



Библиографический список

1. Бернштейн С.Н. Несколько замечаний об интерполировании. Собр. соч.: В 3 т. М., 1952. Т. 1. С. 253–263.
2. Берман Д.Л. Сходимость интерполяционного процесса Лагранжа, построенного для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением // Докл. АН СССР. 1953. Т. 112, № 1. С. 9–12.
3. Неваи Г.П. Замечания об интерполировании // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1974 V. 25, № 1–2. P. 123–144.
4. Привалов А.А. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228–243
5. Салем Р. Acta Sci. et. Ind. Paris, 1940. № 1234. P. 862.
6. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
7. Уиттеккер Э.Т., Ватсон Д.Н. Курс современного анализа: В 2 т. М., 1963. Т. 2.

УДК 512.532.2

О КОНГРУЭНЦИЯХ ДВУПОРОЖДЕННОГО МОНОИДА

Л.А. Кудрявцева

Московский государственный институт электронной техники,
кафедра высшей математики
E-mail: kety3@mail.ru

Рассматриваются конгруэнции свободной полугруппы над двухбуквенным алфавитом, порожденные парами слов длины 2. Показано, что число классов эквивалентности для слов длины n равно $n + 1$. Найдено число слов в каждом классе.

Ключевые слова: конгруэнция, свободная полугруппа, моноид, класс эквивалентности.

ВВЕДЕНИЕ

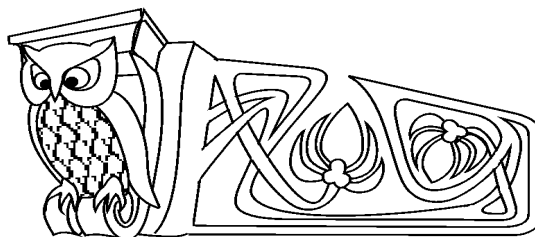
Полугруппы часто задают множеством образующих M и определяющих соотношений Σ . Будем рассматривать множество образующих из двух элементов $M = \{a, b\}$. В качестве Σ будем рассматривать одно соотношение, представляющее собой равенство двухбуквенных слов. Полугруппы, заданные одним определяющим соотношением, изучались многими авторами, см., например, [1, 2]. Всего слов длины 2 в алфавите M существует 4. Из них можно составить $C_4^2 = 6$ соотношений. На множестве из 4-х двухбуквенных слов можно рассмотреть два преобразования. Первое состоит в том, что буква a меняется на b , а b — на a . Второе является инверсией слова, т.е. первая буква становится последней, вторая — предпоследней и т.д. Если одно соотношение можно перевести в другое с помощью указанных преобразований, то количество классов эквивалентности на множестве M^n , а также количество элементов в каждом классе останутся без изменения. Такие соотношения можно назвать равносильными. Так, равносильными будут соотношения $aa = ab$, $ba = bb$, $aa = ba$, $ab = bb$. Таким образом, принципиально разными будут только соотношения

$$aa = ab, \quad ab = ba, \quad aa = bb, \quad (1)$$

которые и будут рассмотрены в данной работе.

Если конгруэнция задается равенством k -буквенных слов, то конгруэнтными могут быть только слова одинаковой длины. Поэтому будем рассматривать соответствующее отношение эквивалентности на множестве M^n слов длины n .

Для каждого соотношения в каждом классе эквивалентности будет выбрано каноническое слово. Будет показано, что любое слово эквивалентно одному из канонических, и разные канонические слова между собой не эквивалентны. Заметим, что возможность сведения любого слова к одному из канонических означает алгоритмическую разрешимость проблемы равенства слов. В общем случае



About the Congruences of Two-Generated Monoid

L.A. Kudryavtseva

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics
E-mail: kety3@mail.ru

The congruences of two-generated monoid which generated by pair of words of length 2 are considered over two-letter alphabet. It is shown that number of equivalence classes for words of length n is equal to $n + 1$. The number of words in each class is found.

Key words: congruence, free semigroup, monoid, equivalence class.



