



МЕХАНИКА

УДК 532.5

ОБТЕКАНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ ПОД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЕСОМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ

К.В. Кириллин, С.И. Филиппов

Казанский государственный университет,
НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
E-mail: kirill_k@inbox.ru, sergei.filippov@ksu.ru

Исследуется обтекание крылового профиля под линией раздела двухслойной весомой жидкости при конечной глубине слоев. Представлены результаты расчетов гидродинамических характеристик реального гидропрофиля в зависимости от числа Фруда. Проведены сравнения со случаями обтекания профиля в полубезграничном канале — при отсутствии крышки и при отсутствии дна.

Ключевые слова: крыловой профиль, двухслойная жидкость, гравитационные волны, ограниченный поток.

Flow around the Wing Section in Channel under the Interface of Two Ponderable Liquids

K.V. Kirillin, S.I. Filippov

Kazan State University,
N.G. Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics
E-mail: kirill_k@inbox.ru, sergei.filippov@ksu.ru

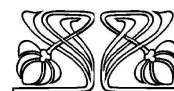
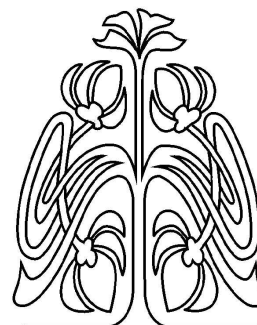
In this paper, we examine a flow around the wing section under the interface of two bounded layers of liquids under gravity. We present here some results of the calculation of real hydrofoil hydrodynamic characteristics subject to Froude number. Comparisons with cases of semi-infinite channel — with no top border and with no bottom border — are given.

Key words: wing section, double-layer liquid, gravity waves, bounded flow.

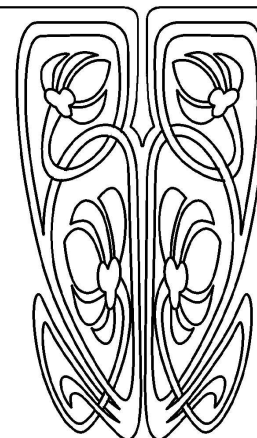
ВВЕДЕНИЕ

Общее решение задачи о поступательном движении произвольного контура под свободной поверхностью бесконечно глубокой весомой жидкости в приближении теории волн малой амплитуды было дано Н.Е. Кочиным [1]. М.Д. Хаскинд [2] обобщил решение [1] на случай жидкости конечной глубины. В.С. Войценья [3, 4] теоретически исследовал методом [1] задачу о движении плоского контура непрерывной кривизны под и над границей раздела двух жидкостей разной плотности с верхним слоем, имеющим свободную поверхность. Иной метод решения задачи о движении контура вблизи границ раздела сред был предложен Г.Г. Тумашевым и Н.Д. Черепениным [5] и развит для многосвязных областей С.И. Филипповым [6]. Главное достоинство метода [5] состоит в точном удовлетворении граничного условия на контуре по построению решения. Численные методы к решению данной задачи для кругового и эллиптического цилиндров применялись И.В. Стуровой [7] и С.И. Горловым [8].

В настоящей работе метод [5] применен к решению задачи обтекания профиля произвольной формы, расположенного в закрытом канале под линией раздела двух жидкостей разной плотности. Следует отметить, что при небольших числах Фруда твердая стенка



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





моделирует свободную поверхность. Рассматриваемая задача при небольших числах Фруда эквивалентна задаче об обтекании профиля двухслойным потоком со свободной поверхностью и дном. Эта задача связана с явлением «мертвой воды», впервые внесенным в поле научного исследования Ф. Нансеном, которое в настоящее время привлекает большое внимание [9].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой жидкости, ограниченный сверху твердой крышкой M_1 , а снизу твердым дном M_3 , и состоящий из слоя толщины H_1 плотности ρ_1 и слоя толщины H_2 плотности ρ_2 . Жидкость находится под действием силы тяжести, ускорение которой равняется g . Крыловой профиль C с длиной хорды L расположен в нижнем слое жидкости (рис. 1).

