



5. Richtmyer R.D., Lazarus R.B. Singularity Fitting in Hydrodynamical Calculations II. Los Alamos Sc. Lab. Report LA-6108-MS, 1975. 19 p.

6. Lazarus R.B. Self-Similar Solutions for Converging Shocks and Collapsing Cavities // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18, iss. 2. P. 316–371.

УДК 539.3

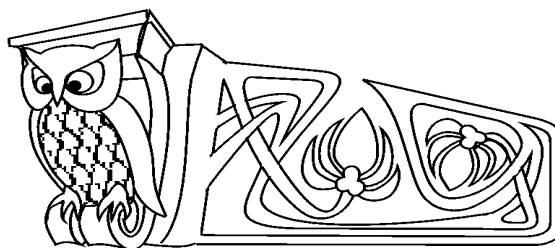
ИЗГИБ СОСТАВНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

В.И. Копнина, Е.Ю. Крылова*

Саратовский государственный университет, кафедра математической теории упругости и биомеханики; *Саратовский государственный технический университет, кафедра математика и моделирование E-mail: kat.krylova@bk.ru

В статье методом комплексных потенциалов С.Г. Лехницкого исследуется напряженно-деформированное состояние тонкой плиты при изгибе. Плита составлена из двух эллиптических колец, вложенных друг в друга без натяга. Материал колец анизотропный и разный.

Ключевые слова: тонкая эллиптическая плита, анизотропный, изгиб, комплексный потенциал Лехницкого.



Bend of Composite Anisotropic Slab Under Normal Loading

V.I. Kopnina, E.Yu. Krylova*

Saratov State University, Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics; *Saratov State Technical University, Chair of Mathematics and Modelling E-mail: kat.krylova@bk.ru

In this contribution, deflected mode of a thin slab under bending is investigated by the Lehnicky method of complex potential. The slab is composed of two elliptical rings; they are embedded in each other without tension. Material of the rings is anisotropic and different.

Key words: elliptical thin slab, , anisotropic, bend, complex potential by Lehnicky.

Рассмотрим упругое равновесие анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическим отверстием, которое подкреплено кольцом из другого анизотропного материала. Толщина кольца равна толщине плиты h , ширина достаточная, чтобы к кольцу можно было применить теорию изгиба плит.

Плита изгибается поперечной нагрузкой интенсивности $q(x, y)$. Будем считать, что внешний контур плиты и внутренний контур кольца жёстко защемлены, причем внешний контур плиты имеет возможность под действием изгибающей нагрузки опускаться.

Обозначим внешний контур плиты [кольца] $L_0^{(0)}$ [$L_0^{(1)}$], внутренний контур плиты [кольца] — $L_1^{(0)}$ [ℓ]; полуоси контурных эллипсов — $a_n^{(\nu)}, b_n^{(\nu)}$ ($n = \nu = 0, 1$). Здесь и далее величины, характеризующие упругое состояние плиты, имеют индекс (0) сверху, а кольца — (1).

Задачу об изгибе такой плиты можно привести [2] к определению комплексных потенциалов С.Г. Лехницкого $W_j^{(\nu)}(Z_j^{(\nu)})$ (здесь и далее $j = 1, 2$) из граничных и контактных условий [3]:

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 W_j^{(\nu)'}(t_j^{(\nu)}) = -\frac{\partial W_0^{(\nu)}}{\partial x},$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \mu_j^{(\nu)} W_j^{(\nu)'}(t_j^{(\nu)}) = -\frac{\partial W_0^{(\nu)}}{\partial y} \quad \text{на } L^{(0)} (\nu = 0), \quad \ell (\nu = 1); \quad (1)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [d_{jk}^{(0)} W_j^{(0)'}(t_j^{(0)}) - d_{jk}^{(1)} W_j^{(1)'}(t_j^{(1)})] = f_k \quad (k = \overline{1, 4}) \quad \text{на } L_1^{(0)} [L_0^{(1)}], \quad (2)$$

