



УДК 539.3

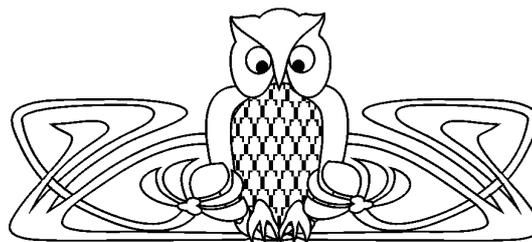
## ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

А.А. Буренин, В.Е. Рагозина, Ю.Е. Иванова

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
лаборатория механики деформируемого твердого тела  
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru, ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru

Одномерный процесс образования и последующего движения плоской поперечной ударной волны изучается на основе решений соответствующего нелинейного эволюционного уравнения. Данное уравнение определяет поведение решения в прифронтной области волнового процесса и следует из внутреннего ряда метода сращиваемых асимптотических разложений. Проводится сравнительный анализ переходных процессов деформаций изменения формы и объема и указываются их принципиальные отличия. В качестве модельных примеров рассматриваются решения ряда конкретных краевых задач динамического сдвигового деформирования.

**Ключевые слова:** нелинейная упругость, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, эволюционное уравнение.



**The Evolutionary Equation for Wave Processes of the Shift Deformation**

A.A. Burenin, V.E. Ragozina, Yu.E. Ivanova

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS,  
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics  
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru, ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru

One-dimensional process of formation and the subsequent motion of a flat cross shock wave is studied on the basis of solutions of the corresponding nonlinear evolutionary equation. This equation defines behaviour of the solution in front area of wave process and follows from interior lines of a method of matched asymptotic expansions. Comparative transient analysis of strains of a deformation and volume will be carried out and their basic differences are specified. In the capacity of model examples solutions of some concrete boundary value problems of a dynamic shift straining are observed.

**Key words:** nonlinear elasticity, incompressibility, shock wave, method of perturbations, the evolutionary equation.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно [1–4], что нелинейные переходные процессы объемного деформирования при исключении факторов диссипации и дисперсии могут быть описаны на основе решений нелинейного эволюционного уравнения, называемого уравнением Хопфа, или уравнением квазипростых волн. Учет диссипации приводит к уравнению Бюргерса [3], включение дисперсии описывается уравнением Кортвега-де Вриза [3]. Прифронтная область плоской одномерной продольной ударной волны, движущейся в нелинейно упругой изотропной среде, определяется решением уравнения Хопфа [5]. Динамика сдвигового деформирования в отличие от объемного не имеет аналогий с газовой динамикой и является значительно менее изученным процессом. В общем случае в твердом теле нелинейные волновые процессы изменения объема и формы взаимосвязаны. Предположение о несжимаемости упругой среды позволяет выделить формоизменение как самостоятельное явление и рассматривать его независимо от предварительных объемных деформаций. В этом случае применение метода малого параметра приводит к эволюционному уравнению, отличному от уравнения Хопфа. Эти отличия на математическом уровне характеризуют различия механических процессов динамического объемного и сдвигового деформирования. С целью изучения таких отличий в статье рассматривается ряд краевых задач для наиболее простого примера плоской сдвиговой волны. Следует ожидать, что найденные при этом свойства решений будут проявляться и в задачах деформирования сжимаемых сред. Представляется полезным объединение метода малого параметра и варианта лучевого метода [6] для ударного деформирования с целью построения решений многомерных краевых задач.

### 1. ОБЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И РАССМАТРИВАЕМАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Замкнутая система уравнений, определяющих поведение нелинейно упругой изотропной несжимаемой среды в пространственной декартовой системе координат Эйлера  $x_1, x_2, x_3$ , имеет вид

$$v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j},$$



$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), & \sigma_{ij} &= -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \dots \\ I_1 &= \alpha_{ii}, & I_2 &= \alpha_{ij}\alpha_{ji}, & \dot{u}_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t}, & u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_i$  и  $v_i$  — компоненты вектора перемещений и вектора скорости,  $\alpha_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений Эйлера – Коши,  $\rho = \text{const}$  — плотность среды,  $p_0$  — добавочное гидростатическое давление,  $W$  — функция упругого потенциала,  $\mu$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $k$  — упругие модули среды,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. В формуле для потенциала  $W$  перед некоторыми слагаемыми выбран знак минус, исходя из знаков перед инвариантами  $I_1$ ,  $I_2$ , с тем, чтобы упругие модули были положительными. По повторяющемуся индексу в формулах (1) и далее проводится суммирование, многоточием обозначаем невыписанные слагаемые с более высоким порядком малости.