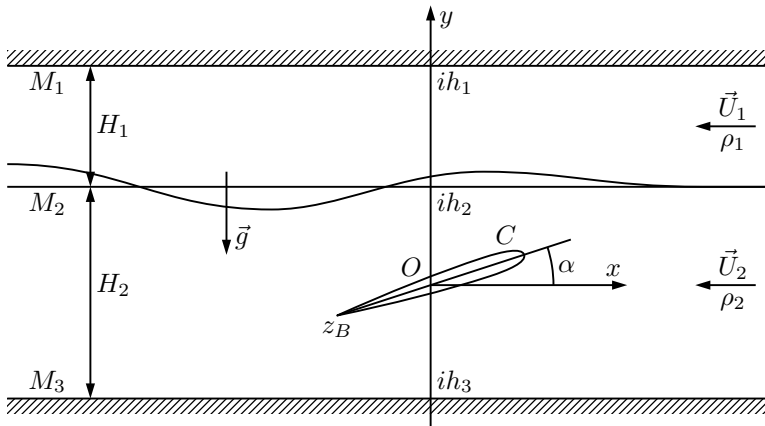


Рис. 1. Схема течения

В системе координат, начало которой совпадает с серединой хорды профиля, ось Ox параллельна невозмущенной границе раздела сред M_2 и направлена навстречу потоку, а ось Oy направлена вертикально вверх, течение плоскопараллельное, установившееся. Границы раздела M_k в системе координат xOy описываются соответственно уравнениями $y = h_k$ ($k = \overline{1,3}$). Скорости потока на бесконечности перед профилем параллельны стенкам канала и

равны U_l ($l = 1, 2$). Считаем, что внутри жидкости вихри отсутствуют, так что течение обладает потенциалом скорости.

Введем соответствующие слоям жидкости области D_l ($l = 1, 2$). Область D_1 представляет собой полосу $h_2 \leq y \leq h_1$ ($h_2 = h_1 - H_1$), область D_2 — полосу $h_3 \leq y \leq h_2$ ($h_3 = h_2 - H_2$) за исключением области, ограниченной профилем C .

Рассмотрим комплексную переменную $z = x + iy$ и комплексные потенциалы возмущенного течения

$$\tilde{W}_l(z) = \tilde{\varphi}_l(x, y) + i\tilde{\psi}_l(x, y)$$

в соответствующих областях D_l .

Используя предположения линейной теории волн малой амплитуды, с учетом обозначений

$$\tilde{W}_l(z) = U_l W_l(z), \quad \nu_2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2},$$

$$m_l = \frac{\rho_l U_l^2}{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2}, \quad m = m_1 - m_2$$

придем к следующей задаче. Найти функции $W_l(z)$, аналитические в соответствующих областях и удовлетворяющие условиям:

на поверхности профиля C

$$\text{Im } W_2(z) = y + \psi_1 \quad (\psi_1 = \text{const}), \quad z \in C; \tag{1}$$

на горизонтальной крышке M_1

$$\text{Im} \left[\frac{dW_1(z)}{dz} \right] = 0, \quad y = h_1; \tag{2}$$

на невозмущенном уровне линии раздела жидкостей M_2

$$\text{Im} \left[W_1(z) - W_2(z) \right] = 0, \tag{3}$$



$$\operatorname{Re} \left[m_1 \frac{dW_1(z)}{dz} - m_2 \frac{dW_2(z)}{dz} + i\nu_2 W_2(z) \right] = 0, \quad y = h_2; \quad (4)$$

на дне канала M_3

$$\operatorname{Im} \left[\frac{dW_2(z)}{dz} \right] = 0, \quad y = h_3; \quad (5)$$

на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dW_l(z)}{dz} = 0, \quad (6)$$

$$\left| \frac{dW_l(z)}{dz} \right| < A, \quad A < \infty, \quad z \rightarrow \infty.$$

