МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ В ЛОКАЛЬНОЙ ГИПОТЕЗЕ ХАЖИНСКОГО–ТАММИ ДЛЯ ПЯТОГО КОЭФФИЦИЕНТА

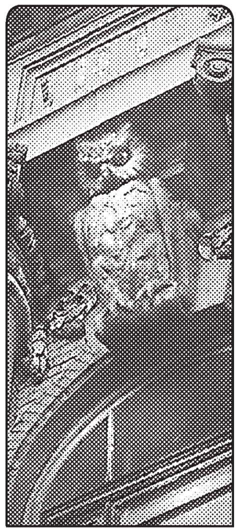
В. Г. Гордиенко[1], **К. А. Самсонова**[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, valeriygor@mail.ru

[2]Аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kris-ruzhik@mail.ru

В статье найдено точное значение M_5 такое, что симметризованная функция Пика $P_{M4}(z)$ является экстремальной в локальной гипотезе Хажинского–Тамми для пятого коэффициента тейлоровского разложения голоморфной нормированной ограниченной однолистной функции.

Ключевые слова: уравнение Лёвнера, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через S класс всех голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : \ |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, а через S^M, $M > 1$, — подкласс, состоящий из всех ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M$, $z \in E$.

Гипотеза Бибербаха о справедливости неравенства $|a_n| \le n$, $n \ge 2$, для $f \in S$ со знаком равенства только для вращений функции Кёбе, имеющая вид

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \tag{1}$$

доказана де Бранжем (L. Branges) [1, 2]. Функция Кёбе (1) отображает единичный круг E на комплексную плоскость с разрезом по лучу на отрицательном направлении вещественной оси с вершиной в точке $w = -1/4$.

Ещё до доказательства де Бранжа предпринимались удачные попытки оценки начальных коэффициентов в классе S. Что касается оценок в классах S^M, то они были менее успешными. Так, Пик (G. Pick) [3] доказал, что

$$\max_{f \in S^M} |a_2| = 2 - \frac{2}{M}, \qquad M > 1. \tag{2}$$

Максимум в (2) достигается только для вращений функции Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n. \tag{3}$$

Функция Пика (3) отображает E на круг радиуса M с центром в начале координат и с разрезом вдоль отрезка на отрицательном направлении вещественной оси.

Точная оценка третьего коэффициента в классах S^M также известна для всех $M > 1$. В частности, [4]

$$\max_{f\in S^M} |a_3| = 1 - \frac{1}{M^2}, \qquad M \le e,$$

со знаком равенства только для вращений функции Пика $P_{M2} = \left[P_{M^2}(z^2)\right]^{1/2}$.

К настоящему времени точные оценки четвёртого коэффициента в классах S^M найдены не для всех $M > 1$, однако для M, близких к 1, функции $P_{M3}(z) = \left[P_{M^3}(z^3)\right]^{1/3}$ остаются экстремальными в этой задаче. Именно, Шиффер (M. Schiffer) и Тамми (O. Tammi)[5] доказали, что

$$\max_{f\in S^M} |a_4| = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{M^3}\right), \qquad M \le \frac{34}{19},$$

со знаком равенства для вращений функции P_{M3}. Такие результаты вдохновили Хажинского и Тамми сформулировать гипотезу о том, что для каждого $n \ge 2$ существует $M_n > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M_n)$ и всех функций $f \in S^M$ справедливы неравенства

$$|a_n| \le \frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right) \tag{4}$$

со знаком равенства для вращений функции $P_{Mn}(z) = [P_{M^n}(z^n)]^{1/n}$. Гипотеза Хажинского–Тамми была доказана Северским (L. Siewierski) [6, 7] и Шиффером и Тамми [8]. Из результата Шиффера и Тамми [5] следует, что $M_4 = 34/19$.

Доказательство гипотезы Хажинского–Тамми тем более решает локальную проблему, которую можно сформулировать как существование чисел $M_n^* > M_n$, $n \ge 2$, таких, что для всех $M \in (1, M_n^*)$ и всех функций $f \in S^M$ неравенства (4) справедливы в некоторой окрестности функции P_{Mn}. В работе [9] предложен алгоритм нахождения значений M_n^*.

В настоящей работе находится значение M_5^*. Задача сводится к определению локального максимума функции многих переменных в заданной точке, удается выписать целевую функцию и все её частные производные до второго порядка. Значение M_5^* даётся как корень некоторого уравнения. Целевая функция и её частные производные служат решениями задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, их значения аналитически не выписываются, но могут быть вычислены приближённо. Основной результат содержится в теореме, в которой найдено число M_5^*. Попутно устанавливается, что вдоль одного из направлений точка граничной гиперповерхности $\partial V_5(M)$ множества значений $V_5(M) = \left\{(a_2, a_3, a_4, \operatorname{Re} a_5) : f \in S^M\right\}$, доставляемая функцией $P_{M4}(z)$, имеет угловой характер.

