



Int Conference on Biomechanics. September 7–9. 2005. Benidorm, Spain, 2006.

10. *Leung JH, Wright AR, Cheshire N. et al.* Fluid Structure Interaction of Patient Specific Abdominal Aortic Aneurysms: a Comparison with Solid Stress Models // *BioMedical Engineering OnLine*. 2006. V. 5:33 doi:10.1186/1475–925X–5–33.

11. *Younis H.F., Kaazempur–Mofrad M.R., Chan R.C. et al.* Hemodynamics and Wall Mechanics in Human Carotid Bifurcation and its Consequences for Atherosclerosis: Investigation of Inter-Individual Variation // *Biomechan. Model Mechanobiol.* 2004. V. 3. P. 17–32.

12. *Delfino A., Stergiopoulos N., Moore J.E. et al.* Residual Strain Effects on the Stress Field in a Thick Wall Finite Element Model of the Human Carotid Bifurcation // *J. of Biomech.* 1997. V. 30, № 8. P. 777–786.

13. *Malek A.M., Alper S.L., Izumo S.* Hemodynamics

Shear Stress and its Role in Atherosclerosis // *JAMA*. 1999. V. 282, № 21. P. 2035–2042.

14. *Howard B.V., Macarak E.I., Gunson D., Kefalides N.A.* Characterization of the Collagen Synthesized by Endothelial Cells in Culture // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1976. V. 73. P. 2361–2364.

15. *Haust M.D.* Arterial Endothelium and its Potentials. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 34.

16. *Weinbaum S., Tzeghai G., Ganatos P. et al.* Effect of Cell Turnover and Leaky Junctions on Arterial Macromolecular Transport // *Amer. J. Physiol.* 1985. V. 248. P. H945–H960.

17. *Tropea BI, Schwarzacher SP, Chang A et al.* Reduction of Aortic Wall Motion Inhibits Hypertension-Mediated Experimental Atherosclerosis // *Artheroscler. Thromb. Vasc. Biol.* 2000. V. 20. P. 2127–2133.

УДК 533.6.011

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Е.О. Кузнецова, И.А. Чернов

Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительного эксперимента в механике  
E-mail: Jane-83@yandex.ru, ChernovIA@info.sgu.ru

Дан обзор точных, описываемых алгебраическими функциями, решений трансзвуковой системы уравнений Кармана–Фальковича. Рассмотрены автомодельные решения и два класса параметрических решений, ассоциированных с автомодельными при показателях автомодельности  $n = 2$  и  $n = 3$ . Указана связь с локальным описанием особенностей трансзвуковых течений, в частности, в соплах Лаваля.

Рассмотрим классическое трансзвуковое течение идеального газа. Будем считать, что поток стационарный, изэнэргетический и изэнтропический. Приближенная система уравнений Кармана–Фальковича в случае плоского ( $\omega = 0$ ) и осесимметричного ( $\omega = 1$ ) околзвукowego потока имеет вид

$$uu_x = v_y + \omega(v/y), \quad u_y = v_x. \quad (1)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — приведенные проекции скорости возмущения основного звукового потока на оси прямоугольной системы координат.

### 1. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Возьмем автомодельные решения уравнения (1) вида

$$u = y^{2n-2}U(\zeta) \quad v = y^{3n-3}V(\zeta) \quad \zeta = xy^{-n},$$

где  $n$  — показатель автомодельности. С помощью перехода к переменным  $t, \tau$

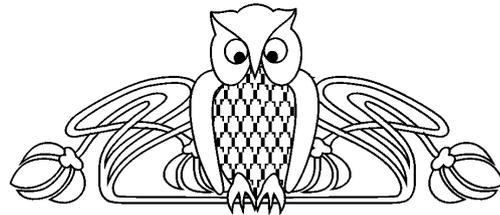
$$t = \zeta^{-2}U, \quad \tau = \zeta^{-3}V$$

система уравнений (1) сводится к уравнению в плоскости  $(t, \tau)$ :

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{(2n-2)t^2 - 3\tau t + (3n - \omega n)\tau}{2t^2 - 2nt + (3 - 3n - \omega)\tau} = -\frac{P_1(t, \tau, n)}{P_2(t, \tau, n)}. \quad (2)$$

При  $\omega = 0$  существует решение этого уравнения в форме  $\tau = \pm(2/3)t^{3/2}$  — интеграл Жермена. Уравнение (2) имеет частное семейство решений вида

$$\tau = A + Bt \pm (C + t)\sqrt{D + Et}. \quad (3)$$



### Exact Solutions of the Transonic Equations of Gas Dynamics

E.O. Kuznetsova, I.A. Chernov

The review exact (described by algebraic functions) solutions of a transonic set of Karman–Falkovitch equations is given. Self-similar solutions and two classes of the polynomial-parametrical solutions associated with self-similar at indexes  $n = 2$  and  $n = 3$  are considered. Connection with local exposition of singularities of transonic flows is specified, in particular in Laval nozzles.



Класс таких решений был изучен в [1]. Список частных решений (3) приведен в табл. 1.

Таблица 1

Показ. автопод.	Решение при $\omega = 0$					Интерпретация
	A	B	C	D	E	
$n = 5$	625/12	5/4	-25	75/16	3/8	?
$n = 3$	9	1	9	1	1/3	Течение Р.Г.Баранцева
$n=2$	4/3	1	-4	1/9	2/9	Сопло Мейера
$n = 5/3$	-125/81	5/3	25/9	25/3	-3	Обтекание угла со струей при $ y  < 1$
$n = 5/4$	-125/48	5/2	-25/16	25/9	-16/9	Обтекание угла при $ y  < 1$
$n = 6/5$	0	1	0	1	-2/3	Струя при $ y  < 1$
$n = 5/6$	0	-5/6	0	25/36	-2/3	Струя при $ y  > 1$
$n = 4/5$	4/3	-2	-1	16/9	16/9	Течение Ф.И.Франкля при $ y  > 1$
$n = 3/5$	1/3	-1	-1	1/9	1/9	Обтекание угла со струей при $ y  > 1$
$n = 1/2$	-1/6	-1/2	-1	1/36	2/9	?
$n = 1/3$	-1/3	-1/3	-1	1/9	1/3	?
$n = 1/5$	-5/12	-1/4	-1	3/16	3/8	?
Решение при $\omega = 1$						
$n = 4$	128/5	4/5	-16	208/75	26/75	?
$n = 2$	2	1/2	-4	1/4	1/4	Сопло Мейера
$n = 7/6$	-343/486	7/9	-49/36	196/729	-16/81	Обтекание угла $ y  < 1$
$n = 4/7$	8/9	-2	-2/3	16/9	-8/3	Течение Гудерлея-Йошихары при $ y  > 1$
$n = 1/3$	-2/9	-1/3	-2/3	1/9	2/3	?
$n = 1/6$	-8/27	-2/9	-2/3	52/243	52/81	?