неразрешимость проблемы равенства слов для конечно определенных полугрупп была установлена в 1947 году А.А. Марковым и Э. Постом.

В работе используются основные понятия теории полугрупп из [3].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть A — полугруппа, заданная множеством порождающих элементов $M = \{a, b\}$ и одним из определяющих соотношений (1). Множество всех слов длины n обозначим M^n . Конгруэнции, задаваемые соотношениями (1), обозначим соответственно $\rho_1 = (aa, ab)$, $\rho_2 = (ab, ba)$, $\rho_3 = (aa, bb)$. Каждому слову w длины n можно сопоставить целое неотрицательное число $s(w)$, двоичная запись которого получится, если символ a заменить на 0, а b на 1. Число $s(w)$ будем называть весом слова w . *Каноническим словом* будем называть слово наименьшего веса в каждом классе эквивалентности. Если $w \in M^n$, то через $k(w)$ обозначим число элементов в классе эквивалентности, содержащем слово w .

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ $aa = ab$

Предложение 1. Если полугруппа A задана определяющим соотношением $aa = ab$, то число классов эквивалентности на множестве M^n равно $n + 1$. Канонические слова в каждом классе имеют вид $w_i = b^i a^{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Число элементов в каждом классе равно $k(w_i) = 2^{n-i-1}$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ и $k(w_n) = 1$.

Доказательство. Если в слове w есть подслово ab , то заменим его на aa . Таким образом слово $w = \underbrace{b \dots b}_i a \cdot u$, где u — подслово длины $n - i - 1$, эквивалентно слову w_i . Слова w_i , $i = 0, 1, \dots, n$, между собой не эквивалентны, так как в слове $w = \underbrace{b \dots b}_i a \cdot u$ первые $(i + 1)$ буквы изменить нельзя.

В каждом классе эквивалентности слово w_i имеет наименьший вес и, значит, является каноническим. Каждое слово эквивалентно одному из канонических слов w_i . Класс эквивалентности, содержащий слово w_i , содержит слова вида $w = \underbrace{b \dots b}_i a \cdot u$, где u — произвольное подслово длины $n - i - 1$, и поэтому состоит из $k(w_i) = 2^{n-i-1}$ элементов. \square

3. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ $ab = ba$

Предложение 2. Если полугруппа A задана определяющим соотношением $ab = ba$, то число классов эквивалентности на множестве M^n равно $n + 1$. Канонические слова в каждом классе имеют вид $w_i = a^{n-i} b^i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Число элементов в каждом классе равно $k(w_i) = C_n^i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Слова вида $w_1 = u \cdot ba \cdot v$ и $w_2 = u \cdot ab \cdot v$ эквивалентны. Переставляя в слове w все буквы a в начало слова получим, что каждое слово эквивалентно одному из w_i . Количество букв a и b у эквивалентных слов одинаково, поэтому слова w_i при разных i не могут быть эквивалентны между собой. Слово w_i имеет наименьший вес в своем классе эквивалентности, поэтому является каноническим. Количество слов в классе с каноническим словом $a^{n-i} b^i$ равно числу способов выбрать из n мест i мест в слове w , на которые мы поставим букву b , тогда на остальные места мы поставим букву a . Это число равно C_n^i . Всего классов эквивалентности $n + 1$. \square

4. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ $aa = bb$

Каждому слову w сопоставим целое число $ind(w)$, называемое *индексом*, следующим образом. Буквы a в слове w заменим на 0, а буквы b на 1. В полученной последовательности $c_1 c_2 \dots c_n$ положим $ind(w) = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n$. Например, если $w_1 = aaaaabab$, то $ind(w_1) = 2$, а для слова $w_2 = aaababa$ $ind(w_2) = -2$. Пусть u — либо пустое слово, либо слово, состоящее из одной буквы b , либо слово, состоящее из чередующихся букв b и a , начиная с b . Обозначим

$$w_i = a^i \cdot u, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Предложение 3. Если полугруппа A задана определяющим соотношением $aa = bb$, то число классов эквивалентности на множестве M^n равно $n + 1$. Канонические слова в каждом классе имеют вид (2).