Теорема. *Число $M_5^* > 1$ определяется условием, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ матрицы* (30) *удовлетворяют условиям* (31), *где элементы матриц* (30) *являются значением в точке $t = 1 - 1/M$ решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений* (20)–(22) *и* (26)–(29), *правые части которых определяются посредством формул* (23)–(25).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Функция

$$P_{M4}(z) = z + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{M^4}\right) z^5 + \ldots, \qquad z \in E,$$

доставляет граничную точку $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ множеству

$$V_5(M) = \left\{(a_2, a_3, a_4, \operatorname{Re} a_5) : f \in S^M\right\}, \qquad M > 1.$$

Поскольку функция P_{M4} отображает единичный круг E на круг радиуса M с четырьмя прямолинейными разрезами, то точка A_M является внутренней точкой части $\partial V_5^4(M)$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$ множества $V_5(M)$ [10]. Все точки части $\partial V_5^4(M)$ доставляются функциями $f \in S^M$, отображающими E на круг радиуса M с четырьмя кусочно аналитическими разрезами. Известно [10], что все такие функции f можно представить в виде

$$f(z) = Mw(z, \log M), \tag{5}$$

где
$$w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \ldots) \tag{6}$$
является интегралом обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера:
$$\frac{dw}{dt} = -w\sum_{k=1}^{4}\lambda_k \frac{e^{iu_k}+w}{e^{iu_k}-w}, \qquad w|_{t=0} = z, \qquad 0 \le t < \log M, \tag{7}$$
с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$, $k = 1,\ldots,4$, и постоянными числами $\lambda_k \ge 0$, $k = 1,\ldots,4$, $\sum\limits_{k=1}^{4}\lambda_k = 1$.

Кроме того, управляющие функции u_k удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима в экстремальной задаче о достижимости граничной поверхности $\partial V_5^4(M)$. Опишем эти условия подробнее. Пусть $a_k(t)$, $k \ge 2$, определяются разложением (6). Совершим замену переменной $t \to 1 - e^{-t}$ и обозначим $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t)$, $k = 2,\ldots,5$. Подставляя (6) в (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, после произведённой замены переменной получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k\cos u_k, \qquad x_1(0)=0,\\
\dot{x}_2(t) &= 2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k\sin u_k, \qquad x_2(0)=0,\\
\dot{x}_3(t) &= -2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k\left[2(x_1\cos u_k + x_2\sin u_k) + (1-t)\cos 2u_k\right], \qquad x_3(0)=0,\\
\dot{x}_4(t) &= 2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[2(x_1\sin u_k - x_2\cos u_k) + (1-t)\sin 2u_k], \qquad x_4(0)=0,\\
\dot{x}_5(t) &= -2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[(2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos u_k + 2(x_4 + x_1x_2)\sin u_k +\\
&\quad +3(1-t)(x_1\cos 2u_k + x_2\sin 2u_k) + (1-t)^2\cos 3u_k], \qquad x_5(0)=0,\\
\dot{x}_6(t) &= 2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[(2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\sin u_k - 2(x_4 + x_1x_2)\cos u_k -\\
&\quad -3(1-t)(x_2\cos 2u_k - x_1\sin 2u_k) + (1-t)^2\sin 3u_k], \qquad x_6(0)=0,\\
\dot{x}_7(t) &= -2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[2((x_5 + x_1x_3 - x_2x_4)\cos u_k + (x_6 + x_1x_4 + x_2x_3)\sin u_k) +\\
&\quad +3(1-t)((x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos 2u_k + (x_4 + 2x_1x_2)\sin 2u_k) +\\
&\quad +4(1-t)^2(x_1\cos 3u_k + x_2\sin 3u_k) + (1-t)^3\cos 4u_k], \qquad x_7(0)=0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Экстремальная задача Хажинского–Тамми о максимуме $\operatorname{Re} a_5$ в классе S^M для M, близких к 1, формализуется теперь как
$$x_7(1 - 1/M) \to \max \tag{9}$$
для решений системы (8). Запишем функцию Гамильтона этой экстремальной задачи:
$$\begin{gathered}
H(t,x,\Psi,u,\lambda) = -2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[\cos u_k\Psi_1 - \sin u_k\Psi_2 + (2(x_1\cos u_k + x_2\sin u_k) + (1-t)\cos 2u_k)\Psi_3 -\\
-(2(x_1\sin u_k - x_2\cos u_k) + (1-t)\cdot\sin 2u_k)\Psi_4 + ((2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos u_k + 2(x_4 + x_1x_2)\sin u_k +\\
+3(1-t)(x_1\cos 2u_k + x_2\sin 2u_k) + (1-t)^2\cos 3u_k)\Psi_5 - ((2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\sin u_k -\\
-2(x_4 + x_1x_2)\cos u_k - 3(1-t)(x_2\cos 2u_k - x_1\sin 2u_k) + (1-t)^2\sin 3u_k)\Psi_6 +\\
+(2((x_5 + x_1x_3 - x_2x_4)\cos u_k + (x_6 + x_1x_4 + x_2x_3)\sin u_k) + 3(1-t)((x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos 2u_k +\\
+(x_4 + 2x_1x_2)\sin 2u_k) + 4(1-t)^2(x_1\cos 3u_k + x_2\sin 3u_k) + (1-t)^3\cos 4u_k)\Psi_7],
\end{gathered} \tag{10}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $\lambda_k \ge 0$, $k = 1, \dots, 4$, $\sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$, $x = (x_1, \dots, x_7)^T$ удовлетворяет системе (8), а $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_7)^T$, $\Psi_7 = 1$, удовлетворяет сопряжённой системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot\Psi_1(t) = 2\sum_{k=1}^4 \lambda_k[&2\cos u_k\Psi_3 - 2\sin u_k\Psi_4 + (2x_1\cos u_k + 2x_2\sin u_k + 3(1-t)\cos 2u_k)\Psi_5 + \\
&+(2x_1\sin u_k + 2x_2\cos u_k - 3(1-t)\sin 2u_k)\Psi_6 + 2x_3\cos u_k + 2x_4\sin u_k + \\
&+6(1-t)(x_1\cos 2u_k + x_2\sin 2u_k) + 4(1-t)^2\cos 3u_k], \\
\dot\Psi_2(t) = 2\sum_{k=1}^4 \lambda_k[&2\sin u_k\Psi_3 + 2\cos u_k\Psi_4 + (2x_1\sin u_k - 2x_2\cos u_k + 3(1-t)\sin 2u_k)\Psi_5 - \\
&-(2x_2\sin u_k - 2x_1\cos u_k - 3(1-t)\cos 2u_k)\Psi_6 - 2x_4\cos u_k + 2x_3\sin u_k - \\
&-6(1-t)(x_2\cos 2u_k - x_1\sin 2u_k) + 4(1-t)^2\sin 3u_k], \\
\dot\Psi_3(t) = 2\sum_{k=1}^4 \lambda_k[&2\cos u_k\Psi_5 - 2\sin u_k\Psi_6 + 2x_1\cos u_k + 2x_2\sin u_k + 3(1-t)\cos 2u_k], \\
\dot\Psi_4(t) = 2\sum_{k=1}^4 \lambda_k[&2\sin u_k\Psi_5 + 2\cos u_k\Psi_6 + 2x_1\sin u_k - 2x_2\cos u_k + 3(1-t)\sin 2u_k], \\
\dot\Psi_5(t) = 4\sum_{k=1}^4 &\lambda_k\cos u_k, \qquad \dot\Psi_6(t) = 4\sum_{k=1}^4 \lambda_k\sin u_k
\end{aligned} \tag{11}$$