С помощью формул

$$\ln C\zeta = \int \frac{(n^2 - t)dt}{P_2(t, \tau(t), n)}, \quad U(t) = t\zeta(t)^2, \quad V(t) = \tau(t)\zeta(t)^3$$

для решений вида (3) получены автомодельные представители для  $u$  и  $v$ , приведенные в табл. 2, некоторые решения в табл. 2 сведены к параметрическому виду [2].

Таблица 2

$\omega = 0$	
$n = 5$ $\begin{cases} u = \frac{x^2}{y^2} + Cxy^3 + \frac{C^2}{54}y^8 \\ v = -\frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3} + \frac{3}{2}Cx^2y^2 + \frac{4}{27}C^2xy^7 + \\ + \frac{1}{648}C^3y^{12} \end{cases}$	$n = 3$ $\begin{cases} u = 6Cxy + 3C^2y^4 \\ v = 3Cx^2 + 12C^2xy^3 + 3C^3y^6 \end{cases}$
$n = 2$ $\begin{cases} u = Cx + \frac{C^2}{2}y^2 \\ v = C^2xy + \frac{C^3}{6}y^3 \end{cases}$	$n = 5/3$ $\begin{cases} x = p^{-4}y^3 + Cp^5 \\ u = p^{-8}y^4 + 10Cpy \\ v = -\frac{2}{3}p^{-12}y^6 + \frac{50}{3}Cp^{-3}y^3 + \frac{25}{3}C^2p^6 \end{cases}$
$n = 6/5$ $\begin{cases} x = -p^{-3}y^3 + Cp^2 \\ u = -6Cp^{-1}y \\ v = -12pC \end{cases}$	$n = 5/6$ $\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{C}{(z-1)^{5/12}(5z-1)^{11/36}(z+1)^{5/18}} \\ U(z) &= -\frac{25}{24} \frac{(z^2-1)C^2}{(z-1)^{5/6}(5z-1)^{11/18}(z+1)^{5/9}} \\ V(z) &= -\frac{125}{144} \frac{(z^2-1)C^3}{(z+1)^{5/6}(5z-1)^{11/12}(z-1)^{1/4}} \end{aligned}$



Окончание табл. 2

$\omega = 0$	
$n = 4/5$ $\begin{cases} x = p^{-3}y^2 - C_2p^2 \\ u = p^{-6}y^2 - 2C_2p^{-1} \\ v = -\frac{2}{3}p^{-9}y^3 + 2C_2p^{-4}y \end{cases}$	$n = 3/5$ $\begin{cases} x = p^{-4}y^3 + C_1p \\ u = p^{-8}y^4 + 2C_1p^{-3}y \\ v = -\frac{2}{3}p^{-12}y^6 - 2C_1p^{-7}y^3 - C_1^2p^{-2} \end{cases}$
$n = 1/2$ $\zeta(z) = \frac{C}{(z-1)^{1/4}(z+3)^{1/4}(z-3)^{1/2}}$ $U(z) = \frac{1}{8} \frac{(z^2-1)C^2}{(z-1)^{1/2}(z+3)^{1/2}(z-3)}$ $V(z) = -\frac{1}{48} \frac{(z+5)(z-1)^{5/4}C^3}{(z+3)^{3/4}(z-3)^{3/2}}$	$n = 1/3$ $\zeta(z) = \frac{C}{(z-1)^{1/9}(z-2)^{2/3}(z+2)^{2/9}}$ $U(z) = \frac{1}{3} \frac{(z^2-1)C^2}{(z-1)^{2/9}(z-2)^{4/3}(z+2)^{4/9}}$ $V(z) = -\frac{1}{9} \frac{(z^2+2z-2)(z-1)^{2/3}C^3}{(z-2)^2(z+2)^{2/3}}$
$n = 1/5$ $\zeta(z) = \frac{C}{(z-1)^{4/5}(z+1)^{1/5}}$ $U(z) = \frac{3(z^2-1)C^2}{2(z-1)^{8/5}(z+1)^{2/5}}$ $V(z) = -\frac{1}{24} \frac{(7+9z^2+27z^3-27z)C^3}{(z-1)^{12/5}(z+1)^{3/5}}$	$n = 5/4$ $\begin{cases} x = -Cp^5 + p^{-3}y^2 \\ u = p^{-6}y^2 - 5Cp^2 \\ v = -\frac{2}{3}p^{-9}y^3 - 10Cp^{-1}y \end{cases}$
$\omega = 1$	
$n = 2$ $\begin{cases} u = Cx + C^2y^2/4 \\ v = C^2xy/2 + C^3y^3/16 \end{cases}$	$n = 4$ $\begin{cases} u = \frac{2}{3} \frac{x^2}{y^2} + Cxy^2 + \frac{3}{104}C^2y^6 \\ v = -\frac{4}{9} \frac{x^3}{y^3} + Cx^2y + \frac{9}{52}C^2xy^5 + \frac{3}{1040}C^3y^9 \end{cases}$
$n = 4/7$ $\begin{cases} x = -p^{-5}y^2 + 3p^2C \\ u = \frac{2}{3}p^{-10}y^2 - 4p^{-3}C \\ v = \frac{4}{9}p^{-15}y^3 - 4Cp^{-8}y \end{cases}$	$n = 7/6$ $\begin{cases} x = p^{-5}y^2 - 9p^7C \\ u = \frac{2}{3}p^{-10}y^2 - 42p^2C \\ v = -\frac{4}{9}p^{-15}y^3 - 28Cp^{-3}y \end{cases}$
$n = 1/3$ $\zeta = \frac{C(z-\sqrt{5}) \left(-\frac{1}{12}\sqrt{5}\right) (z+\sqrt{5}) \left(\frac{1}{12}\sqrt{5}\right) (z-1)^{1/4}}{(z^2+5-5z+z^3)^{5/12}}$ $U = \frac{(z^2-1)C^2(z-\sqrt{5}) \left(-\frac{1}{6}\sqrt{5}\right) (z+\sqrt{5}) \left(\frac{1}{6}\sqrt{5}\right) \sqrt{z-1}}{6(z^2+5-5z+z^3)^{5/6}}$ $V = -\frac{(z-1)^{3/4}(z+\sqrt{5}) \left(\frac{1}{4}\sqrt{5}\right) (z-\sqrt{5}) \left(-\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)}{18(z^2+5-5z+z^3)^{1/4}(z^2-5)} C^3(z^2+2z-3)$	$n = 1/6$ $\zeta = C(z-1)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\sqrt{13}\right)}(z+1)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\sqrt{13}\right)}$ $U = \frac{1}{3}(3z^2-1)C^2(z-1)^{\left(-1-\frac{1}{6}\sqrt{13}\right)}(z+1)^{\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{13}\right)}$ $V = -\frac{2}{9}(1+z^2+\sqrt{13}z^3-\sqrt{13}z)C^3(z-1)^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{13}\right)}(z+1)^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{13}\right)}$