Граничные условия (1), (2), (5) являются условиями плавности обтекания профиля и стенок канала. Условие (3) на линии раздела является кинематическим, (4) — динамическим и представляет собой комплексную запись условия непрерывности давления при пересечении поверхности раздела жидкостей, взятое в линеаризованной форме. При этом, следуя теории волн малой амплитуды, будем выполнять это условие на невозмущенном уровне линии раздела. Условия на бесконечности (6) обеспечивают отсутствие скоростей возмущений далеко перед профилем и ограниченность возмущений вне его окрестности.

В силу линейности задачи представим $W_l(z)$ ($l = 1, 2$) в виде суммы

$$W_l(z) = W_{1l}(z) + \gamma W_{2l}(z), \quad (7)$$

где $W_{1l}(z)$ — комплексные потенциалы возмущенного бесциркуляционного течения, удовлетворяющие условиям (1)–(6), $W_{2l}(z)$ — комплексные потенциалы чисто циркуляционного течения, γ — значение циркуляции. Потенциалы $W_{2l}(z)$ ($l = 1, 2$) наряду с условиями (2)–(6) должны удовлетворять еще следующим условиям:

$$\operatorname{Im} W_{22}(z) = \psi_2 \quad (\psi_2 = \text{const}), \quad z \in C; \quad (8)$$

$$\Delta_C W_{22} = 1, \quad (9)$$

где Δ_C — приращение функции при положительном обходе контура C .

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Метод решения задачи заключается в распределении двойных слоев особенностей (диполей) вещественной плотности по невозмущенному уровню линии раздела жидкостей M_2 и горизонтальным крышке M_1 и дну M_3 , к потенциалам которых добавляются такие регулярные вне C функции, что условие на контуре (1) выполняется точно.

Наряду с физической плоскостью $z = x + iy$ рассмотрим параметрическую плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Пусть функция $z = f(\zeta)$ осуществляет конформное отображение внешности единичной окружности $C_0 = \{\zeta \mid |\zeta| = 1\}$ на внешность профиля C , причем $f(\infty) = \infty$ и $\zeta_B = -1$ соответствует задней кромке профиля z_B .

Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$W_{sl}(z) = W_{s\infty}(z) + \sum_{k=1}^3 [V_{sk}(z) + \Phi_{sk}(z)], \quad (10)$$

где $W_{s\infty}(z)$ — комплексные потенциалы возмущенного течения при обтекании профиля безграничным потоком,

$$V_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} \frac{\mu_{sk}(t)}{z-t} dt,$$

$$\Phi_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} F_k(z, t) \mu_{sk}(t) dt.$$



Функции $F_k(z, t)$ строятся в параметрической плоскости ζ на основании теоремы Милн-Томсона об окружности [10]:

$$F_k[f(\zeta), f(\tau)] = \frac{1}{f'(\tau)} [\chi_k(\zeta, \tau) + G_k(\zeta, \tau)],$$

$$\chi_k(\zeta, \tau) = \frac{1}{\zeta - \tau} - \frac{f'(\tau)}{f(\zeta) - f(\tau)}, \quad G_k(\zeta, \tau) = \frac{1}{\bar{\tau}^2 (\zeta - 1/\bar{\tau})}.$$

Плотности непрерывно распределенных по M_k особенностей $\mu_{sk}(t)$ ($s = 1, 2; k = \overline{1, 3}$) определяются из условий (2), (4), (5). Предварительно для границ M_k проводятся преобразования координат $z = z_k + ih_k$. Условие (3) выполняется на основании свойств предельных значений интеграла типа Коши.

