

## МЕХАНИКА

УДК 531.36: 534.1

### ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В.С. Асланов, Б.В. Иванов

Самарский государственный аэрокосмический университет,  
кафедра теоретической механики  
E-mail: aslanov\_vs@mail.ru

Рассматривается хаотическое движение тела затупленной формы в атмосфере, описываемое нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. На тело действует восстанавливающий момент, малый возмущающий периодический момент и демпфирующий момент. Фазовый портрет невозмущенной системы имеет точки неустойчивого равновесия. На основании метода Мельникова найдены критерии, определяющие границы хаоса системы. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие справедливость полученных критериев.

*Ключевые слова:* нелинейная система, периодические возмущения, хаос, гетероклинические орбиты, метод Мельникова.

#### Chaotic Motion of Nonlinear System

V.S. Aslanov, B.V. Ivanov

Chaotic motion of a body of the blunted form in an atmosphere described is considered by the nonlinear differential equation of the second order. On a body the restoring moment, the small perturbed periodic moment and the damped moment operates. The phase portrait of the unperturbed system has points of unstable balance. On the basis of Melnikov method the criteria determining borders of chaos of system are found. The results of the numerical simulations confirming validity, received criterion are submitted.

*Key words:* nonlinear system, periodic perturbations, chaos, heteroclinic orbits, Melnikov method.

#### ВВЕДЕНИЕ

Для спуска в разреженной атмосфере Марса используются тела малого удлинения затупленной формы, которая обеспечивает эффективное торможение. Такие тела, в зависимости от массовой компоновки, могут иметь, помимо двух балансировочных положений пространственного угла атаки:  $\alpha^* = 0, \pi$ , еще и третье положение равновесия:  $\alpha \in (0, \pi)$ . Для аппроксимации восстанавливающего момента используют бигармоническую зависимость вида [1]

$$m_\alpha(\alpha) = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha. \quad (1)$$

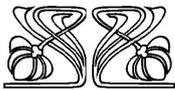
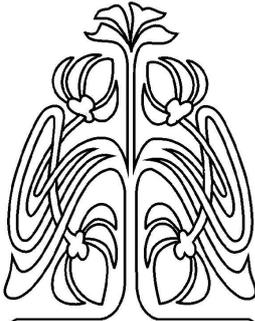
Для рассматриваемого класса космических аппаратов положение  $\alpha = 0$  является устойчивым, поэтому производная от коэффициента восстанавливающего момента по углу атаки в этой точке отрицательная

$$\left. \frac{d m_\alpha(\alpha)}{d \alpha} \right|_{\alpha=0} = (a \cos \alpha + 2b \cos 2\alpha)|_{\alpha=0} < 0,$$

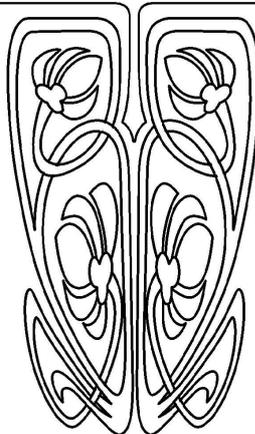
или

$$2b < -a. \quad (2)$$

А если существует промежуточное балансировочное положение на интервале  $(0, \pi)$ , то



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





$$m_\alpha(\alpha) = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha = \sin \alpha(a + 2b \cos \alpha) = 0, \tag{3}$$

что выполняется, если

$$|2b| > |a|. \tag{4}$$

Очевидно, что неравенства (2) и (4) выполняются одновременно при  $b < 0$ . На тело кроме восстанавливающего момента (1) действует малый демпфирующий момент вида [2]

$$m_D = -\delta(1 + \sin^2 \alpha)\dot{\alpha} \tag{5}$$

и малый возмущающий периодический момент, вызванный малым изменением положения центра масс тела:

$$m_P = \varepsilon \sin \alpha \cos(\omega t). \tag{6}$$

Здесь  $\varepsilon, \delta$  — малые положительные параметры,  $\omega$  — частота внешнего возмущающего момента ( $\omega > 0$ ). С помощью соотношений (1), (5) и (6) запишем уравнение возмущенного плоского движения тела относительно центра масс в сопротивляющейся среде:

$$\ddot{\alpha} = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha + \varepsilon \sin \alpha \cos(\omega t) - \delta(1 + \sin^2 \alpha)\dot{\alpha}. \tag{7}$$

Ставится задача показать возможность возникновения хаоса тел, описываемых уравнением (7), найти с помощью метода Мельникова [3] критерии возникновения хаоса.