Система (1) как следствие интегральных законов сохранения имеет место всюду за исключением поверхностей сильных разрывов. При возникновении таких поверхностей на них необходимо учитывать дополнительные краевые условия — геометрические, кинематические и динамические условия совместности [7–8]:

$$\begin{aligned} [f_{,i}] &= \left[ \frac{df}{dn} \right] n_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\alpha} x_{i,\beta}, & [f] &= -G \left[ \frac{df}{dn} \right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \\ [\rho(v_i n_i - G)] &= 0, & [\sigma_{ij}] n_j &= \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \\ \sigma_{ij}^+ [v_i] n_j &= \rho^+(v_j^+ n_j - G) \left\{ \frac{[v_i][v_i]}{2} + [e] \right\} - [q_j] n_j, \\ \frac{df}{dn} &= f_{,i} n_i, & x_{i,\alpha} &= \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha}, & a_{\alpha\beta} &= x_{i,\alpha} x_{i,\beta}, & a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} &= \delta_\gamma^\alpha, \\ [f] &= f^+ - f^-, & \frac{\delta f}{\delta t} &= \dot{f} + f_{,i} G n_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n_i$  — компоненты единичной внешней нормали к ударной волне  $\Sigma$ , направленной в сторону ее распространения,  $G$  — скорость движения волны в направлении нормали,  $y^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — поверхностные координаты,  $e$  — плотность внутренней энергии,  $q_j$  — компоненты вектора теплового потока. Индексами «+» и «-» в системе (2) обозначены предельные значения разрывной величины, вычисленные перед и сразу за волной  $\Sigma$ . Под обозначением « $f$ » понимаются компоненты любого тензорного поля в пространстве.

Далее рассматриваем полупространство  $x_1 \geq 0$ . В момент  $t = 0$  на его граничной плоскости  $L$  ( $x_1 = 0$ ) проводится динамическое сдвиговое нагружение, результатом которого считаем поле перемещений  $u = u_2(x_1, t)$ ,  $u_1 = u_3 = 0$ . Считаем, что нагружение сразу либо впоследствии приводит к возникновению ударной волны. До момента  $t = 0$  деформации в среде отсутствуют. Перемещения на границе — известные функции, так что

$$u|_{x_1=0} = g(t). \quad (3)$$

Если в формуле (3)  $g'(0) \neq 0$ , то ударная волна образуется сразу. В остальных случаях необходим дополнительный анализ. Как следует из систем (1), (2), скорость ударной волны зависит от ее интенсивности и предварительных деформаций [9]:

$$\begin{aligned} G &= C(1 + \beta(\gamma^2 - 3u_1^+ \gamma + 3(u_1^+)^2) + \dots)^{1/2}, & \gamma &= [u_{,1}], \\ \beta &= \frac{a + b + \kappa + d}{\mu}, & C^2 &= \mu \rho^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$



причем на этой волне должны быть выполнены краевые условия:

$$[u]_{\Sigma} = 0, \quad [\sigma_{11}]_{\Sigma} = 0. \quad (5)$$

Для рассматриваемой задачи из общей системы уравнений (1) получим следующую систему уравнений движения:

$$u_{,11}(1 + 3\beta u_{,1}^2) + \dots = \ddot{u}C^{-2} + \dots, \quad (6)$$

$$\mu^{-1}p_{,1} = 2\alpha u_{,1}u_{,11} + \dots, \quad \alpha = \frac{a - b - \kappa/4}{\mu} - 1.$$

Отметим, что основной интерес при решении связан с определением поля перемещений, так как определить по найденным перемещениям функцию  $p$  не представляет труда. Интегрирование нелинейного дифференциального уравнения второго порядка проведем на основе метода сращиваемых асимптотических разложений.

## 2. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО СДВИГОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

С целью применения метода возмущений определим новые безразмерные переменные:

$$s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w(s, m) = \frac{u(x_1, t)}{CT} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (7)$$

где  $T$  — характерное время задачи. Считаем, что за такое время возникающие на границе перемещения много меньше, чем проходимое волной в линейном приближении расстояние, что и определяет появление малого параметра задачи. Если  $g'(0) \neq 0$ , то таким параметром может быть величина  $\varepsilon = g'(0)C^{-1}$ . В новых переменных из системы (6) для поля перемещений получим

$$w_{,ss}(1 + 3\beta\varepsilon^2 w_{,s}^2) + \dots = w_{,mm} + \dots$$

От условия (3) перейдем к условию  $w|_{s=0} = f(m)$ . Искомую функцию  $w(s, m)$  представим асимптотическим рядом по четным степеням малого параметра:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k}(s, m)\varepsilon^{2k} \approx w_0(s, m) + \varepsilon^2 w_2(s, m) + \varepsilon^4 w_4(s, m) + \dots$$

Относительно неизвестных функций  $w_0, w_2, w_4 \dots$  получаем краевую задачу, не учитывающую условия (5) и (4). Ее решение назовем внешним разложением [10], оно определяется методом последовательных линейных приближений:

$$w(s, m) = f(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\beta}{2} (f'(\xi))^3 s + \varepsilon^4 \beta^2 \left\{ \frac{9}{8} (f'(\xi))^4 f''(\xi) (s^2 + s\xi - s) - \frac{39}{40} (f'(\xi))^5 s \right\} + \dots, \quad (8)$$

$$\xi = m - s.$$

Отметим, что при определении ряда (8) можно формально учесть условия (4), (5), записанные в переменных  $s, m$ , что приведет к такому же результату. В любом случае, если есть ударная волна, то ее скорость  $G$  больше  $C$ , поэтому в прифронтовой области, где  $m - s < 0$ , решение (8) неприменимо, так как  $f$  определена для неотрицательного аргумента.

