



МЕХАНИКА

УДК [611.137.83+611.711].577.3:001.57(075.8)

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА В КРУПНЫХ АРТЕРИЯХ ПО ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ

М.А. Елшин, Ю.П. Гуляев

Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: michael_ema@mail.ru, gulvis@yandex.ru

Сформулированы уравнения одномерной динамики тока крови в артериальных системах крупных кровеносных сосудов. Получено аналитическое решение сформулированной системы уравнений и рассмотрены некоторые варианты задания граничных и контактных условий.

Statement Formulating and Solution of the Problem of Blood Dynamics in Arterial Systems, Using the One-Dimensional Theory

M.A. Elshin, J.P. Gulyaev

The equations of the one-dimensional theory of dynamics of a blood-groove in arterial systems of large blood vessels are formulated most. Analytic solution of the formulated system of equation and some variants of edge and contact conditions are proposed.

1. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА В ЧАСТИ АРТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Основная система включает в себя следующие уравнения: упрощенное одномерное дифференциальное уравнение течения вязкой несжимаемой жидкости [3]:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2 \frac{\partial P}{\partial z} - 8\pi\mu \frac{1}{\pi R^2} Q; \quad (1)$$

уравнение неразрывности, которое связывает объемный расход Q с радиальным перемещением стенок сосуда w :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad (2)$$

динамические уравнения осесимметричного движения круговой цилиндрической оболочки по безмоментной теории[1]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial z} - K_2 u; \quad (3)$$

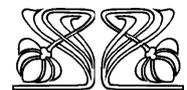
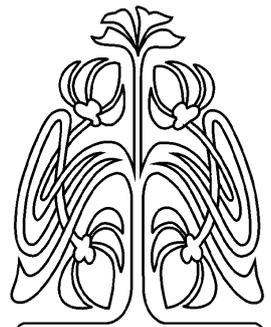
$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P + \frac{T_0}{R^2} w - \frac{T}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - K_1 w; \quad (4)$$

соотношения идеальной упругости стенок сосуда для обобщенного плоского напряженного состояния

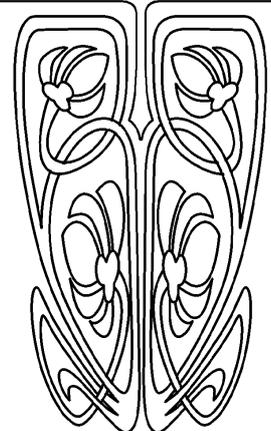
$$S = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{w}{R} \right]; \quad (5)$$

$$T = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{w}{R} \right] \quad (6)$$

или известные соотношения, учитывающие анизотропию стенок сосуда [2]. Таким образом, получаем замкнутую систему уравнений



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





(1)–(6) в частных производных относительно шести неизвестных u, w, Q, T, S, P .

Выразим из уравнения (4) давление и подставим его в уравнения (1)–(3), а также исключим из этих уравнений усилия, используя формулы (5) и (6). В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\pi R^2 \rho h \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} + \pi R \frac{\partial w}{\partial z} \left[\frac{T_0}{R} - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} - k_1 R \right] - \nu \pi R \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \pi R^2 S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - 8\pi \mu \frac{1}{\pi R^2} Q; \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \left[\frac{\nu Eh}{(1-\nu^2)} + S_0 - T_0 \right] + \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - K_2 u. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (7) представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций u, w, Q .

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА

Представим функции u, w, Q в виде гармоник комплексного ряда Фурье:

$$u(z, t) = u(z) e^{i\omega_k t}, \quad w(z, t) = w(z) e^{i\omega_k t}, \quad Q(z, t) = Q(z) e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}.$$

Подставляя их в уравнения (7), получим систему уравнений в частных производных с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} i\omega_k \rho Q &= -\pi R^2 \rho h \omega_k^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \pi R \frac{\partial w}{\partial z} \left[\frac{T_0}{R} - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} - k_1 R \right] - \nu \pi R \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \pi R^2 S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - 8\pi \mu \frac{1}{\pi R^2} Q, \\ i\omega_k w &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad -\rho h \omega_k^2 u = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \left[\frac{\nu Eh}{(1-\nu^2)} + S_0 - T_0 \right] + \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - K_2 u. \end{aligned}$$

Эта система может быть преобразована к матричному виду:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = MH, \quad (8)$$

