Получим, наконец, точную асимптотику при $t \to +0$ функции $u_{00}^0(s,t)$. Имеем из (34)

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{2}{\alpha''(0)} \int\limits_0^t e^{-\frac{2|s|^2}{\alpha''(0)\,t}\left(\frac{t}{\tilde{t}}-1\right)} t^{-1} \left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^{-2} d\left(\frac{\tilde{t}}{t}\right) \hat{f}(s,0)\,|s|^2.$$

Далее проводим те же замены, что и в предыдущей оценке.

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{2}{\alpha''(0)t} \int\limits_0^1 e^{-\frac{2|s|^2}{\alpha''(0)\,t}\left(z^{-1}-1\right)} z^{-2} dz\, \hat{f}(s,0)\,|s|^2 = \frac{2\hat{f}(s,0)}{\alpha''(0)t}\,|s|^2\, \frac{\alpha''(0)\,t}{2\,|s|^2} = \hat{f}(s,0). \qquad (39)$$

Из (39) для функции $v_{00}^0(x,t) = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{u_{00}^0(s,t)}{|s|^2}\right]$ следует представление

$$v_{00}^0(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \frac{\hat{f}(s,0)}{|s|^2} ds = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{f(x,0)}{|x-y|} dy. \qquad (40)$$

Представление (40), оценка (38) завершают необходимые в случае $n = 2$ выкладки, отличающие этот случай от случая $n > 2$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Глушко, В.П.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1985. Т. 23. С. 125–218.
2. *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. М.: Наука, 1976. 527 с.

УДК 501.1

ОБ ОПЕРАТОРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА С СУММИРУЕМЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

И.М. Гусейнов[1], А.Р. Лятифова[2]

[1]Бакинский государственный университет,
кафедра прикладной математики;
[2]Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку,
отдел функционального анализа
E-mail: hmhuseynov@gmail.com, latifovaaygun@gmail.com

В работе доказано существование оператора преобразования для оператора Дирака с суммируемыми потенциалами и найдена связь потенциала и ядра оператора преобразования в данном случае.

Ключевые слова: оператор преобразования, оператор Дирака.

On Transformation Operator for the System of Dirac Equations with Summable Potentials

H.M. Huseynov[1], A.R. Latifova[2]

[1]Baku State University,
Chair of Applied Mathematics;
[2]Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku,
Functional Analysis Department
E-mail: hmhuseynov@gmail.com, latifovaaygun@gmail.com

The paper proves the existence of the transformation operator for summable functions and finds the analogy of the formula for the potential with the transformation operator in the given case.

Key words: transformation operator, Dirac operator.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим граничную задачу, порожденную системой уравнений Дирака

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y,\ x \in (0,1)\,, \qquad (1)$$

и граничными условиями

$$y_1\,(0) = y_1\,(1) = 0. \qquad (2)$$

Здесь λ — спектральный параметр, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $p(x)$ и $q(x)$ — вещественно значные функции.

Решения обратной задачи спектрального анализа по собственным значениям λ_n и нормировочным числам α_n задачи (1)–(2), а также обратная задача по двум спектрам: по λ_n и по собственным значениям μ_n граничной задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями $y_1(0) = y_2(1) = 0$, даны в работах [1, 2]. Подобные задачи, когда краевые условия содержат спектральный параметр, рассмотрены в работе [3]. В этих работах предполагалось, что $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции, так как потенциал $Q(x)$ уравнения (1) связан с решением $A(x,t)$ уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко с помощью формулы

$$-BA(x,x) + A(x,x)B = Q(x). \tag{3}$$

Недавно полное решение обратных задач спектрального анализа для суммируемых $p(x)$ и $q(x)$, т.е. когда $p(\cdot), q(\cdot) \in L_p(0,1)$ $(p \geq 1)$, дано в работе [4]. С этой целью вместо формулы (3) была использована другая формула:

$$Q(x) = \widetilde{R}(x,0)\, JB, \tag{4}$$

где $\widetilde{R}(x,t)$ является решением уравнения Крейна, $J = \mathrm{diag}\,(1,-1)$ и равенство понимается в смысле пространства L_p.

Известно, что формула (3) получается из существования оператора преобразования:

$$S(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x A(x,t) \begin{pmatrix} \sin\lambda t \\ -\cos\lambda t \end{pmatrix} dt, \tag{5}$$

когда $Q(x)$ — непрерывная матрица-функция.

