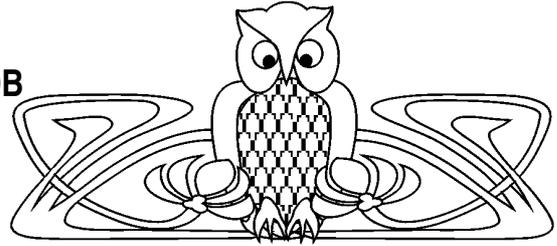




УДК 517.9

# ДВУХМОДОВЫЕ ВЕТВЛЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ТОЧКАХ МИНИМУМА С ОДНОРОДНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА



И.В. Колесникова

Воронежский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: kolinna@inbox.ru

Дано описание раскладов экстремалей фредгольмовых функционалов, бифурцирующих из точек минимумов с двумерными вырождениями и особенностями шестого порядка. Основной иллюстрирующий пример — задача о ветвлении сегнетоэлектрических фаз неоднородных кристаллов (в геликоидальной модели). Использован модифицированный метод Ляпунова – Шмидта (редукция к ключевой функции на  $\mathbb{R}^n$ ), оснащенный элементами теории особенностей гладких функций. Акцент сделан на случай ключевой функции с симметрией квадрата.

**Ключевые слова:** фредгольмов функционал, функционал энергии кристалла, термодинамический потенциал, экстремаль, бифуркация, метод Ляпунова – Шмидта, тип особенности, симметрия.

**Two-Mode Branching Extremals of Smooth Functionals with Homogeneous Features of the Sixth Order in Minima Points**

I.V. Kolesnikova

Voronezh State University,  
Chair of Mathematical Analysis  
E-mail: kolinna@inbox.ru

A description of Fredholm functionals extremal distribution, bifurcating from minima points with two-dimensional degeneration and features of the sixth order is given. The main illustrating example is the problem of heterogeneous crystal ferroelectric phases branching (based on helical model). We use modified Lyapunov – Schmidt method (reduction to key function on  $\mathbb{R}^n$ ), equipped with the elements of singularities theory of smooth functions. Emphasis is put on key function with square symmetry.

**Key words:** Fredholm's functionals, functionals energy of a crystal, thermodynamic potential, extremal, bifurcation, Lyapunov – Schmidt method, type of singularity, symmetry.

Широко известно, что в теории Л.Д. Ландау [1, 2] сегнетоэлектрические фазы неоднородных кристаллов определяются нелинейными дифференциальными уравнениями (уравнениями Эйлера – Лагранжа экстремалей функционалов энергии). Нелинейность уравнений задается термодинамическими потенциалами, алгебраическая структура которых определяется как на основе опытных данных, так и на основе общих теоретических соображений.

Общематематический аспект задачи о фазовых переходах в кристаллах заключен в бифуркационном анализе экстремалей гладкого фредгольмова функционала (с параметрами) вблизи точки минимума с многомерным вырождением [3]. Решение этой задачи можно получить посредством редукции Ляпунова – Шмидта, то есть сведением к анализу ключевых функций, представленных в виде многопараметрических семейств полиномов от нескольких переменных [3–6]. Вычисление главной части ключевой функции осуществляется через ритцевскую аппроксимацию (вообще говоря, нелинейную) функционала по конечной совокупности мод бифуркации.

Основной результат статьи — описание всех допустимых раскладов экстремалей вблизи симметричной  $\min$ -особенности шестого порядка.

## 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ КРИСТАЛЛА

В случае двухкомпонентного параметра порядка при описании геликоидальных сегнетоэлектрических структур кристаллов часто используется [1] потенциал

$$\Pi = |w|^6 + \beta |w|^4 + \alpha |w|^2 + q w_1^2 w_2^2 |w|^2 + \varkappa w_1^2 w_2^2, \quad w := (w_1, w_2)^T,$$

входящий в лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|^2 - \mu \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 \right) + \Pi(w)$$

функционала энергии

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial w}{\partial z}, w \right) dz.$$