Доказательство. Заметим, что для подслова baa возможно следующее преобразование $baa \rightarrow bbb \rightarrow aab$. Это означает, что слова $w_1 = u \cdot aab \cdot v$ и $w_2 = u \cdot baa \cdot v$ для любых подслов u и v эквивалентны. Покажем, что каждое слово длины n эквивалентно одному из слов вида (2). Действительно, если слово w содержит подслово aa и левее этого подслова имеются буквы b , то переместим aa в начало слова w . Если слово w содержит подслово bb и левее этого подслова имеются буквы b , то заменим bb на aa и опять же переместим aa в начало слова w . Тогда слово w за конечное число шагов преобразуется в эквивалентное ему слово вида (2).

Заметим, что при замене aa на bb (или наоборот) $ind(w)$ не меняется. Значит, эквивалентные слова имеют одинаковые индексы. Покажем, что слова w_i при разных i не эквивалентны друг другу. Для этого достаточно проверить, что они имеют разные индексы. Пусть сначала n — четно и $w_i = \underbrace{a \dots a}_i \underbrace{babab \dots}_{n-i}$. Тогда при четном i $ind(w_i) = \frac{n-i}{2} \geq 0$. При i нечетном $w_i = \underbrace{a \dots a}_i \underbrace{ba \dots bab}_{n-i}$ и $ind(w_i) = \frac{i-n-1}{2} < 0$. Далее, при n нечетном для четного i $ind(w_i) = \frac{n-i+1}{2} > 0$, а при нечетном i $ind(w_i) = \frac{i-n}{2} \leq 0$. Таким образом, при любых n индексы слов w_i разные, т.е. они не эквивалентны друг другу, и число классов эквивалентности на множестве M^n равно $n+1$. Ясно, что слова w_i имеют наименьший вес в своем классе эквивалентности, т.е. являются каноническими. \square

Сложнее получить формулу для числа элементов в каждом классе эквивалентности. Мы приведем два доказательства следующей теоремы: первое основано на индукции по n , второе использует комбинаторную формулу Вандермонда.

Теорема 1. Обозначим через $\alpha(n, k)$ число слов в классе эквивалентности слов длины n , содержащих слово $w_k = a^k \cdot u$, ($0 \leq k \leq n$), где u — либо пустое слово (при $k = n$), либо состоящее из одной буквы b (при $k = n - 1$), либо состоящее из чередующихся букв b и a , начиная с b . Тогда

$$\alpha(n, k) = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}. \tag{3}$$

Доказательство 1. Индукция по n . Для $n = 1$ имеются два слова a и b :

$$\alpha(1, 0) = C_1^0 = 1, \quad \alpha(1, 1) = C_1^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} = C_1^0 = 1.$$

Пусть формула верна для слов длины меньшей n и докажем ее для n .

Заметим, что случаи $k = 0$ и $k = 1$ очевидны, так как в этих случаях классы эквивалентности состоят из одного слова $\underbrace{ba \dots}_{n}$ и $\underbrace{aba \dots}_{n}$, что согласуется с формулой (3). Далее будем предполагать, что $k \geq 2$.

Рассмотрим два случая: когда k четно и когда k нечетно.

Случай 1. $k = 2l$, $l \geq 1$. Пусть имеется слово $w_{2l} = \underbrace{aa \dots a}_{2l} \underbrace{ba \dots}_{n-2l}$. Все слова в классе эквивалентности, содержащем w_{2l} , разобьем на две группы: к первой причислим те, которые начинаются с буквы a , ко второй отнесем начинающиеся с b . Пусть $\alpha(n, k) = \beta + \gamma$, где β — число слов в первой группе, а γ — во второй. Отсечем от слова w_{2l} самую левую букву a и будем делать преобразования только над оставшимся словом длины $n - 1$. По предположению индукции существует $\alpha(n - 1, k - 1) = C_{n-1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} = C_{n-1}^{l-1}$ слов, эквивалентных данному, т.е. $\beta = C_{n-1}^{l-1}$.