Рассмотрим условие (4) на границе раздела жидкостей M_2 для случая чисто циркуляционного обтекания профиля. Подставим комплексный потенциал в форме (10) ($s = 2$) в условие (4) с учетом преобразования координат $z = z_2 + ih_2$, получим:

$$\operatorname{Re} \left[\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) \Omega_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{21}(z_2) \right]_{z_2=x_2-i\cdot 0} = 0, \quad (11)$$

где

$$\Omega_{22}(z_2) = W_{2\infty}(z_2) + V_{23}(z_2) + \Phi_{21}(z_2) + \Phi_{22}(z_2) + \Phi_{23}(z_2).$$

Условие (11) представляет собой сингулярное интегродифференциальное уравнение, которое содержит три группы слагаемых: с особенностями на линии раздела ($y_2 = 0$), с особенностями внутри рассматриваемой области ($y_2 < 0$) и с особенностями вне области ($y_2 > 0$). Его можно регуляризовать, используя следующий прием. Заметим, что (11) эквивалентно следующему уравнению:

$$\operatorname{Re} \left[\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} - i\nu_2 \right) \bar{\Omega}_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{21}(z_2) \right]_{z_2=x_2-i\cdot 0} = 0. \quad (12)$$

Функции $V_{22}(z_2)$, $\bar{\Omega}_{22}(z_2)$, $V_{21}(z_2)$ регулярны в полуплоскости $y_2 \leq 0$, следовательно, выражение под знаком действительной части в этой области является чисто мнимой постоянной:

$$\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} - i\nu_2 \right) \bar{\Omega}_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{21}(z_2) = iN, \quad (13)$$

где N — вещественная постоянная, определяемая из условия на бесконечности (6): $N = 0$. Решая линейное дифференциальное уравнение первого порядка (13) относительно V_{22} и находя действительную часть предела при $z_2 \rightarrow x_2 - i \cdot 0$ (предельный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), получим в параметрической плоскости ζ при $x_2 = f(\zeta) - ih_2$:

$$\mu_{22}(\zeta_2) = 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_{22}(\zeta_2) + \sum_{r=1}^3 \int_{\Gamma_r} L_{2r}(\zeta_2, \tau_r) \mu_{2r}(\tau_r) d\tau_r \right]. \quad (14)$$

Остальные пять уравнений для нахождения плотностей особенностей можно получить, проделав аналогичные (11)–(14) преобразования для граничных условий (2), (4), (5) для случая бесциркуляционного и для условий (2), (5) для случая чисто циркуляционного обтекания. В результате получим две системы уравнений для определения плотностей особенностей $\mu_{sk}(\zeta)$:

$$\mu_{sk}(\zeta_k) = 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_{sk}(\zeta_k) + \sum_{r=1}^3 \int_{\Gamma_r} L_{kr}(\zeta_k, \tau_r) \mu_{sr}(\tau_r) d\tau_r \right] \quad (s = 1, 2; k = \overline{1, 3}), \quad (15)$$

где

$$\sigma_{s1}(\zeta_1) = W_{s\infty}^*(\zeta_1),$$

$$L_{11}(\zeta_1, \tau_1) = \frac{1}{2\pi i} \left[\chi_1(\zeta_1, \tau_1) + G_1(\zeta_1, \tau_1) \right],$$



$$L_{12}(\zeta_1, \tau_2) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta_1 - \tau_2} + G_2(\zeta_1, \tau_2) \right],$$

$$L_{13}(\zeta_1, \tau_3) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta_1 - \tau_3} + G_3(\zeta_1, \tau_3) \right],$$

$$\sigma_{s2}(\zeta_2) = mW_{s\infty}^*(\zeta_2) - i\nu_2(m-1)e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)} W_{s\infty}^*(\vartheta_2) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2,$$

$$L_{21}(\zeta_2, \tau_1) = \frac{1}{2\pi i} \left[m \left(\frac{1}{\zeta_2 - \tau_1} + G_1(\zeta_2, \tau_1) \right) - \right. \\ \left. -i\nu_2(m-1)e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)} (\chi_1(\vartheta_2, \tau_1) + G_1(\vartheta_2, \tau_1)) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 + \right. \\ \left. +i\nu_2(m+1)e^{+i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{-i\nu_2 f(\vartheta_2)} \frac{f'(\tau_1)}{f(\vartheta_2) - f(\tau_1)} f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 \right],$$