и условиям трансверсальности:

$$\Psi_j(1 - 1/M) = 0, \qquad j = 1, \dots, 6. \tag{12}$$

Оптимальная управляющая функция $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$, соответствующая экстремальной функции $f^* \in S^M$ в (9), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [11]

$$\max_{u,\lambda} H(t, x, \Psi, u, \lambda) = H(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda), \qquad 0 \le t \le 1 - 1/M, \tag{13}$$

где (x^*, Ψ^*) является решением систем (8) и (11) с $u = u^*$ в их правых частях. Следовательно, при положительных значениях λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 каждая из координат u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^* является корнем уравнения

$$H_{u_k}(t, x, \Psi, u, \lambda^k) = 0, \qquad k = 1, \dots, 4, \tag{14}$$

где $x = x^*$, $\Psi = \Psi^*$, а λ^k– это один из векторов (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) или (0,0,0,1). Наличие четырёх различных на $[0, 2\pi)$ значений u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^* координат оптимального управления u^* характеризует оптимальный скользящий режим.

Функции P_{M4}, локально экстремальной в задаче (9) для $1 < M \le M_5^*$, соответствуют координаты $u_1^* = \pi/4$, $u_2^* = 3\pi/4$, $u_3^* = 5\pi/4$, $u_4^* = 7\pi/4$ оптимального управления u^* и значения параметров $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = \lambda_4^* = 1/4$. Условия трансверсальности (12) приводят к начальным условиям $\Psi_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, 6$. Проварьируем эти начальные данные, положив $\Psi_1(0) = \alpha_1$, $\Psi_2(0) = \alpha_2$, $\Psi_3(0) = \alpha_3$, $\Psi_4(0) = \alpha_4$, $\Psi_5(0) = \alpha_5$, $\Psi_6(0) = \alpha_6$. Сохранение скользящего режима в момент $t = 0$ для варьированных значений $\Psi(0)$ означает равенство между собой коэффициентов при λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 функции Гамильтона (10) при $t = 0$ в точке $u^* = u^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
H(0, x(0), \Psi(0), u^*, \lambda) = -2\Bigg[\lambda_1\left(\frac{-1}{\sqrt2}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt2}\alpha_2 + \alpha_4 + \frac{1}{\sqrt2}\alpha_5 + \frac{1}{\sqrt2}\alpha_6\right) + \\
+\lambda_2\left(\frac{1}{\sqrt2}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt2}\alpha_2 - \alpha_4 - \frac{1}{\sqrt2}\alpha_5 + \frac{1}{\sqrt2}\alpha_6\right) + \lambda_3\left(\frac{1}{\sqrt2}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt2}\alpha_2 + \alpha_4 - \frac{1}{\sqrt2}\alpha_5 - \frac{1}{\sqrt2}\alpha_6\right) + \\
+ \lambda_4\left(\frac{-1}{\sqrt2}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt2}\alpha_2 - \alpha_4 + \frac{1}{\sqrt2}\alpha_5 - \frac{1}{\sqrt2}\alpha_6\right)\Bigg] + r_1\left\|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)\right\|,
\end{aligned}$$

где $r_1 \to 0$ при $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \to 0$. Приравнивая здесь коэффициенты при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, получаем соотношения между координатами $\Psi(0)$

$$\alpha_1 = \alpha_5 + r_2||(\alpha_1, \alpha_2)||, \qquad \alpha_2 = -\alpha_6 + r_3||(\alpha_1, \alpha_2)||, \qquad \alpha_4 = 0,$$

где $r_2, r_3 \to 0$ при $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$. Полагаем так же $\alpha_3 = 0$.

Таким образом, вариация вектора начальных данных $\Psi(0)$ в экстремальной задаче (8)–(13), сохраняющая скользящий режим, имеет вид

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0), \Psi_5(0), \Psi_6(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, \alpha_1, -\alpha_2) + o\left((\alpha_1, \alpha_2)\right), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \to 0. \qquad (15)$$

Для решения локальной экстремальной задачи в окрестности функции P_{M4} следует подвергнуть сравнению все те функции $f \in S^M$, которые доставляют точки части $\partial V_5^4(M)$ из окрестности точки A_M. Все такие функции представимы по (5) интегралами (6) дифференциального уравнения Лёвнера (7) с непрерывным управлением u, удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина (13), начальными данными $\Psi(0)$ в (11) из окрестности точки (0,0,0,0,0,0,1), сохраняющими согласно (15) скользящий оптимальный режим, и параметрами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ из окрестности точки $\lambda^* = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Следовательно, задача нахождения точной границы в локальной проблеме Хажинского–Тамми сводится к следующему.