где

$$H(z) = \begin{pmatrix} Q \\ w \\ u \\ V \\ Z \\ Y \end{pmatrix}, \quad V = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & E & 0 & F & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} A &= -2i\pi R \omega_k, & B &= \frac{1-\nu^2}{Eh} [k_2 - \rho h \omega_k^2], \\ C &= \frac{1-\nu^2}{EhR} \left[\frac{\nu Eh}{1-\nu^2} + S_0 - T_0 \right], & D &= \frac{i\omega_k \rho}{\pi R^2 S_0} \frac{8\pi \mu}{\pi^2 R^4 S_0}, \\ E &= \nu \frac{k_2 - \rho h \omega_k^2}{RS_0}, & F &= \frac{1}{RS_0} \left[k_1 R - R \rho h \omega_k^2 + \frac{Eh - S_0 \nu - T_0(1-\nu)}{R} \right]. \end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение для этой системы

$$\lambda^6 - (F + B)\lambda^4 + (BF - CE - AD)\lambda^2 + ABD = 0. \quad (9)$$

Характеристическое уравнение является уравнением шестой степени с комплексными коэффициентами. Так как уравнение содержит только четные степени переменной λ , то его можно преобразовать к уравнению третьей степени

$$\zeta^3 + \alpha \zeta^2 + \beta \zeta + \chi = 0, \quad (10)$$

где $\alpha = -F - B$, $\beta = BF - CE - AD$, $\chi = ABD$. Тогда каждому решению уравнения (10) будет соответствовать два решения уравнения (9), $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$. Таким образом, получаем шесть собственных значений системы уравнений (8). Найдем собственные вектора для каждого из шести собственных значений, решив систему уравнений $(M - E\lambda_i)\gamma_i = 0$, $i = \overline{1, 6}$,



где $\gamma_i = (\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}, \gamma_{3,i}, \gamma_{4,i}, \gamma_{5,i}, \gamma_{6,i})^T$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i . Аналитическое решение даёт следующие выражения для компонент собственных векторов $\gamma_i = (\frac{A}{\lambda_i^3}, \frac{1}{\lambda_i^2}, \frac{C}{\lambda_i(\lambda_i^2 - B)}, \frac{C}{\lambda_i^2 - B}, \frac{1}{\lambda_i}, 1)^T$.

В результате искомые функции будут представлены в виде

$$u(z) = \sum_{i=1}^6 C_i \gamma_{3,i} e^{\lambda_i z}, \quad w(z) = \sum_{i=1}^6 C_i \gamma_{2,i} e^{\lambda_i z}, \quad Q(z) = \sum_{i=1}^6 C_i \gamma_{1,i} e^{\lambda_i z}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Для того чтобы полностью решить задачу, необходимо задать шесть произвольных постоянных для участка артериальной системы, которые будут определяться из краевых и контактных условий артериальной системы. Необходимо задать шесть условий для каждого участка. В качестве таких условий можно взять, например:

- на входе в артериальное русло: $Q(0, t) = Q_0(t), \quad u(0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0,$
- на выходе из артериального русла: $R^* Q(l) = P(l), \quad u(l) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0,$
- в точке соединения/разветвления нескольких участков артериального русла

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0, \quad P_1 = P_i, \quad u_1 = u_i, \quad w_1 = w_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad S_1 = \frac{\sum_{i=2}^n S_i l_i^*}{\sum_{i=2}^n l_i^*}, \quad T_1 = \frac{\sum_{i=2}^n T_i l_i^*}{\sum_{i=2}^n l_i^*}, \quad l_i^* = 2\pi R_i,$$

где n — количество артерий, соединенных в данной точке.

Таким образом, имеем по три условия в начале и в конце артериальной системы. Чтобы система уравнений для определения произвольных констант была замкнутая, необходимо, чтобы в точке контакта на каждую из артерий приходилось по три контактных условия. Действительно, имеем одно уравнение баланса кровотоков, два осредненных уравнения равенства продольных и поперечных усилий и по $n - 1$ уравнению для давления и перемещений: $3 + 3(n - 1) = 3n$, т.е. для n артерий в узле имеем $3n$ уравнений, по 3 на каждую артерию. Следовательно, получили замкнутую систему уравнений для нахождения произвольных констант для каждой из артерий составляющих артериальную систему. Для полного решения задачи нужно задать еще средний за период пульсации кровотока. Тогда полный кровоток будет складываться из установившегося течения и пульсационного.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО КРОВОТОКА

Для определения среднего тока крови воспользуемся электродинамической аналогией и будем рассчитывать движение жидкости как электрический ток в цепи постоянного тока. Давление будет играть роль потенциала, объемный кровоток — роль электрического тока. В качестве аналогии для закона Ома возьмём решение Пуазейля, устанавливающий связь средней скорости течения вязкой несжимаемой жидкости в тонкой трубке с перепадом давления на её концах:

$$Q_i = \frac{P_k - P_r}{R_i^p}, \quad R_i^p = \frac{8\mu l}{\pi R_i^4},$$

где i — номер артерии, r — номер узла, в котором артерия заканчивается, k — номер узла, в котором артерия начинается.

