



Зависимости $k_\delta = f(\beta)$ и $k_p = f(\gamma)$ при линейном изменении толщины и давления для расчета удобнее представлять в виде функции от соотношения толщин и давлений на краях оболочки:

$$\beta = 1 - \frac{\delta_l}{\delta_0}, \quad \gamma = 1 - \frac{p_l}{p_0}.$$

Графические зависимости корректирующих функций k_δ и k_p от соотношения толщин и давления приведены на рис. 1 и 2, где номера кривых соответствуют номерам схем граничных условий в табл. 1 и 2.

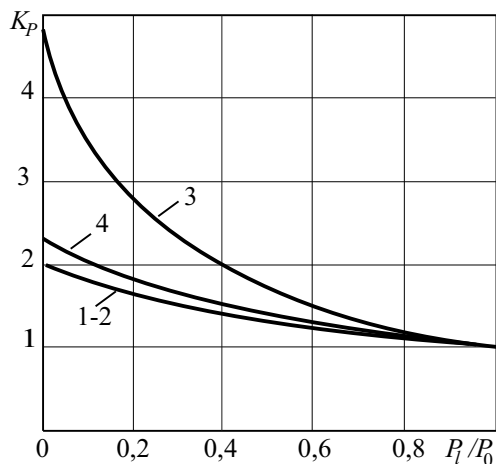


Рис. 1. Зависимости корректирующих функций изменения толщины от соотношения толщин при разных граничных условиях оболочки

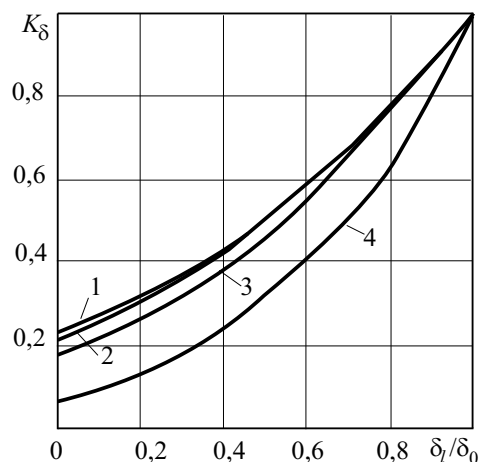


Рис. 2. Зависимости корректирующих функций изменения давления от соотношения давлений при разных граничных условиях оболочки

Для однородной оболочки ($\delta_0 = \delta_l$) $\beta = 0$ при равномерном давлении ($p_0 = p_l$) $\gamma = 0$ значения всех корректирующих функций становятся равными единице. Из формул (15) как частный случай следуют известные зависимости [6–10] для однородных оболочек при равномерном давлении.

Приведенные в статье зависимости для оболочек с линейно изменяющейся толщиной и линейно изменяющимся по длине давлением дают возможность получить величины критического давления по имеющейся в проектных организациях справочной литературе, используя корректирующие функции.

Математическая модель потери устойчивости оболочки, построенная на прямом методе, позволяет по формулам (9)–(11) находить критические нагрузки практически для любых законов изменения толщины и давления вдоль оболочки.

Библиографический список

1. Элмрос Б.О. Выпучивание цилиндрической оболочки, подверженной действию неравномерного внешнего давления // Прикладная механика: Тр. Америк. общества инженеров – механиков. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. № 4. С. 27–31.
2. Моссаковский В.И., Андреев Л.В., Зюзин В.А. Некоторые вопросы устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерного давления // V Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек: Тез. докл. М.: Наука, 1965. С. 47–51.
3. Кан С.Н., Тодчук В.А. Устойчивость цилиндрической оболочки при действии переменной радиальной нагрузки // Избранные главы по строительной механике оболочек. Харьков, 1965. Вып. V. С. 182–187.
4. Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С. Устойчивость цилиндрических оболочек переменной толщины при действии
5. внешнего давления // Тр. XXI Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 7–13.
6. Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междунар. конф. Казань: Новое знание, 2000. 488 с.
7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 308 с.
8. Антоненко Э.В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикладная механика. Киев, 1975. Т. XI, вып. 6. С. 44–50.
9. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.
10. Кан С.Н. Строительная механика оболочек М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
11. Прочность. Устойчивость. Колебания: В 3 т. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 568 с.