При  $\omega = 0$  справедливы две теоремы, первая из которых позволяет размножать решения, а вторая — отражает свойство парности решений в табл. 1.

**Теорема 1.** Если имеется автомодельное решение с  $\{n, t, \tau, \zeta\}$ , то также будет решение с  $\{n_1, t_1, \tau_1, \zeta_1\}$ , где

$$n_1 = \frac{3-2n}{4-3n}, \quad t_1 = \frac{t(2nt-3\tau)^2}{(2t^2-3n\tau)^2}, \quad \tau_1 = \frac{\tau(2nt-3\tau)^3}{(2t^2-3n\tau)^3},$$

$$\zeta_1 = \zeta^{-\frac{1}{3n-4}}(n-1)^{-\frac{n-1}{3n-4}}(2t^2-3n\tau)(2nt-3\tau)^{-\frac{2n-3}{3n-4}}(4t^3-9\tau^2)^{-\frac{n-1}{3n-4}}.$$

**Теорема 2.** Если имеется автомодельное решение с  $\{n, t, \tau, \zeta\}$ , то также будет решение с  $\{n_2, t_2, \tau_2, \zeta_2\}$ , где

$$n_2 = \frac{1}{n}, \quad t_2 = \frac{t}{n^2}, \quad \tau_2 = -\frac{\tau}{n^3}, \quad \zeta_2 = 2^{\frac{n+1}{3n}} \zeta^{-\frac{1}{n}}(4t^3-9\tau^2)^{-\frac{n+1}{6n}}.$$

Заметим, что некоторые из полученных решений укладываются в три основных полиномиально-параметрических класса: известные симметричный и несимметричный классы решений Заславского–Гриба (ассоциированные с показателем автомодельности  $n = 2$ ) и менее известный (изученный в [4], [5]) класс решений, ассоциированный с  $n = 3$ .

## 2. ПОЛИНОМО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

**2.1.** Рассмотрим класс решений, ассоциированный с  $n = 3$  ( $\omega = 0$ ) (включает известные автомодельные решения для показателя автомодельности  $n = 3, 5/3, 6/5, 3/5$ ). Для этого случая решение системы уравнений (1) представляется в следующем виде (здесь и далее  $s$  обозначает параметр):



$$x = x_0(s) + sy^3, \quad u = u_1(s)y + u_4(s)y^4, \quad v = v_0(s) + v_3(s)y^3 + v_6(s)y^6. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (1) при  $\omega = 0$  дает систему ОДУ, разрешенную относительно первых производных от коэффициентов:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{u_1}{u_4 - 9s^2}, & u'_1 &= \frac{3(v_3 - su_1)}{u_4 - 9s^2}, & u'_4 &= \frac{6(v_6 - 2su_4)}{u_4 - 9s^2}, \\ v'_0 &= \frac{u_1^2}{u_4 - 9s^2}, & v'_3 &= \frac{5(u_1u_4 - 9sv_3)}{u_4 - 9s^2}, & v'_6 &= \frac{4u_4^2 - 18sv_6}{u_4 - 9s^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) можно выделить нелинейное ядро относительно коэффициентов  $u_4(s)$  и  $v_6(s)$ , которое сводится к одному ДУ второго порядка для  $u_4(s)$

$$u''_4(u_4 - 9s^2) + (u'_4)^2 + 12su'_4 - 12u_4 = 0. \quad (6)$$

В [4] приведено общее решение (6) в следующей параметрической форме ( $z$  — параметр;  $E, H$  — постоянные интегрирования):

$$\begin{aligned} u_4 &= -3\sqrt{3}H^2(z^4 - 2\sqrt{3}z^2 - 1)Q(z)(E + z)^{-4}, & s = x_3 &= HQ(z)(E + z)^{-3}, \\ Q(z) &= 1 + \sqrt{3}Ez - \sqrt{3}z^2 + Ez^3. \end{aligned}$$

Рассмотрим технологию восстановления остальных коэффициентов подробнее [2]. Если функция  $u_4(s)$  известна, то следует использовать замену переменных:  $u'_1 = \mu + u'_4x'_0$ ,  $\nu = x'_0$ . Отсюда выводятся линейные ОДУ первого порядка для  $\mu, \nu$ :

$$\mu'(u_4 - 9s^2) - 6s\mu + 2\mu u'_4 = 0, \quad \nu'(u_4 - 9s^2) - 18s\nu - \mu = 0.$$