Далее, поскольку $k \geq 2$, две первые слева буквы aa можно заменить на bb . Первую букву b больше не трогаем, а вторую букву b сдвигаем вправо (если $2l - 2 > 0$) пользуясь преобразованием $baa \rightarrow bbb \rightarrow aab$. Поскольку число букв a справа от bb равно $k - 2 = 2l - 2$ — четно, полученное слово $bb \underbrace{a \dots a}_{2l-2} \underbrace{ba \dots}_{n-2l}$ эквивалентно слову

$$\underbrace{ba \dots a}_{2l-2} \underbrace{bba \dots}_{n-2l}. \tag{4}$$

Далее рассмотрим три подслучая: $n - 2l = 0$, $n - 2l = 1$ и $n - 2l \geq 2$.

Подслучай 1.1. $n - 2l = 0$. Слово (4) имеет вид $\underbrace{ba \dots a}_{2l-2} b$. Отсечем левую букву b . В классе эквивалентности слова $\underbrace{a \dots a}_{n-2} b$ по предположению индукции содержится $C_{n-1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} = C_{n-1}^{l-1}$ слов. Значит,



$\gamma = C_{n-1}^{l-1}$. Так как $k = 2l = n$, всего получится $\alpha(n, k) = \alpha(n, n) = \beta + \gamma = C_{n-1}^{l-1} + C_{n-1}^{l-1} = 2 \frac{(n-1)!}{(l-1)!(n-l)!} = 2 \frac{n!}{2l(l-1)!(n-l)!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} = C_n^l = C_n^{\frac{k}{2}} = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ слов. Значит, в этом случае формула доказана.

Подслучай 1.2. $n - 2l = 1$. Слово (4) имеет вид $b \underbrace{a \dots a}_{2l-2} b b$. Оно эквивалентно слову $b \underbrace{a \dots a}_{2l}$. После отсечения левой буквы b получится слово $\underbrace{a \dots a}_{2l}$. В классе эквивалентности этого слова, по предположению индукции ($2l = n - 1$), содержится $C_{2l}^l = C_{n-1}^l$ слов, т.е. $\gamma = C_{n-1}^l$. Поэтому $\alpha(n, k) = \alpha(n, n - 1) = \beta + \gamma = C_{n-1}^{l-1} + C_{n-1}^l = C_n^l = C_n^{\frac{k}{2}} = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.

Подслучай 1.3. $n - 2l \geq 2$. В этом подслучае слово (4) будет иметь вид $b b \underbrace{a \dots a}_{2l-2} a b a b a \dots$. Оно эквивалентно слову $b \underbrace{a \dots a}_{2l+1} \underbrace{b a \dots a}_{n-2l-2}$. Отсекая левую букву b , получим слово $\underbrace{a \dots a}_{2l+1} b a \dots$. В классе эквивалентности этого слова, по предположению индукции, содержится $C_{n-1}^{\lfloor \frac{2l+1}{2} \rfloor} = C_{n-1}^l$ слов. Тогда $\alpha(n, k) = \beta + \gamma = C_{n-1}^{l-1} + C_{n-1}^l = C_n^l = C_n^{\frac{k}{2}} = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.

Случай 2. $k = 2l + 1$, $l \geq 1$. Так же как и в первом случае, разобьем все слова, эквивалентные слову $w_{2l+1} = \underbrace{a \dots a}_{2l+1} b a \dots$, на две группы, и пусть β и γ имеют тот же смысл, что и ранее.