### 1. НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Уравнение возмущенного движения (7) при  $\varepsilon = 0, \delta = 0$  сводится к невозмущенной системой с одной степенью свободы вида:

$$\ddot{\alpha} = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha. \tag{8}$$

Очевидно, что если  $b = 0$  или  $a = 0$  (при замене переменных  $\varphi = 2\alpha$ ), уравнение (8) описывает движение математического маятника.

Будем рассматривать только случаи, когда  $b < 0$ , тогда система (8) имеет три положения равновесия. Два устойчивых положения равновесия находятся в точках  $\alpha = \pm i\pi$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Неустойчивое положение равновесия

$$\alpha_S = \pm \arccos\left(-\frac{a}{2b}\right) \tag{9}$$

располагается в зависимости от знака коэффициента  $a$ . Если  $a > 0$ , то неустойчивое положение равновесия  $\alpha_S \in (0, \pi/2)$ , если  $a < 0$ , то  $\alpha_S \in (\pi/2, \pi)$ . При значении коэффициента  $a = 0$  положения равновесия  $\alpha_S = \pi/2$ . Уравнение (8) имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + W(\alpha) = E, \tag{10}$$

где  $E$  — полная энергия,  $W(\theta) = a \cos \alpha + b \cos^2 \alpha$  — потенциальная энергия.

На рис. 1 показаны фазовые траектории, соответствующие колебаниям в окрестности центров:  $\dots c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots$ ,  $(\alpha, \dot{\alpha}) = (\pm i\pi, 0)$  и вращению. Разделяют эти зоны сепаратрисы, которые соединяют седловые точки:  $\dots s_{-2}, s_{-1}, s_1, s_2, \dots$ ,  $(\alpha, \dot{\alpha}) = (\pm(\alpha_S + j\pi), 0)$ .

Разделим фазовый портрет вертикалями, проходящими через седловые точки, на области  $A_i$  ( $i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ). Каждая область  $A_i$  содержит центр  $c_i$ .

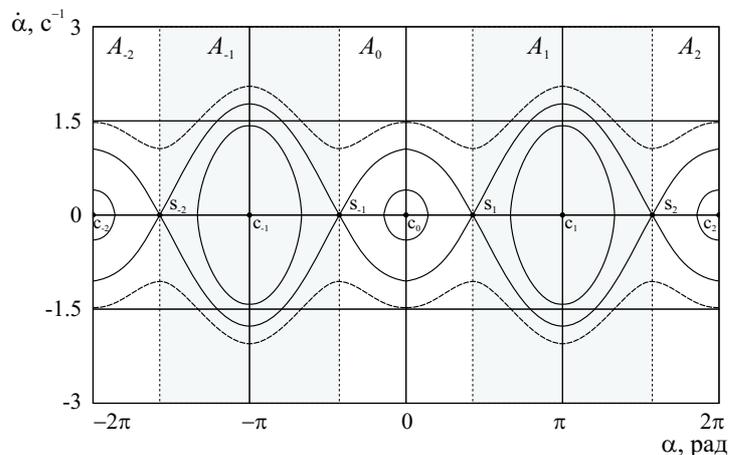


Рис. 1. Фазовые портреты для  $a = 0.5, b = -1$



Будем изучать две группы гетероклинических траекторий, принадлежащих областям  $A_0$  и  $A_1$ . Седловые точки соединены сепаратрисами (гетероклиническими траекториями). Согласно методу Мельникова для получения критерия возникновения хаоса в окрестности сепаратрис необходимо найти аналитические решения уравнения (7) для гетероклинических орбит. Воспользуемся интегралом энергии (10) и значение полной энергии в седловой точке (9)

$$W(\alpha_S) = a \cos \alpha_S + b \cos^2 \alpha_S = -\frac{a^2}{4b}, \quad (11)$$

где  $\cos \alpha_S = -a/2b$ .

В начале рассмотрим гетероклинические траектории в области  $A_0$ . Произведем замену переменных

$$x = \tan \frac{\alpha}{2}$$

в интеграле энергии (10), после чего разделим переменные и возьмем квадратуру. В результате получим

$$t - t_0 = \frac{2}{\sqrt{P}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x_S^2 - x^2} = \frac{2}{\sqrt{P}} \ln \left| \frac{x_S + x}{x_S - x} \right|_{x_0}^x, \quad (12)$$

где  $x_S = \operatorname{tg} \frac{\alpha_S}{2}$ ,  $P = -\frac{(a-2b)^2}{2b}$  в силу условий (2) и (4).