Задача 1. *Пусть*

$$F^M : (\Psi(0), \lambda) \to x_7(1 - 1/M)$$

является функцией, которая всякому начальному данному $\Psi(0)$ и параметру λ в экстремальной задаче (8)–(13) *со скользящим оптимальным режимом сопоставляет значение $x_7(1-1/M)$. Положим*

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0), \Psi_5(0), \Psi_6(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, \alpha_1, -\alpha_2) + o((\alpha_1, \alpha_2)), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \to 0. \qquad (16)$$

$$\lambda = (1/4 + \alpha_3, 1/4 + \alpha_4, 1/4 + \alpha_5, 1/4 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5), \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5), \qquad (17)$$

согласно чему $F^M = F^M(\alpha)$. Требуется найти значение $M_5^* > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ функция $F^M(\alpha)$ достигает локального максимума в точке $\alpha = 0$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Система дифференциальных уравнений (8) при $u = u^*$ и $\lambda = \lambda^*$ имеет решение $x_k^*(t) = 0$, $k = 1, \ldots, 6$, $x_7^*(t) \neq 0$. Аналогично система дифференциальных уравнений (11) с теми же $u = u^*$ и $\lambda = \lambda^*$ и с нулевыми начальными условиями в точке $t = 0$ имеет решение $\Psi^*(t) = 0$.

Так как $H_{u_k u_k}(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda^k) \neq 0$, то уравнения (14) однозначно определяют аналитические неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi)$ в окрестности точки (x^*, Ψ^*), $u_k(t, x^*, \Psi^*) = u_k^*$, $k = 1, 2, 3, 4$. Если в правые части систем (8) и (11) подставить $u = u(t, x, \Psi) = (u_1(t, x, \Psi), u_2(t, x, \Psi), u_3(t, x, \Psi),$ $u_4(t, x, \Psi))$, то их решение (x, Ψ) аналитически зависит от начальных данных и параметра λ. Таким образом, (x, Ψ) в задаче 1 имеет производные по α до второго порядка. Следовательно, тем же свойством обладает и управление $u = u(t, x(\alpha), \Psi(\alpha)) = u(\alpha)$. Поэтому функция $F^M(\alpha)$ имеет производные до второго порядка, и для исследования её на локальный максимум применимы классические средства дифференциального исчисления.

Начнём с вычисления частных производных первого порядка функции $F^M(\alpha)$,

$$F^M_{\alpha_j} = (x_7)_{\alpha_j}(1 - 1/M), \qquad j = 1, \ldots, 5.$$

Дифференцирование последнего уравнения системы (8), в котором $\lambda_4 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ приводит к формулам

$$\frac{d(x_7)_{\alpha_j}}{dt} = -2\sum_{k=1}^{4} \lambda_k [2(((x_5)_{\alpha_j} + x_3(x_1)_{\alpha_j} + x_1(x_3)_{\alpha_j} - (x_2)_{\alpha_j} x_4 - x_2(x_4)_{\alpha_j})\cos u_k -$$
$$-(x_5 + x_1 x_3 - x_2 x_4)\sin u_k (u_k)_{\alpha_j} + ((x_6)_{\alpha_j} + (x_1)_{\alpha_j} x_4 + x_1(x_4)_{\alpha_j} + (x_2)_{\alpha_j} x_3 + x_2(x_3)_{\alpha_j})\sin u_k +$$
$$+(x_6 + x_1 x_4 + x_2 x_3)\cos u_k (u_k)_{\alpha_j}) + 3(1-t)((((x_3)_{\alpha_j} + 2x_1(x_1)_{\alpha_j} - 2x_2(x_2)_{\alpha_j})\cos 2u_k -$$
$$-2(x_3 + x_1^2 - x_2^2)\sin 2u_k (u_k)_{\alpha_j} + ((x_4)_{\alpha_j} + 2(x_1)_{\alpha_j} x_2 + 2x_1(x_2)_{\alpha_j})\sin 2u_k +$$

$$+2(x_4+2x_1x_2)\cos 2u_k(u_k)_{\alpha_j})+4(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j}\cos 3u_k-3x_1\sin 3u_k(u_k)_{\alpha_j}+(x_2)_{\alpha_j}\sin 3u_k+$$
$$+3x_2\cos 3u_k(u_k)_{\alpha_j})-4(1-t)^3\sin 4u_k(u_k)_{\alpha_j}],\qquad (x_7)_{\alpha_j}(0)=0,\qquad j=1,2, \tag{18}$$

$$\frac{d(x_7)_{\alpha_j}}{dt}=-2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[2(((x_5)_{\alpha_j}+x_3(x_1)_{\alpha_j}+x_1(x_3)_{\alpha_j}-(x_2)_{\alpha_j}x_4-x_2(x_4)_{\alpha_j})\cos u_k-$$
$$-(x_5+x_1x_3-x_2x_4)\sin u_k(u_k)_{\alpha_j}+((x_6)_{\alpha_j}+(x_1)_{\alpha_j}x_4+x_1(x_4)_{\alpha_j}+(x_2)_{\alpha_j}x_3+x_2(x_3)_{\alpha_j})\sin u_k+$$
$$+(x_6+x_1x_4+x_2x_3)\cos u_k(u_k)_{\alpha_j})+3(1-t)(((x_3)_{\alpha_j}+2x_1(x_1)_{\alpha_j}-2x_2(x_2)_{\alpha_j})\cos 2u_k-$$
$$-2(x_3+x_1^2-x_2^2)\sin 2u_k(u_k)_{\alpha_j}+((x_4)_{\alpha_j}+2(x_1)_{\alpha_j}x_2+2x_1(x_2)_{\alpha_j})\sin 2u_k+$$
$$+2(x_4+2x_1x_2)\cos 2u_k(u_k)_{\alpha_j})+4(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j}\cos 3u_k-3x_1\sin 3u_k(u_k)_{\alpha_j}+(x_2)_{\alpha_j}\sin 3u_k+$$
$$+3x_2\cos 3u_k(u_k)_{\alpha_j})-4(1-t)^3\sin 4u_k(u_k)_{\alpha_j}]-2[2(x_5+x_1x_3-x_2x_4)(\cos u_{j-2}-\cos u_4)+$$
$$+2(x_6+x_1x_4+x_2x_3)(\sin u_{j-2}-\sin u_4)+3(1-t)((x_3+x_1^2-x_2^2)(\cos 2u_{j-2}-\cos 2u_4)+$$
$$+(x_4+2x_1x_2)(\sin 2u_{j-2}-\sin 2u_4))+4(1-t)^2(x_1(\cos 3u_{j-2}-\cos 3u_4)+x_2(\sin 3u_{j-2}-\sin 3u_4))+$$
$$+(1-t)^3(\cos 4u_{j-2}-\cos 4u_4)],\qquad (x_7)_{\alpha_j}(0)=0,\qquad j=3,4,5. \tag{19}$$