$$L_{22}(\zeta_2, \tau_2) = \frac{1}{2\pi i} \left[m(\chi_2(\zeta_2, \tau_2) + G_2(\zeta_2, \tau_2)) - \right. \\ \left. -i\nu_2(m-1)e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)} (\chi_2(\vartheta_2, \tau_2) + G_2(\vartheta_2, \tau_2)) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 \right],$$

$$L_{23}(\zeta_2, \tau_3) = \frac{1}{2\pi i} \left[m \left(\frac{1}{\zeta_2 - \tau_3} + G_3(\zeta_2, \tau_3) \right) - \right. \\ \left. -i\nu_2(m-1)e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)} \left(\frac{1}{\vartheta_2 - \tau_3} + G_3(\vartheta_2, \tau_3) \right) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 \right],$$

$$\sigma_{13}(\zeta_3) = -W_{1\infty}^*(\zeta_3), \quad \sigma_{23}(\zeta_3) = W_{2\infty 1}^*(\zeta_3) - W_{2\infty 2}^*(\zeta_3),$$

$$L_{31}(\zeta_3, \tau_1) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta_3 - \tau_1} + G_1(\zeta_3, \tau_1) \right],$$

$$L_{32}(\zeta_3, \tau_2) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta_3 - \tau_2} + G_2(\zeta_3, \tau_2) \right],$$

$$L_{33}(\zeta_3, \tau_3) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\chi_3(\zeta_3, \tau_3) + G_3(\zeta_3, \tau_3) \right],$$

$$W_{1\infty}^*(\zeta) = -(K\zeta + \bar{K}/\zeta) + f(\zeta),$$

$$W_{2\infty}^*(\zeta) = W_{2\infty 1}^*(\zeta) + W_{2\infty 2}^*(\zeta),$$

$$W_{2\infty 1}^*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_\gamma), \quad W_{2\infty 2}^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln(\zeta - 1/\bar{\zeta}_\gamma),$$

$$K = f'_\zeta(\infty), \quad \zeta_\gamma = f^{-1}(z_\gamma),$$

z_γ — точка, лежащая в области $y \leq h_3$, $T_k = \{\zeta \mid \zeta = f^{-1}(x + ih_k)\}$ — образы невозмущенных границ раздела сред в параметрической плоскости ζ . Комплексный потенциал циркуляционного обтекания профиля безграничным потоком $W_{2\infty}(z) = W_{2\infty}[f(\zeta)] = W_{2\infty}^*(\zeta)$ удовлетворяет условиям (3), (8), (9), этим же условиям удовлетворяет и вся сумма (10) ($s = 2$).



Значение циркуляции γ находится из постулата Жуковского – Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля [11]:

$$\gamma = \frac{2\pi \operatorname{Im}(-K + \bar{K}/\zeta_B^2) + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 J_{1k}(\zeta_B)}{\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\zeta_B - 1/\zeta_\gamma} - \frac{1}{\zeta_B - \zeta_\gamma} - \sum_{k=1}^3 J_{2k}(\zeta_B) \right)},$$

где

$$J_{sk}(\zeta_B) = \int_{T_k} \left[\frac{1}{(\zeta_B - \tau)^2} + \frac{1}{\bar{\tau}^2 (\zeta_B - 1/\bar{\tau})^2} \right] \mu_{sk}(\tau) d\tau.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для решения полученных систем линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (15) ($s = 1, 2$) применялся метод последовательных приближений [6].

По найденным значениям плотностей определяется комплексный потенциал возмущенного течения (7) и по формуле Чаплыгина [11] вычисляется волновое сопротивление X и подъемная сила Y профиля C :

$$X - iY = \frac{i\rho_2}{2} \oint_{C_0} \frac{1}{f'(\zeta)} \left[\frac{d\tilde{W}_2(\zeta)}{d\zeta} \right]^2 d\zeta - i\rho_2 U_2^2 \gamma.$$

Для расчета гидродинамических характеристик крылового профиля была разработана программа, тестирование которой было проведено на известных решениях задач обтекания тел различных форм слоями жидкостей с одной и двумя границами [6, 7, 12].