Построение дополнительного, внутреннего [10] решения в прифронтовой области необходимо провести для переменной  $s \sim \varepsilon^{-2}$ , тогда ряд (8) теряет равномерность. Это приводит к внутренним переменным  $n = \varepsilon^2 s, p = s - m, w = w(n, p)$ . В таких переменных от уравнения (6) переходим к уравнению

$$(w_{,pp} + 2\varepsilon^2 w_{,pn} + \varepsilon^4 w_{,nn}) \{1 + 3\beta\varepsilon^2 (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2\} + \dots = w_{,pp}, \quad (9)$$



а из формулы (4) и уравнения эйконала  $t = \int_{x_1^0}^{x_1} G(\zeta) d\zeta$  ( $x_1^0$  — начальная координата образования ударной волны) следует

$$(1 - \varepsilon^2 p'(n))^2 \{1 + \beta \varepsilon^2 (w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+)^2 + (w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+)(w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-) + (w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-)^2 + \dots\} = 1, \quad (10)$$

где  $p(n)$  — неизвестная функция, определяющая положение переднего фронта ударной волны. Предварительные деформации считаем величинами одного порядка малости с решением за волной. Новую неизвестную функцию  $w(n, p)$ , как и функцию  $p(n)$ , представим асимптотическими рядами вида

$$w(n, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k} \varepsilon^{2k} \approx w_0(n, p) + \dots, \quad p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} \varepsilon^{2k} \approx p_0(n) + \dots \quad (11)$$

В результате подстановки ряда для  $w(n, p)$  в уравнение (9) в нулевом шаге метода получим

$$v_{0,n} + \frac{3\beta}{2} v_0^2 v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}. \quad (12)$$

Это уравнение определяет основное поведение решения в прифронтной области волнового процесса. По своему типу оно должно быть отнесено к эволюционным уравнениям, поскольку отражает нелинейную зависимость характеристик от строящегося решения, тем самым давая возможность описания процесса опрокидывания исходного непрерывного решения с формированием ударной волны. Отличие этого уравнения от уравнения Хопфа является зависимость угла наклона характеристик от квадрата функции  $v_0$ , а не от ее первой степени. Такое простое математическое обстоятельство указывает на различия в появлении и движении объемных и сдвиговых ударных волн. Как будет следовать из дальнейшего, на основе уравнения (12) и его решений можно рассматривать различные вопросы, от кинематики ударной волны до определения поля перемещений в области деформирования.

### 3. ФОРМИРОВАНИЕ И КИНЕМАТИКА СДВИГОВОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Непрерывное решение уравнения (12) будет удобным представить в параметрическом виде вдоль характеристик:

$$v_0 = h(y), \quad y = p - \frac{3\beta}{2} n h^2(y), \quad y \leq 0, \quad (13)$$

где  $h(y)$  — функция, конкретный вид которой определяется краевыми условиями. Здесь такие условия задаются в пограничной для внешнего и внутреннего решений области, где  $l = \varepsilon^k s$ ,  $0 < k < 2$ . На структуре краевого условия для нулевого шага при этом отразится только вид функции  $f(m)$ , поэтому можно считать  $h(y) = -f'(-y)$ . Из уравнения (13) следует, что росту функции  $h(y)$  должно отвечать пересечение характеристик. В пределах выбранной модели твердого тела однозначность решения сохраняется за счет определения поверхности разрывов функции  $v_0(n, p)$ . Появление такой поверхности определяется наименьшим из возможных значений переменной  $n$ , для которых обращаются в бесконечность производные  $v_{0,p}$  и  $v_{0,n}$  гладкого решения. Для этих производных имеем:

$$v_{0,n} = -\frac{3\beta}{2} \frac{h^2 h'}{1 + 3\beta h h' n}, \quad v_{0,p} = \frac{h'}{1 + 3\beta h h' n}, \quad h' = \frac{dh(y)}{dy}, \quad (14)$$

поэтому наименьшее значение  $n$  должно отвечать максимуму  $|h h'|$ , причем необходимо выполнение условия  $h h' < 0$ . Здесь также сразу отметим, что координата образования разрыва не уточняется последующими шагами метода, поскольку их уравнения имеют такие же характеристики, как и уравнение (12).