Из (18), (19) непосредственной подстановкой проверяем, что

$$\left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0}=0,\qquad j=1,\ldots,5.$$

Значит, $(x_7)_{\alpha_j}(1-1/M)|_{\alpha=0}=F^M_{\alpha_j}(0)=0$, $j=1,\ldots,5$. Следовательно, выполняются необходимые условия локального экстремума функции $F^M(\alpha)$ в точке $\alpha=0$.

Теперь вычислим частные производные второго порядка функции $F^M(\alpha)$ в точке $\alpha=0$. С этой целью продифференцируем уравнения (18), (19) в точке $\alpha=0$ и найдём

$$\left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j\alpha_l}}{dt}\right]_{\alpha=0}=\frac12\sum_{k=1}^{4}[2((x_5)_{\alpha_j}\sin u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_5)_{\alpha_l}\sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j})-2((x_6)_{\alpha_j}\cos u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+$$
$$+(x_6)_{\alpha_l}\cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j})+6(1-t)((x_3)_{\alpha_j}\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_3)_{\alpha_l}\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j})+$$
$$+12(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j}\sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_1)_{\alpha_l}\sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}-(x_2)_{\alpha_j}\cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l}-$$
$$-(x_2)_{\alpha_l}\cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j})-16(1-t)^3(u_k)_{\alpha_j}(u_k)_{\alpha_l}],\qquad (x_7)_{\alpha_j\alpha_l}(0)=0,\qquad j,l=1,2. \tag{20}$$

$$\left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j\alpha_l}}{dt}\right]_{\alpha=0}=\frac12\sum_{k=1}^{4}[2((x_5)_{\alpha_j}\sin u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_5)_{\alpha_l}\sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j})-2((x_6)_{\alpha_j}\cos u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+$$
$$+(x_6)_{\alpha_l}\cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j})+6(1-t)((x_3)_{\alpha_j}\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_3)_{\alpha_l}\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j})+$$
$$+12(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j}\sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_1)_{\alpha_l}\sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}-(x_2)_{\alpha_j}\cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l}-$$
$$-(x_2)_{\alpha_l}\cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j})-16(1-t)^3(u_k)_{\alpha_j}(u_k)_{\alpha_l}]-4(x_5)_{\alpha_j}(\cos u_{l-2}^*-\cos u_4^*)-$$
$$-4(x_6)_{\alpha_j}(\sin u_{l-2}^*-\sin u_4^*)-6(1-t)(x_4)_{\alpha_j}(\sin 2u_{l-2}^*-\sin 2u_4^*)-$$
$$-8(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j}(\cos 3u_{l-2}^*-\cos 3u_4^*)+(x_2)_{\alpha_j}(\sin 3u_{l-2}^*-\sin 3u_4^*)),$$
$$(x_7)_{\alpha_j\alpha_l}(0)=0,\qquad j=1,2,\qquad l=3,4,5. \tag{21}$$

$$\left[\frac{d(x_7)_{\alpha_j\alpha_l}}{dt}\right]_{\alpha=0}=\frac12\sum_{k=1}^{4}[2((x_5)_{\alpha_j}\sin u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_5)_{\alpha_l}\sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j})-2((x_6)_{\alpha_j}\cos u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+$$
$$+(x_6)_{\alpha_l}\cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j})+6(1-t)((x_3)_{\alpha_j}\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_3)_{\alpha_l}\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j})+$$
$$+12(1-t)^2((x_1)_{\alpha_j}\sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l}+(x_1)_{\alpha_l}\sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}-$$
$$-(x_2)_{\alpha_j}\cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_l}-(x_2)_{\alpha_l}\cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j})-16(1-t)^3(u_k)_{\alpha_j}(u_k)_{\alpha_l}]-$$
$$-4((x_5)_{\alpha_l}(\cos u_{j-2}^*-\cos u_4^*)+(x_6)_{\alpha_l}(\sin u_{j-2}^*-\sin u_4^*)+(x_5)_{\alpha_j}(\cos u_{l-2}^*-\cos u_4^*)+$$
$$+(x_6)_{\alpha_j}(\sin u_{l-2}^*-\sin u_4^*))-6(1-t)((x_4)_{\alpha_l}(\sin 2u_{j-2}^*-\sin 2u_4^*)+$$
$$+(x_4)_{\alpha_j}(\sin 2u_{l-2}^*-\sin 2u_4^*))-8(1-t)^2((x_1)_{\alpha_l}(\cos 3u_{j-2}^*-\cos 3u_4^*)+(x_2)_{\alpha_l}(\sin 3u_{j-2}^*-\sin 3u_4^*)+$$
$$+(x_1)_{\alpha_j}(\cos 3u_{l-2}^*-\cos 3u_4^*)+(x_2)_{\alpha_j}(\sin 3u_{l-2}^*-\sin 3u_4^*)),\qquad (x_7)_{\alpha_j\alpha_l}(0)=0,\quad j,l=3,4,5. \tag{22}$$

Все частные производные по координатам вектора α в правых частях формул (20)–(22) вычисляются в точке $\alpha=0$.