Сегнетоэлектрические фазы, соответствующие экстремалам этого функционала при условии периодичности

$$w(z + 2\pi) = w(z), \tag{1}$$

определяются уравнением

$$f(w) = 0, \quad w \in E, \quad f(w) \in F, \tag{2}$$

где

$$f(w) := \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \text{grad } \Pi(w).$$

Нелинейный оператор  $f$ , действующий из банахова пространства

$$E := \Pi_{2\pi}^4 = \{w \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid w(z + 2\pi) = w(z)\}$$

(пространства четырежды дифференцируемых  $2\pi$ -периодических функций со значениями в  $\mathbb{R}^2$ ) в банахово пространство  $F := \Pi_{2\pi}^0$  (пространство непрерывных периодических функций со значениями в  $\mathbb{R}^2$ ), является фредгольмовым и (аналитического) индекса нуль [7]. Исследование уравнения (2) можно провести, перейдя к ключевой функции.

## 2. ГРУППА СИММЕТРИЙ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ И НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ГЛАВНОЙ ЧАСТИ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ

Легко заметить, что группа  $G$  симметрий исходного уравнения (2) порождена преобразованиями

$$J_1 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad J_2 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix}, \quad J_3 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$J_4 : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1(-z) \\ w_2(-z) \end{pmatrix}, \quad J_\varphi : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1(z + \varphi) \\ w_2(z + \varphi) \end{pmatrix}, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

При некоторой локализации параметров получаем в нуле 4-мерное вырождение со следующими модами бифуркации:

$$e_1 = \begin{pmatrix} s_1(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} s_2(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_1(z) \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_2(z) \end{pmatrix},$$

где  $s_1(z) = \sqrt{2} \cos(z)$ ,  $s_2(z) = \sqrt{2} \sin(z)$ . В линейной оболочке  $\mathcal{N} = \text{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ , естественно отождествляемой с  $\mathbb{R}^4$  (пространством ключевых параметров), индуцируется действие группы  $G$ . Полученный сужением образ этой группы в  $SO(4)$  (в специальной ортогональной группе размерности 4,  $SO(4) = \{A \in O(4) : \det A = 1\}$ ,  $O(4) = \{A \in GL(4) : A^T A = I\}$ ) также обозначим  $G$ . Нетрудно убедиться в том, что действие группы  $G$  в  $\mathbb{R}^4$  порождено матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** Ключевая функция

$$W(\xi) := \inf_{w:g(w)=\xi} V(w), \quad \xi \in \mathbb{R}^4, \tag{3}$$



где  $g(w) = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T$ ,  $g_j(w) := \langle w, e_j \rangle$  ( $\langle w, e_j \rangle = \int_0^{2\pi} w e_j dx$ ), наследует симметрию функционала  $V$ : функция  $W$  инвариантна относительно действия  $G$  на  $\mathbb{R}^4$ .

**Доказательство** этой теоремы несложно провести, если воспользоваться общими теоремами о наследовании симметрий ключевыми функциями [3].

Если воспользоваться алгоритмом вычисления тейлоровских разложений ключевых функций [3] и указанной ранее симметрией, то можно получить следующее утверждение.

**Теорема 2.** Ключевая функция  $W(\xi)$  имеет (с точностью до масштабирующих преобразований аргумента и общего множителя, зависящего от констант термодинамического потенциала) следующий вид:

$$(I_1 + I_2)^3 + \varepsilon(I_1 + I_2)^2 + \delta(I_1 + I_2) + \gamma_1 I_3^2 + \gamma_2 I_4^2 + (p_1 I_3^2 + p_2 I_4^2)(I_1 + I_2) + O(|\xi|^8),$$

где  $I_1, I_2, I_3, I_4$  — образующие инварианты действия окружности  $z \rightarrow \exp(i\varphi)z$ : вектор  $\xi \in \mathbb{R}^4$  отождествлен с комплексным вектором  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{C}^2$ ,  $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$ ,  $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$ ; коэффициенты  $\varepsilon, \delta, \gamma_1, \gamma_2, p_1, p_2$  — новые коэффициенты, явно выраженные через коэффициенты исходной функции  $V$ :  $I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ ,  $I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2$ ,  $I_3 = \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4$ ,  $I_4 = -\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3$ .