Если в слове w_{2l+1} отсечь одну левую букву a , то число слов, эквивалентных оставшемуся слову $\underbrace{a \dots a}_{2l} b a \dots$, по предположению индукции, равно $C_{n-1}^l = \beta$. Далее, считаем число слов во второй группе. Заменяя в слове w_{2l+1} первые две буквы aa на bb и перенося вторую букву b вправо, получим эквивалентное слово $b \underbrace{a \dots a}_{2l-2} b a \dots$. Отсечем левую букву b . В классе эквивалентности, содержащем оставшееся слово, по предположению индукции, содержится $C_{n-1}^{l-1} = \gamma$ слов. В итоге $\alpha(n, k) = \beta + \gamma = C_{n-1}^l + C_{n-1}^{l-1} = C_n^l = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$. \square

Доказательство 2. В предложении 3 было показано, что класс эквивалентности конгруэнции ρ_3 на множестве M^n образует все слова, имеющие одинаковый индекс. Эти слова эквивалентны каноническому слову $w_k = \underbrace{a \dots a}_k \underbrace{b a b a \dots}_{n-k}$ для некоторого $k = 0, 1, \dots, n$. Пусть w — произвольное слово длины n . Заменим в нем буквы a на 0, а буквы b на 1. В полученной последовательности $c_1 c_2 \dots c_n$ обозначим $s = c_1 + c_3 + c_5 + \dots$, $t = c_2 + c_4 + c_6 + \dots$. Тогда $ind(w) = s - t$. Для краткости будем писать ind вместо $ind(w)$. Тогда $s = t + ind$. Подсчитаем число слов с фиксированным значением индекса, равного ind . Обозначим это число α . Рассмотрим два случая в зависимости от четности n — длины слова w .

Случай 1. $n = 2n_1$, $n_1 \geq 1$. Тогда $-n_1 \leq ind \leq n_1$, $0 \leq s, t \leq n_1$. Число решений уравнения $c_1 + c_3 + \dots + c_{2n_1-1} = s$ при фиксированном s и $c_i = 0$ или 1 равно $C_{n_1}^s$. Аналогично для уравнения $c_2 + c_4 + \dots + c_{2n_1} = t$ число решений равно $C_{n_1}^t$. Тогда

$$\alpha = \sum_{t=0}^{n_1} C_{n_1}^s \cdot C_{n_1}^t = \sum_{t=0}^{n_1} C_{n_1}^{t+ind} \cdot C_{n_1}^t = \sum_{t=0}^{n_1} C_{n_1}^{t+ind} \cdot C_{n_1}^{n_1-t} = C_{2n_1}^{n_1+ind} = C_{2n_1}^{n_1-ind}. \quad (5)$$

Здесь мы воспользовались комбинаторной формулой Вандермонда $C_{n+m}^l = \sum_{i=0}^l C_n^i \cdot C_m^{l-i}$, которая получается из равенства $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m$ сравнением коэффициента при x^l в обеих частях равенства. Далее, рассмотрим два подслучая для четного и нечетного k .

Подслучай 1.1. $k = 2k_1$, $k_1 = 0, 1, \dots, n_1$. В этом подслучае слово w_k имеет вид $w_{2k_1} = \underbrace{a \dots a}_{2k_1} \underbrace{b a b a \dots}_{2n_1-2k_1}$. А $ind = \frac{2n_1-2k_1}{2} = n_1 - k_1$. Подставляя в (5), получим $\alpha = C_{2n_1}^{n_1-ind} = C_{2n_1}^{k_1} = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.

Подслучай 1.2. $k = 2k_1 + 1$, $k_1 = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $w_{2k_1+1} = \underbrace{a \dots a}_{2k_1+1} \underbrace{b a \dots b}_{2n_1-2k_1-1}$. Тогда $ind = k_1 - n_1$, $\alpha = C_{2n_1}^{n_1+ind} = C_{2n_1}^{k_1} = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.



Случай 2. $n = 2n_1 + 1, n_1 \geq 0$. Тогда

$$\alpha = \sum_{t=0}^{n_1} C_{n_1+1}^s \cdot C_{n_1}^t = \sum_{t=0}^{n_1} C_{n_1+1}^{t+ind} \cdot C_{n_1}^{n_1-t} = C_{2n_1+1}^{n_1+ind} = C_{2n_1+1}^{n_1+1-ind}. \quad (6)$$

Далее также рассмотрим два подслучая.