Считая, таким образом, функции  $u_4(s)$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  найденными из соответствующих дифференциальных уравнений, можно записать решение класса (4) для системы (1) в виде квадратур:

$$\begin{aligned} x &= \int \nu(s)ds + sy^3, & u &= (\nu(s)u_4(s) - 9\nu(s)s^2)y + u_4(s)y^4, \\ v &= \left( \int (u_4(s) - 9s^2)\nu(s)^2 ds + C_4 \right) + \left( \frac{1}{3} \frac{d\nu(s)}{ds} u_4(s)^2 - 6 \frac{d\nu(s)}{ds} u_4(s)s^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3} \nu(s) \frac{du_4(s)}{ds} u_4(s) - 3 + \frac{1}{3} \nu(s) \frac{du_4(s)}{ds} s^2 + 27 \frac{d\nu(s)}{ds} s^4 - 5s\nu(s)u_4(s) + 45s^3\nu(s) \right) y^3 + \\ &+ \left( \frac{1}{6} \frac{du_4(s)}{ds} u_4(s) - \frac{3}{2} \frac{du_4(s)}{ds} s^2 + 2su_4(s) \right) y^6. \end{aligned}$$

Поскольку в общем случае квадратуры приводят к сложным и громоздким вычислениям, то ограничимся рассмотрением частных решений ключевого уравнения (6). Возьмем особый интеграл (6) в виде ( $B$  — масштабная постоянная):

$$s(z) = Bz, \quad u_4(z) = B^2z^2.$$

Далее воспользуемся идеями из [6],[7], получаем точное решение системы (1) (с целью освобождения от иррациональностей используем замену  $z = t^4$ )

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4}{5} \frac{C_2B}{t^5} + \frac{1}{2} \frac{C_1}{t} + C_3 + Bt^4y^3, & u &= \left( t^3C_1B - 8 \frac{C_2B^2}{t} \right) y + B^2t^8y^4, \\ v &= \frac{16}{3} \frac{C_2^2B^3}{t^6} - 4 \frac{C_1C_2B^2}{t^2} - \frac{1}{4} t^2BC_1^2 + C_3 + \left( -\frac{40}{3} t^3C_2B^3 - t^7C_1B^2 \right) y^3 - \frac{2}{3} B^3t^{12}y^6. \end{aligned}$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, B$  — произвольные постоянные. Рассмотрим теперь интеграл Жермена для (6)

$$s = \pm(z - 1)Cz^2, \quad u_4 = C^2z^4.$$



Соответствующее решение системы (1) имеет вид (с целью освобождения от иррациональностей используем замену  $z = t^2$ ):

$$\begin{aligned}
 x = & \mp \frac{9tC_2C}{10\sqrt{3t^2-4}} \pm \frac{3C_2C}{5t\sqrt{3t^2-4}} \pm \frac{C_2C}{5t^3\sqrt{3t^2-4}} \mp \frac{C_2C}{5t^3\sqrt{3t^2-4}} \mp \frac{C_1}{2t\sqrt{3t^2-4}} + \frac{3tC_1}{4\sqrt{3t^2-4}} + \\
 & + C_3 + (\pm t^6 C \mp t^4 C)y^3, \\
 u = & \left( \pm \frac{t^3 C C_1}{\sqrt{3t^2-4}} - \frac{3tC^2 C_2}{\sqrt{3t^2-4}} + \frac{2C^2 C_2}{t\sqrt{3t^2-4}} \right) y + C^2 t^8 y^4, \\
 v = & \left\{ \mp \frac{C^3 C_2^2}{3(3t^2-4)t^6} \pm \frac{C C_1^2}{3(3t^2-4)} - \frac{4C_3}{(3t^2-4)} - \frac{C^2 C_1 C_2}{(3t^2-4)t^2} + \frac{3t^2 C_3}{(3t^2-4)} \pm \frac{C^3 C_2^2}{(3t^2-4)t^4} \right\} + \\
 & + \left( -\frac{4t^7 C_1 C^2}{(3t^2-4)^{3/2}} \mp \frac{9t^9 C_2 C^3}{(3t^2-4)^{3/2}} + \frac{3t^9 C_1 C^2}{(3t^2-4)^{3/2}} \mp \frac{30t^5 C_2 C^3}{(3t^2-4)^{3/2}} \pm \frac{40t^3 C^3 C_2}{(3t^2-4)^{3/2}} \pm \right. \\
 & \left. \pm \frac{27t^7 C^3 C_2}{(3t^2-4)^{3/2}} \right) y^3 + \left( \mp \frac{8t^{12} C^3}{3(3t^2-4)} \pm \frac{2t^{14} C^3}{(3t^2-4)} \right) y^6.
 \end{aligned}$$

Здесь  $C, C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные.

В заключение рассмотрим потерянные решения (когда в (4) старшие коэффициенты — константы)

$$x = s + Dy^3, \quad u = u_1(s)y + 9D^2y^4, \quad v = v_0(s) + v_3(s)y^3 + 18D^3y^6.$$

После подстановки в (1) получаем систему ОДУ:

$$\frac{du_1(s)}{ds} = -\frac{3(Du_1(s) - v_3(s))}{u_1(s)}, \quad \frac{dv_0(s)}{ds} = u_1(s), \quad \frac{dv_3(s)}{ds} = \frac{9D(5Du_1(s) - v_3(s))}{u_1(s)}.$$

Из первого и третьего уравнений получаем ОДУ для  $u_1(s)$ :

$$\frac{d^2u_1(s)}{ds^2} - \frac{-12D \frac{du_1(s)}{ds} + 108D^2 - \left(\frac{du_1(s)}{ds}\right)^2}{u_1(s)} = 0.$$

Рассмотрим решение данного уравнения в параметрической форме:

$$s = C_1 z + C_1/z^3 + C_2, \quad u_1 = 6DC_1 z - \frac{18DC_1}{z^3}.$$

Тогда потерянное решение примет вид

$$\begin{aligned}
 x = & C_1 z + C_1/z^3 + C_2 + Dy^3, \quad u = (6DC_1 z - 18DC_1/z^3)y + 9D^2y^4, \\
 v = & 3DC_1^2 z^2 + \frac{18DC_1^2}{z^2} - \frac{9DC_1^2}{z^6} + C_3 + \frac{18D^2 C_1(z^4 + 5)}{z^3} y^3 + 18D^3 y^6.
 \end{aligned}$$

Здесь  $D, C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные.