Тождество (14) с произвольными (x, Ψ) из окрестности точки (x^*, Ψ^*) определяет неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi)$, $k = 1, \ldots, 4$. Для вычисления частных производных управлений u_k продифференцируем это тождество по α и получим:

$$H_{u_k x} x_{\alpha_j} + H_{u_k \Psi} \Psi_{\alpha_j} + H_{u_k u_k} (u_k)_{\alpha_j} = 0, \qquad k = 1, \ldots, 4, \qquad j = 1, \ldots, 5,$$

откуда находим выражения для частных производных

$$(u_k)_{\alpha_j} = -\frac{H_{u_k x} x_{\alpha_j} + H_{u_k \Psi} \Psi_{\alpha_j}}{H_{u_k u_k}}, \qquad k = 1, \ldots, 4, \qquad j = 1, \ldots, 5. \tag{23}$$

Из (10) при $\alpha = 0$ непосредственно находим:

$$\begin{gathered} H_{u_k u_k} = -32(1-t)^3, \quad H_{u_k x_1} = 24(1-t)^2 \sin 3u_k^*, \quad H_{u_k x_2} = -24(1-t)^2 \cos 3u_k^*, \\ H_{u_k x_3} = 12(1-t) \sin 2u_k^*, \quad H_{u_k x_4} = 0, \quad H_{u_k x_5} = 4 \sin u_k^*, \quad H_{u_k x_6} = -4 \cos u_k^*, \\ H_{u_k \Psi_1} = 2 \sin u_k^*, \quad H_{u_k \Psi_2} = 2 \cos u_k^*, \quad H_{u_k \Psi_3} = 4(1-t) \sin 2u_k^*, \quad H_{u_k \Psi_4} = 0, \\ H_{u_k \Psi_5} = 6(1-t)^2 \sin 3u_k^*, \quad H_{u_k \Psi_6} = 6(1-t)^2 \cos 3u_k^*, \quad k = 1, \ldots, 4. \end{gathered} \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), элементарными средствами сможем вычислить все 20 частных производных (23) при $\alpha = 0$ как линейные функции относительно $(x_p)_{\alpha_j}$ и $(\Psi_p)_{\alpha_j}$, $p = 1, \ldots 6$.

Таким образом, правые части системы 15 различных дифференциальных уравнений (20),(21),(22) для частных производных второго порядка целевой функции представляют собой полиномы второго порядка относительно 60 частных производных первого порядка $(x_p)_{\alpha_j}$, $(\Psi_p)_{\alpha_j}$, $j = 1, \ldots, 5$, $p = 1, \ldots, 6$, вычисленных в точке $\alpha = 0$. В свою очередь, для вычисления частных производных первого порядка функций x и Ψ по координатам вектора α в точке $\alpha = 0$ продифференцируем уравнения систем (8) и (11) по α. Некоторое облегчение вызывается интегрированием двух последних уравнений системы (11) в сравнении с двумя первыми уравнениями системы (8). Именно

$$\Psi_5(t) = \alpha_1 - 2x_1(t), \qquad \Psi_6(t) = -\alpha_2 + 2x_2(t).$$

откуда находим 10 соотношений

$$\begin{aligned} &(\Psi_5)_{\alpha_1} = 1 - 2(x_1)_{\alpha_1}, \qquad (\Psi_5)_{\alpha_j} = -2(x_1)_{\alpha_j}, \qquad j = 2, \ldots, 5, \\ &(\Psi_6)_{\alpha_2} = -1 + 2(x_2)_{\alpha_2}, \qquad (\Psi_6)_{\alpha_j} = 2(x_2)_{\alpha_j}, \qquad j = 1, 3, 4, 5. \end{aligned} \tag{25}$$

Вычислим оставшиеся частные производные, и для координат фазового вектора получим системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \left[\frac{d(x_1)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} \sin u_k^* (u_k)_{\alpha_j}, \qquad (x_1)_{\alpha_j}(0) = 0, \\ \left[\frac{d(x_2)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} \cos u_k^* (u_k)_{\alpha_j}, \qquad (x_2)_{\alpha_j}(0) = 0, \\ \left[\frac{d(x_3)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\sum_{k=1}^{4}((x_1)_{\alpha_j} \cos u_k^* + (x_2)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (1-t)\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}), \qquad (x_3)_{\alpha_j}(0) = 0, \\ \left[\frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^{4}((x_1)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_2)_{\alpha_j} \cos u_k^*), \qquad (x_4)_{\alpha_j}(0) = 0, \\ \left[\frac{d(x_5)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2((x_3)_{\alpha_j} \cos u_k^* + (x_4)_{\alpha_j} \sin u_k^*) + 3(1-t)(x_2)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* - \\ -3(1-t)^2 \sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}], \qquad (x_5)_{\alpha_j}(0) = 0, \\ \left[\frac{d(x_6)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2((x_3)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_4)_{\alpha_j} \cos u_k^*) + 3(1-t)(x_1)_{\alpha_j} \sin 2u_k^* + \\ +3(1-t)^2 \cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}], \qquad (x_6)_{\alpha_j}(0) = 0, \qquad j = 1, 2, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\left[\frac{d(x_1)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sin u_k^*(u_k)_{\alpha_j} - 2(\cos u_{j-2}^* - \cos u_4^*), \qquad (x_1)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(x_2)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\cos u_k^*(u_k)_{\alpha_j} + 2(\sin u_{j-2}^* - \sin u_4^*), \qquad (x_2)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(x_3)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\sum_{k=1}^{4}((x_1)_{\alpha_j}\cos u_k^* + (x_2)_{\alpha_j}\sin u_k^* - (1-t)\sin 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}), \qquad (x_3)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^{4}((x_1)_{\alpha_j}\sin u_k^* - (x_2)_{\alpha_j}\cos u_k^*) + 2(1-t)(\sin 2u_{j-2}^* - \sin 2u_4^*),$$