В данной статье зависимость новых переменных от старых не важна.

Образующей системой инвариантов действия группы  $G$  является следующий набор многочленов:

$$J_1 = I_1 + I_2, \quad J_2 = I_3^2, \quad J_3 = I_4^2.$$

После введения полярных координат  $z_1 = r_1 \exp(i\psi_1)$ ,  $z_2 = r_2 \exp(i\psi_2)$  получим функцию  $W$  в форме, удобной для проведения дискриминантного анализа:

$$\begin{aligned} U &= J_1^3 + \varepsilon J_1^2 + \delta J_1 + \gamma_1 J_2 + \gamma_2 J_3 + (p_1 J_2 + p_2 J_3)J_1 + \dots = \\ &= \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + (\gamma_1 \cos^2(\psi) + \gamma_2 \sin^2(\psi))\sigma_2 + (p_1 \cos^2(\psi) + p_2 \sin^2(\psi))\sigma_1\sigma_2 + \dots, \\ \sigma_1 &= r_1^2 + r_2^2, \quad \sigma_2 = r_1^2 r_2^2, \quad \psi = \psi_1 - \psi_2. \end{aligned}$$

Перейдя к двойному углу, получим

$$U = \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \sigma_2 + \frac{(p_1 + p_2)}{2} \sigma_1\sigma_2 + \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{2} \sigma_2 + \frac{(p_1 - p_2)}{2} \sigma_1\sigma_2 \cos(2\psi) + \dots$$

Точки, стационарные по  $\psi$ , находятся из уравнения  $\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0$ . Так как

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = -2\sigma_2 \left( \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{2} + \frac{(p_1 - p_2)}{2} \sigma_1 \right) \sin(2\psi) + \dots,$$

то стационарные по  $\psi$  точки определяются нулями функции  $\sin(2\psi)$ . Знак второй производной определяется знаком выражения  $(\gamma_1 - \gamma_2) + (p_1 - p_2)\sigma_1$  (при отыскании точек минимума по  $\psi$ ).

Из теорем о локальной конечной определенности гладких функций в конечнократных критических точках [8, 9] следует, что поиск экстремалей  $W$  сводится к изучению поведения следующей пары симметричных функций:  $W_1 = \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + \gamma_1 \sigma_2 + p_1 \sigma_1\sigma_2$ ,  $W_2 = \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + \gamma_2 \sigma_2 + p_2 \sigma_1\sigma_2$ .

### 3. НЕКОТОРЫЕ ЗАПРЕТЫ ДЛЯ bif-РАСКЛАДОВ

Пусть

$$W = \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + p \sigma_1\sigma_2 + \gamma \sigma_2. \tag{4}$$

Через  $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2)$  обозначим bif-расклад (количества минимумов, седел индекса (Морса) 1 и седел индекса 2).

**Теорема 3.** Если  $W$  — развертка  $\min$ -особенности шестого порядка, то  $p > -4$ .

**Доказательство.** Для невозмущенной функции имеем  $W = \sigma_1^3 + p \sigma_1\sigma_2 = \sigma_1(\sigma_1^2 + p \sigma_2)$ . Так как  $\sigma_1 \geq 0$ , то проверка утверждения теоремы сводится к проверке положительной определенности



кватричной формы  $\sigma_1^2 + p \sigma_2 = \xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2 + \xi_2^2$ ,  $a = 2 + p$ , которая положительна, как известно [3], тогда и только тогда, когда  $a > -2$ . Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из формулы Эйлера следует, что для максимального расклада  $l_1 = 12$ ,  $l_0 + l_2 = 13$ .

**Теорема 4.** Если  $\mathcal{L}$  — максимальный bif-расклад для min-особенности шестого порядка, то для соответствующей ему возмущенной функции  $W$  начало координат является точкой локального минимума.

**Доказательство** проводится через рассмотрение сужений  $W|_{\xi_k=0}$ . В случае максимального расклада соответствующие расклады критических точек для  $W|_{\xi_k=0}$  также будут максимальными. Следовательно,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_k^2}(0) > 0$  при каждом  $k$  (для функции с симметрией квадрата  $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}(0) = 0$ ). Теорема доказана.