Подслучай 2.1. $k = 2k_1, k_1 = 0, 1, \dots, n_1$. Слово w_k имеет вид $w_{2k_1} = \underbrace{a \dots a}_{2k_1} \underbrace{baba \dots b}_{2n_1-2k_1+1}$.

Тогда $ind = n_1 - k_1 + 1$. Подставляя в (6), получим $\alpha = C_{2n_1+1}^{n_1+1-ind} = C_n^{k_1} = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.

Подслучай 2.2. $k = 2k_1 + 1, k_1 = 0, 1, \dots, n_1$. Слово w_k имеет вид $w_{2k_1+1} = \underbrace{a \dots a}_{2k_1+1} \underbrace{baba \dots ba}_{2n_1-2k_1}$.

Тогда $ind = k_1 - n_1$. Подставляя в (6), получим $\alpha = C_{2n_1+1}^{n_1+ind} = C_n^{k_1} = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.

Таким образом, во всех случаях $\alpha = C_n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$. \square

Библиографический список

1. Book R.V. A note on special Thue systems with a single defining relation // Math. Systems Theory. 1983. V. 16. P. 57–60.
2. Otto F., Wrathall C. A note on Thue systems with a single defining relation // Math. Systems Theory. 1985. V. 18. P. 135–143.
3. Ляпин Е.С. Полугруппы. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 592 с.

УДК 517.984

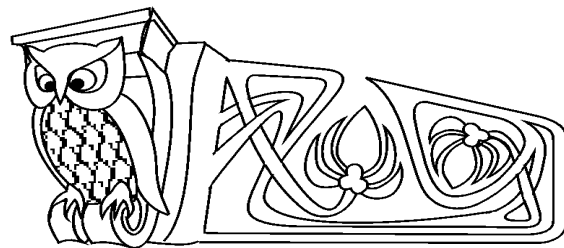
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ СЛЕДОВ СТЕПЕНЕЙ ЕГО РЕЗОЛВЕНТЫ

Е.М. Малек

Магнитогорский государственный технический университет, кафедра математики
E-mail: emaleko@rambler.ru

Пусть дискретный самосопряженный оператор T действует в сепарабельном гильбертовом пространстве и имеет ядерную резольвенту, причем собственные числа и собственные функции оператора T известны. В работе рассмотрен метод вычисления собственных чисел возмущенного оператора $T + P$, если резольвента этого оператора представима в виде сходящегося ряда Неймана по собственным функциям оператора T . Суть метода заключается в том, что сперва находится набор чисел, сколь угодно точно приближающих следы степеней резольвенты оператора $T + P$. Затем с помощью данного набора составляется и решается система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных, образующих в ней степенные суммы. Решением системы является единственный с точностью до перестановки набор ненулевых чисел, приближающих сдвинутые на одну и ту же константу λ обратные величины первых собственных значений оператора $T + P$.

Ключевые слова: собственные значения, резольвента, сепарабельное гильбертово пространство.



The Approached Calculation of Eigenvalues of the Discrete Operator by Means of Spectral Traces of Resolvent Degrees

E.M. Maleko

Magnitogorsk State Technical University,
Chair of Mathematics
E-mail: emaleko@rambler.ru

Let a discrete self-adjoint operator T acts in a separable Hilbert space and have the kernel resolvent, and eigenvalues and eigenfunctions of the operator T be known. In the paper the method of calculation of eigenvalues of the perturbed operator $T + P$ is considered. Resolvent of this operator is presented as convergent Neumann series on eigenfunctions of the operator T . The point of the method is that at first is found a set of numbers which approximate traces of the resolvent degrees of the operator $T + P$. Then by means of the given set, the system of nonlinear algebraic equations is constructed and solved. The solution of the system is a set of numbers which approximate first eigenvalues of the resolvent of the perturbed operator $T + P$.

Key words: eigenvalues, resolvent, separable Hilbert space.

Очень часто резольвенту дискретного дифференциального оператора в явном виде получить бывает очень сложно или же вообще невозможно. Однако, если возникла ситуация, когда спектральные следы степеней резольвенты находятся приближенно достаточно легко и точно без знания явного