$$(x_4)_{\alpha_j}(0) = 0, \tag{27}$$

$$\left[\frac{d(x_5)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2((x_3)_{\alpha_j}\cos u_k^* + (x_4)_{\alpha_j}\sin u_k^*) + 3(1-t)(x_2)_{\alpha_j}\sin 2u_k^* -$$

$$-3(1-t)^2\sin 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}] - 2(1-t)^2(\cos 3u_{j-2}^* - \cos 3u_4^*) \qquad (x_5)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(x_6)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2((x_3)_{\alpha_j}\sin u_k^* - (x_4)_{\alpha_j}\cos u_k^*) - 3(1-t)(x_1)_{\alpha_j}\cos 2u_k^* +$$

$$+3(1-t)^2\cos 3u_k^*(u_k)_{\alpha_j}] + 2(1-t)^2(\sin 3u_{j-2}^* - \sin 3u_4^*) \quad (x_6)_{\alpha_j}(0) = 0, \quad j = 3, 4, 5.$$

Подставляя значения $u_1^* = \pi/4$, $u_2^* = 3\pi/4$, $u_3^* = 5\pi/4$, $u_4^* = 7\pi/4$, в третье уравнение системы (26), получим:

$$\left[\frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = 0, \qquad (x_4)_{\alpha_j}(0) = 0.$$

Это означает, что изменение координат вектора $\Psi(0)$ не вызывает изменения координаты x_4 фазового вектора, следовательно, вдоль направления $Im\, a_3$ точка $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$, доставляемая функцией $P_{M4}(z)$, имеет угловой характер.

Для координат сопряжённого вектора имеем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\left[\frac{d(\Psi_1)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2(x_3)_{\alpha_j}\cos u_k^* + 2(x_4)_{\alpha_j}\sin u_k^* + 6(1-t)(x_2)_{\alpha_j}\sin 2u_k^* -$$

$$-12(1-t)^2\sin 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}], \qquad (\Psi_1)_{\alpha_1}(0) = 1, \qquad (\Psi_1)_{\alpha_2}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(\Psi_2)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[-2(x_4)_{\alpha_j}\cos u_k^* + 2(x_3)_{\alpha_j}\sin u_k^* + 6(1-t)(x_1)_{\alpha_j}\sin 2u_k^* +$$

$$+12(1-t)^2\cos 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}], \qquad (\Psi_2)_{\alpha_1}(0) = 0, \qquad (\Psi_2)_{\alpha_2}(0) = 1,$$

$$\left[\frac{d(\Psi_3)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2(x_1)_{\alpha_j}\cos u_k^* + 2(x_2)_{\alpha_j}\sin u_k^* - 3(1-t)\sin 2u^*(u_k)_{\alpha_j}], \quad (\Psi_3)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(\Psi_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = 0, \qquad (\Psi_4)_{\alpha_j}(0) = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{28}$$

$$\left[\frac{d(\Psi_1)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2(x_3)_{\alpha_j}\cos u_k^* + 2(x_4)_{\alpha_j}\sin u_k^* + 6(1-t)(x_2)_{\alpha_j}\sin 2u_k^* -$$

$$-12(1-t)^2\sin 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}] + 8(1-t)^2\left(\cos 3u_{j-2}^* + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (\Psi_1)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(\Psi_2)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[-2(x_4)_{\alpha_j}\cos u_k^* + 2(x_3)_{\alpha_j}\sin u_k^* + 6(1-t)(x_1)_{\alpha_j}\sin 2u_k^* +$$

$$+12(1-t)^2\cos 3u_k^*(u_k^*)_{\alpha_j}] + 8(1-t)^2\left(\sin 3u_{j-2}^* + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (\Psi_2)_{\alpha_j}(0) = 0,$$

$$\left[\frac{d(\Psi_3)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}[2(x_1)_{\alpha_j}\cos u_k^* + 2(x_2)_{\alpha_j}\sin u_k^* - 3(1-t)\sin 2u^*(u_k)_{\alpha_j}], \qquad (\Psi_3)_{\alpha_j}(0)=0,$$
$$\left[\frac{d(\Psi_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = 6(1-t)(\sin 2u_{j-2}^* + 1), \qquad (\Psi_4)_{\alpha_j}(0)=0, \qquad j=3,4,5. \tag{29}$$

Дифференциальные уравнения (26)–(29) с функциями $(u_k)_{\alpha_j}$ из (23) образуют систему 50 линейных дифференциальных уравнений, распадающуюся на несколько независимых подсистем. В частности, подсистемы относительно $(x_1)_{\alpha_j}$, $(x_5)_{\alpha_j}$, $(\Psi_1)_{\alpha_j}$, $j=2,3$ и $(x_2)_{\alpha_j}$, $(x_6)_{\alpha_j}$, $(\Psi_2)_{\alpha_j}$, $j=1,5$, являются линейными однородными системами с нулевыми начальными условиями. Это приводит к 12 вырожденным нулевым решениям. Нулевые решения имеют и подсистемы относительно $(x_3)_{\alpha_j}$, $(\Psi_3)_{\alpha_j}$, $j=1,\dots,5$. Остальные независимые подсистемы допускают понижение порядка. Тем не менее мы не будем пытаться отыскать решение подсистем в квадратурах.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Локальная экстремальная задача в теореме сведена к решению задачи 1, т. е. к отысканию значения $M_5^* > 1$ такого, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ функция $F^M(\alpha)$, соответствующая локальной экстремальной задаче (9), достигает локального максимума в точке $\alpha = 0$. Как было показано, необходимое условие экстремума

$$(x_7)_{\alpha_j}(1-1/M)|_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial F^M(\alpha)}{\partial \alpha_j}\right]_{\alpha=0} = 0, \qquad j=1,\dots,5,$$