## 2.2. Рассмотрим несимметричное решение Заславского–Гриба

$$\begin{aligned}
 x = & x_0(s) + x_1(s)y + sy^2, \quad u = u_0(s) + u_1(s)y + u_2(s)y^2, \\
 v = & v_0(s) + v_1(s)y + v_2(s)y^2 + v_3(s)y^3.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Подставим (7) в основную систему трансзвуковых уравнений (1)

$$\begin{aligned}
 x'_0 = & \frac{u_0 - x_1^2}{u_2 - 4s^2}, \quad x'_1 = \frac{-(4x_1 s - u_1)}{u_2 - 4s^2}, \quad u'_0 = \frac{-(u_1 x_1 - v_1)}{u_2 - 4s^2}, \quad u'_1 = \frac{-2(u_2 x_1 - v_2 + u_1 s)}{u_2 - 4s^2}, \\
 u'_2 = & \frac{3v_3 - 4su_2}{u_2 - 4s^2}, \quad v'_0 = \frac{u_0 u_1 - v_1 x_1}{u_2 - 4s^2}, \quad v'_1 = \frac{u_1^2 - 2v_2 x_1 + 2u_0 u_2 - 2v_1 s}{u_2 - 4s^2}, \\
 v'_2 = & \frac{3(u_1 u_2 - v_3 x_1) - 4v_2 s}{u_2 - 4s^2}, \quad v'_3 = \frac{-2(3v_3 s - u_2^2)}{u_2 - 4s^2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$



В (8) можно выделить нелинейное ядро относительно коэффициентов  $u_2(s)$  и  $v_3(s)$ , которое сводится к одному ОДУ второго порядка для  $u_2(s)$ :

$$u_2''(u_2 - 4s^2) + (u_2')^2 + 2su_2' - 2u_2 = 0. \quad (9)$$

Общее решение этого уравнения в параметрической форме имеет вид ( $z$  — параметр;  $E, H$  — постоянные интегрирования)

$$u_2 = B^2[4(1 + z^2) + Ez], \quad s = x_2 = B(z^2 - 1).$$

Используя переход к переменным  $\mu, \nu, \xi, \eta$

$$u_0' = \mu + u_2'\nu, \quad x_0' = \nu, \quad u_1' = \xi + u_2'\eta, \quad x_1' = \eta,$$

выводятся линейные уравнения первого порядка:

$$\xi'(u_2 - 4s^2) - 2s\xi + 2\xi u_2' = 0, \quad \eta'(u_2 - 4s^2) - 4s\eta - \xi + 4x_1 = 0,$$

$$\mu'(u_2 - 4s^2) + 2\xi x_1 + 2u_2'\mu - 6s\mu = 0, \quad \nu'(u_2 - 4s^2) - 8s\nu - \mu + 2x_1\eta = 0.$$

Считая функции  $u_2(s), \xi, \eta, \mu, \nu$  известными после решения системы соответствующих дифференциальных уравнений, записываем решение

$$x = \int \nu(s)ds + \int \eta(s)dsy + sy^2,$$

$$u = \left( \nu(s)u_2(s) - 4\nu(s)s^2 + \left( \int \eta(s)ds \right)^2 \right) + \left( \eta(s)u_2(s) - 4\eta(s)s^2 + 4s \int \eta(s)ds \right) y + u_2(s)y^2,$$

$$\begin{aligned} v = & \left( -4 \int s^2 \eta(s) \nu(s) ds + 4 \int s^2 \int \eta(s) ds \frac{d\nu(s)}{ds} ds + 12 \int s \nu(s) \int \eta(s) ds ds + \right. \\ & + \int \nu(s) u_2(s) \eta(s) ds - 2 \int \left( \int \eta(s) ds \right)^2 \eta(s) ds - \int \int \eta(s) ds u_2(s) \frac{d\nu(s)}{ds} ds - \\ & - \int \int \eta(s) ds \nu(s) \frac{du_2(s)}{ds} ds \left. \right) + \left( \frac{d\nu(s)}{ds} u_2(s)^2 + u_2(s) \nu(s) \frac{du_2(s)}{ds} - 8u_2(s) \frac{d\nu(s)}{ds} s^2 - \right. \\ & - 8u_2(s) s \nu(s) + 3 \int \eta(s) ds \eta(s) u_2(s) - 4s^2 \nu(s) \frac{du_2(s)}{ds} + 16s^4 \frac{d\nu(s)}{ds} + 32s^2 \nu(s) - \\ & - 12 \int \eta(s) ds \eta(s) s^2 + 4s \left( \int \eta(s) ds \right)^2 \left. \right) y + \left( \frac{1}{2} \frac{d\eta(s)}{ds} u_2(s)^2 + \frac{1}{2} u_2(s) \eta(s) \frac{du_2(s)}{ds} - \right. \\ & - 4u_2(s) \frac{d\eta(s)}{ds} s^2 - s \eta(s) u_2(s) + 3u_2(s) \int \eta(s) ds - 2s^2 \eta(s) \frac{du_2(s)}{ds} + 8s^4 \frac{d\eta(s)}{ds} + \\ & \left. + 4\eta(s) s^3 - 4s^2 \int \eta(s) ds \right) y^2 + \left( \frac{1}{3} \frac{du_2(s)}{ds} u_2(s) - \frac{4}{3} \frac{du_2(s)}{ds} s^2 + \frac{4}{3} s u_2(s) \right) y^3. \end{aligned}$$

Функции  $\xi, \eta, \mu, \nu$  выражаются в квадратурах через  $u_2(s)$  как решения линейных ОДУ 1-го порядка. Поскольку в общем случае квадратуры приводят к сложным и громоздким вычислениям, то ограничимся рассмотрением частного решения. Возьмем особый интеграл уравнения (9) в виде ( $B$  — масштабная постоянная)

$$s(z) = Bz, \quad u_2(z) = B^2 z^2.$$

Тогда решение системы (1) примет вид (с целью освобождения от иррациональностей используем замену  $z = t^3$ )