**Теорема 5.** Если  $\mathcal{L}$  — bif-расклад для min-особенности шестого порядка, то на каждой из полуосей координат и на диагональных полуосях существует не более двух ненулевых критических точек.

Если на одной из этих (восьми) полуосей имеется пара ненулевых критических точек, то эти точки разнотипны (с различными значениями индекса Морса).

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно проверяется через рассмотрение сужений  $W|_{\xi_k=0}$ . Невозможность существования на каждой оси пары минимумов или максимумов также легко проверяется через рассмотрение сужений  $W|_{\xi_k=0}$ .

Менее тривиален случай пары седел. Предположим противное: пусть на положительной полуоси  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_1 \geq 0$  имеется пара ненулевых седел (или, что эквивалентно, имеется четыре седла на всей оси  $\xi_2 = 0$ , в случаях остальных осей рассуждения аналогичны. Так как для критической точки на оси координат  $\xi_2 = 0$  выполняется соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_1}(\xi_1, 0) = 2\xi_1(3\xi_1^4 + 2\varepsilon\xi_1^2 + \delta) = 0, \quad (5)$$

то получим

$$\xi_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}, \quad \varepsilon < 0, \quad \delta < \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

В случае левого корня ( $\xi_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}$ ) имеем  $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_k^2} > 0$ , а в случае правого ( $\xi_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}$ ) имеем  $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_k^2} < 0$ . Так как  $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_k^2}(\xi_1, 0) = 2((3+p)\xi_1^4 + (\varepsilon + \gamma)\xi_1^2 + \delta)$ , то в силу (8) получим  $p\xi_1^2 + \gamma - \varepsilon > 0$  для левого корня и  $p\xi_1^2 + \gamma - \varepsilon < 0$  — для правого. Или соответственно

$$\frac{p}{3}(-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad \frac{p}{3}(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \varepsilon < 0.$$

После вычитания неравенств получим при  $p > 0$  (случай  $p < 0$  сводится к рассматриваемому поворотом осей на угол  $\pi/4$ ) получим противоречивое неравенство  $p\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta} < 0$ . Теорема доказана.

**Теорема 6.** Если  $\mathcal{L}$  — максимальный bif-расклад для min-особенности шестого порядка, то  $l_0 \geq 5$  и  $l_2 \geq 4$ .

**Доказательство** следует из того, что орбита каждой ненулевой критической точки состоит из 4 или 8 точек (вследствие симметрии квадрата).

Из этих теорем вытекают следующие утверждения.

**Теорема 7.** Если  $\mathcal{L}$  — произвольный bif-расклад, то  $l_2 \leq 8$ .

**Теорема 8.** Если  $\mathcal{L}$  — максимальный bif-расклад, то вне диагональных и координатных осей находятся лишь седловые критические точки (8 точек).

#### 4. ОПИСАНИЕ РАСКЛАДОВ БИФУРЦИРУЮЩИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

В случае двух переменных главная часть  $U$  ключевой функции имеет следующий вид:

$$\sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + p \sigma_1 \sigma_2 + \gamma \sigma_2, \quad \sigma_1 = r_1^2 + r_2^2, \quad \sigma_2 = r_1^2 r_2^2.$$

После замены  $r_1^2 = y_1$ ,  $r_2^2 = y_2$  получим омбилическую точку минимума в вершине угла  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ . Из результатов М.А. Хуссаина по угловым особенностям омбилического типа [10]

следует, что максимальные bif-расклады особенности в нуле функции  $W$  исчерпываются раскладами  $(9, 12, 4)$ ,  $(5, 12, 8)$ . В полярных координатах  $r_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $r_2 = r \sin(\varphi)$  получим  $\sigma_1 = r^2$ ,  $\sigma_2 = \frac{r^4}{8}(1 - \cos(4\varphi))$  и, следовательно,

$$W = r^6 + \varepsilon r^4 + \delta r^2 + \frac{r^4}{8}(p r^2(1 - \cos(4\varphi)) + \gamma (1 - \cos(4\varphi))). \quad (6)$$