Для определения кинематики ударной волны в нулевом приближении из уравнений (10) и (11) получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dp_0(n)}{dn} = \frac{\beta}{2} ((v_0^+)^2 + v_0^+ v_0^- + (v_0^-)^2) + \dots, \quad v_0^\pm = w_{0,p}^\pm(n, p_0(n)). \quad (15)$$



Его решение представим на основе подхода, изложенного в [4] для уравнения Хопфа. Суть его состоит в том, что при условии существования обратной к  $h$  функции  $H = h^{-1}$ , выбрать на ударной волне в качестве основной независимой переменной величину  $v_0^-$ . Для ударной волны известно, что в каждый момент ее существования наряду с уравнением (15) к ней с двух сторон подходят характеристики, вдоль которых

$$p = \frac{3\beta}{2}(v_0^+)^2 n + H(v_0^+), \quad p = \frac{3\beta}{2}(v_0^-)^2 n + H(v_0^-). \quad (16)$$

Из уравнений (15), (16) легко получить систему

$$\frac{dn}{dv_0^-} \left\{ \frac{(v_0^+)^2}{2} + \frac{v_0^+ v_0^-}{2} - (v_0^-)^2 \right\} = 3v_0^- n + \frac{1}{\beta} \frac{dH(v_0^-)}{dv_0^-},$$

$$H(v_0^+) - H(v_0^-) = \frac{3\beta}{2} n ((v_0^-)^2 - (v_0^+)^2),$$

которая будет замкнутой относительно функций  $v_0^+(v_0^-)$  и  $n(v_0^-)$ . Она допускает точные аналитические решения в ряде случаев. К примеру, если ударная волна формируется в передней части исходного возмущения и  $v_0^+ \equiv 0$ , то общее решение можно представить в виде

$$n(v_0^-) = \frac{1}{(v_0^-)^3} \left\{ -\frac{1}{\beta} \int_{v^*}^{v_0^-} \zeta \frac{dH(\zeta)}{d\zeta} d\zeta + n^*(v^*)^3 \right\}, \quad (17)$$

где  $n^*$  и  $v^* = v_0^-(n^*)$  — значения переменных, от которых идет развитие разрыва, либо начальная точка для повторно ставящейся задачи Коши при условии, что  $H(v_0^-)$  представима несколькими ветвями функции. Подстановка найденной функции (17) во второе из уравнений (16) позволяет определить положение фронта ударной волны в параметрическом виде. Такие решения интересны в случае, когда необходимо проследить за состоянием на ударной волне, не обращаясь к решению в остальной области. Получаемая при этом информация может быть полезной при разработке численных схем с выделением поверхностей разрывов. Также данные, получаемые из формулы (17), можно использовать как информацию о разрывах производных первого порядка и включать в схемы лучевых рядов [11–13] для определения последующих разрывов.

Рассмотрим ряд примеров краевых условий для общего решения (17). Во-первых, остановимся на случае, когда  $[v_0]_{t=0} \neq 0$ . Наиболее простой вид имеет условие  $h(y) = A + By$ , для которого  $A \neq 0$ , а знак  $B$  определяет рост либо спад нагрузки на границе. В этом случае  $v_0^+ \equiv 0$ ,  $v_0 = v_0^-$  и из формулы (17) получаем

$$n = -\frac{1}{2\beta B v_0} + \frac{A^2}{2\beta B v_0^3}.$$

Для экспоненциального затухания нагрузки, при котором  $h(y) = Ae^y$ , также получим

$$n = \frac{1}{\beta v_0^2} \left( -1 + \frac{A}{v_0} \right).$$

В этих случаях отличия от распространения объемного деформирования носят не столько качественный, сколько количественный характер. В обоих случаях с ростом переменной  $n$  величина  $v_0$  асимптотически приближается к нулю. Далее рассмотрим случай краевого условия в виде полуокружности, рассмотренного в [4] для уравнения квазипростых волн:  $h^2 + (y + A)^2 = A^2$ ,  $h \leq 0$ . Для объемной волны такое условие за счет вертикальной касательной при  $y = 0$  приводит к мгновенному возникновению ударной волны, но с нулевым скачком в начале. Для сдвигового деформирования ударная волна также возникает при значении параметра  $y = 0$ , но от расстояния  $n = (3\beta A)^{-1}$ , которое определяется как свойствами среды, так и максимумом нагрузки на границе. В этом случае решение состоит из двух ветвей. При росте модуля интенсивности от 0 до  $A$  из формулы (17) получим решение

$$n(v_0) = -\frac{\sqrt{A^2 - v_0^2}}{2\beta v_0^2} + \frac{A^2}{2\beta v_0^3} \arcsin \frac{v_0}{A},$$



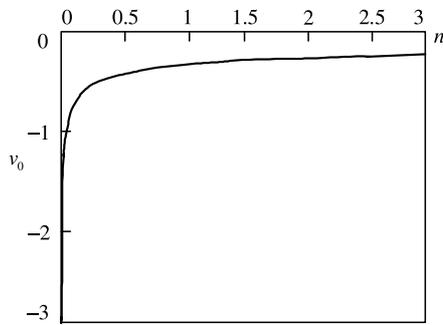
справедливое в области  $(3\beta A)^{-1} \leq n \leq \pi(4\beta A)^{-1}$  и  $-\pi/2 \leq y \leq 0$ . Дальнейшее поведение определяется функцией

$$n(v_0) = \frac{A^2}{2\beta v_0^2} \left\{ \frac{-\pi}{v_0} + \frac{\sqrt{A^2 - v_0^2}}{A^2} - \frac{1}{v_0} \arcsin \frac{v_0}{A} \right\}, \quad n \geq \frac{\pi}{4\beta A}.$$