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{4} C_4^2 B t^3 + \frac{1}{4} C_1 C_4 t^2 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{t^2} - \frac{27}{2156} \frac{B^3 C_3^2}{t^{11}} + \frac{9}{56} \frac{C_4 C_3 B^2}{t^4} - \frac{3}{5} \frac{C_5 B}{t^5} + C_6 + \\ & + \left( \frac{1}{2} C_1 t^2 + \frac{9}{28} \frac{C_3 B^2}{t^4} + C_4 B t^3 \right) y + B t^3 y^2, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 u &= tC_2B - \frac{27}{784} \frac{B^4C_3^2}{t^8} + \frac{9}{7} \frac{C_4C_3B^3}{t} + \frac{1}{2}t^5C_4C_1B + \frac{1}{4}C_4^2B^2t^6 - 3\frac{C_5B^2}{t^2} + \\
 &+ \frac{9}{28} \frac{C_3B^2C_1}{t^2} + \frac{1}{4}t^4C_1^2 + \left( \frac{18}{7} \frac{B^3C_3}{t} + t^5BC_1 + C_4B^2t^6 \right) y + B^2t^6y^2, \\
 v &= \left\{ -\frac{1}{12}C_4^3B^3t^9 - \frac{243}{10976} \frac{C_3^3B^6}{t^{12}} - \frac{1}{2}BC_1C_2t^3 - \frac{1}{4}BC_1^2C_4t^7 + \frac{27}{28} \frac{C_3B^3C_2}{t^3} - \right. \\
 &- \frac{27}{784} \frac{C_1B^4C_3^2}{t^6} + \frac{27}{28} \frac{C_3^2B^5C_4}{t^5} + \frac{117}{112}C_3B^4C_4^2t^2 - \frac{1}{4}C_1C_4^2B^2t^8 - \frac{1}{12}t^6C_1^3 + C_7 - \\
 &- \left. \frac{27}{28} \frac{C_5B^4C_3}{t^6} - 3B^3C_5C_4t - \frac{1}{2}C_2C_4B^2t^4 + \frac{9}{8}C_3B^3C_1C_4t \right\} + \\
 &+ \left( -\frac{1}{2}t^9B^3C_4^2 - t^4B^2C_2 - 6tC_5B^3 - \frac{1}{2}t^7BC_1^2 + \frac{9}{4}tB^3C_1C_3 - t^8B^2C_4C_1 + \right. \\
 &+ \left. \frac{27}{49} \frac{B^5C_3^2}{t^5} + \frac{117}{28}t^2B^4C_4C_3 \right) y + \left( -C_4B^3t^9 + \frac{117}{28}t^2B^4C_3 - t^8C_1B^2 \right) y^2 - \frac{2}{3}B^3t^9y^3.
 \end{aligned}$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, B$  — константы. Рассмотрим потерянное решение для несимметричного класса (когда старшие коэффициенты в (7) — константы)

$$\begin{aligned}
 x &= s + x_1(s)y + x_{20}y^2, & u &= u_0(s) + u_1(s)y + 4x_{20}^2y^2, \\
 v &= v_0(s) + v_1(s)y + v_2(s)y^2 + \frac{16}{3}x_{20}^3y^3.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Подстановка (10) в (1) дает систему уравнений, записанную относительно производных от коэффициентов в (10). Разрешая ее, получим следующее точное решение системы (1) (в процессе решения системы был сделан переход к новому параметру  $z$ )

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{40z^9x_{20}^2 + 144Bz^6x_{20}^2 + 15C_0z^5 - 120z^3C_2x_{20}^2 + 120x_{20}^2B^2z^3 + 15C_0Bz^2 + 240x_{20}^2C_1 + 480C_4zx_{20}^3}{480zx_{20}^3} + \\
 &+ \frac{(16x_{20}^2Bz + 16x_{20}^2z^4 + C_0)y}{16x_{20}^2} + x_{20}y^2, \\
 u &= z^2C_2 + \frac{C_1}{z} + \frac{(-768Bz^5 - 256z^8)x_{20}^4 - 96C_0(-\frac{1}{2}B + z^3)zx_{20}^2 + 3C_0^2}{768x_{20}^4} - \\
 &- \frac{(-8x_{20}^2Bz + 16x_{20}^2z^4 - C_0)}{4x_{20}}y + 4x_{20}^2y^2, \\
 v &= \frac{1}{3}Bz^9 + \frac{C_0z^8}{24x_{20}^2} + B^2z^6 + \frac{BC_0z^5}{4x_{20}^2} + \frac{z^4C_0^2}{64x_{20}^4} + z^3C_1 - z^3BC_2 + \frac{1}{3}z^3B^3 - \\
 &- \frac{z^2C_0C_2}{8x_{20}^2} + \frac{z^2B^2C_0}{16x_{20}^2} + \frac{BzC_0^2}{256x_{20}^4} + \frac{C_0C_1}{16x_{20}^2z} + C_3 + \\
 &+ (-768x_{20}^4z^3C_2 + 384x_{20}^4C_1 + 48x_{20}^2Bz^2C_0 + 192x_{20}^2z^5C_0 + 1536x_{20}^4Bz^6 + 256x_{20}^4z^9 + \\
 &+ 384x_{20}^4B^2z^3 + 3zC_0^2) \frac{y}{192zx_{20}^3} + (4x_{20}^2Bz + 16x_{20}^2z^4 + \frac{1}{2}C_0)y^2 + \frac{16}{3}x_{20}^3y^3.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, x_{20}, B$  — произвольные постоянные.

**2.3.** Симметричное решение Заславского–Гриба, ассоциированное с автомодельным ( $n = 2, \omega = 0$ ) (включает автомодельные решения для показателей автомодельности  $n = 2, 5/4, 4/5$  из табл. 1) является частным случаем несимметричного класса (достаточно занулить коэффициенты  $x_1(s), u_1(s), v_0(s)$  и  $v_2(s)$ ). Возьмем в качестве частного решения уравнения (9) — интеграл Жермена

$$s(z) = \pm(z - 1)zC, \quad u_2(z) = C^2z^2.$$



Тогда получаем следующее решение системы (1) (с целью освобождения от иррациональности используем замену  $z = t^3$ )

$$x = \frac{C_1}{10(2t^3 - 3)^{1/3}t^5} \pm \frac{C_2C}{5(2t^3 - 3)^{1/3}t^5} \mp \frac{3C_2C}{5(2t^3 - 3)^{1/3}t^2} + \frac{C_1}{5(2t^3 - 3)^{1/3}t^2} \pm \frac{6tC_2C}{5(2t^3 - 3)^{1/3}} - \frac{2tC_1}{5(2t^3 - 3)^{1/3}} + C_3 + (\mp t^6C \pm t^3C)y^2,$$

$$u = -\frac{2C^2tC_2}{(2t^3 - 3)^{1/3}} \pm \frac{CC_1}{2t^2(2t^3 - 3)^{1/3}} + \frac{C^2C_2}{t^2(2t^3 - 3)^{1/3}} + C^2t^6y^2,$$

$$v = \left( -\frac{C^2t^4C_1}{(2t^3 - 3)^{1/3}} \pm \frac{2C^3tC_2}{(2t^3 - 3)^{1/3}} + \frac{C^2tC_1}{(2t^3 - 3)^{1/3}} \right) y \mp \frac{2}{3}C^3t^9y^3.$$

Здесь  $C, C_1, C_2, C_3$  — произвольные константы.