Множество критических точек является пересечением кривых  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 1), определяемых уравнениями  $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$  (кривая радиально стационарных точек) и  $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$  (кривая тангенциально стационарных точек). Из (6) следует, что  $M_1$  задается уравнением

$$6r^5 + 4\varepsilon r^3 + 2\delta r + \frac{r^3}{4}(3p r^2(1 - \cos(4\varphi)) + 2\gamma (1 - \cos(4\varphi)))r^3 = 0$$

или, после приведения подобных слагаемых и сокращения на множитель  $r$ , уравнением

$$(6 + \frac{3p}{4}(1 - \cos(4\varphi)))r^4 + (4\varepsilon + 2\gamma (1 - \cos(4\varphi)))r^2 + 2\delta = 0. \quad (7)$$

Кривая  $M_2$  задается уравнением

$$(p r^2 + \gamma) \sin(4\varphi) = 0. \quad (8)$$

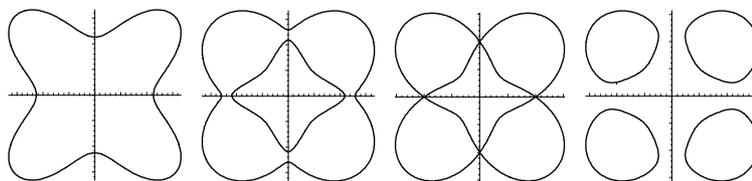


Рис. 1. Компьютерные изображение кривых  $M_1$  и  $M_2$

Из уравнения (8) видно, что кривая  $M_2$  состоит из координатных и диагональных прямых линий и окружности  $r^2 = -\frac{\gamma}{p}$  (рис. 2).

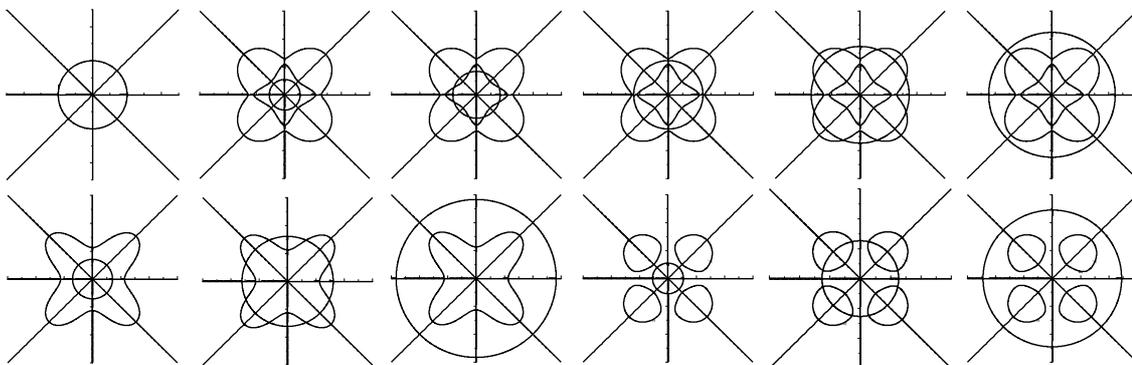


Рис. 2. Варианты пересечения кривых  $M_1$  и  $M_2$

Каждому типу пересечения  $M_1 \cap M_2$  соответствует определенный тип строения линий уровня ключевой функции и схема взаимных примыканий критических точек.

По изображениям линий уровней легко проследить взаимные примыкания раскладов (рис. 3).