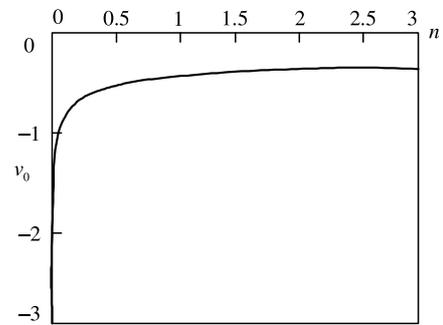
Для синусоидального затухания функции  $h(y) = A \sin y$ ,  $A > 0$  в случае процесса объемного деформирования наибольший из углов наклона касательной к функции  $h(y)$  для значения  $y = 0$  обеспечивает формирование ударной волны в передней части возмущения, так что  $v_0^+ = 0$ . Для сдвигового деформирования самое раннее обращение в бесконечность производных  $v_{0,n}$  и  $v_{0,p}$  в формулах (14) происходит при  $y = -\pi/4$ . Это означает, что ударная волна возникает внутри возмущенной области и для построения решения на волне необходимо рассматривать систему уравнений (15) и (16). Из нее после несложных преобразований следует система

$$\frac{dv^\pm}{dn} = \frac{\beta}{2} \left\{ (v^\pm)^2 + v^+v^- - 2(v^\pm)^2 \right\} \frac{1}{3\beta v^\pm n + \frac{dH(v^\pm)}{dv^\pm}}.$$

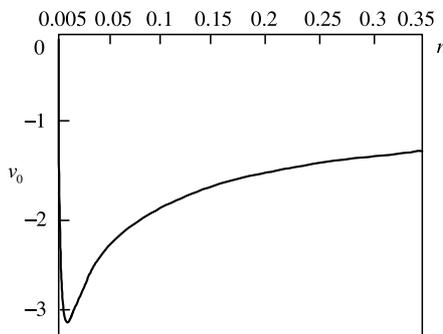
В нашем случае здесь  $H(v^\pm) = \arcsin \frac{v^\pm}{A}$ , для  $v^- > -A$ , т.е. до характеристики, где  $y = -\frac{\pi}{2}$ . При  $-\frac{\pi}{2} \leq y < -\pi$  считаем  $H(v^-) = -\pi + \arcsin(-\frac{v^-}{A})$ . Разрыв начинается существование от значения  $v^- = v^+ = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ ,  $[v] = 0$  в точке  $n^* = \frac{2}{3\beta A^2}$ . Ударная волна идет по области предварительных деформаций и затем выходит в недеформированную область. Отметим, что если не ограничиваться значениями  $-\pi \leq y \leq 0$  (одиночным импульсом), то образование повторной ударной волны произойдет для  $y = -\frac{5\pi}{4}$  и  $n^* = \frac{2}{3\beta A^2}$ , т.е. эта волна образуется раньше, чем для объемного деформирования, а координата образования повторного разрыва не зависит от предварительных деформаций. На рисунке приведены данные численных расчетов для перечисленных краевых условий.



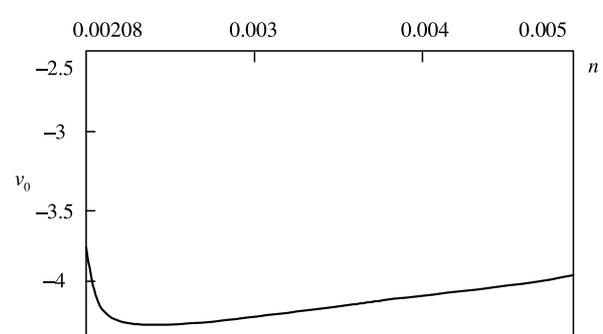
а



б



в



г

Зависимость интенсивности ударной волны  $v_0$  от пространственной координаты  $n$ : а – линейно затухающий импульс на границе  $h(y) = A_1 + B_1 y$ ; б – экспоненциальное затухание нагрузки на границе  $h(y) = A_2 e^y$ ; в – нагружение по дуге окружности от 0 до  $L = -\sqrt{-y^2 - 2A_3 y}$ ; г – синусоидальная нагрузка  $h(y) = A_4 \sin y$ . Значения констант при счете:  $A_1 = -3$ ,  $B_1 = -4$ ,  $A_2 = -3$ ,  $A_3 = 3$ ,  $A_4 = 4$ ,  $\beta = 20$



Рассмотренные варианты поведения исходных импульсов на ударной сдвиговой волне показывают как количественные, так и качественные отличия этого процесса от распространения объемных волн.