где $d_{j1}^{(\nu)} = 1$, $d_{j2}^{(\nu)} = \mu_j^{(\nu)}$, $d_{j3}^{(\nu)} = \frac{P_j^{(\nu)}}{\mu_j^{(\nu)}}$, $d_{j4}^{(\nu)} = q_j^{(\nu)}$; $f_1 = -\frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial W_0^{(1)}}{\partial x}$, $f_2 = -\frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial W_0^{(1)}}{\partial y}$, $f_3 = -Cx + C_1$, $f_4 = \frac{1}{6}q(x, y) (\nu_2^{(0)} - \nu_2^{(1)})x + Cy + C_2$. Здесь $t_j^{(\nu)}$ — аффиксы точек на контурах соответствующих эллипсов, расположенных в областях изменения $Z_j^{(\nu)}$, которые получаются из области, занятой срединной плоскостью составной плиты, при помощи известных аффинных преобразований [2];



$\mu_j^{(\nu)} = \alpha_j^{(\nu)} + i\beta_j^{(\nu)}$ — комплексные параметры изгиба, характеризующие степень анизотропии материала плиты и кольца; $\nu_j^{(\nu)}$ — коэффициенты Пуассона; $p_j^{(\nu)}, q_j^{(\nu)}$ — постоянные, зависящие от упругих свойств материалов пластинки и кольца [3]; C_1, C_2 — постоянные, не влияющие на распределение напряжений в составной плите.

Положим интенсивность нормальной нагрузки $q(x, y) = q = \text{const}$ и выберем функции $W_0^{(\nu)}$ в виде

$$W_0^{(\nu)} = \frac{qx^4}{24D_{11}^{(\nu)}},$$

где $D_{11}^{(\nu)}$ — жёсткость материалов составной плиты.

Функции $W_j^{(\nu)'}(Z_j^{(\nu)})$ будем искать в виде [3]:

$$W_j^{(\nu)'}(Z_j^{(\nu)}) = M_j^{(\nu)} Z_j^{(\nu)} \ln Z_j^{(\nu)} + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ A_{jk}^{(\nu)} \left[\zeta_1(Z_j^{(\nu)}) \right]^{-k} + C_{jk}^{(\nu)} P_k^{(\nu)}(Z_j^{(\nu)}) \right\}.$$

В рассматриваемом случае главные моменты усилий, приложенных к контурам отверстий плиты и кольца, равны нулю. Главные векторы усилий, приложенных к контуру отверстия плиты [кольца] $L_1^{(0)}[\ell]$, определяются из соотношений

$$P_{z1} = -q\pi(a_0^{(0)}b_0^{(0)} - a_1^{(0)}b_1^{(0)}), \quad P_{z\ell} = -q\pi(a_0^{(0)}b_0^{(0)} - a_1^{(1)}b_1^{(1)}). \quad (3)$$

Используя условия однозначности прогиба, его первых и вторых производных для плиты и кольца, а также условия (3), найдём:

$$M_j^{(\nu)} = -q \frac{a_0^{(0)}b_0^{(0)}(\alpha_j^{(\nu)^2} + \beta_j^{(\nu)^2})}{16D_{11}^{(\nu)}\alpha_j^{(\nu)}\beta_j^{(\nu)}} \bar{\mu}_j^{(\nu)}.$$

Следовательно, поставленная задача свелась к отысканию комплексных коэффициентов $A_{jk}^{(\nu)}, C_{jk}^{(\nu)}$ из граничных и контактных условий (1), (2).

Поступая аналогично тому, как это сделано в работе [3], получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных $A_{jk}^{(\nu)}$ и $C_{jk}^{(\nu)}$:

$$\begin{aligned} & g_{1s}^{(0)} \left[A_{1k}^{(0)*} + m_{10}^{(0)k} C_{1k}^{(0)} + M_1^{(0)} \beta_{10k}^{(0)} \right] + g_{2s}^{(0)} \left[A_{2k}^{(0)*} + m_{20}^{(0)k} C_{2k}^{(0)} + M_2^{(0)} \beta_{20k}^{(0)} \right] + \\ & \quad + \bar{g}_{1s}^{(0)} \bar{C}_{1k}^{(0)} + \bar{g}_{2s}^{(0)} \bar{C}_{2k}^{(0)} = \delta_{s0k}, \quad (s = 1, 2); \\ & d_{1s}^{(0)} \left[A_{1k}^{(0)} + m_{11}^{(0)k} C_{1k}^{(0)*} + M_1^{(0)} \beta_{11k}^{(0)} \right] + d_{2s}^{(0)} \left[A_{2k}^{(0)} + m_{21}^{(0)k} C_{2k}^{(0)*} + M_2^{(0)} \beta_{21k}^{(0)} \right] + \\ & \quad + \bar{d}_{1s}^{(0)} \bar{C}_{1k}^{(0)*} + \bar{d}_{2s}^{(0)} \bar{C}_{2k}^{(0)*} - d_{1s}^{(1)} \left[A_{1k}^{(1)*} + m_{10}^{(1)k} C_{1k}^{(1)} + M_1^{(1)} \beta_{10k}^{(1)} \right] - \\ & - d_{2s}^{(1)} \left[A_{2k}^{(1)*} + m_{20}^{(1)k} C_{2k}^{(1)} + M_2^{(1)} \beta_{20k}^{(1)} \right] - \bar{d}_{1s}^{(1)} \bar{C}_{1k}^{(1)} - \bar{d}_{2s}^{(1)} \bar{C}_{2k}^{(1)} = \delta_{s1k} \quad (s = \overline{1, 4}); \\ & g_{1s}^{(1)} \left[A_{1k}^{(1)} + m_{11}^{(1)k} C_{1k}^{(1)*} + M_1^{(1)} \beta_{11k}^{(1)} \right] + g_{2s}^{(1)} \left[A_{2k}^{(1)} + m_{21}^{(1)k} C_{2k}^{(1)*} + M_2^{(1)} \beta_{21k}^{(1)} \right] + \\ & \quad + \bar{g}_{1s}^{(1)} \bar{C}_{1k}^{(1)*} + \bar{g}_{2s}^{(1)} \bar{C}_{2k}^{(1)*} = \delta_{s\ell k} \quad (s = 1, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$g_{j1}^{(\nu)} = 1, \quad g_{j2}^{(\nu)} = \mu_j^{(\nu)}, \quad d_{j1}^{(\nu)} = 1, \quad d_{j2}^{(\nu)} = \mu_j^{(\nu)}, \quad d_{j3}^{(\nu)} = \frac{P_j^{(\nu)}}{\mu_j^{(\nu)}}, \quad d_{j4}^{(\nu)} = q_j^{(\nu)};$$

$$A_{jk}^{(\nu)*} = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_{jkm}^{(\nu)} A_{jm}^{(\nu)}, \quad C_{jk}^{(\nu)*} = \sum_{m=k,k+2,\dots}^{\infty} \alpha_{jkm}^{(\nu)'} C_{jm}^{(\nu)},$$

$$\alpha_{jkm}^{(\nu)} = \frac{1}{k!} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\xi_0^k} \left[\zeta_1^{(\nu)}(Z_j^{(\nu)}) \right]^{-m}, \quad \alpha_{jkm}^{(\nu)'} = \frac{m}{k} \alpha_{jmk}^{(\nu)},$$



$$\beta_{j,n,-1}^{(\nu)} = R_{jn}^{(\nu)} \ln R_{jn}^{(\nu)}, \quad \beta_{jn1}^{(\nu)} = R_{jn}^{(\nu)} m_{jn}^{(\nu)} (1 + \ln R_{jn}^{(\nu)}), \quad \beta_{jnk}^{(\nu)} = 4R_{jn}^{(\nu)} (-m_{jn}^{(\nu)})^{\frac{k+1}{2}} (k^2 - 1)^{-1},$$

$$R_{jn}^{(\nu)} = 0,5(a_n^{(\nu)} - i\mu_j^{(\nu)} b_n^{(\nu)}), \quad m_{jn}^{(\nu)} = \left(1 + \mu_j^{(\nu)} \frac{b_n^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}\right) \left(1 - i\mu_j^{(\nu)} \frac{b_n^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}\right)^{-1},$$