Целью настоящей работы является доказательство существования оператора преобразования (5) для суммируемых функций $p(x)$ и $q(x)$ и нахождение аналога формулы (3) в данном случае.

ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть $|\cdot|$ — операторная норма в евклидовом пространстве $\mathbb{C}^2$, M_2 — пространство матриц 2-го порядка с комплексными элементами, $L_p((0;1);M_2)$ — пространство M_2-значных функций на $(0,1)$ с нормой $\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^t |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ $(p \geq 1)$, I — единичная матрица 2-го порядка.

Теорема. *Пусть $Q \in L_p((0;1);M_2)$. Тогда решение $E(x,\lambda)$ матричного уравнения*

$$BE' + Q(x)E = \lambda E,$$

удовлетворяющее условию $E(0,\lambda) = I$, представимо в виде

$$E(x,\lambda) = e^{-\lambda Bx} + \int_{-x}^{x} K(x,t) e^{-\lambda Bt} dt, \tag{6}$$

причем

$$\|K(x,\cdot)\|_{L_p((-x,x);M_2)} \leq C\, \|Q\|_{L_p((0,x);M_2)}\,, \tag{7}$$

где C — положительная постоянная,

$$\lim_{t\to+0} \left(\int_0^1 |K(x,x-t)B - BK(x,x-t) - Q(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to+0} \left(\int_0^1 |K(x,-x+t)B - BK(x,-x+t)|^p\,dx\right)^{1/p} = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Применяя метод вариации произвольных постоянных, нетрудно получить следующее эквивалентное интегральное уравнение для решения $E(x,\lambda)$:

$$E(x,\lambda) = e^{-\lambda Bx} + \int_0^x e^{-\lambda B(x-t)} BQ(t) E(t,\lambda)\,dt.$$

Подставляя здесь вместо $E(x,\lambda)$ его представление в виде (6), получаем

$$\int_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}BQ(t)e^{-\lambda Bt}dt + \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}BQ(t)\int_{-t}^{t} K\left(t,s\right)e^{-\lambda Bs}\,ds\,dt.$$

Отсюда нетрудно получить следующие соотношения для функции $K^{\pm}(x,t) = \frac{1}{2}(K(x,t) \pm BK(x,t)B)$:

$$\int_{-x}^{x} K^{+}(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} BQ\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{-\lambda Bt}\,dt + \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}BQ(t)\int_{-t}^{t} K^{-}\left(t,s\right)e^{-\lambda Bs}\,ds\,dt,$$

$$\int_{-x}^{x} K^{-}(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}BQ(t)\int_{-t}^{t} K^{+}\left(t,s\right)e^{-\lambda Bs}\,ds\,dt. \tag{10}$$

Используя очевидные равенства $BK^{\pm}(x,t) = \mp K^{\pm}(x,t)B$, $e^{-\lambda Bz}K^{\pm}(x,t) = K^{\pm}(x,t)e^{\pm\lambda Bz}$ для интегралов в правых частях (10), имеем:

$$\int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}BQ(t)\int_{-t}^{t} K^{\mp}\left(t,s\right)e^{-\lambda Bs}\,ds\,dt = \int_{-x}^{x}\left(\int_{\frac{x\pm t}{2}}^{x} BQ\left(s\right)K^{\mp}\left(s,t\pm x\mp s\right)ds\right)e^{-\lambda Bt}dt.$$

Следовательно, из равенств (10) получим следующую систему интегральных уравнений для $K^{\pm}(x,t)$:

$$K^{+}(x,t) = \frac{1}{2}BQ\left(\frac{x+t}{2}\right) + \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} BQ\left(s\right)K^{-}\left(s,t+x-s\right)\,ds,$$

$$K^{-}(x,t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} BQ\left(s\right)K^{+}\left(s,t-x+s\right)ds. \tag{11}$$

Таким образом, для того чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно показать, что система интегральных уравнений (11) имеет решения $K^{\pm}(x,t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left(\int_{-x}^{x}\left|K^{\pm}(x,t)\right|^{p}dt\right)^{1/p} \le C^{\pm}\left\|Q\right\|_{L_p}, \tag{12}$$