**2.4.** Осесимметричный случай при  $\omega = 1$  описывается симметричным классом решений Заславского–Гриба (включает автомодельные решения для показателя автомодельности  $n = 2, 7/6, 4/7$  из табл. 1 при  $\omega = 1$ ).

Частное решение системы (1) имеет вид

$$x = \frac{-20C_2B + 21C_1t^5 + 28C_3t^7}{28t^7} + Bt^5y^2, \quad u = \frac{B(3C_1t^5 - 10C_2B)}{3t^2} + \frac{2}{3}B_2t^{10}y^2,$$

$$v = \left( -\frac{20}{9}t^3C_2B^3 - B^2t^8C_1 \right) y - \frac{4}{9}B^3t^{15}y^3.$$

Здесь  $B, C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные. Потерянные решения записываются в форме

$$x = s + Dy^2, \quad u = u_0(s) + 4D^2y^2, \quad v = v_1(s)y + 4D^3y^3.$$

с  $u_0(s), v_1(s)$ , найденными через  $Z(a, C_1, D)$ , где  $Z(a, C_1, D)$  — корень уравнения

$$-5 \ln(Z^2 + 4DZ - 16D^2) - 2\sqrt{5} \arctan h \left( \frac{(Z + 2D)\sqrt{5}}{10D} \right) - 10 \ln(a) + 5C_1 = 0,$$

$$s = \int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{Z(a, C_1, D)} da - C_2, \quad v_1 = \frac{8D^2u_0}{4D + Z(a, C_1, D)} + u_0^{\left(-\frac{4D}{Z(a, C_1, D)}\right)} C_2,$$

здесь  $s = s(u_0)$  — обратная функция к  $u_0(s)$ ,  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования,  $D$  — произвольная постоянная.

Заметим, что в случае  $\omega = 1$  алгебраические решения редки.

### 3. ПРИЛОЖЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ К СОПЛОВЫМ ТЕЧЕНИЯМ

В качестве примера возьмем течение в сопле Лавалья с параболической ударной волной (УВ). Интересным для изучения является вопрос «склейки» симметричного течения Мейера (М.) до УВ и несимметричного Томотика-Тамады (Т.-Т.) после УВ. Течение после УВ соответствует потерянным решениям (11). Симметричное течение Мейера:

$$u = A_1x + \frac{A_1^2}{2}y^2, \quad v = A_1^2xy + \frac{A_1^3}{6}y^3. \quad (12)$$

Для выполнения условий на параболической УВ вида  $x = x_{00} + x_{10}y + x_{20}y^2$  получены следующие значения параметров  $x_{20}$  и  $x_{10}$  ( $x_{00}$  — произвольно):

$$1) x_{20} = -1/4, \quad x_{10} = -1/4, \quad 2) x_{20} = 1/2, \quad x_{10} = 1/5, \quad 3) x_{20} = -1/16, \quad x_{10} = 1/32, \quad (13)$$

где  $x_{20}$  — кривизна УВ на оси параболы,  $x_{00}$  — сдвиг УВ от начала координат по горизонтали,  $x_{10}$  — сдвиг УВ — по вертикали.



Возьмем первый случай в (13). Используя приведенные выше аналитические решения (11) и (12) (предварительно получив значения всех констант в (12) из начальных условий на УВ), удалось построить склейку симметричного и несимметричного течения на УВ. На рис.1 течение происходит слева направо, приведены изолинии  $u = const$ , которые встречаются в одной и той же точке на УВ, пунктиром обозначены звуковые линии  $u = 0$  для течения М. слева и для течения Т.-Т. [8]–[9].

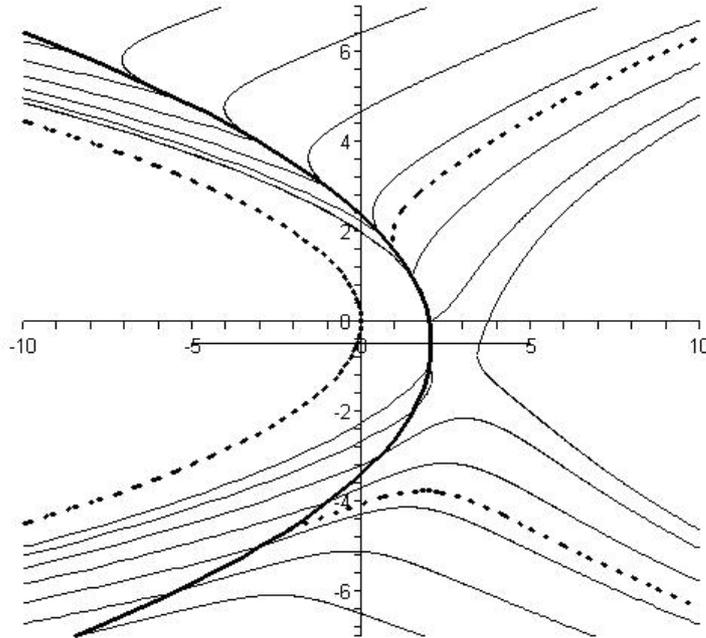


Рис. 1

Изолинии слева от УВ имеют вид (снизу вверх):  $u_1 = 7, u_2 = 6, u_3 = 5, u_4 = 4, u_5 = 3, u_6 = 2, u_7 = 1, u_9 = 1, u_{10} = 2, u_{11} = 3, u_{12} = 4, u_{13} = 5, u_{14} = 6, u_{15} = 7$ . Изолинии справа от УВ:  $u_1 = 5.12, u_2 = 2.62, u_3 = 0.62, u_4 = -0.87, u_5 = -1.87, u_6 = -2.37, u_7 = -2.37, u_9 = -0.87, u_{10} = 0.62, u_{11} = 2.62, u_{12} = 5.12, u_{13} = 8.12, u_{14} = 11.62, u_{15} = 15.62$ .