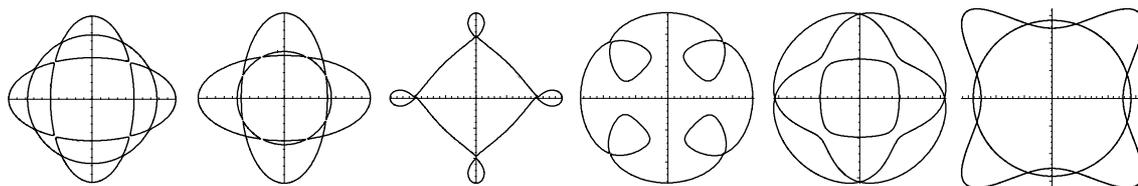


Рис. 3. Схемы взаимных примыканий критических точек  $M_1 \cap M_2$



Таким образом, имеем следующий список бифурцирующих наборов (bif-раскладов) критических точек функции  $W$ : (9, 12, 4), (5, 12, 8), (8, 8, 1), (4, 4, 1), (5, 8, 4), (5, 4, 0), (1, 4, 4), (1, 0, 0). Им соответствуют (с точностью до поворота на угол  $\pi/4$ ) графы, приведенные на рис. 4 (комплексы Морса [11]).

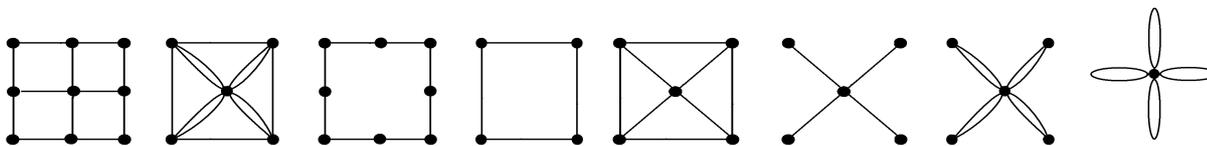


Рис. 4. Комплексы Морса

### Библиографический список

1. Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М: Наука, 1984. 247 с.
2. Широков В.Б., Юзюк Ю.И., Dkhlil B., Леманов В.В. Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В.Н. ВаТiОз // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, вып. 5. С. 889–892.
3. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ, 2004. Т. 12. С. 3–140.
4. Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 3. С. 530–533.
5. Darinskii M.M., Sapronov Yu.I., Shalimov V.V. Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter // Ferroelectrics. 2002. V. 265. P. 31–42.
6. Даринский Б.М., Дьяченко А.А., Сапронов Ю.И., Чаплыгин М.Н. Фазовые переходы в доменных границах ферроиков // Известия РАН. Сер. физическая. 2004. Т. 768, № 7. С. 920–926.
7. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере – Шаудера // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, вып. 4. С. 3–54.
8. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
9. Бреккер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977. 208 с.
10. Сапронов Ю.И., Хуссаин М.А. Угловые особенности гладких функционалов в задачах о прогибах упругих балок и зарождении нелинейных волн // Труды Воронеж. зимн. мат. школы. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2004. С. 155–167.
11. Постников М.М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971. 568 с.

УДК 517.538.52, 517.538.7

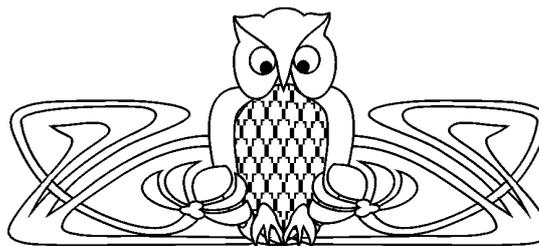
## ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ

Е.Н. Кондакова

Владимирский государственный университет,  
кафедра функционального анализа и его приложений  
E-mail: kebox@mail.ru

В работе рассматривается интерполяция посредством вещественнозначных наимпростейших дробей на отрезке действительной оси. Предложены различные способы построения интерполирующих наимпростейших дробей при попарно различных узлах интерполяции. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности интерполирующих наимпростейших дробей. Подробно изучается интерполяция констант; в этом случае получена оценка погрешности интерполяции по чебышевской системе узлов.

**Ключевые слова:** интерполяция, наимпростейшие дроби.



### Interpolation by the Simplest Fractions

E.N. Kondakova

Vladimir State University,  
Chair of Functional Analysis and its Application  
E-mail: kebox@mail.ru

The interpolation by means of real simplest fractions is considered. There are offered a different ways of interpoating simplest fractions construction with distinct real nodes. Necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of interpolating simplest fractions are received. Interpolation of constants is in detail investigated; in this case the estimation of an error of interpolation on Chebyshev's system of nodes is received.

**Key words:** interpolation, simplest fractions.