#### 4. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ

Ранее [14] решения эволюционных уравнений для задач ударного деформирования в твердом теле рассматривались в пределах квадратичных либо линейных функций времени для перемещений на нагружаемой поверхности. Рассмотрим подход, позволяющий применить метод сращиваемых асимптотических разложений с решением уравнения (12) для произвольных функций времени, задающих краевые условия. С этой целью заметим, что уравнение (12) имеет общее решение вдоль характеристик вида

$$v_0 = F \left( p - \frac{3\beta}{2} n v_0^2 \right), \quad (18)$$

где  $F$  — произвольная функция, определяемая краевыми условиями. На уравнение (18) также можно смотреть как на соотношение

$$w_{0,p} = F \left( p - \frac{3\beta}{2} n w_{0,p}^2 \right), \quad (19)$$

которое по типу может быть отнесено к обыкновенным дифференциальным уравнениям, не содержащим искомой функции  $w_0(n, p)$  (так как переменная  $n$  играет здесь роль параметра). Для таких уравнений задача интегрирования распадается на два варианта. В первом необходимо, чтобы функция  $F$  допускала явное представление производной  $w_{0,p}(n, p)$  с последующим интегрированием полученного уравнения. Это возможно, если функция  $F$  имеет вид некоторых алгебраических либо рациональных уравнений. Второй способ более универсален и связан с параметрическим представлением решения. Остановимся на нем более подробно. Предположим, что  $w_{0,p} = \psi(\delta)$ ,  $p = \varphi(\delta, n)$ , где  $\delta$  — новый параметр, выбор которого достаточно произволен и связан с удобством представления краевых условий. Функции  $\psi(\delta)$  и  $\varphi(\delta, n)$  связаны между собой, как следует из уравнения (19). Тогда для определения функции  $w_0(n, p)$  получим уравнение

$$dw_0 = \psi(\delta, n) \frac{\partial \varphi(\delta, n)}{\partial \delta} d\delta,$$

интегрирование которого дает параметрическое решение:

$$\begin{cases} w_0(n, p) = w_0(n, p(\delta, n)) = W_0(\delta, n), \\ p = p(\delta, n), \end{cases}$$

В качестве примера для такого способа рассмотрим краевое условие

$$u(t)|_{x_1=0} = -\frac{A}{\beta_0} (1 - e^{\beta_0 t}), \quad A > 0, \quad \beta_0 < 0,$$

ему соответствует экспоненциальное затухание начального импульса  $A$  до 0. В переменных (7) внешней области переходим к краевому условию

$$w(s, m)|_{s=0} = B^{-1} (1 - e^{-Bm}), \quad B = -\beta_0 T, \quad \varepsilon = \frac{A}{C}.$$

Предположим, что  $v_0 = \psi(\delta)$ ,  $-\infty < \delta \leq 0$ . Тогда  $p = \varphi(\delta) = \frac{\delta}{B} + \frac{3\beta}{2} n e^{2\delta}$ , поэтому

$$\begin{cases} W_0(n, \delta) = -\frac{e^\delta}{B} - \beta n e^{3\delta} + K_0(n), \\ p = p(\delta, n) = \frac{\delta}{B} + \frac{3\beta}{2} n e^{2\delta}, \end{cases} \quad (20)$$



где  $K_0(n)$  — неопределенная функция, которую можно определить из условия на переднем фронте ударной волны:

$$w(n, p)|_{\Sigma} = 0. \quad (21)$$

Для определения положения ударной волны на нулевом шаге метода необходимо решить уравнение

$$\frac{dp}{dn} = \frac{\beta}{2} v_0^2(n, p(n)), \quad (22)$$

но

$$\frac{dp}{dn} = \frac{\partial \varphi(n, \delta)}{\partial n} + \frac{\partial \varphi(n, \delta)}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dn},$$

поэтому теперь ищем не функцию  $p(n)$ , а функцию  $\delta(n)$  или обратную к ней. При этом получаем уравнение

$$\frac{dn(\delta)}{d\delta} = -3n - \frac{1}{\beta B} e^{-2\delta}$$

и на основе его решения с учетом начальных условий  $n(0) = 0$  записываем для ударной волны:

$$\begin{cases} n(\delta) = \frac{1}{\beta B} \{e^{-3\delta} - e^{-2\delta}\}, \\ p(\delta) = \frac{\delta}{B} + \frac{3}{2B} \{e^{-\delta} - 1\}. \end{cases}$$

Полученные формулы позволяют определить неизвестную функцию  $K_0(n) \equiv 0$ . При сращивании с внешним рядом (8) в пограничной области получаем, что построенное решение (20) отвечает двум шагам внешнего ряда. Этим и заканчивается решение для нулевого шага. Не представляют дополнительных трудностей другие краевые условия типа логарифмических или тригонометрических функций.

Возвращаясь к эволюционному уравнению (12) и его решениям (19), рассмотрим еще несколько примеров, позволяющих оценить влияние нелинейности (даже слабой) на искомое решение. Остановимся на краевых условиях, позволяющих строить решение в координатах  $n, p$ . Для начала рассмотрим функцию  $g(t) = v_0 t + at^2/2$ ,  $v_0 \neq 0$ . Для нее краевое условие в переменных  $m, s$  принимает вид

$$w|_{s=0} = m + \frac{Am^2}{2}, \quad A = \frac{a\Gamma}{v_0}, \quad \varepsilon = \frac{v_0}{C}. \quad (23)$$

Внешнее решение определяется подстановкой условия (23) в ряд (8) и поэтому подробно не рассматривается. Для внутреннего решения примем

$$v_0(n, p) = B_1 + B_2 \left( p - \frac{3\beta}{2} v_0^2 n \right), \quad (24)$$