где $C^{\pm}$ — положительные постоянные. Тогда матричная функция $K(x,t) = K^{+}(x,t) + K^{-}(x,t)$ является ядром представления (6) и для него справедлива оценка (7). К системе интегральных уравнений (11) применяем метод последовательных приближений, пологая $K_0^{+}(x,t) = \frac{1}{2}BQ\left(\frac{x+t}{2}\right)$, $K_0^{-}(x,t) = 0$, $K_n^{+}(x,t) = \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} BQ\left(s\right)K_{n-1}^{-}\left(s,t+x-s\right)\,ds$, $K_n^{-}(x,t) = \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} BQ\left(s\right)K_{n-1}^{+}\left(s,t-x+s\right)\,ds$, $\quad n = 1,2,\ldots$

После применения неравенства Гельдера и теоремы Фубини имеем

$$\int_{-x}^{x}\left|K_n^{\pm}(x,t)\right|^{p}dt \le \int_{0}^{x}\left|Q\left(s\right)\right|^{p}\int_{-s}^{s}\left|K_{n-1}^{\mp}\left(s,t\right)\right|^{p}dt\,ds$$

и так как $\int\limits_{-x}^{x}\left|K_0^{+}(x,t)\right|^{p}dt \le \int\limits_{0}^{x}\left|Q\left(s\right)\right|^{p}\,ds$, методом математической индукции легко доказывается, что

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{2n}^{+}(x,t)\right|^{p}dt \le \frac{\left(\int\limits_{0}^{x}\left|Q\left(s\right)\right|^{p}ds\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad K_{2n-1}^{+}(x,t) = 0,$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K^{-}_{2n-1}(x,t)\right|^{p}dt\le\frac{\left(\int_0^x|Q\,(s)|^p\,ds\right)^{2n+1}}{(2n)!},\qquad K^{-}_{2n}(x,t)=0.$$

Следовательно, матричные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}K_n^{+}\,(x,\cdot)=K^{+}\,(x,\cdot)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}K_n^{-}\,(x,\cdot)=K^{-}\,(x,\cdot)$ сходятся равномерно по $x\in(0,1)$ в пространстве $L_p\left((0,1)\,;M_2\right)$, а их суммы удовлетворяют неравенствам (12), являясь одновременно решением системы уравнений (11).

Теперь докажем соотношения (8). Первое уравнение из системы (11) напишем в виде

$$-2BK^{+}(x,t)=Q\left(\frac{x+t}{2}\right)+2\int_{\frac{x+t}{2}}^{x}Q\,(s)\,K^{-}\,(s,t+x-s)\,ds,$$

или, выполнив замену $t\to x-t$, в виде

$$K\,(x,x-t)\,B-BK\,(x,x-t)=Q\left(x-\frac{t}{2}\right)+2\int_{x-\frac{t}{2}}^{x}Q\,(s)\,K^{-}\,(s,2x-t-s)\,ds.$$

Отсюда в силу неравенства Минковского имеем (считая, что $Q(s)=0$ при $s\notin[0,1]$):

$$\left(\int_0^1|K\,(x,x-t)\,B-BK\,(x,x-t)-Q(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le\left(\int_0^1\left|Q\left(x-\frac{t}{2}\right)-Q(x)\right|^p dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(2\int_0^1\left|\int_{x-\frac{t}{2}}^{x}Q\,(s)\,K^{-}\,(s,2x-t-s)\,ds\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=I_1(t)+I_2(t).$$

Чтобы установить соотношение (8), достаточно показать, что

$$\lim_{t\to+0}I_2(t)=0. \tag{13}$$

Используя неравенство Гелдера, имеем:

$$\left|\int_{x-\frac{t}{2}}^{x}Q\,(s)\,K^{-}\,(s,2x-t-s)\,ds\right|^p\le\left(\int_{x-\frac{t}{2}}^{x}1^q ds\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{x-\frac{t}{2}}^{x}|Q(s)|^p\left|K^{-}\,(s,2x-t-s)\right|^p ds\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2^{p-1}}\int_{x-\frac{t}{2}}^{x}|Q(s)|^p\left|K^{-}\,(s,2x-t-s)\right|^p ds,\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Тогда меняя порядок интегрирования и делая замену переменных $\xi=2x-t-s$, получим