$$\delta_{101} = \frac{-qa_0^{(0)^3}}{16D_{11}^{(0)}}, \quad \delta_{103} = \frac{-qa_0^{(0)^3}}{48D_{11}^{(0)}}, \quad \delta_{10k} = 0 \quad (k \geq 5), \quad \delta_{111} = -\frac{qa_1^{(0)^3}}{16} \left[\frac{1}{D_{11}^{(0)}} - \frac{1}{D_{11}^{(1)}}\right],$$

$$\delta_{113} = -\frac{qa_1^{(0)^3}}{48} \left[\frac{1}{D_{11}^{(0)}} - \frac{1}{D_{11}^{(1)}}\right], \quad \delta_{11k} = 0 \quad (k \geq 5), \quad \delta_{20k} = \delta_{21k} = \delta_{2\ell k} = 0, \quad \delta_{311} = -0,5Ca_1^{(0)},$$

$$\delta_{31k} = 0 \quad (k \geq 3), \quad \delta_{411} = -\frac{qa_1^{(0)^3}}{16} (\nu_2^{(0)} - \nu_2^{(1)}) + 0,5Cb_1^{(0)}i, \quad \delta_{413} = -\frac{qa_1^{(0)^3}}{48} (\nu_2^{(0)} - \nu_2^{(1)}),$$

$$\delta_{41k} = 0 \quad (k \geq 5), \quad \delta_{1\ell 1} = -\frac{qa_1^{(1)^3}}{16D_{11}^{(1)}}, \quad \delta_{1\ell 3} = -\frac{qa_1^{(1)^3}}{48D_{11}^{(1)}}, \quad \delta_{1\ell k} = 0 \quad (k \geq 5).$$

После определения функций $W_j^{(\nu)'}(Z_j^{(\nu)})$ можно найти прогиб, моменты и перерезывающие силы по известным формулам [2].

Численное исследование НДС составной плиты было проведено для случая, когда круглая плита ослаблена круговым отверстием. При приближённом решении задачи бесконечная система (4) урезалась, что можно сделать в силу её квазирегулярности [3]. При этом в системе удерживались уравнения, когда $k \leq 9$, что соответствует системе 40-го порядка. В качестве материала пластинки и подкрепляющего кольца выбирались трёхслойная авиационная фанера (материал с сильной анизотропией) [2], СВАМ (слабо анизотропный материал) [1] и материалы с жёсткостями, пропорциональными соответствующим жёсткостям а) фанеры; б) СВАМа; рассматривались различные случаи их сочетания. Наряду с этим, в широких пределах варьировались расстояния между контурами плиты и кольца.

Незначительная часть результатов приведена в табл. 1, 2, где в долях q даны значения для $W = W^* \cdot 10^5 \cdot \frac{h^3}{12}$ и изгибающих моментов. Левые части таблиц даны для случая, когда $a_0^{(0)} = 5$, $a_1^{(0)} = 1$, $a_1^{(1)} = 0,5$, а правые, когда $a_0^{(0)} = 5$, $a_1^{(0)} = 3$, $a_1^{(1)} = 1$, причём верхние части таблиц соответствуют контуру $L_0^{(0)}$, средние — контуру спая $L_1^{(0)}$ и нижние — контуру ℓ .

Таблица 1

ϑ^0	W^*	M_r	M_θ	W^*	M_r	M_θ
0	10.11	3.932	0.5101	11.53	6.070	0.7938
30	10.11	3.626	1.173	11.53	4.363	1.415
60	10.11	3.118	1.015	11.53	1.758	0.5698
90	10.11	3.030	0.3990	11.53	1.218	0.1562
0	1.095	-5.656	-18.32	7.867	6.137	-6.488
	1.095	-5.682	-0.8506	7.867	6.139	-0.1404
30	1.268	-2.358	-11.91	8.720	3.364	-0.8575
	1.268	-2.374	1.411	8.710	3.373	-0.8127
60	1.581	-0.4228	-9.208	10.05	1.000	-0.8054
	1.581	-0.4151	2.833	10.04	1.005	0.6717
90	1.735	0.4739	-8.984	10.63	0.7157	0.7811
	1.834	0.4834	-4.299	10.62	0.7240	0.5892
0	0.0000	-19.91	-0.5024	0.0000	-14.42	-0.3597
30	0.0000	-15.39	-4.753	0.0000	-11.79	-3.641
60	0.0000	-7.942	-4.003	0.0000	-7.193	-9.083
90	0.0000	-4.791	-1.549	0.0000	-5.136	-1.658