Для данной задачи характерно наличие критического числа Фруда Fr^* , значение которого зависит от отношения плотностей ρ_2/ρ_1 и толщин слоев h_1/L и h_2/L [13]. Периодические волны на границе раздела существуют только при $Fr < Fr^*$, поэтому именно в этом диапазоне изменения числа Фруда проводились расчеты.

Результаты расчетов, выполненных для профиля NACA 66mod в случае одинаковых скоростей слоев ($U_1 = U_2$), представлены на рис. 2–5. Отображающая функция $f(\zeta)$ для данного профиля определялась по методу М.В. Лотфуллина [14]. Отношение плотностей жидкостей ρ_2/ρ_1 в расчетах было принято равным 1.03, что соответствует отношению плотностей морской и пресной воды. На

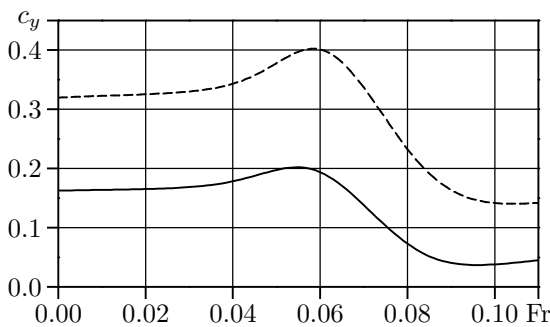


Рис. 2. Зависимость c_y от Fr при $h_1/L = 1.4$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$, $\alpha = \{0^\circ, 1^\circ\}$

рис. 2–4 изображены зависимости коэффициента подъемной силы $c_y = 2Y/(\rho_2 U_2^2 L)$ от числа Фруда $Fr = U_2/\sqrt{gL}$. На рис. 2 приведены результаты исследования влияния угла атаки профиля α на коэффициент подъемной силы c_y при неизменной геометрии канала — $h_1/L = 1.4$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$. Сплошной кривой изображен коэффициент подъемной силы при $\alpha = 0^\circ$, штриховой — при $\alpha = 1^\circ$. При увеличении угла атаки α наблюдается увеличение c_y во всем рассматриваемом диапазоне чисел Фруда.

На рис. 3 при $\alpha = 1^\circ$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$ сплошной кривой изображен коэффициент подъемной силы профиля c_y в случае верхнего слоя жидкости конечной толщины при $h_1/L = 1.1$, а штриховой — в случае полубезграничного верхнего слоя при $h_1/L = +\infty$. Как видно из графика, наибольшие и наименьшие значения c_y достигаются при меньших значениях h_1/L . Следует отметить значительное отличие коэффициентов подъемной силы в случае канала и в случае полубезграничного потока.

На рис. 4 представлены результаты изучения влияния толщины нижнего слоя жидкости на коэффициент подъемной силы c_y . При $\alpha = 1^\circ$, $h_1/L = 1.2$, $h_2/L = 0.5$ сплошной кривой изображен



коэффициент подъемной силы в случае нижнего слоя жидкости конечной толщины при $h_3/L = -0.8$, а штриховой — в случае бесконечно удаленного дна при $h_3/L = -\infty$.

На рис. 5 продемонстрирован пример расчета линий тока течения и границы раздела жидкостей при $\alpha = 2^\circ$, $h_1/L = 0.97$, $h_2/L = 0.37$, $h_3/L = -0.63$, $Fr = 0.062$.