$$I_2^p(t)\le\frac{1}{2^{p-1}}\int_0^1\left(\int_{x-\frac{t}{2}}^{x}|Q(s)|^p\left|K^{-}\,(s,2x-t-s)\right|^p ds\right)dx\le$$

$$\le\int_0^{1-\frac{t}{2}}\left(\int_{s-t}^{s}\left|K^{-}\,(s,\xi)\right|^p d\xi\right)|Q(s)|^p\,ds+\int_{1-\frac{t}{2}}^{1}\left(\int_{s-t}^{2-t-s}\left|K^{-}\,(s,\xi)\right|^p d\xi\right)|Q(s)|^p\,ds\le$$

$$\le\int_0^1\left(\int_{s-t}^{s}\left|K^{-}\,(s,\xi)\right|^p d\xi\right)|Q(s)|^p\,ds+\int_{1-\frac{t}{2}}^{1}\left(\int_{-s}^{s}\left|K^{-}\,(s,\xi)\right|^p d\xi\right)|Q(s)|^p\,ds\,. \tag{14}$$

В силу оценки (7)

$$\int\limits_{1-\frac{t}{2}}^{1}\left(\int\limits_{-s}^{s}\left|K^{-}(s,\xi)\right|^{p}d\xi\right)|Q(s)|^{p}\,ds\le C\int\limits_{0}^{1}|Q(\alpha)|^{p}\,d\alpha\int\limits_{1-\frac{t}{2}}^{1}|Q(s)|^{p}\,ds,$$

тем самым второе слагаемое из правой части (14) стремится к нулю при $t\to+0$. Далее, так как $\varphi_t(s)=\int\limits_{s-t}^{s}|K^{-}(s,\xi)|\,d\xi\,|Q(s)|^{p}\to 0$ при $t\to+0$ и

$$\varphi_t(s)\le\int\limits_{-s}^{s}\left|K^{-}(s,\xi)\right|d\xi\,|Q(s)|^{p}\le C\int\limits_{0}^{1}|Q(\alpha)|^{p}\,d\alpha\,|Q(s)|^{p},$$

то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем:

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{s-t}^{s}\left|K^{-}(s,\xi)\right|^{p}d\xi\right)|Q(s)|^{p}\,ds=\lim_{t\to+0}\int\limits_{0}^{1}\varphi_t(s)ds=0.$$

Таким образом, справедливо соотношение (13), следовательно, справедливо и равенство (8). Исходя из второго уравнения системы (11), аналогично доказывается соотношение (9). Теорема доказана.

Рассмотрим решение $S(x,\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям $S_1(0,\lambda)=0$, $S_2(0,\lambda)=1$. Очевидно, что $S(x,\lambda)=E(x,\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$и так как $e^{-\lambda Bx}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\-\cos\lambda x\end{pmatrix}$, то из представления (6) для $E(x,\lambda)$ имеем:

$$S(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\-\cos\lambda x\end{pmatrix}+\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\-\cos\lambda t\end{pmatrix}dt.$$

Отсюда

$$S(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\-\cos\lambda x\end{pmatrix}+\int\limits_{0}^{x}A(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\-\cos\lambda t\end{pmatrix}dt,$$

где $A(x,t)=K(x,t)-K(x,-t)\,J$.

Тогда в силу соотношений (8) и (9) получим аналог формулы (3) для потенциалов $Q\in L_p((0,1);M_2)$:

$$\lim_{t\to 0}\left(\int\limits_{0}^{1}|A(x,x-t)B-BA(x,x-t)-Q(x)|^{p}\,dx\right)^{1/p}=0.$$

Библиографический список

1. *Гасымов, М.Г.* Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке / М.Г. Гасымов, Т.Т. Джабиев //Докл. АН Азерб. ССР. 1966. Т. 22, № 7. С. 3–6.
2. *Джабиев, Т.Т.* Обратная задача уравнения Дирака с особенностью / Т.Т. Джабиев // Докл. АН Азерб. ССР. 1966. Т. 22, № 11. С. 8–12.
3. *Мамедов, С.Г.* Обратная граничная задача для системы уравнений Дирака на конечном интервале / С.Г. Мамедов // Учен. записки Азерб. гос. ун-та. 1975. № 5. С. 61–67.
4. *Albeverio, S.* Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials / S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // Rus. J. of Math. Physics. 2005. Vol. 12, № 4. P. 406–423.