где  $B_1, B_2$  — неопределенные константы, которые определяются при сопоставлении внутреннего и внешнего решений. Из формулы (24) получаем

$$\begin{aligned} v_0(n, p) &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(B_1 + B_2 p)B_2 \gamma_0 n}}{2\gamma_0 B_2 n}, \quad \gamma_0 = \frac{3\beta}{2}, \\ w_0(n, p) &= \frac{-6B_2^2 \gamma_0 n p + (1 + 4(B_1 + B_2 p)B_2 \gamma_0 n)^{3/2}}{12\gamma_0^2 B_2^3 n^2} + \varphi_0(n), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\varphi_0(n)$  — неизвестная функция, определяемая из условия (21). Из формул (25) следует, что нелинейность задачи приводит к искажению исходного воздействия, так что зависимость от времени изменяется от квадратичной до содержащей степени  $3/2$  и  $1$ . Отметим, что сходное краевое условие для задачи объемного деформирования приводит к прифронтовому решению, практически повторяющему краевое условие с учетом слабого затухания по переменной  $n$ . Этот эффект указывает как на



влияние нелинейности, так и на отличие сдвиговой волны от объемной. Отметим, что применение правила Лопиталья к формулам (25) приводит к предельным результатам:

$$\lim_{n \rightarrow 0} v_0(n, p) = B_1 + B_2 p, \quad \lim_{n \rightarrow 0} w_0(n, p) = B_1 p + \frac{B_2 p^2}{2}, \quad (26)$$

которыми можно по непрерывности доопределить решение в нуле. Тем самым видно, что исходное воздействие передается по среде неискаженным только при  $n \sim 0$ . Из сравнения формул (26) с внешним решением следует  $B_1 = -1$ ,  $B_2 = A$ . Положение волнового фронта определяется на основе уравнения (22) и может быть представлено неявной зависимостью

$$\left( \sqrt{1 + 4A\gamma_0 n(-1 + Ap)} - 1 \right) \sqrt{2\sqrt{1 + 4A\gamma_0 n(-1 + Ap)} + 1} = -2\sqrt{3}\gamma_0 A n,$$

которая после ряда алгебраических преобразований дает кубическое уравнение для функции  $p(n)$ . Корень этого уравнения, отвечающий поставленной задаче:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{\left( \cos^2 \frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4} \right) \left( \cos^2 \frac{\varphi}{3} + \frac{1}{4} \right) + A\gamma_0 n}{A^2 \gamma_0 n}, & \cos \varphi = -2\sqrt{3}\gamma_0 A n, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (n = 0). \end{cases}$$

Отсюда легко определяется функция  $\varphi_0(n)$ , что и заканчивает решение данного шага.

Теперь рассмотрим краевое условие

$$u(x_1, t)|_{x_1=0} = \sqrt{at + b} - \sqrt{b}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

От него в переменных  $s, m$ ,  $w(s, m)$  переходим к условию

$$w|_{s=0} = \frac{m}{\sqrt{Am + 1} + 1}, \quad A = \frac{aT}{b}, \quad \varepsilon = \frac{a}{C\sqrt{b}}.$$

Для такого условия и внешнего решения в уравнении (18) достаточно выбрать

$$v_0(n, p) = -\frac{1}{2\sqrt{1 - D(p - \gamma_0 v_0^2(n, p)n)}},$$

где  $D$  — неопределенная константа. Отсюда следует явное решение

$$v_0(n, p) = -\sqrt{\frac{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}}{2D\gamma_0 n}},$$

$$w_0(n, p) = -\frac{1}{3D\sqrt{2D\gamma_0 n}} \left( \sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}} \right)^3 +$$

$$+ \sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2D}} \frac{1}{\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}}} + \varphi_0(n),$$

которое также показывает искажение исходного воздействия (меняется тип зависимости от времени).

Для определения положения ударной волны необходимо проинтегрировать уравнение Дарбу:

$$\frac{dg}{dn} = \frac{g}{3n} \left( 1 + \frac{2D\gamma_0 n}{g^2 + D\gamma_0 n} \right), \quad g = -1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}.$$

Его решение с учетом краевого условия  $\lim_{n \rightarrow 0} p(n) = 0$  имеет вид неявной зависимости

$$-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n} = \ln \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}}} \right\} +$$



$$+ \frac{3D\gamma_0}{2} \frac{n}{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}} - 3 - \ln \sqrt{\frac{2}{D\gamma_0}}.$$

На основании этого уравнения функция  $\varphi_0(n)$  может быть определена каким-либо численным методом. Эта задача показывает, что решения в явном виде имеют наряду с достоинствами и ряд отрицательных свойств. В частности, нет гарантии, что на каждом этапе вычислений будем получать результаты в необходимой, удобной для нас форме.