Если пластинка, изготовленная из СВАМа, подкреплена кольцом из фанеры, то прогиб достигает своего максимального значения в точках контура $L_0^{(0)}$; изгибающий момент достигает своего максимального значения в точках контура ℓ . При увеличении площади кольца прогиб и момент M_r в точках контура $L_0^{(0)}$ возрастают; на контуре спая наблюдается резкое увеличение прогиба и уменьшение изгибающего момента M_θ ; на контуре ℓ максимальное значение момента M_r — уменьшается, а максимальное значение M_θ резко увеличивается (см. табл. 1).

Когда фанерная пластинка подкреплена кольцом из СВАМа, то наблюдается значительное увеличение прогиба и момента M_r на контуре $L_0^{(0)}$ и резкое увеличение момента M_r на контуре ℓ . При увеличении площади кольца прогиб и моменты M_r на контуре $L_0^{(0)}$ резко уменьшаются, на контуре спая наблюдается резкое увеличение прогиба и значительное уменьшение моментов M_r и M_θ (см. табл. 2).

Таблица 2

ϑ^0	W^*	M_r	M_θ	W^*	M_r	M_θ
0	25.19	11.00	0.2776	6.860	3.660	0.0965
30	25.20	2.960	0.9106	6.860	2.129	0.6602
60	25.21	-0.5216	-0.6468	6.860	0.2264	0.2805
90	25.21	-0.4565	-0.1255	6.860	-0.0140	0.0218
0	0.7763	-13.23	-0.6729	3.540	0.0879	-0.0974
	0.7763	-13.20	-10.22	3.540	0.1116	-2.827
30	0.7400	-11.68	-3.949	3.480	-0.4944	-0.2721
	0.7400	-11.68	-8.879	3.692	-0.4907	-2.348
60	0.5900	-8.699	-12.72	3.330	-0.8275	-1.599
	0.5939	-8.722	-9.039	3.791	-0.8477	-2.605
90	0.4800	-7.832	-7.079	3.250	-0.7360	-1.828
	0.4802	-7.858	-10.41	3.740	-0.7660	-3.300
0	0.0000	-30.24	-3.931	0.0000	-15.20	-1.975
30	0.0002	-27.70	-8.961	0.0028	-14.77	-4.776
60	0.0004	-20.76	-6.750	0.0057	-13.80	-4.488
90	0.0004	-16.29	-2.136	0.0061	-13.28	-1.741

Анализируя полученные результаты в целом, можно сделать следующие выводы.

Наибольший прогиб на контуре $L_0^{(0)}$ получается в составной плите, внешнее кольцо которой изготовлено из фанеры, а внутреннее — из материала, жёсткости которого в два раза меньше соответствующих жёсткостей фанеры.

Наименьший прогиб на контуре $L_0^{(0)}$ возникает в плите, внешнее кольцо которой изготовлено из СВАМа, а внутреннее — из материала, жёсткости которого в два раза больше соответствующих жёсткостей СВАМа.

Максимальный изгибающий момент наблюдается в фанерной плите, подкреплённой кольцом из СВАМа.

Для составной плиты, изготовленной из СВАМа и материала, жёсткости которого пропорциональны соответствующим жёсткостям СВАМа, распределение напряжений получается более равномерным по сравнению с остальными случаями.

Концентрация напряжений во всех рассмотренных случаях получилась больше на внутреннем контуре кольца.

Библиографический список

1. Буров А.К., Андреевская Г.Ф. Стекловолоконные анизотропные материалы и их техническое применение. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 71 с.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
3. Меглинский В.В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967. Вып. 3. С. 97–127.