Окончательно, решение уравнения, описывающее невозмущенное движение на сепаратрисе в области  $A_0$ , запишем в виде, удобном для использования метода Мельникова:

$$\alpha_{\pm}(t) = \pm 2 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha_S}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda t}{2} \right), \quad (13)$$

$$\sigma_{\pm}(t) = (\dot{\alpha})_{\pm} = \pm \frac{\lambda \sin \alpha_S}{\operatorname{ch}(\lambda t) + \cos \alpha_S}, \quad (14)$$

где  $\lambda = \sqrt{\frac{a^2 - 4b^2}{2b}}$ .

Перейдем к построению гетероклинических орбит в области  $A_1$ . Для этого введем новую переменную

$$\beta = \pi - \alpha, \quad (15)$$

тогда уравнение невозмущенного движения (8) примет вид

$$\ddot{\beta} = -a \sin \beta + b \sin 2\beta.$$

Этому уравнению соответствует решение  $\beta = 2 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\beta_S}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda(t - t_0)}{2} \right)$ .

Выполняя замену, обратную замене (15), получим гетероклинические траектории для области  $A_1$

$$\alpha_{\pm}(t) = \pi \pm 2 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha_S}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda t}{2} \right), \quad (16)$$

$$\sigma_{\pm}(t) = (\dot{\alpha})_{\pm} = \pm \frac{\lambda \sin \theta_S}{\operatorname{ch}(\lambda t) - \cos \theta_S}. \quad (17)$$

## 2. ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ. КРИТЕРИИ МЕЛЬНИКОВА

Рассмотрим возмущенную систему (7). Заменяем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (7) двумя уравнениями первого порядка

$$\dot{\alpha} = \sigma = f_1 + g_1, \quad (18)$$

$$\dot{\sigma} = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha + \varepsilon \sin \alpha \cos(\omega t) - \delta(1 + \sin^2 \alpha)\sigma = f_2 + g_2. \quad (19)$$



S. Wiggins в своей книге [4] отметил влияние фазы возмущающей периодической силы на хаотическое движение и предложил вместо неавтономной системы второго порядка (18), (19) использовать автономную систему третьего порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \sigma = f_1 + g_1, \\ \dot{\sigma} &= a \sin \alpha + b \sin 2\alpha + \varepsilon \sin \alpha \cos(\phi) - \delta(1 + \sin^2 \alpha)\sigma = f_2 + g_2, \\ \dot{\phi} &= \omega,\end{aligned}\tag{20}$$

где  $f_1 = \sigma$ ,  $g_1 = 0$ ,  $f_2 = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha$ ,  $g_2 = \varepsilon \sin \alpha \cos(\omega t) - \delta(1 + \sin^2 \alpha)\sigma$ .

Функция Мельникова для возмущенной системы (20) примет вид [4]

$$\begin{aligned}M^\pm(t_0, \phi_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f_1[q_\pm^0(t)]g_2[q_\pm^0(t), \omega t + \omega t_0 + \phi_0] - f_2[q_\pm^0(t)]g_1[q_\pm^0(t), \omega t + \omega t_0 + \phi_0]\} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f_1[q_\pm^0(t)]g_2[q_\pm^0(t), \omega t + \omega t_0 + \phi_0]\} dt,\end{aligned}\tag{21}$$

где  $q_\pm^0(t) = [\alpha_\pm(t), \sigma_\pm(t)]$  — решения для гетероклинических орбит (13), (14) или (16), (17) для областей  $A_0$  или  $A_1$  соответственно. Подставляя (20) в (21), получим

$$M^\pm(t_0, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\pm \{\varepsilon \sin \alpha_\pm \cos(\omega t + \omega t_0 + \phi_0) - \delta(1 + \sin^2 \alpha_\pm)\sigma_\pm\} dt$$

или

$$M^\pm(t_0, \phi_0) = M_\varepsilon + M_\delta,$$

где

$$M_\varepsilon = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\pm \sin \alpha_\pm \cos(\omega t + \omega t_0 + \phi_0) dt,\tag{22}$$

$$M_\delta = -\delta \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \sin^2 \alpha_\pm)\sigma_\pm^2 dt.\tag{23}$$

Функции  $M_\varepsilon$  и  $M_\delta$  соответствуют двум видам малых возмущений: периодическому возмущающему моменту и демпфирующему моменту. Согласно методу Мельникова [3] условия пересечения сепаратрис можно записать как

$$M_\delta < M_\varepsilon,\tag{24}$$

для рассматриваемых двух областей  $A_0$  и  $A_1$  функции (22) и (23) представим в виде

$$M_\varepsilon^{(k)} = -\varepsilon I_\pm^{(k)} \sin(\omega t_0 + \phi_0),\tag{25}$$

$$M_\delta^{(k)} = -\delta J_\pm^{(k)}, \quad k = 0, 1,\tag{26}$$

где

$$I_\pm^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\pm^{(k)} \sin \alpha_\pm^{(k)} \sin(\omega t) dt,\tag{27}$$

$$J_\pm^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \sin^2 \alpha_\pm^{(k)}) (\sigma_\pm^{(k)})^2 dt.\tag{28}$$