Аналогично можно рассмотреть второй случай в (23), картина склейки двух течений отображена на рис.2

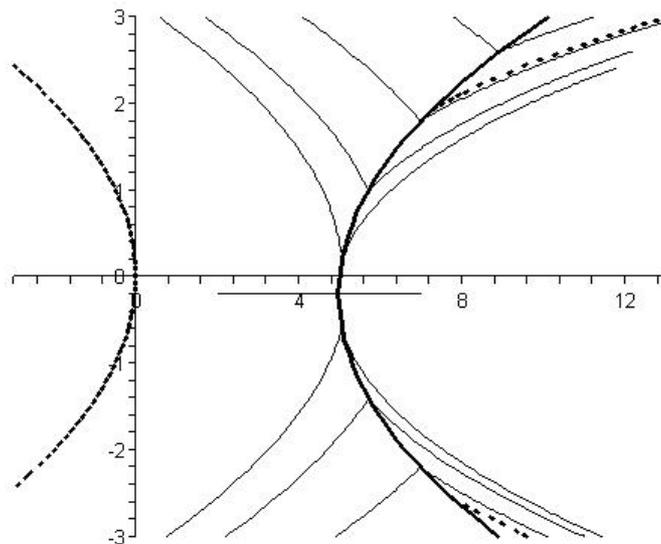


Рис. 2

Изолинии слева от УВ имеют вид (снизу вверх):  $u_1 = 3, u_2 = 2.2, u_3 = 1.4, u_4 = 0.6, u_5 = 0.2, u_6 = 1.0, u_7 = 1.8, u_8 = 2.6$ . Изолиний справа от УВ:  $u_1 = 2.28, u_2 = -1.4, u_3 = -3.8, u_4 = -4.92, u_5 = -4.76$ ,



$u_6 = -3.32$ ,  $u_7 = -0.6$ ,  $u_8 = 3.4$ . Эти два случая являются обобщением аналогичных результатов Рыжова [9] при рассмотрении вопроса склейки течения Мейера с симметричным течением Т.-Т.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены автомодельные решения, соответствующие основным (имеющим определенный газодинамический смысл) показателям автомодельности. Установлена связь автомодельных решений с полиномо-параметрическими и осуществлен переход к компонентам скорости  $u$ ,  $v$ . Класс полиномо-параметрических решений является некоторым обобщением автомодельных, поскольку содержит одновременно несколько автомодельных и поэтому весьма интересен с точки зрения дальнейшего изучения (так как позволяет исследовать несколько различных задач с помощью одного решения). Реализована технология нахождения всех коэффициентов в полиномо-параметрическом представлении при выбранном решении ключевого уравнения. Изучены сопловые течения с параболической УВ, переводящей симметричное течения Мейера в несимметричное относительно продольной оси канала.

## Библиографический список

1. Фалькович С.В., Чернов И.А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. С. 280–284.
2. Немцова Е.О. Параметрический метод в изучении трансзвуковых уравнений / Саратов, 2005. Деп. в ВИНИТИ 26.07.05 № 1089-B2005. 18 с.
3. Немцова Е.О. Параметрические решения трансзвукового уравнения и их связь с автомодельными // Материалы Четвертой молодежной науч. школы-конф.: Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2005. Т. 31. С. 110–113.
4. Чернов И.А. Полиномо-параметрические решения трансзвуковых уравнений // Аэродинамика. Нелинейные проблемы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 91–102.
5. Севостьянов Г.Д. Структура элементарных околозвуковых решений // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 109–117.
6. Заславский Б.И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды // Прикладная математика и техническая физика. 1964. № 4. С. 57–65.
7. Заславский Б.И., Клепикова Н.А. Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа // Прикладная математика и техническая физика. 1965. № 6. С. 65–68.
8. Кузнецова Е.О. Модель нерасчетного режима течения в сопле Лавала // Материалы Пятой молодежной науч. школы-конф.: Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2006. Т. 34. С. 136–139.
9. Рыжов О.С. О работе сопел Лавала в нерасчетных режимах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, №4.

УДК 517.958:536.2

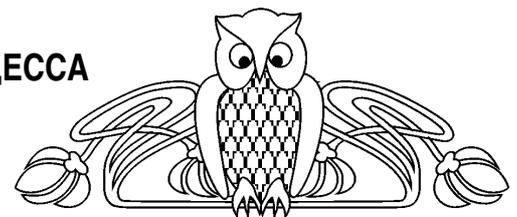
## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕРМОРАСЩЕПЛЕНИЯ ГРАФИТА

В.Ю. Ольшанский\*, К.Г. Бахтин, В.Ю. Михайлов, Ю.Н. Нагар, А.В. Серебряков

\*Саратовский государственный университет, кафедра вычислительного эксперимента в механике, Энгельский технологический институт (филиал Саратовского государственного технического университета), кафедра высшей математики и механики  
E-mail: olsh@techn.sstu.ru

Рассмотрена математическая модель процесса получения изделий из порошка окисленного графита путем терморасширения при нагреве в металлической форме. Выявленное в численном эксперименте выравнивание температур к заключительной стадии процесса позволяет построить асимптотическое разложение решения в одномерном случае. Поле температур и скоростей в двумерном осесимметричном случае определяется численно методом сквозного счета.

Изделия из терморасширенного графита (ТРГ) широко используются в технике в силу своих теплоизолирующих и огнезащитных свойств и устойчивости к агрессивным средам. Одним из перспективных способов получения изделий заданной формы и пористости является терморасширение окисленного графита (ОГ) в газопроницаемой форме [1] — так называемое химическое прессование.



### Mathematical Simulating Thermal Exfoliation of Graphite

V.Y. Olshansky, K.G. Bakhtin, V.Y. Mikhailov, Y.N. Nagar, A.V. Serebrjakov

There has been examined a mathematical model of item obtaining from the oxidized graphite powder by means of exfoliating at heating in a metal mould. Temperature equaling discovered in a numerical experiment by the ultimate stage of the process allows to build asymptotic expansion of the solution in one-dimensional case. Temperature- and speeds fields in two-dimensional axisymmetric case are numerically defined by the shock-capturing method.