По правилу Кирхгофа будем иметь уравнение баланса токов в каждом узле

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения для токов, получим систему уравнений для определения давлений в каждом из узлов артериальной системы. Замкнем эту систему, задав давления на входе и выходе из артериальной системы. Решив систему, получим давления в узлах, а по уравнению Пуазейля вычислим кровотоки.

Таким образом, задача о пульсации кровотока будет окончательно решена.



4. УПРОЩЕНИЯ ПОСТРОЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПУЛЬСАЦИИ КРОВОТОКА

Возможно упрощение решения поставленной задачи, которое состоит в сокращении числа произвольных постоянных интегрирования на каждом участке артериальной системы. Это можно сделать из соображений предельного перехода по некоторым параметрам. Так, например, при стремлении массовой плотности материала сосудистой стенки к нулю два корня уравнения (9) тоже будут стремиться по модулю к нулю. Такой предельный переход соответствует пренебрежению силами инерции стенок сосуда. В этом случае выбираем четыре собственных значения на каждом участке, которые не стремятся к нулю. Граничные и контактные условия можно взять такими:

- на входе в артериальное русло: $Q(0, t) = Q_0(t)$, $w(0) = 0$,
- на выходах из артериального русла: $R^*Q(l) = P(l)$, $w(l) = 0$,
- в узле контакта артерий:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0, \quad P_1 = P_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad u_1 = u_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad w_1 = \frac{\sum_{i=2}^n w_i l_i^*}{\sum_{i=2}^n l_i^*}, \quad l_i^* = 2\pi R_i.$$

Таким образом, будем иметь по два условия на артерию в точке входа и точках выхода и по два условия — на каждую артерию в узле контакта. То есть имеем по 4 уравнения на каждую артерию. Система уравнений для нахождения произвольных постоянных будет замкнута.

В самом простом случае оставляем из четырёх лишь два собственных значения, которые остаются конечными при стремлении продольной силы натяжения стенок сосуда S_0 к нулю. Тогда граничные и контактные условия можно взять в виде

- на входе в артериальное русло: $Q(0, t) = Q_0(t)$,
- на выходах из артериального русла: $R^*Q(l) = P(l)$,
- в узлах контакта: $\sum_{i=1}^n Q_i = 0$, $P_1 = P_i$, $i = \overline{2, n}$.

В этом случае имеем по два условия на каждую артерию для определения двух произвольных констант. Следовательно, система замкнута.

Библиографический список

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Гуляев Ю.П., Коссович Л.Ю. Математические модели биомеханики в медицине. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2001. 49 с.

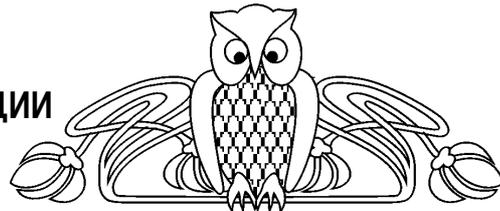
УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАРОТИДНОЙ БИФУРКАЦИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

А.В. Каменский

Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: avkamensky@gmail.com

Методом конечного элемента решена совместная задача гидродинамики и теории упругости о пульсации каротидной бифуркации человека. Использована ортотропная гиперупругая модель, учитывающая анатомическое строение стенки. Получено решение для геометрии сосуда, восстановленной по *in-vivo* КТ-ангиограмме. Граничные условия для жидкости определялись *in-vivo* при помощи ультразвукового аппарата Доплера. Результаты моделирования были проанализированы на предмет корреляции зон низкого сдвигового напряжения (WSS) для жидкости, высоких циклических деформаций (CS) и высокого эффективного напряжения (ES) для стенки с зонами атеросклеротического поражения на КТ-ангиограмме.



Finite Element Model of the Carotid Bifurcation

A.V. Kamenskiy

A fluid-solid interaction problem of a pulsation of the human carotid bifurcation was solved using finite element method. Hyperelastic orthotropic wall model that accounts for the carotid histological structure and *in-vivo* vessel geometry obtained from the CT-imaging were utilized. *In-vivo* blood flow boundary conditions for the problem were determined using Doppler Ultrasound. Results of the modeling were analyzed for correlation between zones of low wall shear stress (WSS) for blood flow, high cyclic strain (CS) and high effective stress (ES) for vessel wall with the zones of atherosclerosis formation on the CT-angiogram.