Несобственные интегралы (27) и (28) вычисляются с учетом решений (13), (14) и (16), (17). Условие (24) для областей  $A_0$  и  $A_1$  для нового параметра демпфирующего момента  $\Delta = \delta/\varepsilon$  в силу соотношений (25)–(28) запишется следующим образом:

$$\Delta < \frac{I_\pm^{(0)}}{J_\pm^{(0)}} = \Delta_0 \quad (\text{для области } A_0),\tag{29}$$



$$\Delta < \frac{I_{\pm}^{(1)}}{J_{\pm}^{(1)}} = \Delta_1 \quad (\text{для области } A_1), \quad (30)$$

В силу решений (13), (14), (16), (17) и интегралов (27), (28) параметры (29) и (30) являются функциями  $a$ ,  $b$  и  $\omega$

$$\Delta_k = \Delta_k(a, b, \omega), \quad k = 0, 1. \quad (31)$$

Критерии (31) определяют поведение возмущенной системы (7) или (20) в окрестности сепаратрис.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Будем изучать поведение возмущенной системы (20) вблизи сепаратрис путем численного интегрирования методом Рунге – Кутты. Во всех расчетах будем принимать коэффициенты бигармонического момента (1), равными  $a = 0.5$ ,  $b = -1$ . Согласно формуле (9) угол  $\alpha$  в седловой точке на границе между областями  $A_0$  и  $A_1$  равен  $\alpha_S = \arccos\left(-\frac{a}{2b}\right) = 1.3181$ .

На рис. 2 показано влияние возмущающего момента  $m_P = \varepsilon \sin \alpha \cos(\omega t)$  для частоты  $\omega = 1$ , малых параметров  $\varepsilon = 0.01$  и  $\delta = 0$  при следующих начальных условиях:  $\alpha_0 = 0$ ,  $\dot{\alpha}_0 = 1.0607$  и  $\phi_0 = \pi$ . На этом рисунке видно возмущенная фазовая траектория переходит из одной области в другую и, меняя только, например, начальную фазу возмущающей силы  $\phi_0$ , можно получить самые разнообразные траектории. Наличие малого демпфирующего момента  $\delta = 0.01$  при сохранении всех остальных параметров и условий фазовый портрет принципиально меняется. Фазовые траектории не покидают область  $A_0$  и притягиваются к центру  $c_0$  (рис.3.).

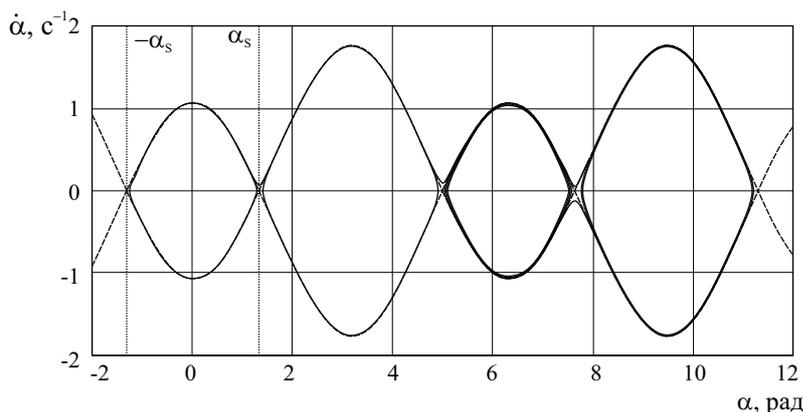


Рис. 2. Фазовый портрет возмущенной системы при  $\varepsilon = 0.01$  и  $\delta = 0$  (сплошная линия) и невозмущенные сепаратрисы (пунктирная линия)

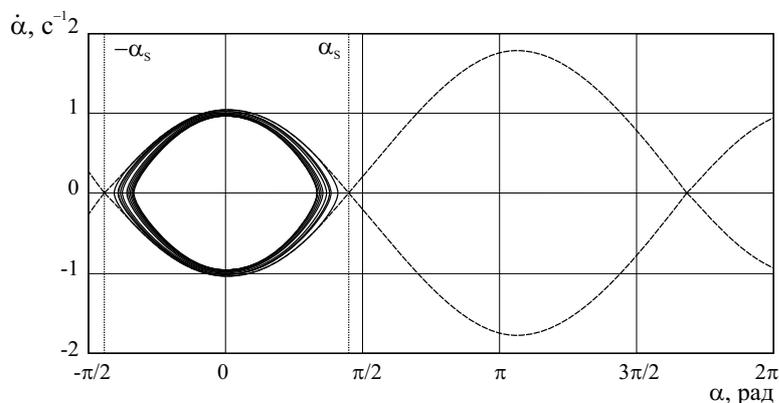


Рис. 3. Фазовый портрет возмущенной системы при  $\varepsilon = 0.01$  и  $\delta = 0.01$  (сплошная линия) и невозмущенные сепаратрисы (пунктирная линия)