выполняется для всех $M > 1$. Поэтому остается лишь проверить достаточное условие экстремума функции $F^M(\alpha)$, зависящей от пяти координат вектора α, которое заключается в том, что при $\alpha = 0$ квадратичная форма, порождённая квадратной матрицей $\Delta = \Delta(M)$ с элементами $(x_7)_{\alpha_j\alpha_l}(1-1/M)$, $j,l=1,\dots,5$, отрицательно определена.

Для $M > 1$ обозначим:

$$\Delta_m(M) = \begin{pmatrix} (x_7)_{\alpha_1\alpha_1}(1-1/M) & \dots & (x_7)_{\alpha_1\alpha_m}(1-1/M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_7)_{\alpha_m\alpha_1}(1-1/M) & \dots & (x_7)_{\alpha_m\alpha_m}(1-1/M) \end{pmatrix}_{\alpha=0}, \qquad m=1,\dots,5. \tag{30}$$

Согласно критерию Сильвестра матрица $\Delta(M)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$(-1)^m \det \Delta_m(M) > 0, \qquad m=1,\dots,5. \tag{31}$$

Элементы матрицы $\Delta(M)$ являются значением в точке $t = 1-1/M$ решения $(x_7)_{\alpha_j\alpha_l}(t)$, $(x_p)_{\alpha_j}(t)$, $(\Psi_p)_{\alpha_j}(t)$, $j,l=1,\dots,5$, $p=1,\dots,6$ задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (20)–(22) и (26)–(29), в которых частные производные $(u_k)_{\alpha_j}$, $k=1,\dots,4$, $j=1,\dots,5$, задаются формулами (23), (24).

Численное интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений с использованием пакета MAPLESOFT Maple 15 и проверка критерия Сильвестра (31) приводят к значению $M_5^* = 2.06263\dots$. Это доказывает теорему.

Библиографический список

1. *Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture. LOMI Preprints E-5-84. 1984. P. 1–21.

2. *Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. Vol. 154, № 1–2. P. 137–152.

3. *Pick G.* Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet // S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math., Naturwiss. Kl. Abt. II a. 1917. B. 126. P. 247–263.

4. *Schaeffer A. C., Spencer D. C.* The coefficients of schlicht functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 107–125.

5. *Schiffer M., Tammi O.* On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 119. P. 67–78.

6. *Siewierski L.* Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity // Bull. Acad. Polon. Sci. 1968. Vol. 16. P. 575–576.

7. *Siewierski L.* Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions close to identity // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1971. Vol. 86. P. 1–153.

8. *Schiffer M., Tammi O.* On bounded univalent functions

which are close to identity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1968. Vol. 435. P. 3–26.
9. *Прохоров Д. В., Гордиенко В. Г.* Определение границы в локальной гипотезе Хажинского–Тамми // Изв. вузов. Математика. 2008. № 9. С. 59–68.
10. *Прохоров Д. В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1677.
11. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1969. 384 с.

Determination of the Boundary in the Local Charzynski–Tammi Conjecture for the Fifth Coefficient

V. G. Gordienko, K. A. Samsonova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, valeriygor@mail.ru, kris-ruzhik@mail.ru

In this article we find the exact value of M_5 such that the symmetrized Pick function $P_{M4}(z)$ is an extreme in the local Charzynski–Tammi conjecture for the fifth Taylor coefficient of the normalized holomorphic bounded univalent functions

Key words: Löwner equation, optimum control, Pontryagin maxsimum principle.

References

1. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture. *LOMI Preprints* E-5-84, 1984, pp. 1–21.
2. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 1985, vol. 154, no 1–2, pp. 137–152.
3. Pick G. Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet. *S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math., Naturwiss. Kl. Abt. II a*, 1917, B. 126, pp. 247–263.
4. Schaeffer A. C., Spencer D. C. The coefficients of schlicht functions. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, pp. 107–125.
5. Schiffer M., Tammi O. On the fourth coefficient of bounded univalent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 119, pp. 67–78.
6. Siewierski L. Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 1968, vol. 16, pp. 575–576.
7. Siewierski L. Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions close to identity. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 1971, vol. 86, pp. 1–153.
8. Schiffer M., Tammi O. On bounded univalent functions which are close to identity. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.*, 1968, vol. 435, pp. 3–26.
9. Prokhorov D. V., Gordienko V. G. Definition of the boundary in the local Charzynski–Tammi conjecture. *Russ. Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2008, vol. 52, no. 9, pp. 51–59.
10. Prokhorov D. V. Sets of values of systems of functionals in classes of univalent functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 499–516.
11. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes], Moscow, Nauka, 1969, 384 p. (in Russian).

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА–ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

О. А. Королева

Старший преподаватель кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, korolevaoart@yandex.ru

Найдены достаточные условия (условия типа Жордана–Дирихле) разложения функции $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. Как известно, для такого разложения необходимо, чтобы $f(x)$ была непрерывна и принадлежала замыканию области значений интегрального оператора. Оказывается, если $f(x)$ к тому же функция ограниченной вариации, эти условия являются и достаточными.

Ключевые слова: теорема Жордана–Дирихле, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.