Рассмотрим также еще один вариант краевого условия

$$u|_{x_1=0} = \frac{4A}{5} t^{5/4}, \tag{27}$$

интересный тем, что функция  $(g'(t))^2$  имеет вертикальную касательную в нуле, что приводит к возникновению ударной волны мгновенно, но при этом ее интенсивность изменяется от нуля. Условие (27) в безразмерных переменных имеет вид

$$w(s, m)|_{s=0} = \frac{4}{5} m^{5/4}, \quad \varepsilon = \frac{AT^{1/4}}{C},$$

поэтому во внутреннем решении выберем  $v_0 = -(-p + \gamma_0 n v_0^2)^{1/4}$ , откуда получаем

$$v_0(n, p) = -\sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}}, \tag{28}$$

$$w_0(n, p) = \frac{4}{5} \left( \frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}} \right)^{5/2} - \frac{2\gamma_0 n}{3} \left( \sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}} \right)^3 + \varphi_0(n),$$

где  $\varphi_0(n)$  — как обычно, неопределенная функция. Это решение для поля перемещений показывает как исходную зависимость от  $t$  в степени  $5/4$ , так и дополнительную зависимость от степени  $3/4$ , которая начинает влиять на решение на больших расстояниях (при  $n \sim 1$ ). Для определения положения переднего фронта ударной волны решаем уравнение

$$\frac{dg}{dn} = \frac{\gamma_0^2 n}{6g} - \frac{\gamma_0}{6}, \quad g = \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}},$$

которое также является вариантом уравнения Дарбу. Интересно, что в этом случае решение задачи Коши  $g(0) = 0$  совпадает с одним из особых решений. При этом получаем параболическую зависимость  $p = \frac{5}{36} \gamma_0^2 n^2$ , ее подстановка в решение (28) приводит к простому результату  $\varphi_0(n) = 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в статье примеры решения ряда краевых одномерных задач об ударном нагружении несжимаемого полупространства показывают высокую эффективность описания волновых процессов в твердом теле на основе решений соответствующего эволюционного уравнения. Методика, описанная в статье, без труда переносится на одномерные задачи объемного ударного деформирования, которые в прифронтной области ударной волны решаются на основе эволюционного уравнения Хопфа.

Рассмотренные подходы к интегрированию эволюционных уравнений не ограничиваются нулевым шагом метода и легко распространяются на приближения высших порядков. Отметим здесь, что эти приближения являются решениями уравнения вида

$$w_{i,np} + \frac{3\beta}{2} w_{0,p}^2 w_{2,pp} + 3\beta w_{0,pp} w_{0,p} w_{i,p} + \Phi_i(w_0, w_{0,p}, \dots) = 0,$$

где  $\Phi_i$  — функция, определяемая предыдущими шагами. Очевидно, что это уравнение имеет такие же характеристические направления, как и исходное. Это позволяет строить решение в параметрическом



виде с сохранением того же параметра  $\delta$ , что и в нулевом шаге. Явное решение также может строиться, единственной проблемой здесь можно считать большой объем вычислений, хотя в практических целях обычно достаточно ограничиться одним или двумя слагаемыми ряда. Обобщение работы на случай одномерных процессов деформирования с ненулевой кривизной волнового фронта также не представляет проблем и приводит к уточненному эволюционному уравнению [14]. Необходимо отметить важность рассмотренного здесь метода для понимания сути решений для многомерных задач ударного деформирования. В прифронтной области ударной волны основные изменения решения происходят в направлении лучевой координаты, поэтому следует ожидать, что в лучевых координатах окрестность волнового фронта определяется эволюционным уравнением, для которого координата эйконала играет роль параметра. Оценивая практическую значимость проведенных решений, необходимо указать на методику численного счета для ударных волн в твердом теле [15–16], построенную на конечно-разностных расчетах в основной области деформирования и на применении приближенных аналитических решений в прифронтной области ударной волны. В таких численных схемах решения, получаемые на основе метода возмущений, можно считать более точными, чем решения в виде лучевых рядов [11–13]. Все перечисленные обстоятельства определяют большое теоретическое и практическое значение применяемого к задачам ударного деформирования анализа на основе эволюционных уравнений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00001-а) и ДВО РАН (проект 09-III-B-03-077).*

#### Библиографический список

1. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 9. С. 87–158.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. Пелиновский Ю.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984. 164 с.
5. Буренин А.А., Россихин Ю.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 1. С. 103–108.
6. Буренин А.А., Россихин Ю.А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. С. 129–137.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2: 2-е изд. испр. и доп. М.: Наука, 1973.
8. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
9. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
10. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 275 с.
11. Бабичева Л.А., Быковцев Г.И., Вerveйко Н.Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // ПММ. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 145–155.
12. Быковцев Г.И., Власова И.А. Лучевой метод пространственных задач теории идеальной пластичности // Механика деформируемого твердого тела. Новосибирск: Наука, 1979. С. 31–36.
13. Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневост. мат. сб. 1999. Вып. 8. С. 49–72.
14. Иванова Ю.Е., Рагозина В.Е. Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 144–151.
15. Рагозина В.Е., Воронин И.И., Вековшинин Е.Л. Об использовании прифронтной асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами // Проблемы естествознания и производства. 1995. Вып. 115. С. 25–27.
16. Буренин А.А., Зиновьев П.В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.