С целью проверки критериев (29) и (30) исследуем поведение возмущенной системы в окрестности сепаратрис. Для параметров  $a = 0.5$ ,  $b = -1$  и частоты  $\omega = 1$  получаем по формулам (29) и (30), с учетом (26) и (27) следующие значения критериев для областей  $A_0$  и  $A_1$ :  $\Delta_0 = 0.444$ ,  $\Delta_1 = 0.284$  или критические значения коэффициента демпфирующего момента  $\delta_0 = \varepsilon\Delta_0 = 0.00444$ ,  $\delta_1 = \varepsilon\Delta_1 = 0.00284$ .

На рис. 4 показаны результаты численного моделирования при начальных условиях вблизи сепаратрисы:  $\alpha_0 = -\alpha_s - 0.05 = -1.3681$ ,  $\dot{\alpha}_0 = 0.07$  и  $\phi_0 = \pi/2$ , когда коэффициента демпфирующего момента меньше критического значения  $0.04 = \delta < \delta_0$ . Фазовая траектория делает несколько оборотов в области  $A_0$ , а затем переходит в область  $A_{-1}$  — наблюдается хаос. При  $0.05 = \delta > \delta_0$  и тех же начальных значениях возмущенная траектория только один раз пересекает невозмущенную сепаратрису, после чего остается в области  $A_0$  (рис. 5).

Аналогичные результаты получают при моделировании возмущенного движения в области  $A_1$ . Результаты моделирования подтверждают высокую точность критериев, найденных на основе метода Мельникова.

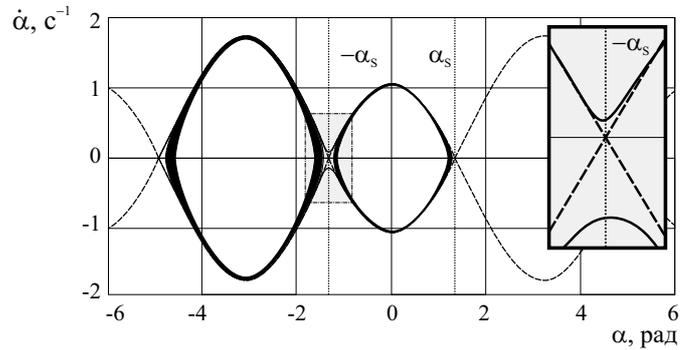


Рис. 4. Возмущенная траектория при коэффициенте демпфирующего момента меньше критического значения  $0.04 = \delta < \delta_0$

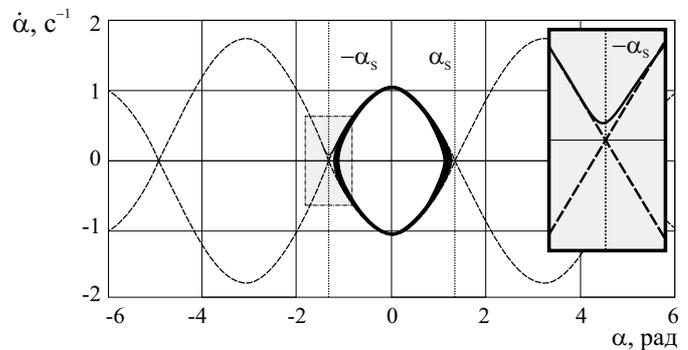


Рис. 5. Возмущенная траектория при коэффициенте демпфирующего момента больше критического значения  $0.05 = \delta > \delta_0$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе авторами сделана попытка описания переходных процессов, возникающих при спуске космического корабля в атмосфере планеты методами хаотической механики, в частности методом Мельникова. Установлено, что хаотические движения могут возникать в окрестности невозмущенной сепаратрисы в рассмотренной задаче. Критерии возникновения хаоса, полученные методом Мельникова, хорошо согласуются с результатами численных исследований.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00355а).*

## Библиографический список

1. Асланов В.С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004.
2. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
3. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. об-ва. 1963. Т. 12. С. 1–56.
4. Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. N.Y.: Springer, 1990.