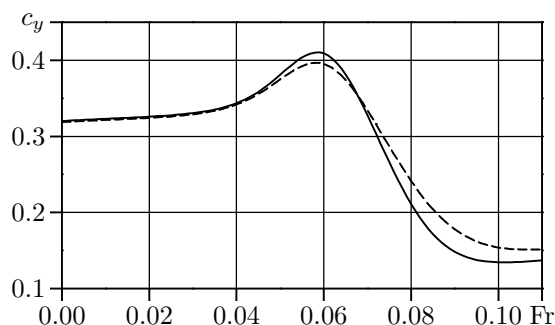


Рис. 3. Зависимость c_y от Fr при $\alpha = 1^\circ$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$, $h_1/L = \{1.1, +\infty\}$

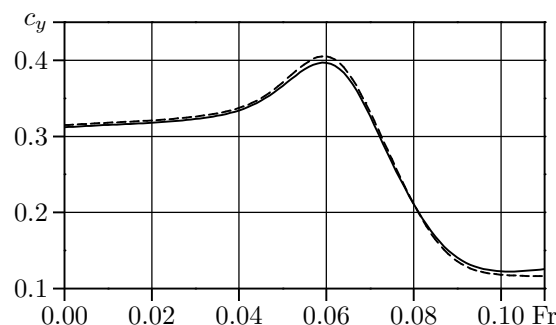


Рис. 4. Зависимость c_y от Fr при $\alpha = 1^\circ$, $h_1/L = 1.2$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = \{-0.8, -\infty\}$

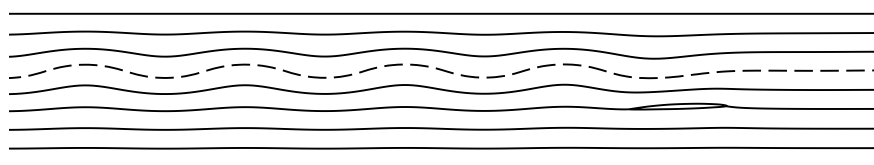


Рис. 5

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00163).

Библиографический список

1. Кочин, Н.Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел / Н.Е. Кочин // Труды конференции по теории волнового сопротивления. – М.: Изд-во ЦАГИ, 1937. – С. 65–134.
2. Хаскинд, М.Д. О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины / М.Д. Хаскинд // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 67–78.
3. Войцены, В.С. Плоская задача о поступательном движении тела под поверхностью раздела двух жидкостей / В.С. Войцены // Труды Новочеркасского политехнического ин-та. – 1959. – Т. 109. – С. 95–111.
4. Войцены, В.С. О поступательном движении тела над поверхностью раздела двух жидкостей / В.С. Войцены // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 2. – С. 20–30.
5. Тумашев, Г.Г. Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости / Г.Г. Тумашев, Н.Д. Черепенин // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 140–151.
6. Филиппов, С.И. Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела / С.И. Филиппов. – Казань: Изд-во Казан. мат. об-ва, 2004. – 200 с.
7. Стурова, И.В. Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости конечной глубины / И.В. Стурова // ПМТФ. – 1998. – Т. 3, № 6. – С. 91–101.
8. Горлов, С.И. Влияние поверхностных и внутренних волн на гидродинамические характеристики контура в линейном приближении / С.И. Горлов // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – № 3. – С. 121–127.
9. Vasseur, R. Dead Waters: Large amplitude interfacial waves generated by a boat in a stratified fluid / R. Vasseur, M. Mercier, T. Dauhois // ARXIV.ORG: архив электронных препринтов. – 2008. 9 окт. URL: <http://arxiv.org/abs/0810.1702> (дата обращения: 01.12.2008).
10. Милн-Томсон, Л.М. Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милн-Томсон. – М.: Мир, 1964. – 656 с.
11. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
12. Лотфуллин, М.В. Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости / М.В. Лотфуллин, И.В. Стурова, С.И. Филиппов // Вычислительные технологии. – 1994. – Т. 3, № 8. – С. 108–115.
13. Сретенский, Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
14. Лотфуллин, М.В. Численный метод конформного отображения односвязных областей / М.В. Лотфуллин // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – Вып. 22. – С. 148–150.